

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

A. UNTERBERGER

## **Quantification relativiste**

*Mémoires de la S. M. F. 2<sup>e</sup> série*, tome 44-45 (1991)

<[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1991\\_2\\_44-45\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_44-45__1_0)>

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 44/45  
Supplément au Bulletin de la S.M.F.  
Tome 119 , 1991, fascicule 1

## Quantification relativiste

par A.Unterberger

### RÉSUMÉ

Ce mémoire établit les principales propriétés du calcul de Klein-Gordon et en donne une application à l'oscillateur de Mathieu : la relation de ce calcul à la mécanique relativiste est analogue à celle du calcul de Weyl à la mécanique classique.

### ABSTRACT

In this paper, the basic properties of the Klein-Gordon symbolic calculus of operators are given, as well as an application to the Mathieu oscillator : the relationship of this calculus to relativistic mechanics is the same as that of the Weyl calculus to classical mechanics.

---

Texte reçu le 15 mars 1990, révisé le 11 septembre 1990.

Département de Mathématiques, U.E.R. des Sciences de Reims,  
Moulin de la Housse, BP 347, 51062 Reims Cedex, France

## TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction	3
1. L'espace-temps et l'espace des observateurs	19
2. Le calcul symbolique de Klein-Gordon	25
3. Une digression sur le calcul de Weyl	37
4. Etats cohérents et calcul de Wick relativistes	45
5. Opérateurs invariants sur l'hyperboloïde de masse	51
6. Lien entre les symboles de Klein-Gordon et de Wick relativiste	57
7. Symbole de Klein-Gordon, symbole standard et autres	63
8. Inégalités géométriques et classes de symboles	69
9. La continuité des opérateurs de Klein-Gordon	87
10. Caractérisation des opérateurs et composition	95
11. La composition des symboles	105
12. Symboles des générateurs infinitésimaux de la représentation de Bargmann-Wigner	123
13. L'algèbre enveloppante	139
14. Développements asymptotiques	149
15. Opérateur d'Euler relativiste, groupe de De Sitter, oscillateur de Mathieu	169
16. Contraction de l'analyse de Klein-Gordon vers celle de Weyl	197
Appendice	208
Bibliographie	209
Index des notations	213
Index	215

## INTRODUCTION

On peut s'intéresser à la quantification pour des raisons très différentes. Si la mécanique quantique des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté a cessé, depuis longtemps, d'occuper une position centrale parmi les questions que pose la physique théorique, cela ne signifie pas, pour autant, que les idées qui en sont issues aient cessé d'être une source d'inspiration pour les mathématiques. L'analyse harmonique fournit une deuxième raison de s'y intéresser, soit que la quantification y soit regardée comme instrument fondamental de la théorie des représentations, soit, plus simplement, que l'on y voie une méthode de découverte de relations, ou de symétries, nouvelles et parfois surprenantes. La liste de ces raisons n'est pas close si l'on y ajoute que l'analyse pseudodifférentielle, qui aurait pu - mais ne l'a, de fait, pas été - être issue directement des relations d'Heisenberg, ne peut que gagner à une vision plus générale de ses concepts. Ces trois points de vue ont guidé, à des degrés divers, notre recherche dans ce domaine.

D'après le témoignage des physiciens les plus dignes de confiance, la physique doit être relativiste. Cela signifie, pour commencer, que le groupe de Poincaré et les objets qui s'y rattachent (équation des ondes...) sont un meilleur outil que le groupe de Galilée, ou celui d'Heisenberg, pour une description acceptable de la réalité. Bien entendu, un mathématicien est libre d'attacher son intérêt aux structures qu'il tient, de son propre jugement, comme les plus intéressantes, en premier lieu les plus générales ou les plus simples : à n'en pas douter, la mécanique relativiste est plus compliquée que la mécanique newtonienne, et il en sera de même pour ce qui concerne l'analyse développée ici par comparaison à son analogue non-relativiste. Notre ambition est, malgré cela, mathématique avant



tout : nous pensons qu'une partie des mathématiques peut être relativiste, et qu'il est intéressant d'explorer le nouveau domaine ainsi conçu.

Le présent travail développe de façon assez approfondie l'analogie relativiste du calcul symbolique des opérateurs : le calcul de Klein-Gordon. Il introduit aussi une idée qui nous paraît également prometteuse, à savoir qu'une partie substantielle de la théorie des fonctions spéciales peut être généralisée sous un angle relativiste.

Défendons-nous d'avoir prétendu contribuer à une grandiose synthèse de la mécanique quantique et de la relativité : nous savons bien que les véritables problèmes posés par une telle unification exigent (cf. Landau-Lifschitz [19], p.15) "des concepts physiques fondamentalement nouveaux" plutôt qu'un nouvel appareil mathématique ; encore n'est-il pas sûr qu'une telle quête soit bien d'actualité. Cependant, certains des obstacles souvent présentés contre l'existence d'une mécanique quantique relativiste analogue à la mécanique quantique habituelle reposent sur une erreur que, croyons-nous, ce travail peut aider à dissiper : celle-ci consiste à voir dans la quantification relativiste une synthèse de la mécanique classique relativiste et des relations d'incertitude, en d'autres termes une union contre nature des groupes de Poincaré et d'Heisenberg. Il y a plus de soixante ans que l'équivalence - en vue de fonder la mécanique quantique - des points de vue d'Heisenberg et de Schrödinger a été établie mais, par un accident fâcheux, le premier a fini par être souvent confondu avec les relations du même nom ; en réalité, les relations de commutation dans une algèbre de Lie quelconque sont la bonne généralisation du premier point de vue, et les équations de champ quelconques la bonne généralisation du second. A ce titre, on peut fonder un calcul symbolique des opérateurs (une théorie des observables, diraient les physiciens) sur le groupe de Poincaré, sans nul besoin de faire intervenir celui d'Heisenberg.

A l'exception de la remarque qui précède, nous n'avons pas la prétention d'avoir contribué en quoi que ce soit à la physique. En revanche, nous avons emprunté à cette dernière les concepts fondamentaux que sont l'espace-temps, l'équation de Klein-Gordon et la représentation de Bargmann-Wigner. Ils sont tous présentés, à la façon axiomatique traditionnelle des mathématiciens, dans les toutes premières pages : après cela, il ne s'agira plus que de mathématiques.

## ÉQUATIONS d'ÉVOLUTION ET RÈGLES DE QUANTIFICATION

Le temps ne joue aucun rôle dans la définition de l'analyse pseudo-différentielle de Weyl sur  $\mathbb{R}^n$  : il ne s'agit pas d'autre chose que de donner un sens aux "fonctions" des opérateurs (ne commutant pas entre eux)  $q_j = x_j$  et  $p_j = (2i\pi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}$ . On pourrait proposer un programme analogue pour la définition du calcul de Klein-Gordon, se bornant à dire qu'il faut, dans ce qui précède, remplacer  $q_j$  par l'opérateur (non différentiel)  $x_j(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2 c^2})^{\frac{1}{2}}$  : on voit de suite que les relations de commutation diffèrent si  $c < \infty$  de celles d'Heisenberg, faisant intervenir au lieu de l'opérateur identique l'opérateur  $\langle D \rangle = (1 - \frac{\Delta}{4\pi^2 c^2})^{\frac{1}{2}}$  ; également, la considération des opérateurs "de rotation"  $R_{jk} = (2i\pi)^{-1}(x_j \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_j})$  est inévitable.

Qu'il s'agisse du calcul de Weyl ou du calcul de Klein-Gordon, ce qui précède est trop vague : il faut préciser ce que les opérateurs  $q_j$  et  $p_j$  ont de particulier à l'égard de ce calcul. Les opérateurs agissant sur des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^n$  ont des symboles (ce sont, pour les physiciens, les observables classiques) qui sont des fonctions sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Il n'existe, c'est bien connu, aucun calcul général des opérateurs possédant la propriété que le symbole de tout commutateur  $AB - BA$  ne soit autre que le crochet de Poisson des symboles respectifs des opérateurs  $A$  et  $B$ . En revanche, le calcul de Klein-Gordon, comme celui de Weyl, est non pas caractérisé, mais très fortement contraint par le fait que la propriété que nous venons de mentionner est exacte toutes les fois que l'opérateur  $A$  (ou  $B$ , cela revient au même) coïncide avec l'un des opérateurs  $q_j$  et  $p_j$  : il s'agit là, sous sa forme infinitésimale, d'un fait de covariance.

Dans le cas relativiste, l'opérateur  $q_j$  peut paraître bizarre : il ne l'est plus si, au lieu des fonctions  $u$  sur  $\mathbb{R}^n$ , on fixe son attention sur les fonctions  $\tilde{u} = \tilde{u}(t, \vec{x})$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  qui sont solutions de l'équation de Klein-Gordon

$$(0.1) \quad (2i\pi)^{-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = c^2 (1 - \frac{\Delta}{4\pi^2 c^2})^{\frac{1}{2}} \tilde{u}$$

et que, grâce à cette équation d'évolution, on identifie une telle fonction à sa restriction à  $t = 0$  ; en effet l'opérateur  $q_j$  s'identifie alors à l'opérateur différentiel

$$(0.2) \quad q_j = (2i\pi)^{-1} [c^{-2} x_j \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x_j}] ,$$

lequel, on le voit facilement, opère sur les solutions de (0.1). L'importance de cet opérateur vient de ce que c'est l'un des générateurs infinitésimaux de la représentation de Bargmann-Wigner dont il sera question plus loin, à savoir celui qui correspond au groupe de transformations "spéciales" de Lorentz dont la formule se trouve dans tous les ouvrages élémentaires sur la relativité restreinte. L'essentiel de la construction du calcul de Klein-Gordon tient dans l'utilisation de l'équation de champ (0.1) pour prolonger les fonctions sur l'espace en fonctions particulières sur l'espace-temps. On pourrait, disons-le tout de suite, se servir au lieu de (0.1) de l'équation de Schrödinger libre pour effectuer ce prolongement : ce n'est pas, alors, le calcul symbolique de Klein-Gordon que l'on obtiendrait, mais le calcul de Weyl.

L'une des ambitions de la méthode de quantification proposée ici est du reste de permettre un calcul des observables liées aux particules (libres, ou bien dans des champs possédant de hauts degrés de symétrie) d'une espèce particulière, caractérisée par l'équation de champ associée. C'est ainsi que l'on peut concevoir un calcul de Schrödinger (c'est exactement celui de Weyl), de Klein-Gordon, de Dirac... Ici, il s'agit de particules relativistes massives sans spin : d'après Feynman ([9], p.37), les mésons  $\pi$  sont de tels objets. L'équation (0.1) se distingue de l'équation  $\square \tilde{u} = -4\pi^2 c^2 \tilde{u}$ , aussi appelée équation de Klein-Gordon, en ce que seules les énergies positives sont considérées : sinon, il faut introduire également l'antiparticule, mais on s'en passera à une exception peu importante près (dans la section 15). Les analogies entre la relation du calcul de Klein-Gordon à l'équation du même nom d'une part, la relation du calcul de Weyl à l'équation de Schrödinger d'autre part, ne sont à aucun endroit mises en défaut.

Un autre fait capital est que, lorsque  $c$  tend vers l'infini, non seulement l'opérateur  $q_j$  tend vers son analogue non-relativiste, mais de plus toute l'analyse de Klein-Gordon se contracte vers celle de Weyl. L'importance du fait analogue relatif à la mécanique classique a été maintes fois souligné. Par ailleurs, cette observation permet quelques vérifications spectaculaires : en effet, il est plaisant de voir que certaines formules, assez compliquées, de l'analyse

de Klein-Gordon, perdent tout leur exotisme à la limite non-relativiste. Ces considérations sont reléguées à la section 16. Nous avons choisi, pour des raisons essentiellement typographiques, de fixer dans le reste du volume des unités de vitesse et d'action telles que  $c = h = 1$ , et choisi également la masse de la particule observée comme unité.

Le calcul symbolique de Klein-Gordon a été initialement introduit dans [37], comme sous-produit de l'analyse sur le cône de lumière solide [36]: cette dernière était elle-même le fruit d'une assez longue évolution, issue d'une proposition en vue d'une théorie générale de la quantification des espaces hermitiens symétriques [33]. Bien des efforts, et près de trois ans, ont été nécessaires pour passer d'une définition du calcul de Klein-Gordon à la théorie utilisable présentée ici. La construction même du calcul est, pensons-nous, plus attrayante telle qu'elle est exposée ici : en voici les grandes lignes.

#### CONSTRUCTION DU CALCUL DE KLEIN-GORDON

Partons d'une définition axiomatique de l'espace-temps de Minkowski  $\mathbb{M}_{n+1}$  : c'est un espace affine de dimension  $n+1$  muni d'un  $ds^2$  à un carré positif et  $n$  carrés négatifs. Les automorphismes de cette structure constituent le groupe de Poincaré  $\mathcal{P}$ . Un observateur  $\omega$  est la structure additionnelle qui doue  $\mathbb{M}_{n+1}$  d'une origine, et le sépare en la somme directe de deux sous-espaces  $T$  et  $E$  de dimensions 1 et  $n$  respectivement, chacun étant muni en outre d'une orientation, de telle sorte que  $T$  et  $E$  soient orthogonaux, et que  $ds^2$  soit positif sur  $T$ , et négatif sur  $E$ . Pour des raisons d'orientation, il y a quatre sortes d'observateurs : on n'en retient qu'une. Consultante le chapitre CPT de n'importe quel livre sur la théorie des champs (par exemple Bogolubov, Logunov et Todorov [3]), l'observateur  $\omega$  possède une conception de la symétrie spatiale  $P$  : celle-ci lui est cependant personnelle et sera donc notée  $P_\omega$  ; deux observateurs seront déclarés équivalents si leurs opérateurs de symétrie spatiale coïncident.

Fixons un observateur de référence, ce qui permet d'identifier l'espace-temps à  $\mathbb{R}^{n+1}$  : on note, conformément à un usage en physique,  $x = (t, \vec{x})$  ou  $x = (x_0, \vec{x})$  les points de l'espace-temps ; cette convention est commode pour le lecteur, à défaut de l'être pour le

typographe. Le dual de  $\mathbb{R}^{n+1}$  est l'espace des covecteurs d'énergie-impulsion  $p = (p_0, \vec{p})$ . On s'intéresse à une particule libre de masse 1, ce qui revient à dire, au sens de la mécanique classique (relativiste) que  $p \in \mathcal{M}$ , feuillet d'hyperboloïde d'équation  $p_0 = (1 + |\vec{p}|^2)^{\frac{1}{2}}$ , encore appelé (abusivement) hyperboloïde de masse. L'application  $v \mapsto (1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}}(1, -v)$  identifie la boule des vitesses ( $|v| < c = 1$ ) à  $\mathcal{M}$ . La ligne d'univers d'une particule de masse 1 et de vitesse  $v$  est une droite dans l'espace-temps, de vecteur directeur  $(1, v)$  ou encore  $(p_0, -\vec{p})$ . L'espace des états, au sens de la mécanique classique, d'une particule libre de masse 1, est l'espace  $\Omega$  constitué des couples  $(x; p) = (t, \vec{x}; p)$  tels que  $p \in \mathcal{M}$ . Cet espace est pour nous l'espace de phase. Il est élémentaire, mais au fond tout à fait remarquable, qu'il s'identifie de façon naturelle à l'espace des observateurs dont il a été question plus haut. Sous cette identification, les observateurs attachés à  $(x; p)$  et  $(y; q)$  sont équivalents si et seulement si  $q = p$  et que, de plus,  $x$  et  $y$  appartiennent à la même ligne d'univers de vecteur directeur  $(p_0, -\vec{p})$ . Par définition, les symboles, ou encore symboles admissibles, sont les fonctions sur  $\Omega$  qui prennent les mêmes valeurs en deux points équivalents : bien que  $\Omega$  soit une variété de dimension  $2n+1$ , les symboles peuvent être identifiés, quoique de façon non canonique, à l'espace des fonctions sur une variété de dimension  $2n$ , par exemple  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  ; il faut résister à l'envie d'effectuer une telle identification chaque fois que l'action du groupe de Lorentz sur les symboles est en jeu, parce que les transformations de Lorentz ne conservent pas l'espace  $\{0\} \times \mathbb{R}^n$  constitué des vecteurs qui sont purement spatiaux du point de vue de l'observateur de référence.

L'application qui à une fonction  $u = u(\vec{x})$  sur  $\mathbb{R}^n$  associe la fonction  $\mathcal{U}u$  sur l'hyperboloïde de masse définie par  $(\mathcal{U}u)(p) = p_0 \hat{u}(\vec{p})$ , où  $\hat{u}$  est la transformée de Fourier de  $u$ , constitue une isométrie de l'espace de Sobolev  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  sur l'espace  $L^2(\mathcal{M}; p_0^{-1} d\vec{p})$  ; l'application  $\mathcal{U}$  fournit en outre une formule commode pour prolonger  $u$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$ , en une fonction  $\tilde{u}$  sur l'espace-temps solution de (0.1). L'espace  $L^2(\mathcal{M}; p_0^{-1} d\vec{p})$  est, classiquement (voir Bogolubov-Logunov-Todorov [3] ou bien Reed-Simon [28]), l'espace à une particule de la théorie du champ libre. Qu'il soit bien clair que, pour le moment tout au moins, nos présentes investigations n'ont rien à voir avec la théorie des champs même si, aux énergies où les effets relativistes sont appréciables, les créations et annihilations de

particules sont, du point de vue de la physique, les aspects les plus intéressants. Le groupe de Lorentz opère de façon naturelle sur l'espace  $L^2(\mathcal{M}; p_0^{-1} d\vec{p})$ , et le groupe des translations purement spatiales opère naturellement sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  : cependant, si l'on veut voir clairement la représentation, due à Wigner et Bargmann, du groupe de Poincaré (orthochrone) sur l'un de ces deux espaces (identifiés au moyen de  $\mathcal{Q}_j$ ), il est préférable de définir celle-ci sur les fonctions définies sur l'espace-temps, au moyen de la formule

$$(0.3) \quad (U(M,a)\tilde{u})(x) = \tilde{u}(M^{-1}(x-a)) :$$

dans cette formule  $(M,a)$  est un élément du groupe de Poincaré, c'est-à-dire, par référence à la décomposition de ce groupe en un produit semi-direct, le couple constitué d'une transformation de Lorentz  $M$  et d'un vecteur  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ . C'est l'une des caractéristiques du calcul de Klein-Gordon que, pour bien voir les actions de groupe, il faut passer dans l'espace-temps, c'est-à-dire prolonger  $u$  en  $\tilde{u}$ , solution de l'équation d'évolution (0.1) : de même, il faut regarder les symboles comme des fonctions sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ , bien que la condition d'admissibilité, traduite par exemple par l'équation différentielle

$$(0.4) \quad p_0 \frac{\partial g}{\partial x_0} = \sum_{j \geq 1} p_j \frac{\partial g}{\partial x_j} ,$$

permette d'identifier un symbole  $g$  à sa restriction à  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ . En revanche, pour comprendre la structure hilbertienne de l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , il faut considérer  $u$  et non  $\tilde{u}$  ; également, les espaces utiles de symboles seront définis par des conditions (des majorations sur les dérivées) portant sur leur restriction à  $t = 0$ . Tout ceci ne présente pas de difficulté, mais nécessite un peu d'entraînement.

La définition fondamentale du calcul de Klein-Gordon est celle de l'opérateur de parité

$$(0.5) \quad \sigma_\omega = U(P_\omega)$$

associé, au moyen de la représentation de Bargmann-Wigner  $U$  définie en (0.3), à la symétrie spatiale  $P_\omega$  attachée à un observateur  $\omega$  : c'est un opérateur à la fois unitaire et autoadjoint sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  et, bien entendu, ce texte en donnera une représentation intégrale plus concrète. Si  $A$  est un opérateur linéaire à trace sur l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ ,

on définit le symbole passif de A comme la fonction g sur l'espace des observateurs telle que  $g(\omega) = 2^n \text{Tr}(A\sigma_\omega)$  pour tout  $\omega$  : c'est une fonction admissible, i.e. vérifiant (0.4). Il existe une deuxième espèce de symbole, le symbole actif f (c'est toujours une fonction admissible) : c'est celle qui permet d'écrire A comme superposition linéaire des opérateurs de parité, sous la forme

$$(0.6) \quad A = 2^n \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}} f(0, \vec{x}; p) \sigma_{(0, \vec{x}; p)} d\vec{x} d\vec{p}.$$

Les deux espèces de symboles sont liées par la relation  $g = \nabla^{-n} f$  avec  $\nabla^\lambda = (1 + (4\pi)^{-2} \square)^{\lambda/2}$  : sur les fonctions admissibles, l'opérateur  $\nabla^\lambda$  est parfaitement défini, malgré les apparences trompeuses. Il serait très facile, et sans intérêt particulier, de modifier le calcul pour n'avoir affaire qu'à une espèce de symbole : la seule chose qui compte (et elle est vérifiée), c'est que les opérateurs  $\nabla^\lambda$  conservent les classes de symboles dont il sera question plus loin ; quant aux puissances entières de  $\nabla$ , elles jouent un rôle envahissant dans le calcul symbolique, qui semble tenir plus à la nature des choses qu'au choix de la formule de correspondance entre symboles et opérateurs. Le formalisme de Klein-Gordon est, bien entendu, covariant à l'égard du groupe de Poincaré, expression qui signifie que l'action géométrique de ce groupe sur les symboles est, en un sens familier, compatible avec la représentation de Bargmann-Wigner.

#### ÉTATS COHÉRENTS.

Voici une situation très fréquente dans l'analyse pseudo-différentielle. On dispose d'un espace de Hilbert H, d'une variété  $\Omega$  et d'un calcul symbolique associant à toute fonction f raisonnable sur  $\Omega$  un opérateur linéaire (en général non borné)  $\text{Op}(f)$  sur H. On a défini par ailleurs un espace riemannien  $\Pi$  et un noyau positif K sur  $\Pi \times \Pi$ , croissant assez rapidement loin de la diagonale. Enfin, on s'est donné une famille d'états cohérents paramétrée par  $\Pi$ , c'est-à-dire une famille  $(\psi_Z)_{Z \in \Pi}$  d'éléments de H. Il est alors très utile, si on le peut, de caractériser, par exemple par des majorations portant sur les dérivées de f, les symboles tels que l'opérateur associé possède la propriété suivante : pour tout  $N > 0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que, quels que soient Z et  $Z' \in \Pi$ , on ait l'inégalité

$$(0.7) \quad |(\text{Op}(f)\psi_Z, \psi_{Z'})| \leq C(K(Z, Z'))^{-N}.$$

Les états cohérents tirent leur nom d'une notion familière aux physiciens, mais ici aucune minimisation d'incertitude n'est requise. Moyennant des conditions suffisantes très simples à élucider, portant à la fois sur la famille des états cohérents et sur le noyau  $K$ , on voit facilement que les opérateurs ainsi caractérisés constituent des algèbres d'opérateurs bornés sur  $H$ . Inaugurée dans [31] dans le cadre du calcul de Weyl, cette méthode d'analyse des opérateurs pseudo-différentiels est particulièrement utile dans les cas où la formule de composition des symboles est trop compliquée, voire encore inconnue (cf. par exemple [36] ou [40]).

La famille d'états cohérents utilisée dans tout ce travail est paramétrée par l'espace  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  : on note  $\varphi_{\vec{y}, q}$  ces fonctions. Elles sont extraites d'une famille plus large  $(\psi_Z)$ , paramétrée par le domaine  $C + i\mathbb{R}^{n+1}$  qui est le tube complexe au-dessus du cône de lumière solide  $C$  : le prolongement  $\tilde{\psi}_Z$  de  $\psi_Z$  en une fonction sur l'espace-temps (défini par l'équation (0.1)) est donné par

$$(0.8) \quad \tilde{\psi}_Z(x) = \int_{\mathcal{M}} e^{-2\pi \langle Z - ix, p \rangle} p_0^{-1} d\vec{p}.$$

Les fonctions  $\psi_Z$  sont permutées entre elles sous l'action du groupe de Poincaré définie par la représentation de Bargmann-Wigner, mais la famille  $(\varphi_{\vec{y}, q})$  des états cohérents n'est pas, et ne saurait être, globalement invariante par l'action du groupe de Poincaré : elle privilégie la classe des observateurs au repos par rapport à l'observateur de référence. D'ailleurs, aucune classe de symboles non triviale définie par des majorations portant sur les dérivées n'est, de façon uniforme, invariante sous l'action du groupe de Poincaré  $\mathcal{P}$ . Cela n'empêche pas le calcul de Klein-Gordon d'être covariant sous l'action de ce groupe ; mais il faut résister à l'idée que tout, dans un calcul relativiste, doit être  $\mathcal{P}$ -invariant d'une façon automatique : en un sens tout à fait analogue, dans le calcul de Weyl, aucune classe de symboles n'est uniformément invariante sous l'action du groupe symplectique, bien qu'il y ait covariance relativement à ce groupe. Signalons que d'autres choix de familles d'états cohérents, issues de la famille  $(\psi_Z)$  par un autre processus de sélection, auraient conduit à une caractérisation du genre (0.7) avec d'autres classes de symboles : mais le choix fait ici répond bien à notre propos, puisqu'en particulier les états cohérents choisis



deviennent, lorsque  $c$  tend vers l'infini, les états cohérents du type gaussien au moyen desquels on peut caractériser la famille d'opérateurs pseudo-différentiels au sens classique la plus simple, notée d'habitude  $S_{0,0}^0$ .

En liaison avec le calcul de Weyl, il existe une fonction que l'on peut associer à un opérateur, et qui est beaucoup moins digne de considération que le symbole de Weyl : c'est le symbole normal, ou symbole de Wick, bien connu des physiciens, et dont la définition la plus naturelle repose sur les états cohérents de type gaussien dont il a été question plus haut. Le symbole de Wick est la version du symbole de Weyl adoucie au moyen de l'opérateur  $\exp \frac{\Delta}{8\pi}$ , où  $\Delta$  est le laplacien de l'espace de phase. Comme le calcul (ou ordre) normal-antinormal a malgré tout un intérêt en théorie des champs, nous avons explicité le lien entre le symbole de Klein-Gordon d'un opérateur et son symbole de Wick relativiste, entendant par là la notion analogue basée sur la famille d'états cohérents  $(\varphi_{\vec{y},q})$ .

#### LE CALCUL SYMBOLIQUE DES OPÉRATEURS

Le noyau  $K(\vec{y},q;\vec{y}',q')$  qui intervient dans (0.7) est le produit de deux facteurs. Le premier est  $q_0 q'_0 \langle \vec{q}, \vec{q}' \rangle$  : si  $\omega$  et  $\omega'$  sont les observateurs  $(0, \vec{y}; q)$  et  $(0, \vec{y}'; q') \in \Omega$ , cela s'écrit aussi  $(1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}}$  si  $v$  est la vélocité de  $\omega'$  relativement à  $\omega$ . Quant au deuxième facteur, c'est  $1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\|_q$ , expression dans laquelle la norme  $\|\cdot\|_q$  est duale de celle qui tient compte de la contraction de Lorentz liée à la transition de  $\omega$  à l'observateur de référence.

Pour définir une classe de symboles, il faut commencer par définir un poids  $m$  : c'est une fonction  $> 0$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  telle que  $(m(\vec{y},q))^{-1} m(\vec{y}',q')$  soit majoré par une puissance de  $K(\vec{y},q;\vec{y}',q')$ . Les symboles de poids  $m$  sont alors les fonctions  $g$  admissibles sur  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ , identifiées à leur restriction à  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , qui sont majorées par  $Cm$  et gardent cette propriété après qu'on leur ait appliqué n'importe quel produit des opérateurs différentiels sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  choisis dans une certaine liste. Cette liste est caractéristique, dans une large mesure, des types de problèmes que l'analyse ainsi développée est susceptible de résoudre. Pour la classe de symboles de Klein-Gordon étudiée dans ce volume, les opérateurs applicables aux symboles au sens que l'on vient de définir sont les opé-

rateurs

$$e_j = p_0^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad e_{jk} = p_0^{-1} (p_j \frac{\partial}{\partial x_k} - p_k \frac{\partial}{\partial x_j})$$

et

$$\varepsilon_j = \frac{\partial}{\partial p_j} \quad , \quad \varepsilon = \sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j} .$$

Les symboles de poids  $m = 1$  possèdent la propriété caractéristique (0.7), dont il existe une généralisation permettant la considération de poids quelconques : il s'agit de la partie la plus technique de ce travail mais, comme on l'a dit plus haut, elle permet d'établir aussitôt certains des faits essentiels relatifs au calcul symbolique. Lorsque  $n = 1$ , il n'y a pas d'opérateur  $e_{jk}$ , et le lecteur pourra noter que la classe de symboles étudiée est celle habituellement notée  $S_{1,1}$  : elle est bien adaptée au calcul de Klein-Gordon en une dimension, à défaut de l'être au calcul de Weyl.

