

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN PIERRE BOURGUIGNON

Hommage à Edmond Combet

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 46 (1991), p. 15-18

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__15_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Hommage à Edmond Combet

par

Jean Pierre BOURGUIGNON
Professeur à l'Ecole Polytechnique

Madame, Monsieur, chers collègues,

C'est à vous témoigner le respect que j'éprouve pour l'œuvre d'Edmond Combet que je voudrais m'attacher ici. Les circonstances ne se prêtent évidemment pas à un exposé technique qui nécessiterait des incursions dans des domaines que les mathématiciens avaient pris la fâcheuse habitude d'étiqueter comme disjoints. L'itinéraire que j'ai choisi de vous faire suivre est étalonné par celles de mes rencontres avec Edmond Combet qui m'ont le plus marqué, et je sollicite votre indulgence pour cette approche un peu personnelle.

C'est lors d'un colloque d'Analyse Globale organisé en 1970 par le département de Lyon que l'apprenti géomètre riemannien que j'étais alors a pu parler avec l'auteur de *"Paramétrix et invariants sur les variétés compactes"*. Je venais de suivre un cours de troisième cycle professé par Marcel Berger sur l'utilisation des techniques de l'Analyse pour mieux pénétrer le monde des objets géométriques. Ce dernier avait appelé mon attention sur l'article d'Edmond Combet qui m'avait de suite séduit par la simplicité de son approche. Bien qu'ayant été aguerri aux manipulations analytiques par les cours et les conseils de Gustave Choquet, j'étais intimidé par la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Pouvoir disposer de preuves du Théorème de l'Indice d'Atiyah-Singer pour les invariants géométriques fondamentaux que sont la caractéristique d'Euler, la signature et le $\hat{A}$ -genre dans un cadre géométrique comme le faisait Edmond Combet était pour moi plus rassurant. Comme on le sait aujourd'hui la méthode dite de "l'équation de la chaleur" qu'il employait dans cet article a connu depuis lors des succès extraordinaires, et le rôle

que ces invariants jouent dans notre compréhension présente du Théorème de l'Indice est tout simplement devenu central. Il est, je crois, opportun de rappeler ici qu'en ce temps pourtant si proche, il était presque nécessaire de s'excuser de s'intéresser à la Géométrie Différentielle. C'était en quelque sorte reconnaître son impuissance à maîtriser des mathématiques plus "substantielles". Pour clore mon évocation de notre première rencontre, je voudrais signaler que ce colloque de 1970 était placé sous le signe de l'utilisation de l'Analyse Globale pour traiter des questions géométriques ou issues de la Physique Théorique, au moment où était grande la tentation d'entraîner cette géométrie de dimension infinie nouvelle née sur la pente de la plus grande généralité. L'expérience nous a depuis enseigné que cette tentation d'imiter les voisins n'était pas le bon chemin à suivre et qu'au contraire ce lieu de rencontres de trois disciplines (Géométrie Différentielle, Analyse, Physique Mathématique) allait être le creuset de nombre d'idées-force des Mathématiques d'aujourd'hui.

Je ne peux manquer d'évoquer brièvement maintenant l'occasion qui a été donnée à l'ex-Lyonnais que je suis en 1971 par l'équipe de Géométrie de Lyon et Edmond Combet en particulier de voir ses premiers travaux mathématiques présentés dans un colloque national. L'insistance à faire s'exprimer les chercheurs débutants est une vertu que nous ne cultivons peut-être pas suffisamment, mais qui était naturelle pour Edmond Combet.

Dans les années 70, j'eus de nombreuses occasions de le rencontrer. L'une d'entre elles me reste particulièrement en mémoire : comme je m'étais plongé (pour préparer un exposé de seconde thèse) dans l'étude des opérateurs intégraux de Fourier, j'ai profité de ses remarques sur l'interprétation géométrique qu'il est possible de donner de constantes apparaissant dans certaines estimations fondamentales. J'écoutais donc "à distance" les exposés au séminaire de Géométrie de Lyon qu'il avait donnés cette année-là sur ce thème. Il est d'ailleurs saisissant d'apprécier (après coup) la justesse du choix des thèmes de ses exposés à ce même séminaire tout au long des années 70.

Mon évolution personnelle devait me rapprocher dans les années 80 d'une des préoccupations constantes d'Edmond Combet, à savoir donner un fondement mathématique rigoureux à un certain nombre de techniques d'utilisation fréquente en Physique Théorique. Là encore, il est frappant de voir combien le choix des sujets qu'il a abordés ne doit rien à la mode. L'ouvrage *"Intégrales exponentielles"* paru chez Springer en 1983 illustre bien sa démarche. Pour comprendre le comportement asymptotique à haute fréquence d'intégrales exponentielles, il est nécessaire de faire appel à des théories mathématiques diverses (théorie des singularités, théorie des variétés lagrangiennes, etc.)

qui ne sont pas a priori présentes dans le problème. Il est facile de voir que seuls les voisinages des points où la phase s'annule comptent. Le comportement de la phase près de ces singularités contient en fait la clef des exposants caractéristiques apparaissant dans le développement asymptotique de ces intégrales. Ces objets interviennent dans de nombreuses questions de Physique fondamentale liées aux phénomènes critiques comme les changements de phase ou de Mathématiques (Calcul des Variations, systèmes hamiltoniens, etc.). L'apport d'Edmond Combet dans ces questions est un travail minutieux de mise en correspondance de résultats souvent développés pour eux-mêmes ou dans un cadre plus restreint mais laissant de côté de nombreuses applications, à la Physique notamment.