La formule de composition des symboles de l'analyse de Klein-Gordon est plus complexe que sa contrepartie non relativiste : cela est dû principalement au fait que deux formules distinctes méritent notre attention. La première est un développement asymptotique dont l'aspect, en dehors de certains caractères manifestement relativistes, n'est pas trop exotique par rapport au développement analogue du calcul de Weyl : si l'on est pressé de jeter un coup d'oeil à cette formule, on la trouvera dans le lemme 14.6 dans le cas de deux symboles polynomiaux relativement aux variables spatio-temporelles ; mais des hypothèses d'une nature peu surprenante (que l'application des opérateurs  $e_j$  ou  $e_{jk}$  non seulement ne fasse rien perdre, mais encore fasse gagner des facteurs supplémentaires) permettent (théorème 14.11) de donner à la formule un sens asymptotique correct pour des symboles généraux. Il s'agit là, tout lecteur au courant de l'analyse pseudo-différentielle l'aura reconnu, du fait central qui justifie l'existence d'un calcul symbolique.

Un exemple très simple montrera cependant en quoi la formule que nous venons de discuter n'est pas entièrement satisfaisante. Considérons le composé  $p_j \# g$  de deux symboles de Klein-Gordon dont le premier est le symbole de l'opérateur  $(2i\pi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}$ .

On obtient le développement asymptotique

$$p_j \# g \sim (4i\pi)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_j} + p_j \left[ g + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} (4\pi)^{-2k} \frac{1.3 \dots (2k-3)}{2^k k!} \square^k g \right]$$

qui fait intervenir une série ayant une infinité de termes. Cela peut paraître fâcheux, puisque dans le calcul de Weyl, au contraire, la composition de deux symboles dont l'un est polynomial en  $(x, \xi)$  (on dirait  $(\vec{x}, \vec{p})$  avec les notations adoptées ici) ne fait jamais intervenir qu'un nombre fini de termes. En réalité, la formule ci-haut peut s'écrire sous la forme exacte

$$(0.9) \quad p_j \# g = (4i\pi)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_j} + p_j \nabla g$$

dans laquelle il n'y a que deux termes. Les sections 12 et 13 sont consacrées à l'obtention de formules de ce genre, valables lorsque l'un des facteurs est le symbole d'un élément de l'algèbre enveloppante : celle-ci est l'algèbre d'opérateurs engendrée par les générateurs infinitésimaux  $D_j$ ,  $\langle D \rangle = (1 - (2\pi)^{-2} \sum D_j^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $B_j = x_j \langle D \rangle$  et  $R_{jk} = x_j D_k - x_k D_j$  de la représentation de Bargmann-Wigner.

Dans ces formules exactes, les puissances entières de l'opérateur non local  $\nabla$  apparaissent un peu partout : ce fait est inhérent à l'analyse relativiste des opérateurs, fondée sur la version (0.1) de l'équation de Klein-Gordon, dans laquelle intervient l'opérateur d'énergie  $\langle D \rangle$ , non local lui non plus.

#### L'OSCILLATEUR DE MATHIEU

Les éléments de l'algèbre enveloppante sont les opérateurs les plus dignes d'une étude systématique en ce qu'ils sont naturellement liés à la représentation de Bargmann-Wigner du groupe de Poincaré. Dans le cas de la représentation d'Heisenberg, on sait que les opérateurs dans l'algèbre enveloppante qui sont globalement de degré deux relativement aux générateurs infinitésimaux sont eux-mêmes les générateurs infinitésimaux d'une nouvelle représentation, la représentation métaplectique. Presque rien de tel n'existe dans le cas relativiste mais, soulignons-le, une comparaison serait très injuste : en effet, les opérateurs de rotation  $R_{jk}$  sont des générateurs infinitésimaux de la représentation de Bargmann-Wigner, alors qu'ils sont déjà de degré deux pour celle d'Heisenberg ; aussi, l'opérateur de moment cinétique total  $\sum R_{jk}^2$  est de degré deux dans un cas mais de

degré quatre dans l'autre...

Dans le seul but d'indiquer, sur un exemple, pourquoi la considération de l'antiparticule est parfois indispensable, nous avons explicité un groupe de transformations unitaires engendré (infiniment-simalement) par l'analogue relativiste  $\Sigma(B_j D_j + D_j B_j)$  de l'opérateur d'Euler.

Mais c'est à la version relativiste de l'oscillateur harmonique que nous avons consacré le plus d'efforts. Il est instructif ici de revenir à des unités quelconques pour rendre bien visible la limite non relativiste. L'oscillateur de la théorie est l'opérateur  $L$  auto-adjoint sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  (la norme sur cet espace dépendant de  $c$ ) défini par

$$(0.10) \quad \pi^{-1}L = \Sigma(B_j^2 + D_j^2) - c^{-2} \Sigma_{j < k} R_{jk}^2 .$$

Il possède la propriété remarquable de commuter avec l'opérateur  $\mathcal{Q}_j : H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathcal{M}; p_0^{-1} d\vec{p})$  si, à l'arrivée, on se sert des coordonnées  $\vec{p}$  pour identifier  $\mathcal{M}$  et  $\mathbb{R}^n$ . Lorsque  $c$  tend vers l'infini, il se contracte vers l'oscillateur harmonique. L'étude de ses propriétés qualitatives (le spectre est discret et les fonctions propres sont dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ) ne présente pas de difficulté : à titre d'exercice, nous avons fait reposer cette étude sur l'utilisation du calcul symbolique de Klein-Gordon, mais on pourrait bien sûr, l'opérateur étant "très" positif, s'en tirer sans cela.

Cependant, l'ambition du calcul de Klein-Gordon n'est pas limitée à l'analyse pseudo-différentielle : dans un but plus proche de l'analyse harmonique, nous avons cherché à obtenir un certain nombre de formules exactes relatives à  $L$ , nous limitant au cas où  $n = 1$  à cause de la complexité des calculs. Alors, l'oscillateur  $L$  devient

$$(0.11) \quad L = (-4\pi)^{-1} \left[ \frac{d^2}{dx^2} - 4\pi^2 x^2 + c^{-2} \left( x \frac{d}{dx} \right)^2 \right] .$$

Ce n'est autre, sous le changement de variable  $x = c \operatorname{sht} t$ , que l'opérateur de Mathieu modifié

$$(-4\pi c^2)^{-1} \left[ \frac{d^2}{dt^2} - 2\pi^2 c^4 \operatorname{ch} 2t + 2\pi^2 c^4 \right] .$$

Les fonctions de Mathieu (modifiées ou non) sont peut-être les

plus mystérieuses des fonctions spéciales, en ce qu'elles ne sont pas liées à la fonction hypergéométrique et que leur lien avec la représentation des groupes est des plus ténus : nous pensons que le présent contexte est susceptible d'offrir un nouveau point de vue sur ce sujet. Soit  $(\psi_k)_{k \geq 0}$  la suite des fonctions propres normalisées de  $L$ . Comprendre complètement l'opérateur  $L$ , c'est être capable d'explicitier sa résolvante, par exemple au moyen du symbole (de Klein-Gordon) de cette dernière ; il revient au même de savoir expliciter, pour chaque  $k$ , la fonction de Wigner active  $W^\#(\psi_k, \psi_k)$ , ce par quoi l'on entend le symbole de Klein-Gordon actif de l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace engendré par  $\psi_k$ . Or, on montre que l'on peut écrire

$$(0.12) \quad W^\#(\psi_k, \psi_k)(0, x_1; p) = h_k(p_0^2 x_1^2 + p_1^2),$$

où  $(h_k)$  est la suite des fonctions propres (convenablement normalisées) d'un nouvel opérateur sur  $(0, \infty)$ , l'oscillateur de Mathieu-Laguerre  $M$ , défini par

$$(0.13) \quad -4\pi M = r \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} - 4\pi^2 r + c^{-2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}.$$

On voit que la limite non relativiste de cet opérateur est l'opérateur de Laguerre.

La preuve des faits qui précèdent est cependant considérablement plus difficile que les faits connus qui en sont la limite quand  $c$  tend vers l'infini : elle repose sur le calcul symbolique (sans restes) dans l'algèbre enveloppante.

#### AVERTISSEMENT

Sans soupçonner le lecteur d'être aussi maladroit que l'auteur de ces Notes, nous croyons utile de le mettre en garde contre deux sources d'erreur qui nous ont fait trébucher plusieurs fois. La première consiste en l'usage immodéré des opérateurs différentiels sur l'espace de phase qui ne conservent pas la relation d'admissibilité (0.4). En effet, s'il est parfaitement licite d'appliquer, par exemple, un opérateur tel que  $\frac{\partial}{\partial p_j}$  à la restriction  $g_0$  d'un symbole  $g$  à l'espace  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , il ne faut pas oublier que la fonction  $\frac{\partial g}{\partial p_j}$  n'est plus déterminée par sa restriction à cet espace ; cependant,

$\frac{\partial g}{\partial p_j}$  coïncide sur  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  avec une fonction admissible, image de  $g$  par un opérateur explicité en (14.1) et qui n'est pas tout à fait  $\frac{\partial}{\partial p_j}$ . Il est très fréquent que l'on se serve de la relation d'admissibilité pour prolonger les symboles.

L'espace de phase est  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ , ce qui signifie que les coordonnées  $(p_0, \vec{p})$  ne sont pas indépendantes. A la seule exception d'une partie de la section 12, où la considération de  $\mathbb{R}^{n+1} \times C$  a facilité les calculs ( $C$  est le cône de lumière solide), on s'interdit absolument de donner un sens à  $\frac{\partial}{\partial p_0}$ . Cependant,  $\frac{\partial p_0}{\partial p_j} = \frac{p_j}{p_0}$ , et c'est ainsi que, par exemple, si l'on a  $\frac{\partial}{\partial x_j} \langle x, p \rangle = p_j$  pour  $j \geq 0$ , on a  $\frac{\partial}{\partial p_j} \langle x, p \rangle = x_j + x_0 \frac{p_j}{p_0}$  pour  $j \geq 1$  : il ne faut pas oublier le deuxième terme malgré l'apparence débonnaire de  $\langle x, p \rangle$ .

L'analyse relativiste est non seulement plus compliquée que l'analyse non relativiste : elle est en outre beaucoup plus difficile à dactylographier. C'est pourquoi je remercie particulièrement Madame Rousseaux de s'être acquittée avec autant de compétence et de gentillesse de ce travail.



# I - L'ESPACE-TEMPS ET L'ESPACE DES OBSERVATEURS.

DÉFINITION 1.1. Soit  $n \geq 1$ . L'espace-temps  $\mathbb{M}_{n+1}$ , ou espace de Minkowski, est un espace affine réel de dimension  $n+1$  muni d'une métrique indéfinie  $ds^2$  à un carré positif et  $n$  carrés négatifs. Le groupe de Poincaré  $\mathcal{P}$  est le groupe des automorphismes de  $\mathbb{M}_{n+1}$  qui préservent le  $ds^2$ ; le groupe de Poincaré propre  $\mathcal{P}_0$  est la composante neutre de  $\mathcal{P}$ .

Rappelons que  $\mathcal{P}$  a quatre composantes connexes. Désignons par  $\tilde{\mathbb{M}}_{n+1}$  l'espace vectoriel des translations de  $\mathbb{M}_{n+1}$  et, pour tout élément  $P$  de  $\mathcal{P}$ , par  $\tilde{P}$  la partie linéaire de  $P$ : l'ensemble des éléments  $\tilde{P}$  (qui sont des automorphismes de  $\tilde{\mathbb{M}}_{n+1}$ ) constitue le groupe de Lorentz  $\mathcal{L}$  dont la composante neutre est le groupe de Lorentz propre  $\mathcal{L}_0$ .

DÉFINITION 1.2. Un observateur non-restreint est un triple  $\omega = (x, T, E)$ , où  $x \in \mathbb{M}_{n+1}$  et  $\{T, E\}$  est un couple de sous-espaces vectoriels de  $\tilde{\mathbb{M}}_{n+1}$ , chacun étant en outre muni d'une orientation, de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées : (i)  $\dim T = 1$ ,  $\dim E = n$ , et  $ds^2$  restreint à  $T$  (resp.  $E$ ) est défini positif (resp. défini négatif) ; (ii)  $T$  et  $E$  sont orthogonaux relativement au  $ds^2$ .

On aura bien sûr compris que  $T$  et  $E$  sont le temps et l'espace envisagés du point de vue de l'observateur non-restreint  $\omega$ . Le groupe de Poincaré opère sur l'ensemble des observateurs non-restreints par la formule

$$(1.1) \quad P.(x, T, E) = (Px, \tilde{P}T, \tilde{P}E) :$$

la définition des structures orientées des sous-espaces  $\tilde{P}T$  et  $\tilde{P}E$  est celle qui rend positives les restrictions de  $\tilde{P}$  à  $T$  et à  $E$ . Il



est clair que cette action est transitive et que le stabilisateur de  $\omega = (x, T, E)$  est canoniquement isomorphe au groupe  $O^+(E)$  des rotations de  $E$ . Les projections  $\text{pr}_T$  et  $\text{pr}_E$  de  $\widetilde{\mathbb{M}}_{n+1}$  sur  $T$  et  $E$  seront toujours entendues relativement à la décomposition  $\widetilde{\mathbb{M}}_{n+1} = T \oplus E$ .

DÉFINITION 1.3. Pour tout  $\omega = (x, T, E)$ , la symétrie spatiale  $P_\omega$  est l'unique transformation affine de  $\mathbb{M}_{n+1}$  telle que : (i)  $P_\omega x = x$  ; (ii)  $\widetilde{P}_\omega z = z$  si  $z \in T$ ,  $\widetilde{P}_\omega z = -z$  si  $z \in E$ . En d'autres termes

$$(1.2) \quad P_\omega y = x + \text{pr}_T(y-x) - \text{pr}_E(y-x)$$

pour tout  $y \in \mathbb{M}_{n+1}$ .

Remarque. La notation  $P_\omega$  rappellera que  $P_\omega$  appartient au groupe de Poincaré (mais pas à  $\mathcal{P}_O$  si  $n$  est impair) : si l'on excepte le fait, essentiel ici, de sa dépendance par rapport à l'observateur, on notera qu'il s'agit bien de la symétrie spatiale traditionnellement notée  $P$  (voir le chapitre CPT de n'importe quel livre sur la théorie des champs, par exemple [3]).

Fixons un observateur non-restreint  $\omega_0 = (x^0, T_0, E_0)$  comme référence : alors un observateur sera n'importe quel  $\omega$  de la forme  $\omega = P \cdot \omega_0$  avec  $P \in \mathcal{P}_O$ . On désignera par  $\Omega$  l'espace des observateurs  $\omega$  : il nous servira plus loin d'espace de phase, et il importe d'en donner une paramétrisation liée au choix de  $\omega_0$ .

La donnée de  $\omega_0$  met en évidence les espaces euclidiens orientés  $T_0$  et  $E_0$ , obtenus en restreignant  $ds^2$  ou  $-ds^2$  selon le cas : désignons par  $\|\cdot\|_0$  la norme sur  $E_0$  et par  $\varepsilon_0$  le vecteur unitaire positif de  $T_0$ . Pour tout  $P \in \mathcal{P}_O$  on peut écrire  $\widetilde{P}\varepsilon_0 = \alpha\varepsilon_0 + w$  avec  $\alpha^2 - \|w\|_0^2 = 1$  et (puisque  $\widetilde{P}$  appartient au groupe de Lorentz propre)  $\alpha > 0$ . Le vecteur  $v_{\widetilde{P}} = \alpha^{-1}w$  appartient à la boule-unité ouverte  $B(E_0)$  de  $E_0$  : évidemment  $v_{\widetilde{P}}$  ne dépend que de l'action de  $\widetilde{P}$  sur  $\varepsilon_0$ . Le vecteur  $v_{\widetilde{P}}$  doit être interprété comme la vitesse de  $P \cdot \omega_0$  relativement à  $\omega_0$ , considérée dans le repère propre à  $\omega_0$ .

PROPOSITION 1.4. Etant donné  $\omega_0 = (x^0, T_0, E_0) \in \Omega$ , l'application  $P \mapsto (Px^0 - x^0, v_{\widetilde{P}})$  établit par passage au quotient une bijection de  $\Omega = \mathcal{P}_O / O^+(E_0)$  sur  $\mathbb{M}_{n+1} \times B(E_0)$ .

Preuve. Fixant une base orthonormée positive de  $E_0$ , on se ramène

sans perte de généralité au cas où  $\mathcal{M}_{n+1} = \widetilde{\mathcal{M}}_{n+1} = \{x = (t, \vec{x}) : t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ , et où de plus  $ds^2 = dt^2 - |d\vec{x}|^2$ ,  $x^0 = 0$ ,  $T_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$  et  $E_0 = \{0\} \times \mathbb{R}^n$  : la symétrie spatiale  $P_{\omega_0}$  n'est alors autre que l'application linéaire  $J$  (elle interviendra partout dans ce travail) définie par

$$(1.3) \quad J(t, \vec{x}) = (t, -\vec{x}).$$

Le fait de s'astreindre à surmonter d'une flèche les vecteurs d'espace, contrairement à ceux d'espace-temps, contribuera beaucoup à la clarté : c'est du reste conforme à l'usage en physique.

Dans le système de coordonnées choisi, le groupe de Lorentz  $\mathcal{L}$  s'identifie au groupe des matrices  $M$  qui vérifient la relation  $M'J = JM^{-1}$  (on désigne par  $M'$  la matrice transposée de  $M$ ) : de plus,  $\varepsilon_0$  (le vecteur unitaire positif de  $T_0$ ) devient le premier vecteur de la base canonique  $(\varepsilon_j)_{j \geq 0}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , et  $O^+(E_0)$  devient le sous-groupe  $\{1\} \times SO(n)$  de  $\mathcal{L}_0$  constitué des matrices  $M \in \mathcal{L}_0$  qui fixent  $\varepsilon_0$ . Enfin,  $\mathcal{P}_0$  est identifié à un produit semi-direct de  $\mathcal{L}_0$  par  $\mathbb{R}^{n+1}$  si l'on représente par le couple  $(M, a) \in \mathcal{L}_0 \times \mathbb{R}^{n+1}$  la transformation de Poincaré  $x \mapsto Mx + a$ .

Un boost (le lecteur pardonnera, nous l'espérons, cet anglicisme : "transformation spéciale de Lorentz" est vraiment trop long) est une matrice  $M \in \mathcal{L}$  autoadjointe définie positive : nécessairement, alors,  $M \in \mathcal{L}_0$ , et puisque  $(JM^{\frac{1}{2}}J)^2 = (M^{-\frac{1}{2}})^2$ , la matrice  $M^{\frac{1}{2}}$  est également un boost. Etant donnée  $M \in \mathcal{L}_0$ , on peut écrire  $M = AK$  avec  $A = (MM')^{\frac{1}{2}}$ , ce qui entraîne que  $K \in \mathcal{L}_0 \cap SO(n+1) = \{1\} \times SO(n)$  : la matrice  $A$  est le boost associé à  $M$ . Alors les transformations de Poincaré  $(M, a)$  et  $(M_1, a_1)$  définissent le même observateur si et seulement si  $a = a_1$  et  $A = A_1$ , en désignant par  $A$  (resp.  $A_1$ ) le boost associé à  $M$  (resp.  $M_1$ ). Pour terminer la preuve de la proposition 1.4, il reste seulement à montrer que, étant donné  $v \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $|v| < 1$ , il existe un unique boost  $A$  tel que

$$(1.4) \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} :$$

les conditions  $v = \alpha^{-1}w$ ,  $\alpha > 0$  et  $\alpha^2 - |w|^2 = 1$  (voir ci-haut la définition de  $v_P$ ) imposent en effet  $\alpha = (1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Choisissons  $K_0 \in SO(n)$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (\text{th } \mu) K_O \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et soit  $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K_O \end{pmatrix}$  : alors (1.4) s'écrit

$$K^{-1} A K \varepsilon_O = (\text{ch } \mu) \varepsilon_O + (\text{sh } \mu) \varepsilon_1 .$$

Cette condition montre que  $(\text{ch } \mu \text{ sh } \mu \ 0 \dots 0)$  est la première ligne du boost  $K^{-1} A K$ , d'où il résulte facilement que

$$(1.5) \quad K^{-1} A K = \begin{pmatrix} \text{ch } \mu & \text{sh } \mu & & \\ \text{sh } \mu & \text{ch } \mu & & \\ & & \text{I} & \end{pmatrix} .$$

Ceci termine la preuve de la proposition 1.4. Notons que la matrice au second membre de (1.5) s'appelle le boost de vitesse  $\text{th } \mu$  dans la direction  $\partial/\partial x_1$ .

Il est important d'expliciter l'action du groupe de Poincaré propre sur  $\Omega$  dans la réalisation  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \times B_n$  avec  $B_n = \{v \in \mathbb{R}^n : |v| < 1\}$ . Un observateur  $\omega = (N, x) \cdot \omega_O$  est représenté par le couple  $(x, v)$ , où  $v$  est lié au vecteur unitaire positif  $\varepsilon_\omega$  de  $T$  par la relation

$$(1.6) \quad \varepsilon_\omega = (1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} .$$

Si  $(M, a) \in \mathcal{P}_O$  et si  $\omega' = (M, a) \cdot \omega$  est représenté par le couple  $(x', v')$ , on a d'une part la relation  $x' = Mx + a$ , d'autre part la formule

$$(1.7) \quad (1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}} M \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = (1 - |v'|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ v' \end{pmatrix}$$

qui exprime que  $\varepsilon_{\omega'} = M \varepsilon_\omega$ .

Dans le cas où  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K_O \end{pmatrix}$  avec  $K_O \in SO(n)$  on en déduit que

$$(1.8) \quad v' = K_O v .$$

Lorsque  $M$  est le boost de vitesse  $w = \text{th } \mu$  dans la direction  $\partial/\partial x_1$ ,

défini au second membre de (1.5), on résoud sans peine (1.7) et l'on trouve

$$v'_1 = \frac{\text{sh } \mu + v_1 \text{ ch } \mu}{\text{ch } \mu + v_1 \text{ sh } \mu}, \quad v'_k = \frac{v_k}{\text{ch } \mu + v_1 \text{ sh } \mu}$$

ou, en d'autres termes,

$$(1.9) \quad v'_1 = \frac{v_1 + w}{1 + v_1 w}, \quad v'_k = \frac{v_k (1 - w^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + v_1 w}.$$

Les formules (1.8) et (1.9) ne sont autres que les formules habituelles de transformation relativiste des vitesses (cf. par exemple Landau-Lifschitz [18], p. 22).

Examinons enfin la symétrie spatiale  $P_\omega$  dans les coordonnées  $(x; v) = (t, \vec{x}; v)$  de  $\Omega$ . Comme  $\varepsilon_\omega$  engendre  $T$  (avec  $\omega = (x, T, E)$ ), l'équation  $\langle z, J\varepsilon_\omega \rangle = 0$  où  $J$  a été définie en (1.3), caractérise l'espace  $E$ , orthogonal de  $T$  relativement au  $ds^2$  de Minkowski. Il résulte de là que la partie linéaire  $J_v = \tilde{P}_\omega$  de  $P_\omega$  est donnée par

$$(1.10) \quad J_v z = -z + 2 \langle z, J\varepsilon_\omega \rangle \varepsilon_\omega$$

(en particulier  $J_o = J$ ). De façon équivalente, on a

$$(1.11) \quad \text{pr}_T z = \langle z, J\varepsilon_\omega \rangle \varepsilon_\omega$$

et

$$(1.12) \quad \text{pr}_E z = z - \langle z, J\varepsilon_\omega \rangle \varepsilon_\omega.$$

Si  $\omega = (x, T, S)$  et  $\omega_1 = (x^1, T, S)$ , de telle sorte que  $\varepsilon_\omega = \varepsilon_{\omega_1}$ , on a  $P_\omega = P_{\omega_1}$  si et seulement si  $x - x^1$  est un multiple de  $\varepsilon_\omega$  : en conséquence la symétrie spatiale  $P_\omega$  ne dépend que de  $(\vec{x} - tv; v)$ .



## II - LE CALCUL SYMBOLIQUE DE KLEIN-GORDON.

Pour donner un contenu physique aux considérations de la section précédente on suppose choisies des unités physiques telle que la constante de Planck  $h$  et la vitesse de la lumière  $c$  soient égales à 1. Il est quelquefois préférable de ne pas faire ce choix : c'est ainsi que la section 16 montrera que le calcul de Klein-Gordon se contracte vers le calcul de Weyl lorsque  $c \rightarrow \infty$ .

On s'intéresse à une particule libre, sans spin, dont la masse  $m$  a été choisie comme unité : encore une fois, ce choix ne s'impose pas toujours ; ainsi les développements asymptotiques semi-classiques, dont il ne sera pas question ici, se font suivant les puissances de  $m^{-1}$  ou, si l'on préfère, de  $h m^{-1}$ .

L'espace vectoriel  $\widetilde{\mathcal{M}}_{n+1}^*$  dual de  $\widetilde{\mathcal{M}}_{n+1}$  est l'espace des covecteurs d'énergie-impulsion : dans les coordonnées duales de celles choisies sur  $\widetilde{\mathcal{M}}_{n+1}$  ils se notent  $p = (p_0, \vec{p})$ . Le covecteur d'énergie-impulsion d'une particule de masse 1 et de vitesse  $v$  (relativement à l'observateur de référence  $\omega_0$ ) est donné par

$$(2.1) \quad p = (p_0, \vec{p}) = (1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}}(1, -v).$$

Le signe moins provient de ce que c'est le  $ds^2$  de Minkowski qui fournit le seul isomorphisme canonique de  $\widetilde{\mathcal{M}}_{n+1}$  sur son dual : ceci explique certaines incohérences de signe entre le présent travail et [37], et c'est ici que nous faisons le bon choix.

Le covecteur  $p$  défini en (2.1) décrit, lorsque  $v$  varie dans  $B_n$ , l'hyperboloïde de masse  $\mathcal{M}$  d'équation  $p_0 = (1 + |\vec{p}|^2)^{\frac{1}{2}}$  : il s'agit bien sûr, en réalité, d'un seul feuillet  $\mathcal{M}$  d'un hyperboloïde à deux feuillettes. On munit  $\mathcal{M}$  du point de base  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$  attaché à

la particule de vitesse nulle. Sous l'application  $v \mapsto p$  définie en (2.1), on identifie la boule des vitesses  $B_n$  à  $\mathcal{M}$ . Il convient donc de transférer sur  $\mathcal{M}$  l'action décrite dans la section 1 du groupe  $\mathcal{L}_0$  : compte tenu de (1.7) et de l'équation  $\text{JMJ} = M'^{-1}$ , on voit que  $M \in \mathcal{L}_0$  agit sur  $\mathcal{M}$  de façon linéaire, par la formule  $p \mapsto M'^{-1}p$ . Tout ceci est bien classique, et l'on en profite pour donner enfin la présentation définitive de l'espace  $\Omega$

DÉFINITION 2.1. L'espace de phase  $\Omega$  est constitué des points  $(x;p) = (t, \vec{x}; p) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ . L'action du groupe de Poincaré propre  $\mathcal{P}_0$  sur  $\Omega$  est donnée par

$$(M, a) \cdot (x; p) = (Mx + a; M'^{-1}p).$$

Sous l'action du groupe de Lorentz propre,  $\mathcal{M}$  possède une mesure invariante, à savoir  $p_0^{-1} d\vec{p}$  : ce fait élémentaire intervient dans la description de l'espace à une particule de la théorie du champ libre (voir par exemple Reed-Simon [28], t.2, p.70).

Le groupe de Poincaré propre opère sur l'espace  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^{n+1})$  des distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  par la représentation  $U$  telle que

$$(2.2) \quad (U(M, a)T)(x) = T(M^{-1}(x-a)),$$

ce par quoi l'on entend que

$$(2.3) \quad \langle U(M, a)T, \varphi \rangle = \langle T, x \mapsto \varphi(Mx + a) \rangle$$

pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^{n+1})$ . Cette action est réductible, et on l'étend sans changement au groupe de Poincaré orthochrone  $\mathcal{P}^\uparrow$ , sous-groupe maximal de  $\mathcal{P}$  contenant  $\mathcal{P}_0$  et ne comprenant pas la symétrie temporelle  $(t, \vec{x}) \mapsto (-t, \vec{x})$ . Comme  $\mathcal{P}^\uparrow$  comprend les symétries spatiales  $P_\omega$  on peut, pour tout observateur  $\omega$ , définir l'opérateur de parité  $\sigma_\omega$  par

$$(2.4) \quad \sigma_\omega = U(P_\omega) :$$

cette définition est fondamentale pour tout ce qui suit.

L'espace de Hilbert au centre des considérations n'est pas ici (contrairement à ce qui se passe dans le calcul de Weyl) l'espace  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , mais l'espace de Sobolev  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  : il est commode d'adopter

la notation suivante de Kumano-go .

NOTATION 2.2. Pour tout  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$  , on pose  $\langle \vec{\xi} \rangle = (1 + |\vec{\xi}|^2)^{\frac{1}{2}}$  , de sorte que  $\langle \vec{\xi} \rangle = \xi_0$  si  $(\xi_0, \vec{\xi}) \in \mathcal{M}$ . On pose également  $\langle D \rangle = \left[ 1 - (2\pi)^{-2} \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right]^{\frac{1}{2}}$  : c'est l'opérateur pseudo-différentiel sur  $\mathbb{R}^n$  de symbole ordinaire  $\langle \vec{\xi} \rangle$  .

Le produit scalaire dans l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  est alors donné par l'une des formules équivalentes

$$(2.5) \quad (u, v)_{\frac{1}{2}} = (\langle D \rangle u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \vec{\xi} \rangle \hat{u}(\vec{\xi}) \overline{\hat{v}(\vec{\xi})} d\vec{\xi} \\ = \int_{\mathcal{M}} \xi_0 \hat{u}(\vec{\xi}) \overline{\hat{v}(\vec{\xi})} d\vec{\xi} ,$$

dans lesquelles le produit scalaire non affecté d'indice est celui de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $\hat{u}$  désigne la transformée de Fourier de  $u$  , normalisée sous la forme

$$(2.6) \quad \hat{u}(\vec{\xi}) = \int u(\vec{x}) e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle} d\vec{x} .$$

A toute fonction  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  on associe la fonction  $\mathcal{G}u$  sur l'hyperboloïde de masse définie par

$$(2.7) \quad (\mathcal{G}u)(p) = p_0 \hat{u}(\vec{p}) .$$

On a alors

$$(2.8) \quad \|u\|_{\frac{1}{2}}^2 = \int_{\mathcal{M}} |\mathcal{G}u(p)|^2 p_0^{-1} d\vec{p} ,$$

autrement dit  $\mathcal{G}$  est une isométrie de  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  sur  $L^2(\mathcal{M}) = L^2(\mathcal{M}; p_0^{-1} d\vec{p})$  : ceci est bien connu (cf. par exemple [7] , t.2, p. 402).

Inversement, on a  $u(\vec{x}) = \tilde{u}(0, \vec{x})$  si l'on pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$(2.9) \quad \tilde{u}(x) = \int_{\mathcal{M}} e^{2i\pi \langle x, p \rangle} (\mathcal{G}u)(p) p_0^{-1} d\vec{p} .$$

Soient  $\Delta$  le laplacien  $\sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\square$  le d'Alembertien  $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Le prolongement  $\tilde{u}$  de  $u$  vérifie l'équation de Klein-Gordon

$$(2.10) \quad \square \tilde{u} = -4\pi^2 \tilde{u}$$



et, plus précisément, l'équation

$$(2.11) \quad (2i\pi)^{-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \langle D \rangle \tilde{u}.$$

Si  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  sont les prolongements (vérifiant (2.11)) de  $u$  et  $v \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , et si  $\tilde{v} = U(M, a)\tilde{u}$  au sens de (2.2), (2.9) permet d'établir entre  $\mathcal{Q}_u$  et  $\mathcal{Q}_v$  la relation

$$(2.12) \quad (\mathcal{Q}_v)(p) = e^{-2i\pi \langle a, p \rangle} (\mathcal{Q}_u)(M'p).$$

Si l'on identifie, au moyen de  $u \mapsto \tilde{u}$ , l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  à un sous-espace de  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^{n+1})$ , la formule (2.12) montre que la représentation  $U$  de  $\mathcal{G}'$  dans  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^{n+1})$  peut être restreinte à  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  : on obtient alors une représentation unitaire. Celle-ci (due à Bargmann et Wigner) est tout à fait classique, et l'on sait qu'elle est irréductible.

En particulier, pour tout observateur  $\omega = (x; p)$ , la symétrie  $P_\omega$  s'écrit  $(M, a) = (J_v, x - J_v x)$ , où  $v$  est lié à  $p$  par (2.1) et  $J_v$  est donné par (1.10) : on note alors que  $\varepsilon_\omega$  (défini en (1.6)) est donné par

$$(2.13) \quad \varepsilon_\omega = Jp.$$

La formule (2.12) fournit enfin, pour tout  $p' \in \mathcal{M}'$  et toute fonction  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , la relation

$$(2.14) \quad (\mathcal{Q}_{\sigma_\omega u})(p') = (\mathcal{Q}_u)(S_p p') \exp 2i\pi \langle x, S_p p' - p' \rangle$$

si l'on désigne par  $S_p$  la transposée de  $J_v$ , autrement dit la transformation linéaire de  $\mathbb{R}^{n+1}$  telle que

$$(2.15) \quad S_p p' = -p' + 2 \langle p', Jp \rangle p.$$

Au sens de la géométrie intrinsèque de  $\mathcal{M}$  (c'est un espace riemannien symétrique), la restriction de  $S_p$  à  $\mathcal{M}$  n'est autre que la symétrie géodésique autour de  $p \in \mathcal{M}$  : la formule (2.14) permet alors l'identification du calcul de Klein-Gordon tel qu'il va immédiatement être défini à celui qui avait initialement été proposé dans [37] (cf.

(2.2) et section 4 de cet article).

DÉFINITION 2.3. Soit A un opérateur à trace sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . Son symbole, ou symbole passif, au sens du calcul de Klein-Gordon, est la fonction continue g sur  $\Omega$  définie par

$$g(\omega) = 2^n \text{Tr}(A \sigma_\omega) .$$

PROPOSITION 2.4. Le symbole g de A est admissible : cela signifie, par définition, que  $g(\omega) = g(t, \vec{x}; v)$  ne dépend que de  $(\vec{x} - tv; v)$  ou encore, sous la paramétrisation de  $\Omega$  donnée dans la définition 2.1, que  $g(\omega)$  ne dépend que de  $(\vec{x} + x_0 p_0^{-1} \vec{p}; p)$ . Le calcul de Klein-Gordon est covariant sous l'action du groupe  $\mathcal{P}_0$  : pour tout  $(M, a) \in \mathcal{P}_0$  et tout opérateur à trace A sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , le symbole de  $U(M, a) A U(M, a)^{-1}$  est  $g \circ (M, a)^{-1}$  si g est celui de A.

Preuve. On a remarqué à la fin de la section 1 que la symétrie  $P_\omega$  ne dépend que de  $(\vec{x} - tv; v)$ , ce qui montre le premier point. Avec v et p liés par (2.1), notons désormais  $J_p$  la transformation (1.10) jusqu'à présent notée  $J_v$  (pour tenir compte de la nouvelle paramétrisation de  $\Omega$ ) : on a donc

$$(2.16) \quad J_p z = -z + 2 \langle z, p \rangle J_p$$

pour tout  $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ , d'où il résulte immédiatement que

$$M^{-1} J_p M = J_{M'p}$$

pour tout  $M \in \mathcal{L}_0$ . Avec  $P_\omega = (J_p, x - J_p x)$  dans l'écriture du groupe de Poincaré comme produit semi-direct, on en déduit pour tout  $y \in \mathbb{R}^{n+1}$  et tout  $(M, a) \in \mathcal{P}_0$  l'égalité

$$(2.17) \quad (M, a)^{-1} P_\omega (M, a) y = J_{M'p} y + M^{-1} (x - a) - J_{M'p} M^{-1} (x - a)$$

autrement dit

$$(2.18) \quad (M, a)^{-1} P_\omega (M, a) = P_{(M^{-1}(x-a); M'p)} = P_{(M, a)^{-1} \cdot \omega} .$$

Par suite

$$(2.19) \quad U(M, a)^{-1} \sigma_\omega U(M, a) = \sigma_{(M, a)^{-1} \cdot \omega} ,$$

ce qui entraîne la proposition.

Avant d'introduire, comme il est nécessaire, une deuxième espèce de symbole, il nous faut revenir à des considérations géométriques.

DÉFINITION 2.5. Le fibré spatial  $\mathbb{E}$  est la partie de  $\Omega$  constituée des couples  $(x;p) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  tels que  $\langle x, p \rangle = 0$  : on note aussi  $E_p$  l'hyperplan d'équation  $\langle x, p \rangle = 0$  pour  $p$  fixé, et  $E_0$  celui qui correspond à  $p = e_0$ , autrement dit l'espace des  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  tels que  $x_0 = 0$ .

Remarque. d'après (2.13),  $E_p$  n'est autre que la composante spatiale  $E$  de l'espace-temps pour un observateur dont la vitesse par rapport à l'observateur de référence est  $v = -p_0^{-1} \vec{p}$ . Il est évident que  $\mathcal{L}_0$  (mais non  $\mathcal{P}_0$ ) opère sur  $\mathbb{E}$  puisque  $Mx \in E_{M^{-1}p}$  si  $x \in E_p$ . Comme à toute vitesse  $v$  est associé un boost  $\Lambda$  de façon canonique ( $\Lambda = A$  avec la notation de (1.4)), le fibré  $\mathbb{E}$  est canoniquement trivialisable: en effet, si  $Jp = \Lambda e_0$ , l'équation  $\langle x, p \rangle = 0$  équivaut à  $(\Lambda^{-1}x)_0 = 0$ , d'où  $E_p = \Lambda E_0$ . L'application  $\Lambda$  est l'application  $x \mapsto y$  avec

$$(2.20) \quad \begin{aligned} y_0 &= p_0 x_0 - \langle \vec{p}, \vec{x} \rangle \\ \vec{y} &= \vec{x} - x_0 \vec{p} + (1+p_0)^{-1} \langle \vec{p}, \vec{x} \rangle \vec{p}. \end{aligned}$$

Le plus simple pour s'en convaincre est de constater que  $\Lambda$ , ainsi définie, est autoadjointe positive, que  $y_0^2 - |\vec{y}|^2 = x_0^2 - |\vec{x}|^2$ , enfin que  $\Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ -\vec{p} \end{pmatrix}$ . Lorsque  $x$  parcourt  $E_0$ , i.e.  $x_0 = 0$ ,  $y$

parcourt  $E_p$ : ce dernier espace peut encore être paramétré par  $\vec{y}$ , et comme

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} + (1+p_0)^{-1} p_j p_k$$

on a (cf. appendice)

$$(2.21) \quad d\vec{y} = (1+(1+p_0)^{-1} |\vec{p}|^2) d\vec{x} = p_0 d\vec{x}.$$

Une autre façon de décrire  $E_p$  consiste à projeter  $\mathbb{R}^{n+1}$  sur  $E_p$  parallèlement au supplémentaire de  $E_p$  relativement au  $ds^2$ : d'après (1.12), l'opérateur de projection est l'application  $x \mapsto z$  avec

$$(2.22) \quad z = x - \langle x, p \rangle Jp.$$

Si  $x$  parcourt  $E_0$ , alors  $z$  parcourt  $E_p$  et (cf. appendice)

$$d\vec{z} = (1 + |\vec{p}|^2) d\vec{x} = p_0^2 d\vec{x}.$$

Sur  $\mathbb{E}$ , la mesure  $p_0^{-2} d\vec{x} d\vec{p}$  est invariante par le groupe de Lorentz propre : cette invariance sous le groupe des rotations spatiales est en effet triviale, et il suffit de la démontrer dans le cas du boost  $\Lambda$  attaché à un covecteur d'énergie-impulsion  $p'$  au moyen des formules (2.20). L'équation  $\Lambda.(x;p) = (y;q)$  signifie que  $y = \Lambda x$  et  $q = \Lambda^{-1} p$ , et l'on sait déjà que  $q_0^{-1} d\vec{q} = p_0^{-1} d\vec{p}$ . De plus, d'après (2.20),  $q_0 = p'_0 p_0 + \langle \vec{p}', \vec{p} \rangle$  et comme  $x \in E_p$ , on a  $x_0 = -p_0^{-1} \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle$  d'où

$$\vec{y} = \vec{x} + p_0^{-1} \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle \vec{p}' + (1 + p'_0)^{-1} \langle \vec{x}, \vec{p}' \rangle \vec{p}'.$$

D'après l'appendice, on a donc

$$\frac{d\vec{y}}{d\vec{x}} = 1 + \langle \vec{p}', p_0^{-1} \vec{p} + (1 + p'_0)^{-1} \vec{p}' \rangle = p'_0 + p_0^{-1} \langle \vec{p}, \vec{p}' \rangle = p_0^{-1} q_0.$$

Enfin

$$q_0^{-2} d\vec{y} d\vec{q} = p_0^{-1} q_0^{-1} d\vec{x} d\vec{q} = p_0^{-2} d\vec{x} d\vec{p},$$

ce qui traduit bien l'invariance de la mesure  $p_0^{-2} d\vec{x} d\vec{p}$ .

DÉFINITION 2.6. Soit  $f$  une fonction admissible sur  $\Omega$  : cela signifie, rappelons-le, que  $f(x;p)$  ne dépend que de  $(\vec{x} + x_0 p_0^{-1} \vec{p}; p)$ , en d'autres termes que  $f$  vérifie l'équation différentielle

$$p_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} = \sum p_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Supposons que l'on ait

$$\int_{\mathbb{E}} |f(x;p)| p_0^{-2} d\vec{x} d\vec{p} < \infty.$$

Alors l'opérateur  $Op(f)$  de symbole actif  $f$  est l'opérateur borné sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  défini par l'identité

$$\text{Op}(f) = 2^n \int_{\mathbb{E}} f(x;p) \sigma_{(x;p)} p_0^{-2} d\vec{x} d\vec{p}.$$

PROPOSITION 2.7. Le symbole actif satisfait à la même propriété de covariance (énoncée dans la proposition 2.4) que le symbole passif. Si  $A = \text{Op}(f)$ , si  $B$  est un opérateur à trace sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  et si  $g$  est le symbole passif de  $B$ , on a

$$\text{Tr}(BA) = \int_{\mathbb{E}} f(x;p) g(x;p) p_0^{-2} d\vec{x} d\vec{p}.$$

Le symbole actif ou passif de l'adjoint d'un opérateur est le conjugué du symbole correspondant de ce dernier.

Preuve. Les deux derniers points sont une conséquence immédiate des définitions et du fait (entraîné par (2.14)) que les opérateurs de parité  $\sigma_\omega$  sont non seulement unitaires, mais encore involutifs, donc autoadjoints. En utilisant (2.19) et l'invariance de la mesure  $p_0^{-2} d\vec{x} d\vec{p}$  sur  $\mathbb{E}$ , on obtient pour toute transformation  $M \in \mathcal{L}_0$  la formule

$$U(M, O) \text{Op}(f) U(M, O)^{-1} = \text{Op}(f \circ (M, O)^{-1}).$$

Rappelons par ailleurs (2.22) que l'application  $x \mapsto z = x - \langle x, p \rangle p$  établit une bijection linéaire de  $E_0$  sur  $E_p$ , et que  $d\vec{z} = p_0^2 d\vec{x}$ . Comme  $\vec{z} + z_0 p_0^{-1} \vec{p} = \vec{x} + x_0 p_0^{-1} \vec{p}$ , la condition d'admissibilité des symboles (cf. déf.6) montre que  $f(z;p) = f(x;p)$  et que  $g$  vérifie la même propriété. Il a déjà été observé, également, que  $\sigma_{(x;p)}$  ne dépend que de  $(\vec{x} + x_0 p_0^{-1} \vec{p}; p)$  pour  $(x;p) \in \Omega$ . Tout ceci permet de remplacer la définition 2.6 de l'opérateur  $\text{Op}(f)$  par la définition équivalente

$$(2.23) \quad \text{Op}(f) = 2^n \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}} f(0, \vec{x}; p) \sigma_{(0, \vec{x}; p)} d\vec{x} d\vec{p}.$$

Cette formule sera bien souvent préférée à la définition originale. Compte tenu de (2.19), elle fournit immédiatement l'identité

$$U(I, a) \text{Op}(f) U(I, a)^{-1} = \text{Op}(f \circ (I, a)^{-1})$$

dans le cas où  $a = (0, \vec{a})$ . Enfin, la condition d'admissibilité

$$f(a_0, \vec{x}; p) = f(0, \vec{x} + a_0 p_0^{-1} \vec{p}; p),$$

jointe à (2.19), permet d'obtenir la covariance de la correspondance  $Op$  sous l'effet des translations temporelles  $U(I, (a_0, \vec{0}))$  : ceci termine la preuve de la proposition 2.7.

Soit  $f = f(x; p)$  une fonction continue sur  $\Omega$  à croissance lente par rapport à  $x$  et désignons par  $\mathcal{F}_1 f$  la transformée de Fourier de  $f$  relativement à  $x$ . Supposons que le support de  $(\mathcal{F}_1 f)(\xi; p)$  soit du genre espace, c'est-à-dire que l'on ait  $|\vec{\xi}|^2 - \xi_0^2 \gg 0$  sur ce support. On peut alors, pour tout  $\lambda$  réel, définir

$$(2.24) \quad \nabla^\lambda = (1 + (4\pi)^{-2} \square)^{\lambda/2}$$

par la formule

$$(2.25) \quad \mathcal{F}_1 (\nabla^\lambda f)(\xi; p) = [1 + \frac{1}{4} (|\vec{\xi}|^2 - \xi_0^2)]^{\lambda/2} (\mathcal{F}_1 f)(\xi; p).$$

Si  $\frac{\lambda}{2}$  est entier  $\gg 0$ , il s'agit bien de l'opérateur différentiel défini en (2.24),  $\square$  désignant l'opérateur d'Alembertien

$$(2.26) \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Si  $f$  est admissible, c'est-à-dire si  $\langle Jp, \frac{\partial f}{\partial x} \rangle = 0$  (cf. définition 2.6), on a  $\langle Jp, \xi \rangle = 0$  sur le support de  $\mathcal{F}_1 f$ , lequel est donc du genre espace. On a même, sur ce support,  $\xi_0^2 \leq p_0^{-2} |\vec{p}|^2 |\vec{\xi}|^2$  d'où  $|\vec{\xi}|^2 - \xi_0^2 \geq p_0^{-2} |\vec{\xi}|^2 \geq \frac{1}{2} p_0^{-2} |\xi|^2$ . Il est alors facile (se ramenant au cas où  $-\lambda$  est assez grand) de voir que  $\nabla^\lambda$  conserve l'espace des symboles admissibles continus sur  $\Omega$  qui, pour tout  $p$ , ont par rapport à  $x$  des dérivées de tous ordres bornées : on verra des faits plus précis dans la section 8. L'énoncé qui suit est une répétition du théorème 4.1 de [37] : la démonstration présentée ici introduira des formules utiles pour la suite.

THÉORÈME 2.8. L'application  $Op$  s'étend en une application continue injective de l'espace de Hilbert des symboles admissibles vérifiant

$$(2.27) \quad \int |f(0, \vec{x}; p)|^2 d\vec{x} d\vec{p} < \infty$$

dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . L'image de cette application est dense. L'application "symbole passif" s'étend en une application continue de l'espace des opérateurs de

Hilbert-Schmidt sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  dans l'espace des symboles admissibles vérifiant (2.27). Finalement, si  $A = \text{Op}(f)$ , le symbole passif  $g$  de  $A$  est donné par  $g = \nabla^{-n} f$ , où  $\nabla^{-n}$  étend l'opérateur qui a été défini en (2.24).

Preuve. La condition d'admissibilité montre que la norme hilbertienne sur l'espace de symboles considéré s'écrit aussi

$$f \mapsto \left[ \int_{\mathbb{E}} |f(x;p)|^2 p_0^{-2} d\vec{x} d\vec{p} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Grâce à la proposition 2.7, il suffit donc d'établir d'une part que  $\nabla^{-n}$  est continu à image dense sur cet espace de symboles, d'autre part que si  $A = \text{Op}(f)$  on a l'égalité

$$(2.28) \quad \text{Tr}(A^*A) = \int_{\mathbb{E}} (\nabla^{-n} \bar{f})(x;p) f(x;p) p_0^{-2} d\vec{x} d\vec{p} :$$

on remarquera d'ailleurs que la proposition 2.7 exprime que les applications  $\text{Op}$  et "symbole passif" sont adjointes l'une de l'autre.

Pour tout  $(\vec{x};p) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  le point  $(-p_0^{-1} \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle, \vec{x};p)$  appartient au fibré spatial  $\mathbb{E}$  : on pose alors

$$(2.29) \quad f_{\mathbb{E}}(\vec{x};p) = f(-p_0^{-1} \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle, \vec{x};p)$$

et, si  $g = \nabla^\lambda f$ , on se propose d'expliciter la relation entre  $f_{\mathbb{E}}$  et  $g_{\mathbb{E}}$ . On part à cet effet de (2.25), en ne confondant pas  $\mathcal{F}_1 f$  et la transformée de Fourier  $\mathcal{F}_1 f_{\mathbb{E}}$  de  $f_{\mathbb{E}}$  relativement aux seules variables  $\vec{x}$  : en se servant de la condition d'admissibilité on voit que  $f$  prend la même valeur aux points  $(x;p)$  et  $(x - \langle x, p \rangle J p; p) \in \mathbb{E}$ , ce qui permet d'écrire au sens des distributions

$$(\mathcal{F}_1 f)(\xi;p) = \int e^{-2i\pi x_0 \xi_0} e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle} f_{\mathbb{E}}(\vec{x} + \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle \vec{p} + x_0 \vec{p}; p) dx_0 d\vec{x}.$$

On effectue le changement de variables défini par

$$\vec{y} = \vec{x} + \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle \vec{p} + x_0 \vec{p}$$

d'où, d'après l'appendice,  $d\vec{y} = p_0^2 d\vec{x}$  et

$$\vec{x} = \vec{y} - p_0^{-1} x_0 \vec{p} - p_0^{-2} \langle \vec{y}, \vec{p} \rangle \vec{p} :$$

on obtient alors

$$(2.30) \quad (\mathcal{F}_1 f)(\xi; p) = p_0^{-2} (\mathcal{F}_1 f_{\mathbb{E}})(\vec{\xi} - p_0^{-2} \langle \vec{p}, \vec{\xi} \rangle; p) \delta(\xi_0 - p_0^{-1} \langle \vec{p}, \vec{\xi} \rangle).$$

Lorsque  $\xi_0 = p_0^{-1} \langle \vec{p}, \vec{\xi} \rangle$  on a, si l'on pose

$$\vec{\eta} = \vec{\xi} - p_0^{-2} \langle \vec{p}, \vec{\xi} \rangle \vec{p},$$

la relation

$$|\vec{\xi}|^2 - \xi_0^2 = |\vec{\eta}|^2 + \langle \vec{p}, \vec{\eta} \rangle^2$$

ainsi qu'on le vérifie en développant le membre de droite. La formule

(2.25) donne alors

$$(2.31) \quad (\mathcal{F}_1 g_{\mathbb{E}})(\vec{\eta}; p) = [1 + \frac{1}{4} (|\vec{\eta}|^2 + \langle \vec{p}, \vec{\eta} \rangle^2)]^{\lambda/2} (\mathcal{F}_1 f_{\mathbb{E}})(\vec{\eta}; p).$$

Il est immédiat que, si  $\lambda \leq 0$ ,  $\nabla^\lambda$  est continu à image dense dans l'espace de symboles envisagé.

Pour tout  $(x; p) \in \mathbb{E}$  on a  $x_0 = -p_0^{-1} \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle$ , ce qui permet, pour tout  $p' \in \mathcal{M}$ , d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle x, S_p p' - p' \rangle &= -\langle x, p' \rangle + \langle p', Jp \rangle \langle x, p \rangle \\ &= \langle \vec{x}, -\vec{p}' + p_0^{-1} p'_0 \vec{p} \rangle. \end{aligned}$$

La formule (2.14) donne alors

$$(\mathcal{G}_{Op}(f)u)(p') = 2^n \int_{\mathbb{E}} (\vec{x}; p) (\mathcal{G}_u)(S_p p') e^{4i\pi \langle \vec{x}, -\vec{p}' + p_0^{-1} p'_0 \vec{p} \rangle} p_0^{-2} d\vec{x} d\vec{p}.$$

Si l'on élimine la variable d'intégration  $\vec{p}$  au profit de la variable  $\vec{p}''$  définie par  $p'' = S_p p'$  on obtient, au prix d'un calcul qui sera détaillé en (7.6) et (7.7), la relation

$$(2.32) \quad \frac{d\vec{p}''}{d\vec{p}} = 2^n \langle p', Jp \rangle^{n-1} \frac{p_0''}{p_0} :$$

il en résulte que le noyau de l'opérateur  $\mathcal{G}_{Op}(f) \mathcal{G}_y^{-1}$  relativement à la mesure  $p_0''^{-1} d\vec{p}''$  est la fonction

$$(2.33) \quad k(p', p'') = p_0^{-1} \langle p', Jp \rangle^{1-n} (\mathcal{F}_1 f_{\mathbb{E}})(2(\vec{p}' - p_0^{-1} p'_0 \vec{p}) ; p).$$

Le carré de la norme de Hilbert-Schmidt de  $A$  n'est autre que l'intégrale  $\int |k(p', p'')|^2 (p_0' p_0'')^{-1} d\vec{p}' d\vec{p}''$ . En effectuant le changement de variable inverse de celui effectué précédemment on obtient

$$(2.34) \quad \text{Tr}(A^* A) = 2^n \int \langle p', Jp \rangle^{1-n} \left| (\mathcal{F}_1 f_{\mathbb{E}})(2(\vec{p}' - p_0^{-1} p'_0 \vec{p}) ; p) \right|^2 p_0^{-3} p_0'^{-1} d\vec{p} d\vec{p}'.$$



Enfin, on pose  $\vec{\eta} = 2(\vec{p}' - p_o^{-1} p_o' \vec{p})$  d'où

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \eta_j}{\partial p'^k} = \delta_{jk} - \frac{p_j}{p_o} \frac{p'_k}{p'_o}$$

et, d'après l'appendice,

$$2^{-n} \frac{d\vec{\eta}}{d\vec{p}'} = 1 - (p_o p_o')^{-1} \langle \vec{p}, \vec{p}' \rangle = (p_o p_o')^{-1} \langle p, Jp' \rangle.$$

En développant, on vérifie l'égalité

$$1 + \frac{1}{4} (|\vec{\eta}|^2 + \langle \vec{p}, \vec{\eta} \rangle^2) = \langle p', Jp \rangle^2$$

d'où

$$(2.35) \quad \text{Tr}(A^*A) = \int \left[ 1 + \frac{1}{4} (|\vec{\eta}|^2 + \langle \vec{p}, \vec{\eta} \rangle^2) \right]^{-n/2} \left| \mathcal{F}_1 f_{\mathbb{E}}(\vec{\eta}; p) \right|^2 p_o^{-2} d\vec{p} d\vec{\eta}.$$

Avec l'aide de (2.31), cette formule permet d'obtenir (2.28), ce qui achève de prouver le théorème 2.8.

### III - UNE DIGRESSION SUR LE CALCUL DE WEYL.

Les présentations connues du calcul de Weyl - duquel le lecteur est probablement un familier - mettent assez mal en évidence son analogie pourtant flagrante avec le calcul de Klein-Gordon. C'est pourquoi nous allons en exposer très brièvement une construction (déjà parue dans [36], section 19) dont l'originalité est d'être basée sur l'équation de Schrödinger libre, et de ne rien devoir au groupe d'Heisenberg. Cela permettra sans doute de mieux comprendre ce qui précède : en même temps, cela préparera la suite, et répondra par avance aux questions que ne pourrait manquer de se poser le lecteur qui attribuerait - à tort - au groupe de Poincaré un statut analogue à celui d'Heisenberg.