La préparation du colloque "Elie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui" qui s'est tenu en juin 1984 à Lyon, une des villes où Elie Cartan avait enseigné, nous a donné de multiples occasions de contact puisque nous nous sommes retrouvés tous deux secrétaires de cette réunion internationale. Avec la modestie et le dévouement que nous lui avons tous connus, il a mis sur pied, avec l'aide sans faille du département et plus particulièrement de l'équipe de Géométrie toute entière, une organisation exemplaire que les centaines de collègues venus d'un peu partout en France et de beaucoup plus loin ont su apprécier à sa juste valeur. Je ne citerai à ce propos que deux témoignages de collègues étrangers parmi les plus éminents. Je me souviens de la satisfaction de Shing Shen Chern à la fin de cette semaine bien remplie de voir un projet qui lui tenait tant à cœur s'être déroulé aussi parfaitement. C'est aussi grâce aux efforts opiniâtres déployés par Edmond Combet et Jean Braconnier qu'Israel Moïssevitch Gelfand a pu rencontrer à cette occasion de nombreux amis mathématiciens, notamment retrouver quelques-uns de ses élèves qui avaient quitté leur pays (cette tâche serait heureusement plus simple aujourd'hui). Je peux témoigner de la gratitude que notre collègue éprouvait pour cette visite en France.

Pour revenir à des considérations plus directement mathématiques, je voudrais évoquer pour terminer les discussions que j'ai eues avec Edmond Combet à propos d'une des coqueluches des Mathématiques et de la Physique d'aujourd'hui : la supersymétrie. Toujours hypothétique d'un point de vue strictement expérimental, ce concept reste encore mystérieux en Mathématiques. Si son cadre algébrique a été en grande partie élucidé, ses aspects plus géométriques, et à un degré plus élevé encore analytiques, restent à un stade insuffisant de développement. Cette question est en fait inséparable d'une appréhension du contenu géométrique de la Mécanique Quantique par les mathématiciens, tâche à laquelle se sont (enfin!) attelés certains collègues comme Alain Connes pour n'en citer qu'un. Pour stimuler l'interaction indispensable sur ce thème entre mathématiciens et physiciens, il était nécessaire de créer des occasions de rencontre.

Jean Michel Bismut et moi nous sommes essayés à cet exercice en créant un séminaire ayant ce but, mais Edmond Combet nous avait précédés dans cette voie comme en témoigne le travail très systématique sur les articles d'Edward Witten qu'il a présentés au séminaire de Géométrie de Lyon. Un de nos regrets a été de ne pas avoir eu Edmond Combet parmi les hôtes de notre séminaire pour exposer son point de vue sur les formules de localisation. Dans sa dernière Note aux Compte-Rendus de l'Académie des Sciences et dans l'article "*Physique Quantique et formules de localisation*", il développe en effet une méthode "beaucoup plus élémentaire" (ce sont ses propres termes) pour obtenir les formules de localisation d'invariants topologiques des variétés différentielles. Pour traiter rigoureusement l'approche par "intégration fonctionnelle" d'Edward Witten, il est nécessaire de faire une escapade dans le calcul stochastique (en suivant par exemple Jean Michel Bismut). L'aspect supersymétrique a été à ce jour traité par de nombreux auteurs sans que sa structure mathématique n'ait, à mon avis, pris sa forme définitive. Sur ce point, Edmond Combet apportait sa contribution en démystifiant des développements quelquefois complaisamment ésotériques.

Le souci de la démonstration simple allié à une grande constance d'intérêts mathématiques hors des modes (en fait, comme j'espère l'avoir montré, les précédant) me semblent être les traits caractéristiques de l'œuvre d'Edmond Combet. Il a su mettre en œuvre au service de son métier sa connaissance profonde de la Physique fondamentale pour y puiser à la fois des problèmes d'intérêt durable et des techniques que le mathématicien ne peut accepter sans les modifier substantiellement pour satisfaire son exigence positive de rigueur qui est aussi sa raison d'être.

Au-delà même de ses contributions proprement mathématiques reste pour ceux qui ont eu le privilège de le connaître le souvenir d'un homme toujours chaleureux et attentif, qualités fondamentales que la pression d'une efficacité mal comprise a trop tendance à nous faire négliger. Pour cela aussi, sa mémoire peut nous servir d'exemple.

Je vous remercie de votre attention.