C'est en effet le groupe de Galilée qui est l'analogue non relativiste du groupe de Poincaré. Partons ainsi de l'espace-temps non relativiste  $\mathbb{R}^{n+1}$  et considérons le groupe  $G_0$  (c'est l'analogue du groupe de Lorentz propre  $\mathcal{L}_0$ ) constitué des transformations linéaires  $M$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  qui conservent la coordonnée-temps  $x_0$ , la métrique dégénérée  $ds^2 = |d\vec{x}|^2$  et l'orientation de l'espace (ici absolu)  $E = \{x : x_0 = 0\}$ . On écrit  $M = (K, v)$  avec  $K \in SO(n)$  et  $v \in \mathbb{R}^n$  si  $M$  est la transformation

$$(3.1) \quad (x_0, \vec{x}) \mapsto (x_0, K\vec{x} + x_0 v) .$$

Les transformations  $(I, v)$  sont les boosts non-relativistes. Le groupe de Galilée  $\Gamma_0$  (analogue de  $\mathcal{P}_0$ ) est engendré par  $G_0$  et par les translations  $x \mapsto x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

L'équation liant l'impulsion et l'énergie d'une particule libre est  $p_0 = (2m)^{-1} |\vec{p}|^2$  au lieu de  $p_0^2 - c^2 |\vec{p}|^2 = m^2 c^4$ . Avec des choix d'unités convenables, il faut donc remplacer l'hyperboloïde de

masse par le paraboloïde de masse  $\mathcal{M}$  (cette notation, et d'autres plus loin, ne seront employées que dans la présente section dans leur acception non relativiste) d'équation  $p_0 = \frac{1}{2} |\vec{p}|^2$ . Si  $M \in G_0$ ,  $M^{-1}$  ne conserve pas  $\mathcal{M}$ , mais l'on obtient quand même une action du groupe  $G_0$  sur  $\mathcal{M}$  en faisant agir  $M = (K, v)$  sur  $\mathcal{M}$  via la transformation affine  $M$ . telle que

$$(3.2) \quad M.p = (p_0 - \langle v, K\vec{p} \rangle + \frac{1}{2} |v|^2, K\vec{p} - v) = M^{-1}p + (\frac{1}{2} |v|^2, -v)$$

comme on le vérifie à l'aide de la formule

$$(3.3) \quad (K', v') (K, v) = (K'K, K'v + v').$$

Un observateur reste une classe à gauche de  $\Gamma_0$  relativement au sous-groupe compact maximal  $SO(n)$  : il est caractérisé par un couple  $(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^n$ ; tous les observateurs ont la même conception de l'espace  $E$ , mais le temps  $T$  du point de vue de l'observateur  $\omega = (x, v)$  est la droite engendrée par le vecteur  $(1, v)$ . Il convient donc (cf. (1.10)) de définir la transformation  $J_v$  par

$$(3.4) \quad J_v(x_0, \vec{x}) = (x_0, 2x_0 v - \vec{x})$$

et la symétrie  $P_\omega = P_{(x, v)}$  par

$$(3.5) \quad P_\omega y = x + J_v(y - x).$$

La mesure invariante sur  $\mathcal{M}$  est  $d\vec{p}$ , et la transformation  $\mathcal{Q}$  (analogue de (2.7)) devient l'isométrie de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  sur  $L^2(\mathcal{M}, d\vec{p})$  définie par

$$(3.6) \quad (\mathcal{Q}u)(p) = \hat{u}(\vec{p}).$$

Si l'on pose

$$(3.7) \quad \tilde{u}(x) = \int_{\mathcal{M}} e^{2i\pi \langle x, p \rangle} (\mathcal{Q}u)(p) d\vec{p},$$

l'équation  $p_0 = \frac{1}{2} |\vec{p}|^2$  montre que le prolongement  $\tilde{u}$  de  $u$  vérifie l'équation de Schrödinger libre

$$(3.8) \quad 4i\pi \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_0} = \Delta \tilde{u}.$$

Si  $M = (K, v) \in G_0$  et  $a \in \mathbb{R}^n$ , on est conduit à définir  $U(M, a)$  (en généralisant (2.12)) par

$$(3.9) \quad (\mathcal{U}_{U(M,a)} u)(p) = e^{-2i\pi \langle a, p \rangle} (\mathcal{U}_u)(M^{-1}.p).$$

On obtient ainsi une représentation unitaire projective de  $G_0$  dans  $L^2$  : si  $N = (L, w) \in G_0$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ , on vérifie en effet la formule

$$(3.10) \quad U(N, b) U(M, a) = U(NM, Na+b) \exp -2i\pi \left( \frac{a_0}{2} |w|^2 + \langle L\vec{a}, w \rangle \right)$$

dans laquelle le facteur supplémentaire de module 1 vient de ce que l'action  $N^{-1}$ , non linéaire, ne se transpose pas sans correction. D'après (3.6) et (3.9), on a en particulier

$$(3.11) \quad (U((I, v), 0) u)(\vec{x}) = u(\vec{x}) e^{-2i\pi \langle \vec{x}, v \rangle}$$

et

$$(3.12) \quad (U((I, 0), a) u)(\vec{x}) = u(\vec{x} - \vec{a})$$

si  $a = (0, \vec{a})$  : le groupe engendré par les boosts et par les translations purement spatiales a donc pour image par  $U$  le groupe d'Heisenberg. Il est important de noter dès maintenant que ce dernier fait n'a pas d'analogue relativiste car, sous une conjugaison par un boost relativiste, une translation purement spatiale  $(0, \vec{a})$  ne reste pas de cette forme.

On peut étendre la définition (3.9) au cas où  $K \in O(n)$  (et pas nécessairement à  $SO(n)$ ), et définir  $\sigma_\omega$  essentiellement comme en (2.4) : cependant, comme on n'a affaire qu'à une représentation projective, on posera  $\sigma_\omega = \lambda(\omega) U(P_\omega)$  avec  $\lambda(\omega)$  choisi de telle sorte que  $\sigma_\omega$  soit involutive. Soit  $\omega = (x, v)$  et par suite  $P_\omega = (J_v, x - J_v x)$  d'après (3.5) : on a  $x - J_v x = (0, 2\vec{x} - 2x_0 v)$  d'après (3.4), et la formule (3.10), appliquée avec  $(M, a) = (N, b) = ((-I, 2v), x - J_v x)$ , montre que l'on obtient le résultat souhaité à condition de prendre  $\lambda(\omega) = \exp 4i\pi \langle v, \vec{x} - x_0 v \rangle$ . Les formules (3.9) et (3.2) fournissent alors la définition

$$(3.13) \quad (\mathcal{U}_{\sigma_\omega} u)(p) = e^{4i\pi \langle v - \vec{p}, \vec{x} - x_0 v \rangle} (\mathcal{U}_u)(p_0 + 2\langle v, \vec{p} \rangle + 2|v|^2, -\vec{p} - 2v)$$

d'où

$$(3.14) \quad (\sigma_\omega u)(\vec{y}) = u(2(\vec{x} - x_0 v) - \vec{y}) e^{4i\pi \langle v, \vec{y} - (\vec{x} - x_0 v) \rangle}.$$

Il est alors possible de définir le symbole de Weyl  $g$  d'un opérateur à trace  $A$  par la formule  $g(\omega) = 2^n \text{Tr}(A \sigma_\omega)$  parfaitement ana-

logue à la définition 2.3 : on obtient une fonction admissible, c'est-à-dire ne dépendant que de  $(\vec{x}-x_0, v)$ . On peut confondre le symbole  $g$  avec sa restriction à l'hyperplan  $x_0 = 0$ , et la formule obtenue coïncide (cf. par exemple [36], p.15) avec la définition usuelle du calcul de Weyl : on peut, si l'on préfère, généraliser plutôt la définition 2.6 de la correspondance symbole  $\mapsto$  opérateur, et il n'y a dans ce cas, comme on sait, aucune distinction à faire entre les symboles actif et passif d'un même opérateur.

On notera que la construction qui précède exhibe la covariance bien connue du calcul de Weyl à l'égard de la représentation d'Heisenberg d'une part, et de l'autre à celle du groupe des rotations. De plus, si  $a = (a_0, \vec{0})$  est un vecteur de translation purement temporelle, on a les identités (utiliser (3.9) et (3.13))

$$U(I, a) \sigma_{(x, v)} U(I, a)^{-1} = \sigma_{(x', v)}$$

avec  $x' = (x_0, \vec{x} - a_0 v)$  : si l'on identifie le symbole  $g$  d'un opérateur  $A$  à sa trace sur  $x_0 = 0$ , le symbole de l'opérateur  $U(I, a)AU(I, a)^{-1}$  est donc la fonction  $(\vec{x}, v) \mapsto g(\vec{x} + a_0 v, v)$ .

Il est essentiel dès maintenant d'observer deux points. Premièrement, la dernière formule de covariance n'est qu'un cas très particulier d'une covariance beaucoup plus générale : celle du calcul de Weyl à l'égard de la représentation métaplectique. L'analogue relativiste de certains opérateurs du groupe métaplectique sera construit plus loin dans ce volume.

Rappelons que la classe de symboles de Calderon-Vaillancourt Symb (un symbole  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  appartient à Symb si ses dérivées de tous ordres sont bornées) fournit une algèbre d'opérateurs bornés sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , et sert de modèle dans toutes les investigations sur le calcul pseudodifférentiel classique : c'est ainsi que les versions de Beals [2], Hörmander [16] et nous-mêmes [31] font appel à des classes de symboles qui sont en quelque sorte des déformations de la classe de Calderon-Vaillancourt. L'analogue dans le calcul de Klein-Gordon du théorème de Calderon-Vaillancourt continue à jouer un rôle fondamental, et sera éclairci plus loin. Le deuxième point que nous prions le lecteur de noter est que la classe Symb n'est pas d'une façon uniforme invariante sous l'action du groupe

de Galilée (et encore moins sous celle du groupe symplectique) puisque le groupe des translations temporelles ne peut laisser un symbole dans une partie bornée de Symb : en revanche, le groupe engendré par les rotations, les boosts et les translations purement spatiales opère de façon satisfaisante dans Symb. Ce groupe, pas plus que le groupe d'Heisenberg, n'ayant d'équivalent relativiste, nous allons interpréter la situation d'une façon complètement différente, à l'aide des états cohérents : il s'agit, avec une terminologie empruntée aux physiciens, des fonctions gaussiennes dont le rôle dans l'analyse pseudo-différentielle a été observé par nombre d'auteurs, parmi lesquels Cordoba-Fefferman [6] et nous-mêmes [31]. L'idée de représenter une fonction  $u$  à l'aide de ses produits scalaires avec une famille de fonctions particulières remonte à Euler et Laplace. Elle est aujourd'hui centrale aux investigations de divers auteurs (cf Perelomov [27]) et prend les noms les plus variés : ondes, paquets d'onde, voire gaborettes !

A tout point  $Z = (Z_0, \vec{Z}) \in \mathbb{C}^{n+1}$  vérifiant  $\text{Re } Z_0 > 0$  associons la fonction  $p \mapsto e^{-2\pi\langle Z, p \rangle}$  sur le paraboloïde de masse et la fonction  $\psi_Z$  sur  $\mathbb{R}^n$  caractérisée par

$$(3.15) \quad (\mathcal{D}_Z \psi_Z)(p) = e^{-2\pi\langle Z, p \rangle}.$$

En utilisant (3.7) et la relation  $p_0 = \frac{1}{2}|\vec{p}|^2$ , on obtient immédiatement

$$(3.16) \quad \psi_Z(\vec{x}) = Z_0^{-\frac{n}{2}} \exp - \frac{\pi}{Z_0} \sum (x_j + iZ_j)^2.$$

Les fonctions  $\psi_Z$  sont les états cohérents. Elles constituent une famille à  $2n+2$  paramètres réels : c'est beaucoup, aussi va-t-on réduire celle-ci. Posons (pour assurer la normalisation  $L^2$ )

$$(3.17) \quad \chi(\vec{x}) = 2^{n/4} \psi_{(1, \vec{0})}(\vec{x}) = 2^{n/4} e^{-\pi|\vec{x}|^2}.$$

La fonction  $\chi$  est déjà invariante par le groupe des rotations : si on la transforme par (3.11) et (3.12), en laissant agir d'abord un boost arbitraire, puis une translation purement spatiale quelconque (autrement dit un élément du groupe d'Heisenberg, mais il est impératif pour l'extension au cas relativiste d'oublier ce groupe), nous

obtenons la famille de fonctions

$$(3.18) \quad \chi_{\vec{y}, \vec{\eta}}(\vec{x}) = \chi(\vec{x} - \vec{y}) e^{2i\pi \langle \vec{\eta}, \vec{x} - \vec{y} \rangle}$$

paramétrée par  $(\vec{y}, \vec{\eta}) \in \mathbb{R}^{2n}$ , et extraite (à la normalisation  $L^2$  près) de la famille (3.16).

En posant  $Y = (\vec{y}, \vec{\eta})$ , on peut écrire au sens faible, pour toute fonction  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , la formule de résolution de l'identité

$$(3.19) \quad u = \int (u, \chi_Y) \chi_Y \, dY$$

qui montre que  $u$  est caractérisée par la fonction  $Y \mapsto (u, \chi_Y) = \tilde{u}(Y)$ : la transformation  $u \mapsto \tilde{u}$  est la transformation de Bargmann-Fock. Il est alors très simple ([36], théorème 1.1) de caractériser les opérateurs  $A$  dont le symbole de Weyl appartient à la classe de Calderón-Vaillancourt par la validité, pour tout  $N$ , des inégalités

$$(3.20) \quad |(A\chi_Y, \chi_Y)| \leq C(1 + |Y - Y'|^2)^{-N}$$

pour  $C$  bien choisie : la théorie élémentaire des opérateurs pseudo-différentiels se déduit immédiatement de là. Ce programme sera étendu au cas relativiste.

Si  $A$  est un opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , de symbole de Weyl  $g$ , il est très courant en physique de s'intéresser à son symbole de Wick, qui est la fonction  $b$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  définie par

$$(3.21) \quad b(Y) = (A\chi_Y, \chi_Y).$$

Il est facile de voir que l'on a

$$(3.22) \quad b(Y) = 2^n \int g(X) e^{-2\pi |Y - X|^2} dX,$$

autrement dit

$$(3.23) \quad b = (\exp \frac{\Delta}{8\pi}) g$$

si l'on désigne par  $\Delta$  le laplacien de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Ces formules montrent que  $b$  est une version considérablement adoucie de  $g$ , ce qui interdit de regarder le calcul symbolique de Wick comme un calcul acceptable des opérateurs (voir [35] pour une preuve des formules et pour une discussion du lien entre les calculs de Weyl et de Wick sur  $\mathbb{R}^n$

ou dans un cadre non-euclidien). La formule (3.23) est néanmoins indispensable à la compréhension du calcul de Weyl, aussi allons-nous, dans les trois prochaines sections, établir son analogue dans le cadre du calcul de Klein-Gordon.





#### IV - ÉTATS COHÉRENTS ET CALCUL DE WICK RELATIVISTES.

Une fonction spéciale d'une variable interviendra si fréquemment dans ce travail qu'elle mérite une définition.

DÉFINITION 4.1. Pour  $\nu \in \mathbb{C}$  et  $t \in \mathbb{C}$  non réel  $\leq 0$ , on pose

$$(4.1) \quad k_\nu(t) = t^{-\nu/2} K_\nu(2\pi t^{\frac{1}{2}}),$$

où  $K_\nu(z)$  est la fonction de Bessel définie pour  $\operatorname{Re} z > 0$  par

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} x} \operatorname{ch}(\nu x) dx.$$

PROPOSITION 4.2. On a les équations différentielles

$$(4.2) \quad k'_\nu = \frac{dk_\nu}{dt} = -\pi k_{\nu+1}$$

et

$$(4.3) \quad tk''_\nu + (\nu+1)k'_\nu - \pi^2 k_\nu = 0.$$

Preuve. Avec  $z = 2\pi t^{\frac{1}{2}}$ , on a  $\frac{d}{dt} = 2\pi^2 z^{-1} \frac{d}{dz}$ , et la première équation est une conséquence de l'équation

$$z^{-1} \frac{d}{dz} (z^{-\nu} K_\nu(z)) = -z^{-\nu-1} K_{\nu+1}(z)$$

que l'on trouvera par exemple dans [22], p.67. La deuxième équation vient de l'équation différentielle classique des fonctions de Bessel: elle est d'ailleurs un cas particulier d'une équation différentielle plus générale écrite dans [22], p.77.

DÉFINITION ET PROPOSITION 4.3. Posons

$$(4.4) \quad r(Z) = z_0^2 - z_1^2 - \dots - z_n^2$$

pour tout  $Z \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Soit  $C$  le cône solide constitué des points  $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tels que  $z_0 > 0$  et  $r(z) > 0$ , et soit  $\Pi$  le tube complexe  $C + i\mathbb{R}^{n+1}$ . Pour tout  $Z \in \Pi$ , on pose

$$\Psi(Z) = \int_{\mathcal{H}} e^{-2\pi \langle Z, p \rangle} p_0^{-1} d\vec{p}.$$

On a

$$\Psi(Z) = 2k_{\frac{n-1}{2}}(r(Z)).$$

Preuve. Si  $Z = z + i\zeta$  avec  $z \in C$  et  $\zeta \in \mathbb{R}^{n+1}$  on a, avec  $J$  définie en (1.3), l'égalité

$$r(Z) = r(z) - r(\zeta) + 2i \langle z, J\zeta \rangle.$$

Or, comme on sait (cf. par exemple [36], (2.2)), on a  $\langle z, J\zeta \rangle \neq 0$  si  $r(\zeta) > 0$ , ce qui montre que  $r(Z)$  ne peut jamais être réel  $\leq 0$ . Les deux membres de l'identité indiquée sont donc des fonctions holomorphes de  $Z \in \Pi$ , et il suffit de démontrer la formule dans le cas où  $Z = z \in C$  puis, appliquant une transformation de Lorentz, dans le seul cas où  $Z = (r^{\frac{1}{2}}, 0, \dots, 0)$ . La formule est alors une conséquence de l'identité

$$\int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{sh}^{n-1} t \, dt = \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1-n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) K_{\frac{n-1}{2}}(z)$$

que l'on pourra trouver dans [22], p. 85.

DÉFINITION ET PROPOSITION 4.4. Pour tout  $Z \in \Pi$ , on désigne par  $\tilde{\psi}_Z$  la fonction  $x \mapsto \Psi(Z - ix)$  sur l'espace-temps, et par  $\psi_Z$  la restriction de cette fonction à  $t = 0$  : la fonction  $\tilde{\psi}_Z$  est une solution de l'équation de Klein-Gordon (2.11). Pour tout  $(M, a) \in \mathcal{G}^\dagger$ , on a

$$U(M, a) \psi_Z = \psi_{MZ + ia}.$$

Preuve. Le premier point résulte de (2.11) puisque  $\tilde{\psi}_Z$  est une fonction du genre  $\tilde{u}$  défini en (2.9) : d'après cette même formule, on a

$$(4.5) \quad (\mathcal{G}\psi_Z)(p) = e^{-2\pi\langle Z, p \rangle},$$

identité que l'on pourra comparer à (3.15) qui a servi dans le cas non relativiste. On obtient l'action de  $U(M, a)$  sur l'état cohérent  $\psi_Z$  en se servant de (2.12).

PROPOSITION 4.5. On a

$$(\psi_Z, \psi_{Z'})_{\frac{1}{2}} = \Psi(Z + \bar{Z}').$$

Appelons fonction de Wigner du couple  $(\psi_Z, \psi_{Z'})$ , et notons  $W(\psi_Z, \psi_{Z'})$ , le symbole passif de l'opérateur  $u \mapsto (u, \psi_{Z'})_{\frac{1}{2}} \psi_Z$ . On a, avec  $J_p$  défini en (2.16) et en désignant de même le prolongement  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $J_p$ , la formule

$$W(\psi_Z, \psi_{Z'})(x; p) = 2^n \Psi(J_p(Z - ix) + \bar{Z}' + ix).$$

Preuve. Le produit scalaire indiqué est aussi celui de  $\mathcal{G}\psi_Z$  et  $\mathcal{G}\psi_{Z'}$ , dans  $L^2(\mathcal{M}, p_0^{-1}d\vec{p})$ , et la première formule résulte donc de (4.5) et de la définition 4.3. D'après la définition 2.3., on a (avec  $\omega = (x; p)$ )

$$(4.6) \quad W(\psi_Z, \psi_{Z'})(\omega) = 2^n (\sigma_\omega \psi_Z, \psi_{Z'})_{\frac{1}{2}} :$$

comme  $P_\omega = (J_p, x - J_p x)$  dans l'écriture du groupe de Poincaré comme produit semi-direct, la proposition 4.4 montre que

$$\sigma_\omega \psi_Z = \psi_{J_p Z + i(x - J_p x)},$$

ce qui conduit à la deuxième formule indiquée.

Comme dans le cas non relativiste de la section 3, il y a trop de fonctions  $\psi_Z$  si l'on fait varier  $Z$  dans  $\Pi$ . La fonction  $\psi_{(1, \vec{0})}$  est déjà invariante par le groupe des rotations spatiales : d'après la proposition 4.4, si, partant de  $\psi_{(1, \vec{0})}$ , on laisse agir d'abord les boosts arbitraires puis les translations purement spatiales on obtient les fonctions

$$(4.7) \quad \varphi_{\vec{x}, p} = \psi_{J_p + i(o, \vec{x})}$$

avec  $p \in \mathcal{M}$  et  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Nous allons établir une formule analogue à la résolution de l'identité (3.19).

PROPOSITION 4.6. Pour toute fonction  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}} |(u, \varphi_{\vec{x}, p})_{\frac{1}{2}}|^2 d\vec{x} d\vec{p} = 4k_{\frac{n+1}{2}}(4) \|u\|_{\frac{1}{2}}^2$$

Preuve. D'après (2.7), pour tout  $\xi = (\xi_0, \vec{\xi}) \in \mathcal{M}$ , on a

$$(4.8) \quad \hat{\varphi}_{\vec{x}, p}(\vec{\xi}) = \xi_0^{-1} (\mathcal{D}_{\varphi_{\vec{x}, p}})(\xi)$$

d'où, d'après (4.5),

$$(4.9) \quad (u, \varphi_{\vec{x}, p})_{\frac{1}{2}} = \int \hat{u}(\vec{\xi}) e^{-2\pi i \langle Jp, \vec{\xi} \rangle} e^{2i\pi \langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle} d\vec{\xi}.$$

L'égalité de Parseval fournit

$$(4.10) \quad \int |(u, \varphi_{\vec{x}, p})_{\frac{1}{2}}|^2 d\vec{x} = \int |\hat{u}(\vec{\xi})|^2 e^{-4\pi i \langle Jp, \vec{\xi} \rangle} d\vec{\xi}$$

et il ne reste plus qu'à prouver l'égalité

$$(4.11) \quad \int_{\mathcal{M}} e^{-4\pi i \langle Jp, \vec{\xi} \rangle} d\vec{p} = 4 k_{\frac{n+1}{2}}(4) \xi_0$$

pour  $\xi \in \mathcal{M}$ : on obtient cette dernière en écrivant

$$\int_{\mathcal{M}} e^{-2\pi i \langle z, Jp \rangle} d\vec{p} = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz_0} (2k_{\frac{n-1}{2}}(r(z)))$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}$  (c'est une conséquence de la proposition 4.3) et en utilisant la proposition 4.2.

Remarque . Le fait de représenter une fonction (ou une distribution)  $u$  à l'aide de ses produits scalaires avec certaines familles de fonctions extraites de la famille  $(\psi_z)$  a également d'autres usages : dans [36], théorèmes 19.2 et 19.3, nous avons donné une caractérisation du front d'onde de  $u$  basée sur une telle représentation.

DÉFINITION 4.7. Si  $a$  est une fonction sommable sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  par rapport à la mesure  $d\vec{x} d\vec{p}$ , on définit l'opérateur  $A$  qui admet  $a$  pour

symbole anti-Wick par la formule

$$Au = \int a(\vec{x}; p) (u, \varphi_{\vec{x}, p}^{\frac{1}{2}}) \varphi_{\vec{x}, p}^{\frac{1}{2}} d\vec{x} dp.$$

Si B est un opérateur continu sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , on définit son symbole de Wick b comme la fonction sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  telle que

$$b(\vec{x}; p) = (B \varphi_{\vec{x}, p}^{\frac{1}{2}}, \varphi_{\vec{x}, p}^{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}.$$

Remarques : 1) il n'est pas souhaitable de prolonger les symboles du genre Wick ou anti-Wick en des fonctions admissibles sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ ; 2) on peut écrire la formule de la proposition 2.7 sous la forme

$$\text{Tr}(B^*A) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}} f(0, \vec{x}; p) \bar{g}(0, \vec{x}; p) d\vec{x} dp$$

(se servir de l'admissibilité de f et g et de (2.23)) dans laquelle  $A = \text{Op}(f)$  et g est le symbole passif de B : cette formule reste valable si l'on y remplace f par le symbole anti-Wick (si celui-ci existe) de A et g par le symbole de Wick de B.

PROPOSITION 4.8. Soit f une fonction admissible vérifiant l'hypothèse de sommabilité de la définition 2.6. Avec

$$\rho(\vec{x}, p; \vec{y}, q) = \langle Jp, q \rangle^2 + |\vec{x} - \vec{y}|^2 + \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{q} \rangle^2,$$

le symbole de Wick b de l'opérateur  $\text{Op}(f)$  est donné par la formule

$$b(\vec{x}, p) = 2^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}} \frac{k_{\frac{n-1}{2}}(\rho(\vec{x}, p; \vec{y}, q))}{2} f(0, \vec{y}; q) d\vec{y} dq.$$

Preuve. D'après la définition (2.23) de  $\text{Op}(f)$  et celle (4.6) des fonctions de Wigner, on a

$$\begin{aligned} (4.12) \quad b(\vec{x}, p) &= (\text{Op}(f) \varphi_{\vec{x}, p}^{\frac{1}{2}}, \varphi_{\vec{x}, p}^{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}} \\ &= \int f(0, \vec{y}; q) W(\varphi_{\vec{x}, p}^{\frac{1}{2}}, \varphi_{\vec{x}, p}^{\frac{1}{2}})(0, \vec{y}; q) d\vec{y} dq. \end{aligned}$$

Posons  $x = (0, \vec{x})$  et  $y = (0, \vec{y})$ , et rappelons que, d'après (2.16),

$$J_q z = -z + 2\langle z, q \rangle Jq$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ . D'après les propositions 4.5 et 4.3 et l'égalité (4.7), la fonction de Wigner qui intervient sous l'intégrale au second membre de (4.12) est

$$W = 2^{n+1} k_{\frac{n-1}{2}}(4\rho)$$

avec

$$4\rho = r(J_q(J_p + ix - iy) + J_p - ix + iy)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \rho &= r(-i(x-y) + \langle J_p + i(x-y), q \rangle J_q) \\ &= -r(x-y) + (\langle J_p, q \rangle + i\langle x-y, q \rangle)^2 \\ &\quad - 2i\langle x-y, q \rangle \langle J_p + i(x-y), q \rangle \\ &= \langle J_p, q \rangle^2 - r(x-y) + \langle x-y, q \rangle^2, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition 4.8.

## V - OPÉRATEURS INVARIANTS SUR L'HYPERBOLOÏDE DE MASSE .

Sur le demi-plan de Poincaré, les noyaux  $k(z, z')$  qui ne dépendent que de la distance hyperbolique de  $z$  et  $z'$  sont ceux d'opérateurs qui peuvent, au sens de la théorie spectrale, s'exprimer comme des fonctions  $f$  de l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta$ . Le passage de  $k$  à  $f$  est assuré au moyen d'une recette (en quatre ou cinq manipulations) qui est décrite par Kubota [17], p.55 et par Hejhal [12], p.15 : l'origine de ce genre de formules semble liée aux travaux relatifs à la formule de Selberg. L'ingrédient essentiel en est une certaine transformation, appelée transformation d'Abel par Faraut [8], transformation d'Harish-Chandra par Lang [20], ou encore transformation de Radon : c'est le nom que nous adopterons, vu qu'elle consiste en l'intégration sur des horicycles (cf [34], p.258).

Dans le cas de l'espace symétrique de rang un  $\mathcal{M} = G/K$  avec  $G = SO_0(1, n)$  et  $K = \{1\} \times SO(n)$  (rappelons que  $e_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}$  est le point fixe sous l'action de  $K$ ), la transformation de Radon est décrite assez complètement par Faraut ([8], p.109) : ce sera notre référence principale. On supposera pour commencer  $n \geq 2$ .

Une décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  est  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{p}$  est l'espace vectoriel des matrices  $X_t$  ( $t \in \mathbb{R}^n$ ) de la forme  $X_t = \begin{pmatrix} 0 & t' \\ t & 0 \end{pmatrix}$ . L'application  $\text{Exp}$  de  $\mathfrak{p}$  vers  $\mathcal{M}$  s'obtient en prenant l'image sur  $e_0$  de la matrice  $e^{\overset{X_t}{t}}$  : on trouve

$$(5.1) \quad p = \text{Exp } X_t = (\text{ch}|t|, \frac{\text{sh}|t|}{|t|} t)$$

d'où il résulte que la distance (au sens de la géométrie de  $\mathcal{M}$ ) de  $e_0$  à  $p$  est donnée par



$$\text{ch } d(e_0, p) = p_0 .$$

Utilisant l'invariance, on obtient pour tout couple  $(p, q)$  de points de  $\mathcal{M}$  l'égalité

$$(5.2) \quad \text{ch } d(p, q) = \langle Jp, q \rangle .$$

Notre propos est d'expliciter, pour  $\theta > 0$ , l'opérateur de noyau  $\exp(-\theta \langle Jp, q \rangle)$ . Dans les calculs formels ci-dessous, il est inutile de préciser les hypothèses de régularité et de sommabilité vu que c'est à ce seul exemple qu'ils seront appliqués. Le sous-groupe  $A$  de la décomposition d'Iwasawa  $G = KAN$  est constitué des matrices  $a_\mu$ , où  $a_\mu$  est le boost de vitesse  $th_\mu$  dans la direction  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  défini au second membre de (1.5). Si  $\varphi$  est une fonction radiale sur  $\mathcal{M}$  (i.e. invariante par  $K$  : ici ce sera  $\varphi(p) = \exp(-\theta p_0)$ ), on peut la considérer comme une fonction  $\varphi$  sur  $G$  bi-invariante par  $K$  : la transformée de Radon  $F_\varphi$  peut alors ([8], p.109) être regardée comme la fonction sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$(5.3) \quad F_\varphi(\mu) = e^{\frac{n-1}{2}\mu} \int_N \varphi(a_\mu n) dn$$

où  $dn$  est la mesure invariante sur  $N$ , convenablement normalisée.

Sur les fonctions radiales, et en posant  $r = \text{Arg ch } p_0$ , l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta$  de  $\mathcal{M}$  se réduit ([8], p.73 ou Helgason [14], p.268) à

$$(5.4) \quad \Delta = \frac{d^2}{dr^2} + (n-1) \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r} \frac{d}{dr} .$$

L'intérêt de la transformation de Radon est la formule ([8], p.110)

$$(5.5) \quad F_{\Delta\varphi} = \left[ \frac{d^2}{d\mu^2} - \left( \frac{n-1}{2} \right)^2 \right] F_\varphi$$

qui permet de transformer un opérateur  $A = f(\Delta)$  en l'opérateur  $\widetilde{A} = f\left(\frac{d^2}{d\mu^2} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right)$  dont le lien avec le noyau intégral est plus évident. En particulier, si

$$(5.6) \quad A = f(\Delta) = h\left((- \Delta - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2)^{\frac{1}{2}}\right),$$

où  $h$  est une fonction paire, on a  $\widetilde{A} = h\left(i \frac{d}{d\mu}\right)$  : si

$$(5.7) \quad h(x) = \int_{\mathbb{R}} g(v) e^{ixv} dv ,$$

on voit que l'opérateur  $\tilde{A}$  s'écrit comme l'opérateur de convolution

$$(5.8) \quad (\tilde{A}\psi)(\mu) = \int_{\mathbb{R}} g(v) \psi(\mu-v) dv .$$

Si  $\psi = F_\varphi$  et si  $g$  est elle-même de la forme  $F_\gamma$ , on peut alors écrire

$$F_{A\varphi} = \tilde{A}F_\varphi = F_\gamma * F_\varphi = F_{\gamma*\varphi}$$

où  $\gamma*\varphi$  représente la convolution des fonctions bi-invariantes  $\gamma$  et  $\varphi$  ([8], p.110) : celle-ci, rappelons-le, est commutative (théorie des paires de Gelfand). En conséquence,

$$(5.9) \quad A\varphi = \gamma*\varphi$$

pour une certaine mesure de Haar normalisée  $dg$  sur  $G$ .

Si  $\varphi$  est une fonction  $K$ -invariante à droite sur  $G$ , ou si l'on préfère une fonction  $\varphi = \varphi(p)$  sur  $\mathcal{M}$ , on a

$$(5.10) \quad \int_G \varphi(g) dg = \int_{\mathcal{M}} \varphi(p) p_o^{-1} d\vec{p} .$$

Le lecteur soupçonneux, qui mettrait en doute la compatibilité des normalisations de  $dg$  qui ont permis d'écrire (5.9) et (5.10), pourra s'il le veut multiplier le membre de droite de (5.10) par une constante  $c$  : une vérification numérique à la fin de cette section le convaincra que  $c = 1$ . On a

$$(5.11) \quad (\gamma*\varphi)(g) = \int \gamma(g'^{-1}g) \varphi(g') dg' .$$

Soient  $p = g.e_o$  et  $q = g'.e_o$  et supposons  $\gamma$  bi-invariante de sorte que  $\gamma(p) = \gamma_1(d(e_o, p))$  pour une certaine fonction  $\gamma_1$  : alors  $\gamma(g'^{-1}g) = \gamma_1(d(p, q))$  et enfin, d'après (5.9), (5.11) et (5.10),

$$(5.12) \quad (A\varphi)(p) = \int_{\mathcal{M}} \gamma_1(d(p, q)) \varphi(q) q_o^{-1} d\vec{q} .$$

Ce résultat n'est établi que lorsque  $\varphi$  est elle-même une fonction

radiale mais (notre problème étant de calculer  $A = f(\Delta)$  connaissant  $\gamma_1$ ) cela suffit puisqu'un opérateur invariant est complètement déterminé par son action sur les fonctions radiales.

Il n'y a plus qu'à remonter la chaîne des calculs qui précèdent.

PROPOSITION 5.1. - Pour tout  $n \geq 1$ , l'opérateur  $A$  sur  $L^2(\mathcal{M}, p_0^{-1} d\vec{p})$  dont le noyau intégral est la fonction  $\exp-\theta \langle Jp, q \rangle$  (avec  $\theta > 0$ ) est donné par

$$A = 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \theta^{\frac{1-n}{2}} K_{i[-\Delta - (\frac{n-1}{2})^2]^{\frac{1}{2}}}(\theta) .$$

Preuve . Supposons d'abord  $n \geq 2$ . La fonction  $\gamma_1$  qui intervient dans (5.12) est  $\gamma_1(r) = e^{-\theta \text{ch } r}$  et, avec  $\gamma(p) = e^{-\theta p_0}$ , il faut pour commencer déterminer  $F_\gamma$  définie en (5.3). D'après [8], p.113, on a

$$\begin{aligned} (5.13) \quad g(\mu) = F_\gamma(\mu) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp-\theta(\text{ch } \mu + \frac{|z|^2}{2}) dz \\ &= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \theta^{\frac{1-n}{2}} e^{-\theta \text{ch } \mu} . \end{aligned}$$

D'après (5.7) et la formule de ([22], p.86) qui donne la transformée de Fourier de la fonction  $\mu \mapsto e^{-\theta \text{ch } \mu}$ , on a donc

$$(5.14) \quad h(x) = 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \theta^{\frac{1-n}{2}} K_{ix}(\theta) ,$$

ce qui conduit au résultat d'après (5.6).

Dans le cas où  $n = 1$ , l'application  $(p_0, \vec{p}) \mapsto \text{Arg sh } \vec{p} = x$  est une isométrie de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathbb{R}$  muni de la métrique  $ds^2 = dx^2$  et l'on a affaire à l'opérateur de convolution ordinaire (sur  $\mathbb{R}$ ) par la fonction  $e^{-\theta \text{ch } x}$  : on termine comme dans le passage de (5.13) à (5.14).

Pour vérifier qu'il n'entre pas dans la formule de constante supplémentaire (voir la remarque qui suit immédiatement (5.10)), nous allons voir ce qu'elle devient lorsque  $\theta \rightarrow \infty$ . Comme, d'après la proposition 4.3,

$$\int e^{-\theta p_0} p_0^{-1} d\vec{p} = 2k_{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{\theta^2}{4\pi^2} \right) \\ = 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \theta^{\frac{1-n}{2}} K_{\frac{n-1}{2}}(\theta) ,$$

on voit que l'opérateur qui est le quotient par cette intégrale  $\alpha(\theta)$  de l'opérateur de noyau  $\exp-\theta \langle Jp, q \rangle$  tend vers l'identité lorsque  $\theta \rightarrow \infty$  : on notera aussi ([22], p.139) que

$$(5.15) \quad \alpha(\theta) \sim 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \theta^{\frac{1-n}{2}} \left( \frac{\pi}{2\theta} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\theta} , \theta \rightarrow \infty .$$

Par ailleurs, si l'on définit  $A$  comme le second membre de l'identité énoncée dans la proposition 5.1, et si  $\varphi$  appartient à l'image du projecteur spectral (relatif à  $\Delta$ ) correspondant à une partie compacte du spectre, la même formule asymptotique montre que  $(\alpha(\theta))^{-1} A\varphi$  tend vers  $\varphi$  dans  $L^2(\mathcal{M} ; p_0^{-1} d\vec{p})$  lorsque  $\theta \rightarrow \infty$  : ceci montre que si la formule énoncée dans la proposition 5.1. n'était vraie qu'à la multiplication près du membre de droite par une constante, cette constante serait égale à 1.



# VI - LIEN ENTRE LES SYMBOLES DE KLEIN-GORDON ET DE WICK RELATIVISTE

Le théorème 2.8 exprime le lien  $g = \nabla^{-n} f$  entre les symboles actif  $f$  et passif  $g$  d'un même opérateur : rappelons (2.24) que

$$\nabla^\lambda = (1 + (4\pi)^{-2} \square)^{\lambda/2} .$$

Par ailleurs, la proposition 4.8 donne le noyau intégral de l'opérateur qui fait passer de  $f$  au symbole de Wick (relativiste)  $b$  de l'opérateur. A l'aide de la proposition 5.1, nous allons exprimer cet opérateur de passage comme une fonction des opérateurs  $\square$  et  $\Delta$ , où  $\Delta = \Delta_{\mathcal{M}}$  est l'opérateur de Laplace Beltrami de  $\mathcal{M}$  : ces deux opérateurs, agissant sur des fonctions de  $(x,p) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ , commutent, et sont essentiellement autoadjoints sur  $L^2(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}; p_0^{-1} d\vec{x} d\vec{p})$ .

DÉFINITION 6.1. Soit  $\mathcal{E}$  l'espace vectoriel des fonctions  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ , à dérivées de tous ordres bornées, dont le support admet une projection sur  $\mathcal{M}$  relativement compacte, et qui vérifient enfin la condition suivante : sur le support de  $(\mathcal{F}_1 f)(\xi; p)$ , transformée de Fourier de  $f$  relativement aux variables d'espace-temps, on a

$$-r(\xi) = |\vec{\xi}|^2 - \xi_0^2 \geq \frac{1}{2} p_0^{-2} |\xi|^2 .$$

L'opérateur

$$B = 2^{\frac{3-n}{2}} \nabla^{-\frac{n+1}{2}} K_{i[-\Delta - (\frac{n-1}{2})^2]^{\frac{1}{2}} (4\pi \nabla)}$$

est celui défini, sur  $\mathcal{F}_1 \mathcal{E}$ , par la formule

$$\mathcal{F}_{1B} \mathcal{F}_1^{-1} = 2^{\frac{3-n}{2}} \left(1 - \frac{r(\xi)}{4}\right)^{-\frac{n+1}{4}} K_{i[-\Delta - (\frac{n-1}{2})^2]^{\frac{1}{2}}} (4\pi(1 - \frac{r(\xi)}{4})^{\frac{1}{2}}) .$$

Remarques : 1) pour des fonctions à support dans une partie compacte fixe de  $\mathcal{M}$ , il n'est pas nécessaire de tenir compte de la géométrie intrinsèque de cet espace pour définir la notion correcte de fonction  $C^\infty$  à dérivées bornées ; 2) dans le cas où  $f$  est admissible, la condition sur le support de  $f$  est vérifiée en vertu de l'équation différentielle  $\langle Jp, \frac{\partial f}{\partial x} \rangle = 0$  (cf. supra, juste après (2.26)).

Avec  $\theta = 4\pi(1 - \frac{r(\xi)}{4})^{\frac{1}{2}}$ , la proposition 5.1 montre que le noyau de l'opérateur

$$2^{\frac{3-n}{2}} \left(1 - \frac{r(\xi)}{4}\right)^{\frac{1-n}{4}} K_{i[-\Delta - (\frac{n-1}{2})^2]^{\frac{1}{2}}} (4\pi(1 - \frac{r(\xi)}{4})^{\frac{1}{2}})$$

est la fonction

$$\exp(-4\pi(1 - \frac{r(\xi)}{4})^{\frac{1}{2}} \langle Jp, q \rangle) .$$

Par suite

$$(6.1) \quad (\mathcal{F}_{1B} f)(\xi; p) = \left(1 - \frac{r(\xi)}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \int \exp(-4\pi(1 - \frac{r(\xi)}{4})^{\frac{1}{2}} \langle Jp, q \rangle) (\mathcal{F}_1 f)(\xi; q) q_0^{-1} d\vec{q} .$$

Soit  $\beta$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\beta(t) = 1$  pour  $t \leq 0$  et  $\beta(t) = 0$  pour  $t \geq 1$ , et posons

$$(6.2) \quad \varphi(\xi) = \beta(r(\xi)) + \frac{1}{2} q_0^{-2} |\xi|^2 .$$

Il est permis sans rien changer d'insérer sous l'intégrale le facteur supplémentaire  $\varphi(\xi)$  et comme une dérivée d'ordre quelconque de la fonction

$$\varphi(\xi) \exp(-4\pi(1 - \frac{r(\xi)}{4})^{\frac{1}{2}} \langle Jp, q \rangle)$$

peut, pour tout  $N$ , être majorée par  $C(1+|\xi|)^{-N}$  avec une constante  $C$  indépendante de  $(\xi, p, q)$ , on voit que  $Bf$  est bien définie et a des dérivées de tous ordres bornées. En revanche,  $Bf$  ne vérifie en géné-

ral aucune des deux conditions de support de la définition 6.1.

Supposons désormais  $f$  admissible (il n'en sera pas de même pour  $Bf$  pour autant) c'est-à-dire

$$(6.3) \quad f(t, \vec{x}; q) = f(0, \vec{x} + tq_0^{-1} \vec{q}; q)$$

et posons  $f_0(\vec{x}; q) = f(0, \vec{x}; q)$ . Alors

$$(6.4) \quad (\mathcal{F}_1 f)(\xi; q) = (\mathcal{F}_1 f_0)(\xi; q) \delta(\xi_0 - q_0^{-1} \langle \vec{q}, \vec{\xi} \rangle).$$

Posons

$$(6.5) \quad H_q(\vec{\xi}) = (1 - \frac{r(\xi)}{4})^{-\frac{1}{2}} \exp(-4\pi(1 - \frac{r(\xi)}{4})^{\frac{1}{2}} \langle Jp, q \rangle)$$

avec

$$(6.6) \quad \xi = (\xi_0, \vec{\xi}) = (q_0^{-1} \langle \vec{q}, \vec{\xi} \rangle, \vec{\xi}).$$

Alors (6.1) et (6.4) permettent d'écrire

$$(6.7) \quad (Bf)(0, \vec{x}; p) = \int H_q(\vec{\xi}) e^{2i\pi \langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle} (\mathcal{F}_1 f_0)(\vec{\xi}; q) q_0^{-1} d\vec{\xi} d\vec{q} \\ = \int (\mathcal{F}^{-1} H_q)(\vec{x} - \vec{y}) f(0, \vec{y}; q) q_0^{-1} d\vec{y} d\vec{q}.$$

Soit  $\Lambda$  le boost attaché à  $q$  au moyen des formules (2.20) : puisque  $\xi_0 = q_0^{-1} \langle \vec{q}, \vec{\xi} \rangle$ , on a  $\langle J\xi, q \rangle = 0$  i.e.  $J\xi \in E_q$  au sens de la définition 2.5. On a donc, pour un certain  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$  (unique) l'égalité

$$(6.8) \quad J\xi = (\xi_0, -\vec{\xi}) = \Lambda(0, \vec{\eta}) = \Lambda_{\vec{\eta}}.$$

D'après (2.20), on a

$$(6.9) \quad \vec{\xi} = -\vec{\eta} - (1 + q_0)^{-1} \langle \vec{\eta}, \vec{q} \rangle \vec{q}$$

et de plus  $d\vec{\xi} = q_0 d\vec{\eta}$  : enfin  $r(\xi) = r(\eta) = -|\vec{\eta}|^2$ .

Effectuant (en partant de (6.5)) ce changement de variable pour calculer  $\mathcal{F}^{-1} H_q$ , on obtient

$$(6.10) \quad (\mathcal{F}^{-1} H_q)(\vec{x} - \vec{y}) = \int (1 + \frac{|\vec{\eta}|^2}{4})^{-\frac{1}{2}} e^{2i\pi \langle \vec{\xi}, \vec{x} - \vec{y} \rangle} \exp(-4\pi \langle Jp, q \rangle (1 + \frac{|\vec{\eta}|^2}{4})^{\frac{1}{2}}) q_0 d\vec{\eta}.$$



On note que

$$(6.11) \quad \langle \vec{\xi}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = \langle \vec{\eta}, \vec{y} - \vec{x} \rangle + (1 + q_0)^{-1} \langle \vec{q}, \vec{y} - \vec{x} \rangle \langle \vec{q} \rangle$$

et que

$$(6.12) \quad |\vec{y} - \vec{x} + (1 + q_0)^{-1} \langle \vec{q}, \vec{y} - \vec{x} \rangle \vec{q}|^2 \\ = |\vec{y} - \vec{x}|^2 + \langle \vec{q}, \vec{y} - \vec{x} \rangle^2.$$

D'après la proposition 4.3, on a donc

$$(6.13) \quad (\mathcal{F}^{-1} H_q)(\vec{x} - \vec{y}) = 2^{n+1} q_0 k_{\frac{n-1}{2}}(4\rho)$$

avec

$$(6.14) \quad \rho = \langle Jp, q \rangle^2 + |\vec{x} - \vec{y}|^2 + \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{q} \rangle^2.$$

Finalement (en reprenant (6.7))

$$(6.15) \quad (Bf)(0, \vec{x}; p) = 2^{n+1} \int k_{\frac{n-1}{2}}(4\rho) f(0, \vec{y}; q) d\vec{y} d\vec{q}$$

et la proposition 4.8 montre que la fonction

$$(\vec{x}; p) \mapsto (Bf)(0, \vec{x}; p)$$

n'est autre que le symbole de Wick de l'opérateur  $Op(f)$  dans le cas où la fonction  $f$  est sommable sur  $\mathbb{E}$  au sens de la définition 2.6 et vérifie les hypothèses de la définition 6.1. Ces dernières (mais non celle de sommabilité) sont conservées après application des puissances de  $\nabla$ , ce qui fournit l'identité suivante.

**THÉORÈME 6.2.** Soit  $g$  le symbole passif d'un opérateur  $Op(f)$ , où  $f$  est sommable sur  $\mathbb{E}$  au sens de la définition 2.6 et où  $f$  (ou  $g$ , cela revient au même) vérifie les hypothèses de la définition 6.1. Le symbole de Wick  $b$  de l'opérateur est donné par

$$b(\vec{x}; p) = (C(\square, \Delta_{\mathcal{M}})g)(0, \vec{x}; p)$$

avec

$$C(\square, \Delta) = 2^{\frac{3-n}{2}} \left(1 + \frac{\square}{16\pi^2}\right)^{\frac{n-1}{4}} K_{i[-\Delta - (\frac{n-1}{2})^2]^{\frac{1}{2}}} (4\pi(1 + \frac{\square}{16\pi^2})^{\frac{1}{2}}).$$

Le théorème 6.2 est l'analogue relativiste de la formule (3.23).  
Déjà dans le cas non-relativiste, il est impossible de remonter de

b à g sans avoir à résoudre des équations de la chaleur rétrogrades. Ici, la formule a des aspects plus mystérieux puisque la fonction  $v \mapsto K_{iv}(x)$  a, pour tout  $x > 0$ , une infinité de zéros. En particulier, si la correspondance  $g \mapsto b$  est étendue de façon à permettre à g des propriétés de croissance convenables, elle cesse d'être injective : le même phénomène se produit dans la quantification des espaces hermitiens symétriques, et met en lumière un défaut inhérent au calcul de Wick et à ses généralisations (voir [35],[40] pour une discussion).

On aura garde de croire que (comme le calcul de Klein-Gordon) le calcul de Wick relativiste, tel que nous l'avons défini, soit covariant sous l'action du groupe de Poincaré : il dépend en effet du choix que nous avons fait de la famille des états cohérents  $\varphi_{\vec{x},p}$  ; aucune famille d'états cohérents pour laquelle il existe une formule de résolution de l'identité (prop.4.6) ne peut être invariante par l'action de tout le groupe de Poincaré. Cela résulte de ce que la représentation de Bargmann-Wigner n'est pas de carré intégrable, et a été remarqué par exemple par Ali, Antoine et Gazeau [1], qui ont systématisé dans ce genre de situation une méthode de construction d'états cohérents.

Cependant, la famille  $(\varphi_{\vec{x},p})$ , bien adaptée à notre propos, est invariante par les translations purement spatiales. La famille

$$(6.16) \quad \chi_{x,p} = \psi_{Jp+ix}$$

étendue aux  $(x,p) \in \mathbb{E}$ , c'est-à-dire aux  $(x,p)$  vérifiant  $\langle x,p \rangle = 0$ , est au contraire invariante par le groupe de Lorentz. Elle conduit tout aussi facilement à une résolution de l'identité analogue à la proposition 4.6, à la constante près que nous n'avons pas calculée : sur  $\mathbb{E}$ , c'est bien sûr la mesure  $p_0^{-2} d\vec{x} d\vec{p}$  qu'il faut employer.

#### La formule

$$(6.17) \quad \tilde{b}(x;p) = (B\chi_{x,p}, \chi_{x,p})_{\frac{1}{2}}$$

définit une autre notion de symbole de Wick relativiste, covariante cette fois à l'égard du groupe de Lorentz. Comme  $\chi_{o,\vec{x};e_o} = \varphi_{\vec{x};e_o}$  si  $e_o$  est le point de base de  $\mathcal{M}$ , les deux espèces de symboles de Wick relativistes coïncident en ces points. Comme l'opérateur  $C(\square, \Delta_{\mathcal{M}})$

commute à l'action du groupe de Lorentz, on voit que l'on peut écrire, sous les hypothèses du théorème 6.2, la formule

$$(6.18) \quad \tilde{b}(x;p) = (C(\square, \Delta_{\mathcal{M}})g)(x;p)$$

pour tout  $(x;p) \in \mathbb{E}$ .

Le calcul symbolique que nous allons développer tout au long de cet ouvrage, cependant, est lié au choix de la famille  $(\varphi_{\vec{x},p})$  et il ne serait pas trivial de passer de là au calcul adapté à la famille  $(\chi_{x,p})$  : bien entendu, c'est le même problème que l'on rencontre dans le calcul de Weyl (voir [31] pour l'usage des états cohérents gaussiens) lorsqu'on souhaite définir des classes de symboles "à géométrie variable", i.e. associées à une fonction de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  à valeurs dans l'ensemble des normes symplectiques sur  $\mathbb{R}^n$ .

# VII - SYMBOLE DE KLEIN-GORDON, SYMBOLE STANDARD ET AUTRES.

Notre propos étant de faire du calcul de Klein-Gordon un calcul des opérateurs sur  $\mathbb{R}^n$  aussi performant que l'est, par exemple, le calcul de Weyl, la première chose à faire est d'exhiber pour ce calcul l'analogue du théorème de continuité de Calderon-Vaillancourt.

Le résultat sera une caractérisation analogue à (3.20) faisant intervenir l'action d'un opérateur sur les états cohérents définis en (4.7). La preuve est assez longue, et nécessite l'introduction d'une famille à un paramètre de symboles d'un type nouveau, liés au symbole standard de l'opérateur A considéré : ce dernier est le symbole  $a_0$  dans la théorie pseudo-différentielle la plus ancienne, où l'on fait agir les convolutions avant les multiplications. Rappelons les formules équivalentes très classiques

$$(7.1) \quad Au(\vec{x}) = \int a_0(\vec{x}, \vec{\xi}) e^{2i\pi \langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle} \hat{u}(\vec{\xi}) d\vec{\xi}$$

et

$$(7.2) \quad \widehat{Au}(\vec{n}) = \int (\mathcal{F}_1^{-1} a_0)(\vec{\xi} - \vec{n}, \vec{\xi}) \hat{u}(\vec{\xi}) d\vec{\xi}$$

dans laquelle  $\mathcal{F}_1^{-1} a_0$  désigne la transformée de Fourier inverse de  $a_0(\vec{x}, \vec{\xi})$  par rapport à  $\vec{x}$ .

Supposons que A soit de la forme  $Op(f)$  au sens du calcul de Klein-Gordon : f est une fonction admissible sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ , identifiable à sa restriction à  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , et cela facilitera la comparaison entre f et  $a_0$  de poser

$$(7.3) \quad f_0(\vec{x}, \vec{p}) = f(0, \vec{x}; \langle \vec{p} \rangle, \vec{p})$$

avec, rappelons-le,  $\langle \vec{p} \rangle^2 = 1 + |\vec{p}|^2$ . Bien entendu, l'action du groupe

de Poincaré perd sa simplicité si on la décrit sur  $f_0$  plutôt que  $f$  : mais cela est dans la nature des choses puisque, comme nous l'avons annoncé dès la section 3, les classes de symboles ne seront pas (et ne sauraient être) invariantes sous l'action du groupe de Poincaré ; de plus, le point de vue "solipsiste" adopté, qui privilégie la classe des observateurs liés à l'observateur de référence par une translation purement spatiale, est entièrement compatible avec le choix des états cohérents. Signalons enfin, pour répondre à une éventuelle question du lecteur, qu'il n'y aurait pour le moment que des désavantages à vouloir comparer le symbole de Klein-Gordon à celui de Weyl.

PROPOSITION 7.1. Le symbole actif de Klein-Gordon  $f$  et le symbole standard  $a_0$  d'un même opérateur sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  sont liés par les formules

$$a_0(\vec{x}, \vec{\xi}) = 2^n \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{2i\pi \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{\xi} - S_p \vec{\xi} \rangle} f_0(\vec{y}, \vec{p}) d\vec{y} d\vec{p}$$

et

$$f_0(\vec{y}, \vec{p}) = 2^n \int e^{-2i\pi \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{\xi} - S_p \vec{\xi} \rangle} a_0(\vec{x}, \vec{\xi}) \xi_0^{-1}(S_p \vec{\xi})_0 (\langle \vec{\xi}, J_p \vec{p} \rangle)^n d\vec{x} d\vec{\xi}$$

dans lesquelles  $S_p$  a été défini en (2.15), et où l'on a posé  $\vec{x} = (0, \vec{x})$ ,  $\vec{y} = (0, \vec{y})$ ,  $\vec{\xi} = (\langle \vec{\xi} \rangle, \vec{\xi})$  et  $\vec{p} = (\langle \vec{p} \rangle, \vec{p})$ .

Preuve. On suppose l'hypothèse de sommabilité de la définition 2.6 remplie, ce qui revient à dire (cf. (2.22)) que  $f_0(\vec{y}, \vec{p})$  est sommable relativement à la mesure  $d\vec{y} d\vec{p}$ , et l'on utilise la définition (2.23) de  $A = Op(f)$  sous la forme

$$(7.4) \quad (\mathcal{U}Au)(\eta) = 2^n \int f_0(\vec{y}, \vec{p}) (\mathcal{U}\sigma_{(y;p)}u)(\eta) d\vec{y} d\vec{p}.$$

D'après (2.14) et (2.15), on a

$$(7.5) \quad (\mathcal{U}\sigma_{(y;p)}u)(\eta) = (\mathcal{U}u)(S_p \eta) \exp 2i\pi \langle \vec{y}, S_p \eta - \eta \rangle$$

avec, rappelons-le (2.7),  $(\mathcal{U}u)(p) = p_0 \hat{u}(\vec{p})$ . Dans (7.4), éliminons la variable  $p$  au profit de  $\xi = S_p \eta$  : comme  $\mathcal{M}$  est un espace riemannien symétrique de type non-compact ([13], chapitre 6), il y a pour tout couple  $(\xi, \eta)$  de points de  $\mathcal{M}$  un unique  $p \in \mathcal{M}$  vérifiant cette égalité, c'est le milieu géodésique  $\text{mil}(\xi, \eta)$  de  $(\xi, \eta)$ . Si l'on dérive l'égalité

$$\xi = S_p \eta = -\eta + 2\langle \eta, Jp \rangle p$$

sans oublier de dériver le terme  $\eta_0 p_0$  de  $\langle \eta, Jp \rangle$ , on obtient

$$(7.6) \quad \frac{\partial \xi_j}{\partial p_k} = 2 \langle \eta, Jp \rangle \delta_{jk} + 2 \left( \eta_0 \frac{p_k}{p_0} - \eta_k \right) p_j$$

d'où, d'après l'appendice,

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \frac{d\vec{\xi}}{d\vec{p}} &= 2^n \langle \eta, Jp \rangle^{n-1} \left\{ \langle \eta, Jp \rangle + \eta_0 \frac{p_0^2 - 1}{p_0} - \langle \vec{\eta}, \vec{p} \rangle \right\} \\ &= 2^n \langle \eta, Jp \rangle^{n-1} \left[ 2\langle \eta, Jp \rangle - \frac{\eta_0}{p_0} \right] = 2^n \langle \eta, Jp \rangle^{n-1} \frac{\xi_0}{p_0} . \end{aligned}$$

Ce changement de variable effectué, il reste (partant de (7.4))

$$(7.8) \quad \begin{aligned} \widehat{Au}(\vec{\eta}) &= \int f_0(\vec{y}, \vec{p}) e^{2i\pi \langle \vec{y}, \vec{\xi} - \vec{\eta} \rangle} \langle \eta, Jp \rangle^{1-n} \frac{p_0}{\eta_0} \hat{u}(\vec{\xi}) d\vec{y} d\vec{\xi} \\ &= \int (\mathcal{F}_1^{-1} f_0)(\vec{\xi} - \vec{\eta}, \vec{p}) \langle \eta, Jp \rangle^{1-n} \frac{p_0}{\eta_0} \hat{u}(\vec{\xi}) d\vec{\xi} , \end{aligned}$$

toujours avec  $p = \text{mil}(\xi, \eta)$ . Si l'on compare avec (7.2), on trouve la relation liant  $a_0$  et  $f_0$  sous la forme

$$(7.9) \quad (\mathcal{F}_1^{-1} a_0)(\vec{\xi} - \vec{\eta}, \vec{\xi}) = \frac{p_0}{\eta_0} \langle \eta, Jp \rangle^{1-n} (\mathcal{F}_1^{-1} f_0)(\vec{\xi} - \vec{\eta}, \vec{p})$$

avec  $\xi, \eta, p \in \mathcal{M}$  et  $p = \text{mil}(\xi, \eta)$ .

On en déduit

$$(7.10) \quad a_0(\vec{x}, \vec{\xi}) = \int \frac{p_0}{\eta_0} \langle \eta, Jp \rangle^{1-n} e^{2i\pi \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{\xi} - \vec{\eta} \rangle} f_0(\vec{y}, \vec{p}) d\vec{y} d\vec{\eta}$$

ce qui constitue, après le changement de variable  $\eta = S_p \xi$  dont le jacobien est (cf(7.7)) donné par

$$\frac{d\vec{\eta}}{d\vec{p}} = 2^n \langle \xi, Jp \rangle^{n-1} \frac{\eta_0}{p_0} = 2^n \langle \eta, Jp \rangle^{n-1} \frac{\eta_0}{p_0} ,$$

la première des formules qui font l'objet de la proposition 7.1.

Pour résoudre (7.9) dans l'autre sens il s'agit, en posant  $\vec{\zeta} = \vec{\xi} - \vec{\eta}$ , de résoudre en  $\vec{\xi}$  l'équation  $\vec{\xi} - S_p \xi = \vec{\zeta}$ , c'est-à-dire

$$(7.11) \quad \frac{1}{2} \vec{\zeta} = \vec{\xi} - \langle \xi, Jp \rangle \vec{p}.$$

En rappelant que  $\langle \vec{\xi}, \vec{p} \rangle = \xi_0 p_0 - \langle \xi, Jp \rangle$ , on en déduit

$$\frac{1}{2} \langle \vec{\zeta}, \vec{p} \rangle = p_0 \xi_0 - p_0^2 \langle \xi, Jp \rangle$$

d'où

$$(7.12) \quad \vec{\xi} = \frac{1}{2} \vec{\zeta} - \frac{\langle \vec{\zeta}, \vec{p} \rangle}{2p_0^2} \vec{p} + \frac{\xi_0}{p_0} \vec{p},$$

$\xi_0$  devant en outre être déterminé par le fait que  $\xi_0^2 = |\vec{\xi}|^2 + 1$  : cette dernière équation s'écrit  $\varphi(\xi_0) = 0$  avec

$$(7.13) \quad \varphi(t) = t^2 - \frac{\langle \vec{\zeta}, \vec{p} \rangle}{p_0} t - p_0^2 \left[ 1 + \frac{1}{4} |\vec{\zeta}|^2 - \frac{\langle \vec{\zeta}, \vec{p} \rangle^2}{p_0^2} \right].$$

En développant tout, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \frac{1}{4} (1 + p_0^{-2}) \langle \vec{\zeta}, \vec{p} \rangle^2 - p_0^{-1} \langle \vec{\zeta}, \vec{p} \rangle + 1 - p_0^2 - \frac{1}{4} p_0^2 |\vec{\zeta}|^2 \\ &\leq \frac{1}{4} (1 + p_0^{-2}) |\vec{\zeta}|^2 |\vec{p}|^2 + p_0^{-1} |\vec{\zeta}| |\vec{p}| + 1 - p_0^2 - \frac{1}{4} p_0^2 |\vec{\zeta}|^2 \\ &= -\left(\frac{1}{2} p_0^{-1} |\vec{\zeta}| - |\vec{p}|\right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

et la racine  $> 0$  de l'équation  $\varphi(t) = 0$  est  $\geq 1$ . Le changement de variable  $\vec{\xi} \mapsto \vec{\zeta}$  défini en (7.11) est donc licite (il est inutile de l'inverser explicitement) et comme

$$(7.14) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \xi_k} = \delta_{jk} - \left( p_0 \frac{\xi_k}{\xi_0} - p_k \right) p_j$$

on a (cf. appendice)

$$\begin{aligned} (7.15) \quad 2^{-n} \frac{d\vec{\zeta}}{d\vec{\xi}} &= 1 - \frac{p_0}{\xi_0} \langle \vec{\xi}, \vec{p} \rangle + |\vec{p}|^2 \\ &= \frac{p_0}{\xi_0} \langle \xi, Jp \rangle, \end{aligned}$$

d'où

$$(7.16) \quad f_0(\vec{y}, \vec{p}) = 2^n \int (\mathcal{F}_1^{-1} f_0)(\vec{\xi} - \vec{\eta}, \vec{p}) e^{-2i\pi \langle \vec{y}, \vec{\xi} - \vec{\eta} \rangle} \frac{p_0}{\xi_0} \langle \xi, Jp \rangle d\vec{\xi}.$$

Comme  $\langle \xi, Jp \rangle = \langle \eta, Jp \rangle$  lorsque  $p = \text{mil}(\xi, \eta)$ , (7.9) donne alors

$$(7.17) \quad f_0(\vec{y}, \vec{p}) = 2^n \int \frac{\eta_0}{\xi_0} \langle \xi, Jp \rangle^n (\mathcal{F}_1^{-1} a_0)(\vec{\xi} - \vec{\eta}, \vec{\xi}) e^{-2i\pi \langle \vec{y}, \vec{\xi} - \vec{\eta} \rangle} d\vec{\xi},$$

ce qui termine la preuve de la proposition 7.1.

COROLLAIRE 7.2. Un opérateur de convolution a mêmes symboles standard et de Klein-Gordon.

Preuve. Elle est un peu prématurée puisqu'un symbole  $f(x;p)$  ne dépendant que de  $p$  ne peut vérifier l'hypothèse de sommabilité de la définition 2.6. Néanmoins, dans le cadre de définitions étendues qui seront données plus loin, il s'agit de voir ce que devient  $a_0$ , défini dans la proposition 7.1, lorsque  $f_0 = f_0(\vec{p})$ .

Avec  $\vec{\zeta}$  défini en (7.11) on a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \zeta_j}{\partial p_k} = - \langle \xi, Jp \rangle \delta_{jk} + (\xi_k - \xi_0 \frac{p_k}{p_0}) p_j$$

ce qui montre (cf. appendice) que

$$2^{-n} \frac{d\vec{\zeta}}{d\vec{p}} = (\langle \xi, Jp \rangle)^{n-1} (2\langle \xi, Jp \rangle - \frac{\xi_0}{p_0})$$

se réduit à 1 lorsque  $\vec{\xi} - \vec{S_p \xi} = 0$ , i.e.  $p = \xi$ . Le corollaire 7.2 se déduit de là, et de la proposition 7.1.

Il est nécessaire, pour des raisons techniques, d'introduire de nouvelles espèces de symboles.

**DÉFINITION 7.3.** Soit  $A = Op(f)$  au sens de la définition 2.6, et soit  $\lambda$  un nombre réel. Le  $\lambda$ -symbole  $a_\lambda$  de  $A$  est défini par l'identité

$$(\mathcal{F}_1^{-1} a_\lambda)(\vec{\xi} - \vec{\eta}; \vec{\xi}) = \frac{p_0}{\eta_0} (\langle \eta, Jp \rangle)^{1-n} (\langle \xi, J\eta \rangle)^\lambda (\mathcal{F}_1^{-1} f_0)(\vec{\xi} - \vec{\eta}; \vec{p}) \text{ avec}$$

$\xi, \eta, p \in \mathcal{M}$  et  $p = \text{mil}(\xi, \eta)$ .

Remarque. D'après (7.9), la notation est, lorsque  $\lambda = 0$ , consistante avec la notation  $a_0$  du symbole standard. On a pour tout  $\lambda$

$$(7.18) \quad (\mathcal{F}_1^{-1} a_\lambda)(\vec{\xi} - \vec{\eta}; \vec{\xi}) = (\langle \xi, J\eta \rangle)^\lambda (\mathcal{F}_1^{-1} a_0)(\vec{\xi} - \vec{\eta}; \vec{\xi})$$

d'où, d'après (7.2),

$$(7.19) \quad \hat{Au}(\vec{\eta}) = \int (\mathcal{F}_1^{-1} a_\lambda)(\vec{\xi} - \vec{\eta}; \vec{\xi}) (\langle J\xi, \eta \rangle)^{-\lambda} \hat{u}(\vec{\xi}) d\vec{\xi}$$

pour toute fonction  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Notons la relation

$$(7.20) \quad \langle \xi, J\eta \rangle = 2(\langle \xi, Jp \rangle)^{2-1},$$

conséquence de la relation  $\eta = S_p \xi = -\xi + 2\langle \xi, Jp \rangle p$ .



PROPOSITION 7.4. Le lien entre le symbole actif de Klein-Gordon  $f$  et le  $\lambda$ -symbole  $a_\lambda$  du même opérateur est donné par les formules

$$a_\lambda(\vec{x}, \vec{\xi}) = 2^n \int e^{2i\pi \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{\xi} - S_p \vec{\xi} \rangle} f_0(\vec{y}, \vec{p}) (\langle J_\xi, S_p \vec{\xi} \rangle)^\lambda d\vec{p} d\vec{y}$$

et

$$f_0(\vec{y}, \vec{p}) = 2^n \int e^{-2i\pi \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{\xi} - S_p \vec{\xi} \rangle} a_\lambda(\vec{x}, \vec{\xi}) \xi_0^{-1} (S_p \vec{\xi})_0 (\langle \xi, J_p \rangle)^n (\langle J_\xi, S_p \vec{\xi} \rangle)^{-\lambda} d\vec{x} d\vec{\xi}.$$

Preuve. Il y a un facteur de plus à insérer dans la preuve de la proposition 7.1.

PROPOSITION 7.5. Soit  $a_\lambda$  le  $\lambda$ -symbole d'un opérateur  $A$  et soient  $u$  et  $v \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ . On a

$$(Au, v) = \int \bar{w}_\xi(\vec{x}) e^{2i\pi \langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle} a_\lambda(\vec{x}, \vec{\xi}) \hat{u}(\vec{\xi}) d\vec{x} d\vec{\xi}$$

si  $w_\xi$  est la fonction définie par l'égalité

$$\hat{w}_\xi(\vec{\eta}) = (\langle J_\xi, \vec{\eta} \rangle)^{-\lambda} \hat{v}(\vec{\eta}).$$

Preuve. Remarquons d'abord que l'opérateur  $a_\lambda \mapsto a_0$  défini en (7.18) conserve les distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^{2n}$  ce qui, d'après les faits élémentaires connus relatifs au calcul standard des opérateurs pseudo-différentiels, permet de définir  $A$  en tant qu'opérateur fortement continu de  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$  dès que  $a_0$  (ou  $a_\lambda$ ) appartient à  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^{2n})$  : le produit scalaire  $(Au, v)$  a bien un sens dans ce cas et, grâce à (7.19), on peut écrire

$$(7.21) \quad (Au, v) = (\hat{Au}, \hat{v}) \\ = \int \overline{\hat{w}_\xi(\vec{\eta})} (\mathcal{F}_1^{-1} a_\lambda)(\vec{\xi} - \vec{\eta}, \vec{\xi}) \hat{u}(\vec{\xi}) d\vec{\xi} d\vec{\eta},$$

ce qui entraîne le résultat.

# VIII - INÉGALITÉS GÉOMÉTRIQUES ET CLASSES DE SYMBOLES.

On se propose dans cette section de définir et d'étudier les classes de symboles adaptées au calcul relativiste, et plus précisément aux caractérisations des opérateurs au moyen de leur action sur les états cohérents  $\phi_{\vec{x}, \vec{p}}$  définis en (4.7). Typiquement, un symbole d'ordre 0 est une fonction admissible  $f(x, p)$  sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  de classe  $C^\infty$  qui reste bornée sur  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  après application d'un élément quelconque de l'algèbre engendrée par les opérateurs  $\Delta_{\mathcal{M}}$  et  $\square$ . Pour ne pas désorienter le lecteur familier des calculs pseudo-différentiels usuels, nous ferons porter les conditions non sur  $f$  mais sur  $f_0$  (fonction sur  $\mathbb{R}^{2n}$  définie par  $f_0(\vec{x}, \vec{p}) = f(0, \vec{x}; \langle \vec{p} \rangle, \vec{p})$ ) et les exprimerons à l'aide d'opérateurs différentiels du premier ordre. La définition de classes de symboles par ce genre de procédé est d'un usage constant dans l'analyse pseudo-différentielle (voir par exemple Beals [2] et nous-mêmes [30]); il revient au même (voir Hörmander [16]) de définir sur l'espace de phase  $\mathbb{R}^{2n}$  certaines métriques riemanniennes : les deux points de vue (équivalents) seront utiles ici.

LEMME 8.1. Quels que soient  $p, q, \in \mathcal{M}$ , on a

$$\langle Jp, q \rangle \leq 2 \langle Jp, \xi \rangle \langle J\xi, q \rangle .$$

Preuve. Comme  $\langle Jp, q \rangle$  reste inchangée par l'action simultanée, sur  $p$  et  $q$ , de  $M \in \mathcal{L}_0$ , et que  $\mathcal{L}_0$  opère transitivement sur  $\mathcal{M}$ , on peut se ramener au cas où  $\xi = e_0$  (le point de base de  $\mathcal{M}$ ), auquel cas le membre de droite devient  $2p_0 q_0$  : comme  $\langle Jp, q \rangle = p_0 q_0 - \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$ , l'inégalité est démontrée. On peut aussi, pour la prouver, rappeler (cf. (5.2)) que  $\langle Jp, q \rangle = \text{ch } d(p, q)$  si  $d$  désigne la distance intrin-

sèque sur  $\mathcal{M}$  : l'inégalité est alors une conséquence de l'inégalité élémentaire  $\text{ch}(x+y) \leq 2 \text{ch } x \text{ch } y$ .

LEMME 8.2. Quels que soient  $p$  et  $q \in \mathcal{M}$ , on a

$$\frac{p_0}{q_0} \leq e^{d(p,q)} = \langle Jp, q \rangle + [(\langle Jp, q \rangle)^2 - 1]^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. En supposant  $p_0 \geq q_0$ , soient  $s$  et  $t$ , avec  $s \geq t \geq 0$ , tels que  $p_0 = \text{ch } s$  et  $q_0 = \text{ch } t$ , d'où  $|\vec{p}| = \text{sh } s$  et  $|\vec{q}| = \text{sh } t$ .

On a  $\text{ch } s = \text{ch } t \text{ch}(s-t) + \text{sh } t \text{sh}(s-t)$

d'où

$$(8.1) \quad \text{ch}(s-t) \leq \frac{\text{ch } s}{\text{ch } t} \leq e^{s-t}.$$

Comme  $\frac{p_0}{q_0} = \frac{\text{ch } s}{\text{ch } t}$  et que

$$\text{ch } d(p,q) = \langle Jp, q \rangle \geq \text{ch } t \text{ch } s - \text{sh } t \text{sh } s = \text{ch}(s-t),$$

l'inégalité est démontrée.

LEMME 8.3. Avec  $p, q \in \mathcal{M}$ , posons

$$|\vec{p} \wedge \vec{q}|^2 = \sum_{j < k} (p_j q_k - p_k q_j)^2 = |\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2$$

et

$$\delta(p,q) = (2p_0 q_0)^{-1} (p_0^2 + q_0^2 + |\vec{p} \wedge \vec{q}|^2).$$

On a

$$\frac{1}{2} \min(\langle p, Jq \rangle, \langle p, q \rangle) \leq \delta(p,q) \leq 2 \min(\langle p, Jq \rangle, \langle p, q \rangle).$$

Preuve. On a  $\delta(p,q) = \delta(p, Jq)$ , ce qui permet de supposer que  $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle \geq 0$  et, si l'on veut,  $p_0 \geq q_0$ ; une transformation orthogonale permet alors de se ramener au cas où

$$q = (\text{ch } t, \text{sh } t, 0, \dots, 0)$$

$$p = (\text{ch } s, \text{sh } s \cos u, \text{sh } s \sin u, 0, \dots, 0)$$

avec  $s \geq t \geq 0$  et  $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . On a les égalités

$$\delta(p,q) = (2\text{ch } s \text{ch } t)^{-1} [\text{ch}^2 s + \text{ch}^2 t + \text{sh}^2 s \text{sh}^2 t \sin^2 u]$$

et

$$\min(\langle p, Jq \rangle, \langle p, q \rangle) = \langle p, Jq \rangle = \operatorname{ch} s \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} s \operatorname{sh} t \cos u.$$

Avec  $\alpha = 2$  ou  $\frac{1}{2}$ , posons

$$f(u) = f(-u) = \delta(p, q) - \alpha \langle p, Jq \rangle$$

d'où

$$f'(u) = \operatorname{sh} s \operatorname{sh} t \sin u [\operatorname{th} s \operatorname{th} t \cos u - \alpha].$$

Si  $\alpha = 2$ , on a pour  $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$  l'inégalité

$$f(u) \leq f(0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\operatorname{ch} s}{\operatorname{ch} t} + \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} s} \right) - 2 \operatorname{ch}(s-t)$$

d'où  $f(u) \leq 0$  d'après l'inégalité (8.1) de droite : ceci prouve la deuxième inégalité énoncée dans le lemme 8.3.

Supposons désormais  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Si  $\operatorname{th} s \operatorname{th} t \leq \frac{1}{2}$ , alors on a pour  $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$  l'inégalité

$$f(u) \geq f(\frac{\pi}{2}) = (2 \operatorname{ch} s \operatorname{ch} t)^{-1} \geq 0.$$

Enfin, si  $\operatorname{th} s \operatorname{th} t > \frac{1}{2}$ ,  $f$  a un maximum sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $f(u) \geq$

$\min(f(\frac{\pi}{2}), f(0))$  avec  $f(\frac{\pi}{2}) \geq 0$  et

$$f(0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\operatorname{ch} s}{\operatorname{ch} t} + \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} s} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{ch}(s-t) \geq 0,$$

la dernière inégalité provenant de l'inégalité (8.1) de gauche.

LEMME 8.4. Quels que soient  $p, q, \xi \in \mathcal{M}$ , on a

$$\delta(p, q) \leq 2^4 \delta(p, \xi) \delta(\xi, q).$$

Preuve. C'est une conséquence des lemmes 8.1 et 8.3.

Il est classique (voir par exemple [8]) que le  $ds^2$  de l'espace symétrique  $\mathcal{M}$  est la restriction à  $\mathcal{M}$  de la forme  $-dp_0^2 + dp_1^2 + \dots + dp_n^2$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ , autrement dit

$$(8.2) \quad ds^2 = |\vec{dp}|^2 - p_0^{-2} \langle \vec{p}, \vec{dp} \rangle^2.$$

Avec les notations riemanniennes standard, on a donc  $g_{jk} = \delta_{jk} - p_0^{-2} p_j p_k$ , d'où  $g = \det(g_{jk}) = 1 - p_0^{-2} |\vec{p}|^2 = p_0^{-2}$  et  $g^{jk} = \delta_{jk} + p_j p_k$ .

(cf. appendice pour l'inversion). Profitons-en pour écrire explicitement le laplacien  $\Delta_{\mathcal{M}}$  de  $\mathcal{M}$  :

$$(8.3) \quad \Delta_{\mathcal{M}} f = p_0 \sum \frac{\partial}{\partial p_j} [p_0^{-1} (\frac{\partial f}{\partial p_j} + p_j \sum p_k \frac{\partial f}{\partial p_k})] \\ = [\sum \frac{\partial^2}{\partial p_j^2} + \sum p_j p_k \frac{\partial^2}{\partial p_j \partial p_k} + n \sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j}] f .$$

CONVENTION EN USAGE DANS TOUT CET ARTICLE :

Dans toutes les combinaisons linéaires des opérateurs de dérivation par rapport aux coordonnées  $(\vec{x}, \vec{p})$ , les indices de sommation seront toujours supposés parcourir l'intervalle  $[1, n]$  des entiers, les fonctions admissibles sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  auxquelles ces opérateurs s'appliquent étant identifiées à leur restriction à  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  et  $p_0$  étant explicité sous la forme  $\langle \vec{p} \rangle$ .

DÉFINITION 8.5. Soit  $p \in \mathcal{M}$ . Pour tous vecteurs  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$\|\vec{\alpha}\|_p^2 = |\vec{\alpha}|^2 - p_0^{-2} \langle \vec{\alpha}, \vec{p} \rangle^2 = p_0^{-2} [|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\alpha} \wedge \vec{p}|^2]$$

et

$$\|\vec{\beta}\|_p^2 = |\vec{\beta}|^2 + \langle \vec{\beta}, \vec{p} \rangle^2 .$$

Remarque. D'après (8.2), la norme en  $p$  du vecteur  $\sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial p_j}$  tangent à  $\mathcal{M}$  est bien  $\|\vec{\alpha}\|_p$ . La deuxième forme de  $\|\vec{\alpha}\|_p$  coïncide avec la première d'après la définition de  $|\vec{\alpha} \wedge \vec{p}|$  contenue dans le lemme 8.3. Un moyen mnémotechnique pour ne pas confondre les deux normes est de noter que celle qui n'a que deux barres est plus petite que la norme standard, alors que celle qui a trois barres est plus grande.

LEMME 8.6. Les normes  $\|\cdot\|_p$  et  $\|\cdot\|_p$  sur  $\mathbb{R}^n$  sont duales l'une de l'autre, i.e.

$$\|\vec{\alpha}\|_p = \sup \{ \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle : \|\vec{\beta}\|_p \leq 1 \} .$$

Preuve. Les matrices  $a$  et  $b$  des formes quadratiques  $\|\cdot\|_p^2$  et  $\|\cdot\|_p^2$  sont données par

$$a_{jk} = \delta_{jk} - p_0^{-2} p_j p_k \quad , \quad b_{jk} = \delta_{jk} + p_j p_k :$$

elles sont inverses l'une de l'autre d'après l'appendice.

LEMME 8.7. Si  $\|\vec{\alpha}\|_p \leq 1$ , on peut trouver  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \mu \vec{p}$ ,  $|\vec{\beta}| \leq 1$  et  $|\mu| < 1$ ; réciproquement, tout vecteur  $\vec{\alpha}$  de cette forme vérifie  $\|\vec{\alpha}\|_p < 2$ .

Preuve. Posons  $\mu = p_0^{-2} \langle \vec{\alpha}, \vec{p} \rangle$ , d'où

$$\mu^2 \leq p_0^{-4} \|\vec{p}\|_p^2 = p_0^{-4} (|\vec{p}|^2 + |\vec{p}|^4) = p_0^{-2} |\vec{p}|^2 < 1.$$

On a alors

$$|\vec{\alpha} - \mu \vec{p}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - p_0^{-2} \langle \vec{\alpha}, \vec{p} \rangle^2 - p_0^{-4} \langle \vec{\alpha}, \vec{p} \rangle^2 \leq 1.$$

Pour la réciproque, il suffit de remarquer que  $\|\vec{\beta}\|_p \leq |\vec{\beta}|$  et que  $\|\vec{p}\|_p^2 = p_0^{-2} |\vec{p}|^2 < 1$ .

LEMME 8.8. Soient  $p$  et  $q \in \mathcal{M}$ . Quel que soit  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$  non nul, on a

$$\frac{\|\vec{\beta}\|_p}{\|\vec{\beta}\|_q} \leq \|\vec{p}\|_q \leq 2^{3/2} \min(\langle Jp, q \rangle, \langle p, q \rangle).$$

On a aussi

$$\|\vec{\alpha}\|_q \leq \|\vec{p}\|_q \|\vec{\alpha}\|_p$$

pour tout  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ .

Preuve. Supposons  $\|\vec{\beta}\|_q \leq 1$ , d'où en particulier  $|\vec{\beta}| \leq 1$  et (utilisant la dualité de normes notée dans le lemme 8.6)

$$\begin{aligned} \|\vec{\beta}\|_p^2 &\leq 1 + \langle \vec{\beta}, \vec{p} \rangle^2 \leq 1 + \|\vec{p}\|_q^2 \\ &= q_0^{-2} [q_0^2 + |\vec{p}|^2 + |\vec{p} \wedge \vec{q}|^2] \\ &\leq 2 \frac{p_0}{q_0} \delta(p, q) \leq 8 \langle Jp, q \rangle^2, \end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant des lemmes 8.2 et 8.3. Il est licite de prendre au second membre le minimum indiqué puisque  $\|\cdot\|_p$  reste invariante par le changement de  $p$  en  $Jp$ . La dernière partie du lemme 8.8 est une conséquence de la première et du lemme (de dualité) 8.6.

LEMME 8.9. Quels que soient  $p$  et  $q \in \mathcal{M}$ , on a

$$\left\| \frac{q_0}{p_0} \vec{p} - \vec{q} \right\|_p \leq \langle Jq, p \rangle$$

et

$$\left\| \frac{p_0}{q_0} \vec{q} - \vec{p} \right\|_p \leq 2 \langle Jq, p \rangle^2.$$

Preuve. On développe complètement (utilisant la définition 8.5) le carré de l'expression à majorer, en notant que  $|\vec{p}|^2 = p_0^2 - 1$  et que  $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = p_0 q_0 - \langle Jq, p \rangle$  : on a alors la joie naïve de voir la plupart des termes s'éliminer, et il reste

$$(8.4) \quad \left\| \frac{q_0}{p_0} \vec{p} - \vec{q} \right\|_p^2 = \langle Jq, p \rangle^2 - 1,$$

ce qui prouve la première inégalité : la deuxième se déduit de la première et du lemme 8.2.

DÉFINITION 8.10. Soit  $m$  une fonction  $> 0$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  : nous dirons que c'est une fonction-poids s'il existe  $C_1 > 0$ ,  $N_1 \geq 0$  et  $N_2 \geq 0$  telles que, pour tout couple  $(\vec{x}, p), (\vec{y}, q)$  de points de  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , on ait l'inégalité

$$m(\vec{x}, p) \leq C_1 m(\vec{y}, q) (\langle Jp, q \rangle)^{N_1} (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_q)^{N_2}.$$

LEMME 8.11. Les puissances réelles d'une fonction-poids sont des fonctions-poids. Les fonctions du type  $C p_0^{N_1} (1 + |\vec{x}|)^{N_2}$  sont des fonctions-poids, et toute fonction-poids est majorée par une fonction-poids de ce type.

Preuve. Il n'y a aucune difficulté pour les puissances positives ; pour les puissances négatives, il faut noter que

$$1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_q \leq 2^{3/2} \langle Jp, q \rangle (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_p)$$

d'après le lemme 8.8. Le lemme 8.2 et l'inégalité de Peetre fournissent

$$p_0^{N_1} (1 + |\vec{x}|)^{N_2} \leq C q_0^{N_1} (\langle Jp, q \rangle)^{N_1} (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|)^{|N_2|} (1 + |\vec{y}|)^{N_2}$$

et comme  $|\vec{x} - \vec{y}| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|_q$  les fonctions du type indiqué sont bien des fonctions-poids : si l'on fait  $(\vec{y}, q) = (\vec{0}, e_0)$  dans la définition 8.10, on voit bien que toute fonction-poids est majorée par une fonction de ce type.

Remarque . La notion de symbole de poids donné est due à Beals pour le calcul habituel : elle généralise utilement celle de symbole d'ordre donné (voir ci-dessous).

NOTATION 8.12. Si  $\vec{V} \in \mathbb{R}^n$  , on notera  $\vec{V}(\partial_x)$  (resp.  $\vec{V}(\partial_p)$ ) l'opérateur différentiel  $\sum V_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  (resp.  $\sum V_j \frac{\partial}{\partial p_j}$ ).

DÉFINITION 8.13. Soit  $m$  une fonction-poids sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  et soit  $f_0 = f_0(\vec{x}, \vec{p})$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  ; soit  $f$  la fonction admissible sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  associée à  $f_0$  . Nous dirons que  $f_0$  est un symbole de poids  $m$ , ou encore que  $f$  est un symbole de poids  $m$ , si pour tout entier  $N \geq 0$  on peut trouver  $C > 0$  tel que, quels que soient les vecteurs réels  $\vec{V}^j$  et  $\vec{W}^k$  en nombre total  $\leq N$  , on ait pour tout  $(x, p)$  l'inégalité

$$|(\sum_{j,k} \vec{V}^j(\partial_x) \vec{W}^k(\partial_p) f_0)(\vec{x}, \vec{p})| \leq C m(\vec{x}, p) \prod (\|\vec{V}^j\|_p \|\vec{W}^k\|_p)$$

avec  $p = (\langle \vec{p} \rangle, \vec{p})$  . On notera  $\text{Symb}(m)$  l'espace vectoriel des symboles de poids  $m$  . Un symbole d'ordre  $k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) sera un symbole de poids  $m$  avec  $m(\vec{x}, p) = p_0^k$  . Enfin nous dirons que  $f_0$  est un symbole de poids  $m$  jusqu'à l'ordre de différentiabilité  $N$  ( $N$  entier  $\geq 0$ ) si  $f_0 \in C^N(\mathbb{R}^{2n})$  et si les hypothèses de la présente définition sont satisfaites avec  $N$  fixé .

PROPOSITION 8.14. Avec  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  , considérons les opérateurs différentiels (sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ )

$$e_j = p_0^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} , \quad e_{jk} = p_0^{-1} (p_j \frac{\partial}{\partial x_k} - p_k \frac{\partial}{\partial x_j}) , \quad \epsilon_j = \frac{\partial}{\partial p_j}$$

$$\text{et } \epsilon = \sum p_k \frac{\partial}{\partial p_k} .$$

Pour que  $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  soit un symbole de poids  $m$ , il faut et il suffit que  $m^{-1} A f_0$  soit une fonction bornée pour tout opérateur différentiel  $A$  appartenant à l'algèbre  $\mathcal{A}$  engendrée par les opérateurs  $e_j, e_{jk}, \epsilon_j$  et  $\epsilon$  .

Preuve. On a  $e_j$  (resp.  $e_{jk}$ )  $= \vec{V}(\partial_x)$  avec respectivement,  $V_s = p_0^{-1} \delta_{js}$ , auquel cas  $\|\vec{V}\|_p^2 = p_0^{-2} (1 + p_j^2) \leq 2$  , ou bien  $V_s = p_0^{-1} (p_j \delta_{sk} - p_k \delta_{sj})$  , auquel cas  $\|\vec{V}\|_p^2 = p_0^{-2} (p_j^2 + p_k^2) \leq 2$  . On a  $\epsilon_j$  (resp.  $\epsilon$ )  $= \vec{W}(\partial_p)$



avec, respectivement,  $W_s = \delta_{js}$  ou bien  $W_s = p_s$ , et dans les deux cas  $\|\vec{W}\|_p \leq 1$ . Désignons par  $\mathcal{A}^\circ$  l'algèbre "tronquée" engendrée par les opérateurs considérés, obtenue en ne gardant dans le produit d'une famille finie de ces opérateurs différentiels d'ordre 1 que les termes de l'ordre le plus grand. Il est immédiat, par récurrence, que tout élément de  $\mathcal{A}$  peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{A}^\circ$ , les coefficients étant de la forme  $p_o^{-r} P(\vec{p})$ , expression dans laquelle  $r \in \mathbb{N}$  et  $P$  est un polynôme de degré  $\leq r$ . Si  $f_o \in \text{Symb}(m)$ , il résulte de la définition 8.13 et de ce qui précède que  $m^{-1} A f_o$  est une fonction bornée pour tout  $A \in \mathcal{A}^\circ$  et par suite, également, pour tout  $A \in \mathcal{A}$ . Pour la réciproque, on retourne sans difficulté l'argument qui permet d'échanger les rôles de  $\mathcal{A}$  et de  $\mathcal{A}^\circ$  et l'on note aussi, grâce au lemme 8.6, les inégalités (valables si  $f$  est à valeurs réelles)

$$\begin{aligned} \left| \sum V_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|^2 &\leq \|\vec{V}\|_p^2 \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_p^2 \\ &= \|\vec{V}\|_p^2 p_o^{-2} \left[ \sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|^2 + \sum_{j < k} |p_j \frac{\partial f}{\partial x_k} - p_k \frac{\partial f}{\partial x_j}|^2 \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left| \sum W_j \frac{\partial f}{\partial p_j} \right|^2 &\leq \|\vec{W}\|_p^2 \left\| \frac{\partial f}{\partial p} \right\|_p^2 \\ &= \|\vec{W}\|_p^2 \left[ \sum \left| \frac{\partial f}{\partial p_j} \right|^2 + \sum |p_k \frac{\partial f}{\partial p_k}|^2 \right]. \end{aligned}$$

Remarque. Vu les relations de commutation entre les opérateurs  $e_j, e_{jk}$  et les opérateurs  $\varepsilon_j, \varepsilon$ , il revient au même de ne considérer que le sous-espace de  $\mathcal{A}$  engendré par les produits dans lesquels les opérateurs  $\varepsilon_j, \varepsilon$  sont écrits à droite des opérateurs  $e_j, e_{jk}$ .

LEMME 8.15. Considérons la fonction  $g$  sur  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$  définie par  $g(p, \xi)$  =  $\langle Jp, \xi \rangle$  ou bien  $g(p, \xi) = \frac{p_o}{\xi_o}$ . La fonction  $g^{-1} A g$  est bornée pour tout opérateur différentiel  $A$  appartenant à l'algèbre engendrée par les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ,  $\sum \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ,  $\frac{\partial}{\partial p_j}$  et  $\sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j}$ .

Preuve. On a

$$\sum \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\langle Jp, \xi \rangle) = \sum \xi_j (p_o \frac{\xi_j}{\xi_o} - p_j) = \langle Jp, \xi \rangle - \frac{p_o}{\xi_o}$$

et

$$(\sum \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}) (\xi_0^{-2r-1} p_0) = (2r+1) [-\xi_0^{-2r-1} + \xi_0^{-2r-3}] p_0$$

ce qui montre que, pour tout entier  $N$ ,

$$(\sum \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j})^N \langle Jp, \xi \rangle = \langle Jp, \xi \rangle$$

est combinaison linéaire de termes de la forme  $\xi_0^{-2r-1} p_0$  avec  $r \geq 0$ .  
D'autre part

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \langle Jp, \xi \rangle = p_0 \frac{\xi_j}{\xi_0} - p_j$$

et

$$|p_0 \frac{\xi_j}{\xi_0} - p_j| \leq \|p_0 \frac{\xi_j}{\xi_0} - p_j\|_{\xi} \leq \langle Jp, \xi \rangle$$

d'après le lemme 8.9. Si l'on applique encore d'autres opérateurs de la forme  $\frac{\partial}{\partial \xi_k}$ , on obtient toujours une fonction de la forme  $\frac{p_0}{\xi_0} \xi_0^{-r} P(\xi)$  où  $P$  est un polynôme de degré  $\leq r$ , et l'on conclut à l'aide du lemme 8.2. Les dérivations relatives à la variable  $p$  n'apportent pas de difficultés supplémentaires. Enfin, le cas de la fonction  $\frac{p_0}{\xi_0}$  est encore plus simple à traiter.

LEMME 8.16. Pour tout entier  $k \geq 0$ , et tout multi-indice  $\sigma \in \mathbb{N}^n$ , il existe  $N > 0$  et  $C > 0$  tels que, pour tout  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ , on ait l'inégalité

$$|\frac{\partial^\sigma}{\partial p^\sigma} (\sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j})^k \langle \vec{\alpha}, \frac{\xi_0}{p_0} \vec{p} - \vec{\xi} \rangle| \leq C \langle Jp, \xi \rangle^N \|\vec{\alpha}\|_{\xi}$$

pour tout couple  $(p, \xi)$  de points de  $\mathcal{M}$ .

Preuve. D'après le lemme 8.7, il suffit d'établir le lemme, sans le facteur  $\|\vec{\alpha}\|_{\xi}$  au membre de droite, dans les seuls cas où  $\vec{\alpha}$  est l'un des vecteurs de la base canonique ou bien  $\vec{\alpha} = \vec{\xi}$ : suivant le cas, la fonction  $f(p)$  dont on cherche à estimer les dérivées est la fonction  $f(p) = \frac{\xi_0}{p_0} p_j - \xi_j$  ou bien la fonction

$$f(p) = \frac{\xi_0}{p_0} \langle \vec{p}, \vec{\xi} \rangle - \xi_0^2 + 1 = 1 - \frac{\xi_0}{p_0} \langle Jp, \xi \rangle$$

de sorte que le lemme 8.16 résulte des lemmes 8.15 et 8.2.

Nous allons montrer que la notion de symbole de poids  $m$  reste invariante par l'échange (dans un sens ou dans l'autre) des symboles de Klein-Gordon actif et passif. Nous montrerons ensuite qu'un symbole  $f_0$  appartient à  $\text{Symb}(m)$  si et seulement si il en est ainsi, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pour le symbole  $a_\lambda$  lié à  $f_0$  par la définition 7.3.

DÉFINITION ET LEMME 8.17. Soit  $m$  une fonction-poids et soient  $f$  et  $(f^\nu)_{\nu \geq 1}$  des symboles de poids  $m$ . Nous dirons que  $f^\nu$  tend vers  $f$  dans  $\text{Symb}(m)$  si les deux conditions suivantes sont remplies : (i)  $(f^\nu_0)$  converge vers  $f_0$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,  $f^\nu_0$  étant la restriction de  $f^\nu$  définie en (7.3); (ii) les  $f^\nu_0$  constituent une partie bornée de  $\text{Symb}(m)$  au sens que les constantes  $C$  (dépendant de  $N$ ) qui apparaissent dans la définition 8.13 peuvent être choisies indépendantes de  $\nu$ . En ce sens, tout symbole de poids  $m$  est la limite d'une suite de symboles dont la restriction à  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}$  est à support compact.

Preuve. Avec l'aide de la proposition 8.14 et du lemme 8.11, on constate immédiatement que la fonction  $(\vec{x}, \vec{p}) \mapsto p_0(1+|\vec{x}|^2)$  est un symbole de poids  $p_0(1+|\vec{x}|^2)$ . Soit  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$  une fonction telle que  $\chi(t) = 1$  pour  $t \leq 1$  et  $\chi(t) = 0$  pour  $t \geq 2$ , et posons

$$g^\nu_0(\vec{x}, \vec{p}) = \chi(\nu^{-1} p_0(1+|\vec{x}|^2)).$$

Il est clair que  $g^\nu_0$  tend vers 1 au sens de la définition ci-dessus : se servant de  $g^\nu_0$  comme multiplicateur, on obtient le lemme.

THÉORÈME 8.18. Soit  $\lambda$  un nombre réel et soit  $\nabla^\lambda = (1+(4\pi)^{-2}\square)^{\lambda/2}$  l'opérateur initialement défini par (2.25) sur l'espace des fonctions admissibles  $f$  de classe  $C^\infty$  telles que  $f_0$  soit à support compact. Pour toute fonction-poids  $m$ , il s'étend de façon unique en un opérateur linéaire de  $\text{Symb}(m)$  dans  $\text{Symb}(m)$ , séquentiellement continu au sens de la définition 8.17.

Preuve. L'unicité de l'extension résulte du lemme 8.17. Si l'on part de la définition des opérateurs  $e_j$  et  $e_{jk}$  donnée dans la proposition 8.14 et que l'on utilise en outre la condition d'admissibilité  $\langle Jp, \frac{\partial f}{\partial x} \rangle = 0$ , on vérifie les identités

$$(8.5) \quad -\square = -p_0^{-2} \left( \sum p_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 + \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

$$\begin{aligned}
&= -p_0^{-2} \sum p_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - 2p_0^{-2} \sum_{j < k} p_j p_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \\
&= \sum e_j^2 + \sum_{j < k} e_{jk}^2 .
\end{aligned}$$

Ceci démontre déjà le théorème 8.18 dans le cas où  $\lambda$  est un entier pair  $\geq 0$ . Il suffit alors, pour tout entier  $N \geq 0$  fixé, de montrer que si  $-\lambda$  est assez grand on peut étendre  $\nabla^\lambda$  en un opérateur qui envoie  $\text{Symb}(m)$  dans l'espace des symboles de poids  $m$  jusqu'à l'ordre de différentiabilité  $N$  (cf. définition 8.13). Il est important de ne pas confondre  $\mathcal{F}_1 f$ , transformée de Fourier de la fonction admissible  $f$  relativement aux  $n+1$  premières variables et  $\mathcal{F}_1 f_0$ , transformée de Fourier de  $f_0$  par rapport aux  $n$  premières variables : on a, d'après (6.4), la relation

$$(\mathcal{F}_1 f)(\xi, p) = (\mathcal{F}_1 f_0)(\vec{\xi}, \vec{p}) \delta(\xi_0 - p_0^{-1} \langle \vec{p}, \vec{\xi} \rangle) ,$$

et la définition (2.25) de l'opérateur  $\nabla^\lambda$  s'exprime, si l'on pose  $g = \nabla^\lambda f$ , sous la forme

$$\begin{aligned}
(8.6) \quad (\mathcal{F}_1 g_0)(\vec{\xi}, \vec{p}) &= [1 + \frac{1}{4} (|\vec{\xi}|^2 - p_0^{-2} \langle \vec{\xi}, \vec{p} \rangle^2)]^{\lambda/2} (\mathcal{F}_1 f_0)(\vec{\xi}, \vec{p}) \\
&= [1 + \frac{1}{4} \|\vec{\xi}\|_p^2]^{\lambda/2} (\mathcal{F}_1 f_0)(\vec{\xi}, \vec{p}) .
\end{aligned}$$

Considérons la fonction  $x \mapsto \rho(|\vec{x}|^2)$ , transformée de Fourier (c'est une fonction radiale) de la fonction  $\vec{\xi} \mapsto (1 + \frac{1}{4} |\vec{\xi}|^2)^{\lambda/2}$  : elle est elle-même continue et à décroissance rapide si  $\lambda < -n$  et a autant de dérivées que l'on souhaite ayant les mêmes propriétés pourvu que  $-\lambda$  soit assez grand. Se rappelant le lemme de dualité 8.6, et le fait que la forme quadratique  $\|\cdot\|_p^2$  a pour discriminant  $p_0^{-2}$ , on voit que la fonction  $(1 + \frac{1}{4} \|\vec{\xi}\|_p^2)^{\lambda/2}$  a pour transformée de Fourier la fonction  $p_0 \rho(\|\vec{x}\|_p^2)$ , ce qui permet d'écrire

$$(8.7) \quad g_0(\vec{x}, \vec{p}) = p_0 \int \rho(\|\vec{x} - \vec{y}\|_p^2) f_0(\vec{y}, \vec{p}) d\vec{y} .$$

Comme le discriminant de la forme quadratique  $\|\cdot\|_p^2$  est  $p_0^2$ , et comme

$$(8.8) \quad m(\vec{y}, \vec{p}) \leq C_1 m(\vec{x}, \vec{p}) (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_p)^{N_2}$$

d'après la définition 8.10, on voit que  $|g_0|$  est majorée par  $Cm$  pourvu que  $-\lambda$  soit assez grand. L'application de dérivées, par rapport à  $\vec{x}$  (à coefficients dépendant de  $p$ ) s'opère trivialement puisqu'on a affaire à un opérateur de convolution : quant aux dérivées  $\frac{\partial}{\partial p_j}$  ou  $\sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j}$ , elles s'appliquent sans difficultés si l'on explicite

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|_p^2 = |\vec{x} - \vec{y}|^2 + \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{p} \rangle^2.$$

Ceci termine la preuve du théorème 8.18.

THÉORÈME 8.19. Soit  $\lambda$  un nombre réel et soit  $m$  une fonction-poids.  
L'application  $f_0 \mapsto a_\lambda$  définie dans le cas où  $f_0$  est  $C^\infty$  à support compact sur  $\mathbb{R}^{2n}_0$  par l'opérateur intégral de la proposition 7.4 s'étend (de façon unique) en un opérateur linéaire séquentiellement continu de  $\text{Symb}(m)$  dans  $\text{Symb}(m)$ .

Preuve. Nous nous contenterons de la donner, pour alléger l'écriture, dans le cas où  $m = 1$ , puisqu'une puissance éventuelle de  $\langle Jp, \xi \rangle (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_\xi)$  peut, comme on le verra, être contrôlée sans difficulté. Rappelons que l'opérateur intégral qu'il s'agit d'étendre est donné par

$$(8.9) \quad a_\lambda(\vec{x}, \vec{\xi}) = 2^n \int e^{2i\pi \langle y-x, \xi - S_p \xi \rangle} f_0(\vec{y}, \vec{p}) \langle J\xi, S_p \xi \rangle^\lambda d\vec{p} d\vec{y}$$

avec  $x = (0, \vec{x})$  et  $y = (0, \vec{y})$ . Posons

$$(8.10) \quad \vec{\zeta} = \vec{\xi} - \overrightarrow{S_p \xi} = 2(\vec{\xi} - \langle Jp, \xi \rangle \vec{p}) :$$

si l'on développe complètement

$$\|\vec{\zeta}\|_p^2 = p_0^{-2} [|\vec{\zeta}|^2 + |\vec{\zeta} \wedge \vec{p}|^2]$$

en notant que

$$|\vec{\zeta} \wedge \vec{p}|^2 = 4(|\vec{\xi}|^2 |\vec{p}|^2 - \langle \vec{\xi}, \vec{p} \rangle^2)$$

et en tenant compte de la relation  $\langle \vec{\xi}, \vec{p} \rangle = \xi_0 p_0 - \langle Jp, \xi \rangle$ ,

on vérifie que

$$(8.11) \quad \|\vec{\zeta}\|_p^2 = 4(\langle Jp, \xi \rangle^2 - 1).$$

Conformément à la proposition 8.14, posons

$$e_j = p_0^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad e_{jk} = p_0^{-1} (p_j \frac{\partial}{\partial y_k} - p_k \frac{\partial}{\partial y_j}),$$

de sorte que, avec  $- \square = \sum e_j^2 + \sum_{j < k} e_{jk}^2$  (cf. (8.5)),

on peut écrire

$$(8.12) \quad (1 + (16\pi^2)^{-1} \square) e^{2i\pi \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{\xi} \rangle} = \langle Jp, \xi \rangle^2 e^{2i\pi \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{\xi} \rangle}.$$

Pour tout entier  $N \geq 0$ , on a donc, après  $N$  intégrations par parties,

$$(8.13) \quad a_\lambda(\vec{x}, \vec{\xi}) = \int (\langle Jp, \xi \rangle)^{-2N} e^{2i\pi \langle y-x, \xi - S_p \xi \rangle} \\ ((1 + (16\pi^2)^{-1} \square)^{N f_0}(\vec{y}, \vec{p}) (2 \langle Jp, \xi \rangle^2 - 1)^\lambda d\vec{p} d\vec{y}.$$

Pourvu que  $2(N-\lambda)+1 > n$ , l'invariance de Lorentz assure l'inégalité

$$(8.14) \quad \int (\langle Jp, \xi \rangle)^{-2N} (2 \langle Jp, \xi \rangle^2 - 1)^\lambda p_0^{-1} d\vec{p} \leq C$$

avec  $C$  indépendante de  $\xi$  : il reste à assurer la sommabilité par rapport à  $d\vec{y}$  tout en regagnant le facteur  $p_0^{-1}$ .

Avec

$$(8.15) \quad \varphi = \frac{1}{2} \langle y-x, \xi - S_p \xi \rangle = \langle y-x, \xi \rangle - \langle Jp, \xi \rangle \langle y-x, p \rangle,$$

on a

$$(8.16) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} = \theta_j = - \langle Jp, \xi \rangle (y_j - x_j) + \langle y-x, p \rangle (\xi_j - \xi_0 \frac{p_j}{p_0}).$$

Inversant, au moyen de l'appendice, la relation linéaire entre  $\vec{y} - \vec{x}$  et  $\vec{\theta}$ , on est conduit à introduire les opérateurs

$$(8.17) \quad \partial_j = - \langle Jp, \xi \rangle^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial p_j} + (2 \langle Jp, \xi \rangle - \frac{\xi_0}{p_0})^{-1} (\xi_j - \xi_0 \frac{p_j}{p_0}) \sum p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right]$$

et

$$(8.18) \quad \partial = \sum p_j \partial_j = A \sum p_k \frac{\partial}{\partial p_k}$$

avec

$$(8.19) \quad A = - \langle Jp, \xi \rangle^{-1} \left[ 1 + (2 \langle Jp, \xi \rangle - \frac{\xi_0}{p_0})^{-1} \langle \vec{\xi} - \xi_0 \frac{\vec{p}}{p_0}, \vec{p} \rangle \right] \\ = - \langle Jp, \xi \rangle^{-1} \left[ 1 + (2 \langle Jp, \xi \rangle - \frac{\xi_0}{p_0})^{-1} (- \langle Jp, \xi \rangle + \frac{\xi_0}{p_0}) \right]$$

c'est-à-dire

$$(8.20) \quad \partial = - \left( 2 \langle Jp, \xi \rangle - \frac{\xi_0}{p_0} \right)^{-1} \sum p_k \frac{\partial}{\partial p_k} :$$

on a en effet

$$(8.21) \quad \begin{aligned} \partial_j (e^{4i\pi\varphi}) &= 4i\pi (y_j - x_j) e^{4i\pi\varphi} , \\ \partial (e^{4i\pi\varphi}) &= 4i\pi \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{p} \rangle e^{4i\pi\varphi} , \end{aligned}$$

d'où  $e^{4i\pi\varphi} = D(e^{4i\pi\varphi})$  si

$$(8.22) \quad D = (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_p^2)^{-1} \times \\ [1 - (16\pi^2)^{-1} (\sum \partial_j^2 + \partial^2 + (2 \langle Jp, \xi \rangle - \frac{\xi_0}{p_0})^{-1} \partial)] .$$

On a (rappelant que le discriminant de la forme  $\|\cdot\|_p^2$  est  $p_0^2$ )

$$(8.23) \quad \int (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_p^2)^{-N'} dy \leq C p_0^{-1}$$

si  $2N' > n$  : si l'on part de (8.13) et (8.14), on a donc bien établi que  $a_\lambda$  est une fonction bornée lorsque  $f_0 \in \text{Symb}(1)$  pourvu que l'on puisse itérer l'intégration par parties qui correspond à l'invariance de  $e^{4i\pi\varphi}$  sous l'action de  $D$ .

On a, d'après le lemme 8.2,

$$(8.24) \quad 2 \langle Jp, \xi \rangle - \frac{\xi_0}{p_0} \geq \langle Jp, \xi \rangle - [\langle Jp, \xi \rangle^2 - 1]^{\frac{1}{2}}$$

soit

$$(8.25) \quad (2 \langle Jp, \xi \rangle - \frac{\xi_0}{p_0})^{-1} \leq \langle Jp, \xi \rangle + [\langle Jp, \xi \rangle^2 - 1]^{\frac{1}{2}} .$$

Egalement, d'après le lemme 8.9,

$$(8.26) \quad \left| \xi_j - \xi_0 \frac{p_j}{p_0} \right| \leq \left\| \vec{\xi} - \xi_0 \frac{\vec{p}}{p_0} \right\|_p \leq \langle Jp, \xi \rangle ,$$

ce qui montre que les coefficients de  $\varepsilon_j = \frac{\partial}{\partial p_j}$  et  $\varepsilon = \sum p_k \frac{\partial}{\partial p_k}$  dans les expressions de  $\partial_j$  et  $\partial$  sont majorés par  $2 \langle Jp, \xi \rangle$  : d'après le lemme 8.15, si l'on applique à un tel coefficient un produit des opérateurs différentiels  $\varepsilon_j$  et  $\varepsilon$ , on obtient encore une expression majorée par  $C \langle Jp, \xi \rangle^{N_1}$  pour  $N_1$  et  $C$  convenables ; enfin, comme il a déjà été remarqué à la fin de la preuve du théorème 8.18, on a

$$(8.27) \quad \left| \frac{\partial^\sigma}{\partial p^\sigma} \left( \sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right)^k \left( \|\vec{x} - \vec{y}\|_p^2 \right) \right| \leq C \|\vec{x} - \vec{y}\|_p^2$$

pour tout indice  $k$  et tout multi-indice  $\sigma$ .

Ceci montre que l'intégrale (8.9) peut être étendue en une intégrale oscillante, laquelle, après traitement au moyen des intégrations par parties indiquées, fournit pour tout  $f_0 \in \text{Symb}(1)$  une fonction  $a_\lambda$  bornée. Il reste à examiner les dérivées de  $a_\lambda$  : il s'agit donc d'appliquer à  $a_\lambda$  un produit d'opérateurs du genre  $\sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$  avec  $\|\vec{\alpha}\|_\xi \leq 1$  ou bien  $\sum \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  avec  $\|\vec{\beta}\|_\xi \leq 1$ . Des intégrations par parties dans (8.9) permettent immédiatement de remplacer  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  par  $-\frac{\partial}{\partial y_j}$  et comme, d'après le lemme 8.8, on a  $\|\vec{\beta}\|_p \leq 2^{3/2} \langle Jp, \xi \rangle \|\vec{\beta}\|_\xi$ , les produits d'opérateurs du deuxième type n'introduisent aucune difficulté. L'action d'un produit d'opérateurs  $\sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$  sur  $(2 \langle Jp, \xi \rangle^2 - 1)^\lambda$  est contrôlée au moyen du lemme 8.15. Enfin, avec  $\varphi$  comme en (8.15),  $\partial_j$  et  $\partial$  définis en (8.17) et (8.20), les formules (8.21) permettent d'écrire

$$(8.28) \quad \left( \sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) e^{4i\pi\varphi} = \left[ \sum \alpha_j \partial_j + \langle \vec{\alpha}, \vec{p} - p_0 \rangle \frac{\vec{\xi}}{\xi_0} \partial \right] e^{4i\pi\varphi},$$

relation qui permet, après une intégration par parties, de convertir l'opérateur  $-\sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$  en le transposé de l'opérateur qui figure au membre de droite de (8.28) : on a aussi

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{p} - p_0 \rangle \frac{\vec{\xi}}{\xi_0} \partial = \frac{p_0}{\xi_0} \langle \vec{\alpha}, \frac{\xi_0}{p_0} \vec{p} - \vec{\xi} \rangle$$

et l'on peut conclure à l'aide des lemmes 8.15 et 8.16.

Ceci termine la preuve du théorème 8.19.

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'opérateur  $\text{Op}(f)$  dans un cadre plus utile que celui qui constitue l'objet de la définition 2.6.

**DÉFINITION 8.20.** Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M})$  un symbole admissible de poids convenable (cela signifie que  $f_0$  est un symbole de poids  $m$  pour une certaine fonction-poids  $m$ ). Définissons  $a_0$  au moyen du théorème 8.19. Alors  $\text{Op}(f)$  est l'opérateur linéaire continu de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dont le symbole standard est  $a_0$ .



Remarques . La fonction  $a_0$  est à croissance lente d'après le lemme 8.11, et l'on sait que le calcul standard des opérateurs pseudo-différentiels établit une bijection de  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^{2n})$  sur l'espace des opérateurs linéaires fortement continus de  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$  . Le fait que les définitions 2.6 et 8.20 coïncident sur l'intersection de leurs domaines résulte du fait que c'est bien le cas si  $f_0$  est  $C^\infty$  à support compact, du lemme de densité 8.17 et d'arguments de continuité très simples que nous laissons au lecteur.

THÉORÈME 8.21. Soit  $m$  une fonction-poids et soit  $A$  un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$  possédant la propriété suivante : le symbole standard  $a_0$  de  $A$  appartient à  $\text{Symb}(m)$  et, pour tout  $\lambda$  réel, la fonction  $a_\lambda$  liée à  $a_0$  par l'identité (7.18) appartient aussi à  $\text{Symb}(m)$ . Alors l'opérateur  $A$  possède, au sens de la définition 8.20, un symbole de Klein-Gordon actif dans la classe  $\text{Symb}(m)$ .

Preuve . Rappelons la formule intégrale de la proposition 7.4 liant  $a_\lambda$  et  $f_0$  :

$$(8.29) \quad f_0(\vec{y}, \vec{p}) = 2^n \int e^{-2i\pi \langle y-x, \xi - S_p \xi \rangle} a_\lambda(\vec{x}, \vec{\xi}) \xi_0^{-1}(S_p \xi)_0 \langle \xi, J_p \rangle^n \langle J\xi, S_p \xi \rangle^{-\lambda} d\vec{x} d\vec{\xi}.$$

Tout le problème est alors ramené au problème suivant : étant donné un entier  $N \geq 0$ , étendre pour  $\lambda$  assez grand, au moyen d'intégrations par parties, l'application  $a_\lambda \mapsto f_0$  (initialement définie lorsque  $a_\lambda$  est  $C^\infty$  à support compact) en une application séquentiellement continue de  $\text{Symb}(m)$  dans l'espace  $\text{Symb}_N(m)$  des symboles de poids  $m$  jusqu'à l'ordre de différentiabilité  $N$  (cf. déf. 8.13). La preuve est semblable à celle du théorème 8.19 quoique plus simple puisqu'on a déjà, vu que  $\xi_0^{-1}(S_p \xi)_0 \leq 2 \langle J\xi, S_p \xi \rangle$  et que  $\langle J\xi, S_p \xi \rangle = 2 \langle Jp, \xi \rangle^2 - 1$ , l'inégalité

$$(8.30) \quad \int \xi_0^{-1}(S_p \xi)_0 \langle \xi, Jp \rangle^n \langle J\xi, S_p \xi \rangle^{-\lambda} \xi_0^{-1} d\vec{\xi} \leq c$$

pourvu que  $\lambda > n + \frac{1}{2}$  (on a utilisé à nouveau, bien sûr, l'invariance de la mesure  $\xi_0^{-1} d\vec{\xi}$  par  $\mathcal{L}_0$  pour ramener  $\langle Jp, \xi \rangle$  à  $\xi_0$ ).

Avec  $\varphi$  toujours définie par (8.15),

$$(8.31) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} = \theta_j' = y_j - x_j + \langle y - x, p \rangle (p_j - p_0 \frac{\xi_j}{\xi_0})$$

et la même méthode que celle de la preuve du théorème 8.19 conduit à introduire les opérateurs

$$(8.32) \quad \partial_j' = \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \frac{\xi_0}{p_0} \langle Jp, \xi \rangle^{-1} (p_j - p_0 \frac{\xi_j}{\xi_0}) \sum p_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}$$

et

$$(8.33) \quad \partial' = \sum p_j \partial_j' = \frac{\xi_0}{p_0} \langle Jp, \xi \rangle^{-1} \sum p_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}$$

pour avoir

$$(8.34) \quad \begin{aligned} \partial_j' (e^{-4i\pi\varphi}) &= -4i\pi (y_j - x_j) e^{-4i\pi\varphi}, \\ \partial' (e^{-4i\pi\varphi}) &= -4i\pi \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{p} \rangle e^{-4i\pi\varphi} : \end{aligned}$$

notons que, comme les puissances de  $\langle Jp, \xi \rangle$  sont contrôlables par le choix de  $\lambda$ , l'opérateur  $\sum p_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}$  est applicable au symbole  $a_\lambda$  puis-

$$(8.35) \quad \|\vec{p}\|_\xi \leq 2^{3/2} \langle Jp, \xi \rangle \|\vec{p}\|_p \leq 2^{3/2} \langle Jp, \xi \rangle.$$

On conclut comme dans la preuve du théorème 8.19 que si  $a_\lambda \in \text{Symb}(m)$  alors  $|f_0| \leq Cm$ .

Pour l'examen des dérivées, la seule différence consiste à remplacer l'identité (8.28) par

$$(8.36) \quad \begin{aligned} (\sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial p_j}) (e^{-4i\pi\varphi}) &= \\ [-\langle Jp, \xi \rangle \sum \alpha_j \partial_j' + \langle \vec{\alpha}, \vec{\xi} - \xi_0 \frac{\vec{p}}{p_0} \rangle \partial'] e^{-4i\pi\varphi}. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du théorème 8.21.



# IX - LA CONTINUITÉ DES OPÉRATEURS DE KLEIN-GORDON

Pour tout point  $(\vec{y}, q)$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , soit

$$(9.1) \quad \varphi_{\vec{y}, q} = \psi_{Jq+i(0, \vec{y})}$$

la fonction définie en (4.7). Avec  $\xi = (\langle \vec{\xi} \rangle, \vec{\xi})$ , on a

$$(9.2) \quad \hat{\varphi}_{\vec{y}, q}(\vec{\xi}) = \xi_0^{-1} e^{-2\pi \langle Jq, \xi \rangle} e^{-2i\pi \langle \vec{y}, \vec{\xi} \rangle}$$

et, d'après (2.9) et la proposition 4.3,

$$(9.3) \quad \begin{aligned} \varphi_{\vec{y}, q}(\vec{x}) &= 2k_{\frac{n-1}{2}}(r(Jq + i(0, \vec{y}-\vec{x}))) \\ &= 2k_{\frac{n-1}{2}}(1 + |\vec{y}-\vec{x}|^2 + 2i \langle \vec{y}-\vec{x}, \vec{q} \rangle). \end{aligned}$$

Les fonctions  $\varphi_{\vec{y}, q}$  appartiennent à  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  : plus précisément, puisque, d'après [22], p. 139, on a

$$|k_{\nu}(t)| \sim \frac{1}{2} |t|^{-\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}} \exp(-2\pi \operatorname{Re} t^{\frac{1}{2}})$$

lorsque  $|t| \rightarrow \infty$ , la fonction  $\varphi_{\vec{y}, q}(\vec{x})$  est, d'une façon uniforme, à décroissance rapide en  $1 + \|\vec{x}-\vec{y}\|_q^2$ .

Le point crucial de notre étude du calcul de Klein-Gordon, qui sera traité dans la présente section et la section 10, est le suivant : caractériser les opérateurs  $A$  de la forme  $Op(f)$  avec  $f \in \operatorname{Symb}(m)$  à l'aide d'une inégalité portant sur le produit scalaire  $(A\varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}', q'})$  : noter qu'il s'agit ici du produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Il est techniquement plus simple de servir de la famille

(a<sub>λ</sub>) des λ-symboles de l'opérateur : la proposition 7.5 nous incite à étudier, pour tout λ ∈ ℝ et tout ξ ∈ ℳ, la fonction w<sub>ξ</sub> liée à v = φ<sub>Y,q</sub> par la relation

$$\hat{w}_\xi(\vec{\eta}) = \langle J\xi, \eta \rangle^{-\lambda} \hat{v}(\vec{\eta}) .$$

LEMME 9.1. Soit λ un nombre réel. Pour tout (Y, q) ∈ ℝ<sup>n</sup> × ℳ, posons y = (0, Y) et Y = Jq + iy ; enfin, pour tout ξ ∈ ℳ, définissons la fonction χ<sub>Y,ξ</sub><sup>λ</sup> sur ℝ<sup>n</sup> par la formule

$$\chi_{Y,\xi}^\lambda(\vec{x}) = \int_{\mathcal{M}} (\langle J\xi, \eta \rangle)^{-\lambda} e^{-2\pi \langle Y - ix, \eta \rangle} \eta_0^{-1} d\vec{\eta}$$

avec x = (0, X). Avec les notations de la définition 8.13 on peut alors, quels que soient les entiers N et k ≥ 0, trouver C > 0 tel que l'inégalité

$$| \prod_{i,j} \vec{V}^i(\partial_x) \vec{W}^j(\partial_\xi) (\chi_{Y,\xi}^\lambda(\vec{x})) |$$

$$\leq C \langle Jq, \xi \rangle^{k-\lambda} (1 + \|\vec{x} - \vec{Y}\|_q)^{-k} \prod_{i,j} \|\vec{V}^i\|_q \|\vec{W}^j\|_\xi$$

soit vérifiée pour tout (Y, q) ∈ ℝ<sup>n</sup> × ℳ, tout ξ ∈ ℳ, tout X ∈ ℝ<sup>n</sup> et tout système {V<sup>i</sup>, W<sup>j</sup>} de vecteurs réels en nombre ≤ N.

Preuve. Dans l'intégrale qui définit χ<sub>Y,ξ</sub><sup>λ</sup>(X), la présence de l'exponentielle exp-2π⟨Jq, η⟩ assure la sommabilité et fournit en outre un contrôle sur les puissances arbitraires de ⟨Jq, η⟩.

En écrivant, grâce au lemme 8.1,

$$\langle Jq, \eta \rangle \geq \frac{1}{2} \max(\langle Jq, \xi \rangle \langle J\xi, \eta \rangle^{-1}, \langle J\xi, \eta \rangle \langle Jq, \xi \rangle^{-1}),$$

on obtient, quel que soit le signe de λ, l'inégalité

$$(9.4) \quad |\chi_{Y,\xi}^\lambda(\vec{x})| \leq C \langle Jq, \xi \rangle^{-\lambda} .$$

Pour tout α ∈ ℝ<sup>n</sup>, et tout entier k ≥ 0, on a, puisque

$$(9.5) \quad \frac{\partial}{\partial \eta_j} \langle Y - ix, \eta \rangle = q_0 \frac{\eta_j}{\eta_0} - q_j + i(y_j - x_j) ,$$

l'identité

$$(9.6) \quad e^{-2\pi \langle Y - ix, \eta \rangle} = D^k (e^{-2\pi \langle Y - ix, \eta \rangle})$$

si

$$(9.7) \quad D = [1 + \langle \vec{\alpha}, \vec{y} - \vec{x} \rangle - i \langle \vec{\alpha}, \vec{q}_0 \frac{\vec{n}}{\eta_0} - \vec{q} \rangle]^{-1} [1 - (2i\pi)^{-1} \sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial \eta_j}]$$

et si  $\langle \vec{\alpha}, \vec{y} - \vec{x} \rangle > -1$  : comme le lemme de dualité 8.6 nous y autorise, nous choisisons  $\vec{\alpha}$  (dépendant de  $(q, \vec{y}, \vec{x})$ ) tel que  $\|\vec{\alpha}\|_q = 1$  et  $\langle \vec{\alpha}, \vec{y} - \vec{x} \rangle = \|\vec{y} - \vec{x}\|_q$ . D'après le lemme 8.16, une puissance de  $\sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial \eta_j}$  appliquée à  $\langle \vec{\alpha}, \vec{q}_0 \frac{\vec{n}}{\eta_0} - \vec{q} \rangle$  fournit un résultat majoré par une puissance de  $\langle Jq, \eta \rangle$  ; quant à l'action des puissances de  $\sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial \eta_j}$  sur  $\langle J\xi, \eta \rangle^{-\lambda}$ , on la traite au moyen du lemme 8.15 grâce à l'inégalité  $\|\vec{\alpha}\|_{\xi} \leq 2^{3/2} \langle Jq, \xi \rangle$  (lemme 8.8). L'intégration par parties qui correspond à l'identité (9.6) permet donc d'obtenir

$$(9.8) \quad |\chi_{Y, \xi}^{\lambda}(\vec{x})| \leq C \langle Jq, \xi \rangle^{k-\lambda} (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_q)^{-k}.$$

Si l'on applique à  $\chi_{Y, \xi}^{\lambda}(\vec{x})$  un opérateur de dérivation  $\sum \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  avec  $\|\vec{\beta}\|_q \leq 1$ , il sort sous l'intégrale du lemme 9.1 le facteur supplémentaire  $2i\pi \langle \vec{\beta}, \vec{n} \rangle$  : or  $|\langle \vec{\beta}, \vec{n} \rangle| \leq \|\vec{n}\|_q \leq 2^{3/2} \langle Jq, \eta \rangle$  et de plus (en référence à l'utilisation ci-haut de l'opérateur  $\sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial \eta_j}$ )  $|\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle| \leq 1$  si  $\|\vec{\alpha}\|_q = 1$ . Enfin, si l'on applique à  $\chi_{Y, \xi}^{\lambda}(\vec{x})$  un opérateur  $\sum \gamma_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$  avec  $\|\vec{\gamma}\|_{\xi} \leq 1$ , il opère sous l'intégrale sur le seul facteur  $\langle J\xi, \eta \rangle^{-\lambda}$  et le lemme 8.15 permet de conclure. Ceci termine la preuve du lemme 9.1.

THÉOREME 9.2. Soient m une fonction-poids et f un symbole admissible tel que  $f_0$  (défini par (7.3)) soit un symbole de poids m. Soit  $A = \text{Op}(f)$  au sens de la définition 8.20. Pour tout  $N > 0$  il existe  $C > 0$  tel que, quels que soient  $(\vec{y}, q)$  et  $(\vec{y}', q')$  appartenant à  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , on ait l'inégalité

$$|(A\varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}', q'})| \leq C m(\vec{y}, q) q_0^{-1} \langle q, Jq' \rangle^{-N} (1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\|_q)^{-N}.$$

Preuve. Soient  $\lambda$  un nombre réel et  $a_{\lambda}$  le  $\lambda$ -symbole de  $A$  : d'après le théorème 8.19,  $a_{\lambda}$  est un symbole de poids  $m$  pour  $\lambda$  arbitrairement grand. Avec  $Y = Jq + i(0, \vec{y})$  et  $Y' = Jq' + i(0, \vec{y}')$ , la proposition 7.5 et la définition de  $\chi_{Y, \xi}^{\lambda}$  donnée dans le lemme 9.1 permettent d'écrire

$$(9.9) \quad (A\varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}', q'}) =$$

$$\int \bar{\chi}_{Y', \xi}^\lambda(\vec{x}) e^{2i\pi \langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle} a_\lambda(\vec{x}, \vec{\xi}) e^{-2\pi \langle Y, \xi \rangle} \xi_0^{-1} d\vec{x} d\vec{\xi}.$$

Soit I cette intégrale. D'après la définition 8.10 et le lemme 8.8, on a pour un certain triple  $(N_1, N_2, C_1)$  de nombres  $> 0$  l'inégalité

$$(9.10) \quad \begin{aligned} m(\vec{x}, \xi) &\leq C_1 m(\vec{y}, q) \langle Jq, \xi \rangle^{N_1} (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_q)^{N_2} \\ &\leq C_2 m(\vec{y}, q) \langle Jq, \xi \rangle^{N_1} (1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\|_q)^{N_2} \langle Jq', q \rangle^{N_2} \\ &\quad (1 + \|\vec{x} - \vec{y}'\|_q)^{N_2}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 9.1, on a donc, pour tout  $k$  et pour une constante  $C$  convenable,

$$(9.11) \quad \begin{aligned} |I| &\leq C m(\vec{y}, q) \langle Jq', q \rangle^{N_2} (1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\|_q)^{N_2} \\ &\quad \int (1 + \|\vec{x} - \vec{y}'\|_q)^{N_2 - k} \langle Jq', \xi \rangle^{k - \lambda} \langle Jq, \xi \rangle^{N_1} e^{-2\pi \langle Jq, \xi \rangle} \xi_0^{-1} d\vec{x} d\vec{\xi} \\ &\leq C m(\vec{y}, q) \langle Jq', q \rangle^{N_2 - \lambda + k} q_0'^{-1} (1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\|_q)^{N_2} \end{aligned}$$

si l'on utilise à nouveau le lemme 8.1 et le fait que la forme quadratique  $\|\cdot\|_q^2$  a pour discriminant  $q_0'^2$ . Comme  $\lambda$  est arbitrairement grand et que  $q_0 q_0'^{-1} \leq 2 \langle Jq', q \rangle$ , il ne reste plus qu'à faire ressortir, au moyen d'intégrations par parties, des puissances de  $(1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\|_q)^{-1}$ .

Soit  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$  le vecteur (il est unique si  $\vec{x} \neq \vec{y}'$ ) tel que  $\|\vec{\alpha}\|_q = 1$  et  $\langle \vec{\alpha}, \vec{x} - \vec{y}' \rangle = \|\vec{x} - \vec{y}'\|_q$ . On a (avec  $x = (0, \vec{x})$ )

$$(9.12) \quad D(e^{-2\pi \langle Y - ix, \xi \rangle}) = e^{-2\pi \langle Y - ix, \xi \rangle}$$

si

$$(9.13) \quad D = [1 + \|\vec{x} - \vec{y}'\|_q + i \langle \vec{\alpha}, \frac{q_0}{\xi_0} \vec{\xi} - \vec{q} \rangle]^{-1} [1 + (2i\pi)^{-1} \sum_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}]$$

et l'intégration par parties qui correspond à cette identité peut être itérée grâce au lemme 8.16 et à la présence du facteur  $e^{-2\pi \langle Jq, \xi \rangle}$  dans l'intégrale (9.9). Quant à l'action des puissances de  $\sum_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$  sur  $\chi_{Y', \xi}^\lambda(\vec{x})$ , elle est contrôlée grâce au lemme 9.1 au

prix de la perte, sans importance, de puissances de  $\|\vec{\alpha}\|_{\xi} \leq 2^{3/2} \langle Jq, \xi \rangle$ , et la même chose vaut pour l'action de ces opérateurs sur le symbole  $a_{\lambda}(\vec{x}, \vec{\xi})$ .

Ceci termine la preuve du théorème 9.2.

THÉORÈME 9.3. Pour toute distribution  $u \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$  et tout nombre réel  $\alpha$ , posons

$$I_{\alpha} = \int (q_0^2 + |\vec{y}|^2)^{\alpha} |(u, \varphi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}}|^2 d\vec{y} d\vec{q}.$$

Alors  $I_{\alpha} < \infty$  si  $-\alpha$  est assez grand. On a  $I_{\alpha} < \infty$  pour tout  $\alpha$  si et seulement si  $u \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$  et  $I_0 < \infty$  si et seulement si  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . Enfin, quelles que soient  $u \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$  et  $v \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ , on a l'identité

$$c_1(u, v) = \int (u, \varphi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}} (\varphi_{\vec{y}, q}, v) d\vec{y} d\vec{q}$$

avec  $c_1 = 4k_{\frac{n+1}{2}}(4)$ .

Preuve. D'après la proposition 4.6, on a  $I_0 = c_1 \|u\|_{\frac{1}{2}}^2$  si  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . Avec  $\widehat{\langle D \rangle v}(\xi) = \widehat{\langle \xi \rangle} \hat{v}(\xi)$  on a  $(u, v) = (u, \langle D \rangle^{-1} v)_{\frac{1}{2}}$  de sorte que, dans le cas où  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  et  $\langle D \rangle^{-1} v \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  (i.e.  $v \in H^{3/2}(\mathbb{R}^n)$ ), l'identité proposée est vérifiée puisqu'elle résulte par polarisation du calcul de  $I_0$ . En fait, vu que

$$(9.14) \quad \int |(v, \varphi_{\vec{y}, q})|^2 d\vec{y} d\vec{q} = \int |(\langle D \rangle^{-1} v, \varphi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}}|^2 d\vec{y} d\vec{q} \\ = c_1 \|\langle D \rangle^{-1} v\|_{\frac{1}{2}}^2 = c_1 \|v\|_{-\frac{1}{2}}^2$$

un argument de continuité montre que l'identité relative à  $(u, v)$  est vérifiée sous les seules hypothèses que  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  et  $v \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ .

On a  $\widehat{\langle D \rangle u}(\xi) = \xi_0 \hat{u}(\xi)$ . Si l'on se réfère à la preuve de la proposition 4.6 et que l'on note (en comparant à (4.11)) que

$$(9.15) \quad \int e^{-4\pi \langle Jq, \xi \rangle} q_0^{2s} d\vec{q} \leq C \xi_0^{2s+1} \int \langle Jq, \xi \rangle^{2|s|+1} e^{-4\pi \langle Jq, \xi \rangle} q_0^{-1} d\vec{q} \\ \leq C \xi_0^{2s+1},$$

on voit que, pour tout  $s$  réel,



$$(9.16) \quad \int | (u, \varphi_{\vec{y}, q}) |^2 q_0^{2s} d\vec{y} d\vec{q} < \infty \quad \text{si } u \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n).$$

Rappelons que

$$(u, \varphi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}} = \int \hat{u}(\vec{\xi}) e^{-2\pi i \langle Jq, \xi \rangle} e^{2i\pi \langle \vec{y}, \vec{\xi} \rangle} d\vec{\xi}.$$

On a (avec  $y = (0, \vec{y})$ )

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (\exp -2\pi i \langle Jq - iy, \xi \rangle) = 2\pi \left[ (q_j - q_0 \frac{\xi_j}{\xi_0}) + iy_j \right] \exp -2\pi i \langle Jq - iy, \xi \rangle$$

et comme  $-\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_j}$  est la transformée de Fourier de  $2i\pi x_j u$ , une intégration par parties fournit l'identité

$$(9.17) \quad (q_j + iy_j) (u, \varphi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}} = q_0 (R_j u, \varphi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}} + 2i\pi (x_j u, \varphi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}}$$

si l'on définit l'opérateur  $R_j$  comme la convolution par la transformée de Fourier inverse de  $\xi_0^{-1} \xi_j$ . Il résulte de (9.16) et (9.17) (cette dernière identité pouvant être itérée) que  $I_\alpha < \infty$  pour tout  $\alpha$  si  $u \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ .

L'identité (9.17) peut également être utilisée en sens inverse : avec l'aide de (9.16), elle montre que pour toute distribution  $u \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$ , on a  $I_\alpha < \infty$  si  $-\alpha$  est assez grand.

D'après ce qui précède, l'intégrale au membre de droite de l'identité qui termine l'énoncé du théorème 9.3 est une forme bilinéaire faiblement continue du couple  $(u, v)$  sur l'espace  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$  : il suffit pour le voir d'appliquer l'inégalité de Schwarz après avoir multiplié le facteur de droite sous l'intégrale (et divisé le facteur de gauche) par une puissance convenable de  $q_0^2 + |\vec{y}|^2$ . Ceci démontre l'identité proposée puisqu'elle est déjà valable si  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  et  $v \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ .

Soit  $u \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$  telle que  $I_0 < \infty$ . On peut calculer  $(u, v)$  par l'intégrale dont il vient d'être question pour toute fonction  $v \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ . L'inégalité de Schwarz et (9.14) montrent que

$$(9.18) \quad c_1 |(u, v)| \leq I_0^{\frac{1}{2}} \quad c_1^{\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2}},$$

par suite  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ .

Enfin, si l'on suppose que  $I_\alpha < \infty$  pour tout  $\alpha$ , il résulte de

ce qui vient d'être dit et de l'inégalité  $\xi_0 \leq 2 q_0 \langle Jq, \xi \rangle$  que  $u$  appartient à tous les espaces de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^n)$  ; on voit ensuite que  $u \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$  à l'aide de (9.17). Ceci termine la preuve du théorème 9.3.

**THÉOREME 9.4.** Soit  $f$  un symbole admissible de poids 1. L'opérateur  $A = \text{Op}(f)$  se prolonge en un opérateur linéaire continu de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Preuve. Quelles que soient les fonctions  $u$  et  $v \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ , l'identité du théorème 9.3 permet d'écrire

$$\begin{aligned} (9.19) \quad c_1^2(Au, v) &= c_1^2(u, A^*v) \\ &= c_1 \int (u, \varphi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}} (A\varphi_{\vec{y}, q}, v) d\vec{y} d\vec{q} \\ &= \int (u, \varphi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}} (A\varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}', q'})_{\frac{1}{2}} (\varphi_{\vec{y}', q'}, v)_{\frac{1}{2}} d\vec{y} d\vec{q} d\vec{y}' d\vec{q}'. \end{aligned}$$

D'après le théorème 9.2 et le lemme 8.2 on peut alors, pour tout  $N$ , trouver  $C$  tel que l'on ait

$$\begin{aligned} (9.20) \quad |(Au, v)| &\leq C \int (q_0 q'_0)^{-\frac{1}{2}} \langle q, Jq' \rangle^{-N} (1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\|_q)^{-N} \\ &\quad |(u, \varphi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}}| |(v, \varphi_{\vec{y}', q'})_{\frac{1}{2}}| d\vec{y} d\vec{q} d\vec{y}' d\vec{q}' \end{aligned}$$

pour tout couple  $(u, v)$  de fonctions appartenant à  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ . Comme, pour tout  $N > n$  et  $N_1 > n$ , on a

$$\begin{aligned} (9.21) \quad &\int \langle q, Jq' \rangle^{-N_1} (1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\|_q)^{-N} d\vec{y} d\vec{q} \\ &\leq C \int \langle q, Jq' \rangle^{-N_1} q_0^{-1} d\vec{q} \leq C \end{aligned}$$

et que, grâce au lemme 8.2, la même conclusion vaut pour l'intégrale de la même fonction relativement à  $d\vec{y}' d\vec{q}'$  pourvu que  $N > n$  et  $N_1 > n+1$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} (9.22) \quad |(Au, v)| &\leq \\ &C \left[ \int |(u, \varphi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}}|^2 q_0^{-1} d\vec{q} d\vec{y} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int |(v, \varphi_{\vec{y}', q'})_{\frac{1}{2}}|^2 q_0^{-1} d\vec{q} d\vec{y}' \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

soit, d'après (9.16),

$$(9.23) \quad |(Au, v)| \leq C \|u\| \|v\| ,$$

ce qui termine la preuve du théorème 9.4.

**THÉOREME 9.5.** Soit  $f$  un symbole de poids quelconque. Alors l'opérateur  $A = Op(f)$  opère continûment de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Preuve. D'après le lemme 8.11,  $f_0$  est un symbole de poids  $p_0^\beta(1+|\vec{x}|^2)^\beta$  pour  $\beta$  assez grand et, d'après le théorème 9.2, on a les inégalités

$$(9.24) \quad |(A\phi_{\vec{y}, q}, \phi_{\vec{y}', q'})| \leq q_0^{\beta-1} (1+|\vec{y}|^2)^\beta \langle q, Jq' \rangle^{-N} (1+ \|\vec{y}-\vec{y}'\|_q)^{-N}$$

Soit  $E_\alpha$  l'espace des fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  vérifiant

$$\int (q_0^2 + |\vec{y}|^2)^\alpha |f(\vec{y}, q)|^2 d\vec{y} dq < \infty .$$

Si  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et si  $f(\vec{y}, q) = (u, \phi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}}$ , le théorème 9.3 montre que  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si  $f$  appartient à  $E_\alpha$  pour tout  $\alpha$ . Si l'on imite la preuve du théorème 9.4, il s'agit donc de prouver que l'opérateur intégral dont le noyau  $K(\vec{y}, q; \vec{y}', q')$  est donné en (9.24) opère continûment de l'espace  $\cap_\alpha E_\alpha$  dans lui-même : or ce point résulte très facilement de l'inégalité (déf. 8.10) qui traduit le fait que les puissances de  $p_0(1+|\vec{x}|^2)$  sont des fonctions-poids.

## X - CARACTÉRISATION DES OPÉRATEURS ET COMPOSITION.

On montre dans la présente section que l'inégalité qui est l'objet du théorème 9.2 constitue en fait une caractérisation des opérateurs de poids  $m$  : il en résulte immédiatement, par exemple, que les opérateurs de poids 1 forment une algèbre. Le lecteur peut par ailleurs se demander quelle est, dans la classe d'opérateurs obtenue, la part due à l'emploi de classes de symboles d'un type particulier, et celle due à l'emploi du calcul de Klein-Gordon proprement dit. C'est pour répondre à cette question éventuelle que nous terminerons cette section par une digression relative au calcul standard des opérateurs : elle n'est pas cruciale pour le présent récit, et les preuves n'y seront pas détaillées.

THÉORÈME 10.1. Soit  $m$  une fonction-poids. Soit  $A$  un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$  possédant la propriété suivante : quel que soit  $N > 0$  il existe  $C > 0$  tel que, quels que soient  $(\vec{y}, q)$  et  $(\vec{y}', q') \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , on ait l'inégalité

$$|(A\varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}', q'})| \leq C m(\vec{y}, q) q_0^{-1} \langle q, Jq' \rangle^{-N} (1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\| q)^{-N}.$$

Alors  $A$  peut s'écrire  $A = \text{Op}(f)$ , où le symbole (admissible)  $f$  est de poids  $m$ .

Preuve. D'après le théorème 8.21, il suffit de prouver que, pour tout  $\lambda$  réel, le  $\lambda$ -symbole  $a_\lambda$  de  $A$  appartient à  $\text{Symb}(m)$ . Posons

$$(10.1) \quad K(\vec{y}, q; \vec{y}', q') = (A\varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}', q'}).$$

D'après (9.19), on a pour tout couple  $(u, v)$  de fonctions de  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$  l'identité

$$(10.2) \quad c_1^2(Au, v) = \int (u, \langle D \rangle \varphi_{\vec{Y}, q}) K(\vec{Y}, q; \vec{Y}', q') (\langle D \rangle \varphi_{\vec{Y}', q'}, v) d\vec{Y} d\vec{q} d\vec{Y}' d\vec{q}'$$

et comme il est immédiat que le symbole standard d'un opérateur de rang un  $u \mapsto (u, \psi) \varphi$ , avec  $\varphi$  et  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , est la fonction

$$(\vec{x}, \vec{\xi}) \mapsto \varphi(\vec{x}) e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle} \overline{\psi(\vec{\xi})},$$

on voit que le symbole standard  $a_0$  de  $A$  est donné par

$$(10.3) \quad c_1^2 a_0(\vec{x}, \vec{\xi}) = \int K(\vec{Y}, q; \vec{Y}', q') (\langle D \rangle \varphi_{\vec{Y}', q'}) (\vec{x}) e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle} \overline{(\langle D \rangle \varphi_{\vec{Y}, q}(\vec{\xi}))} d\vec{Y} d\vec{q} d\vec{Y}' d\vec{q}'.$$

Avec  $Y = Jq + i(0, \vec{Y})$ ,  $Y' = Jq' + i(0, \vec{Y}')$ ,  $\xi = (\langle \vec{\xi} \rangle, \vec{\xi})$  et  $\eta = (\langle \vec{\eta} \rangle, \vec{\eta})$ ,

on a

$$(10.4) \quad \widehat{\langle D \rangle \varphi_{\vec{Y}, q}}(\vec{\xi}) = e^{-2\pi \langle Y, \xi \rangle}$$

et par suite

$$(10.5) \quad c_1^2 (\mathcal{T}_1^{-1} a_0)(\vec{\xi} - \vec{\eta}, \vec{\xi}) = \int K(\vec{Y}, q; \vec{Y}', q') e^{-2\pi (\langle Y', \eta \rangle + \langle \vec{Y}, \xi \rangle)} d\vec{Y} d\vec{q} d\vec{Y}' d\vec{q}'.$$

La relation (7.18) entre  $a_0$  et  $a_\lambda$  fournit enfin

$$(10.6) \quad c_1^2 a_\lambda(x, \xi) = \int (\langle \xi, J\eta \rangle)^\lambda K(\vec{Y}, q; \vec{Y}', q') e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \vec{\xi} - \vec{\eta} \rangle} e^{-2\pi (\langle Y', \eta \rangle + \langle \vec{Y}, \xi \rangle)} d\vec{\eta} d\vec{Y} d\vec{q} d\vec{Y}' d\vec{q}'.$$

Posons, avec  $x = (0, \vec{x})$ ,

$$(10.7) \quad \psi_{Y', \xi}^\lambda(\vec{x}) = \int \langle \xi, J\eta \rangle^\lambda e^{-2\pi \langle Y' - ix, \eta \rangle} d\vec{\eta} :$$

c'est presque la fonction  $\chi_{Y', \xi}^{-\lambda}(x)$  définie dans le lemme 9.1, à l'abandon près du facteur  $1/\eta_0$  dans l'intégrale qui définissait cette dernière ; comme  $\eta_0 \leq 2q'_0 \langle Jq', \eta \rangle$ , une modification insignifiante du lemme 9.1 fournit les inégalités

$$(10.8) \quad \left| \prod_{i,j} \vec{v}_i^1(\partial_x) \vec{w}_j^2(\partial_\xi) (\psi_{Y,\xi}^\lambda(\vec{x})) \right|$$

$$< C < Jq, \xi >^{k+\lambda} q_0' (1 + \|\vec{x}-\vec{y}'\|_{q'})^{-k} \prod_{i,j} \|\vec{v}_i^1\|_{q'} \|\vec{w}_j^2\|_{\xi}$$

dans lesquelles  $k$  est arbitrairement grand.

On écrit (10.6) sous la forme

$$(10.9) \quad c_1^2 a_\lambda(\vec{x}, \vec{\xi}) = \int K(\vec{y}, q; \vec{y}', q') \psi_{Y,\xi}^\lambda(\vec{x})$$

$$e^{-2\pi \langle \vec{y} + i\vec{x}, \xi \rangle} d\vec{y} d\vec{q} d\vec{y}' d\vec{q}' .$$

Nous terminerons la preuve en supposant  $m = 1$  pour simplifier les notations mais il n'y a, on s'en convaincra, aucune difficulté à absorber dans le cas général le facteur

$$[m(\vec{x}, \xi)]^{-1} m(\vec{y}, q) \leq C_1 < Jq, \xi >^{N_1} (1 + \|\vec{x}-\vec{y}\|_{\xi})^{N_2} .$$

Si l'on utilise la majoration de  $|K(\vec{y}, q; \vec{y}', q')|$  qui constitue l'hypothèse du théorème 10.1 et que l'on se sert de (10.8) on obtient, en partant de (10.9) :

$$(10.10) \quad |a_\lambda(\vec{x}, \vec{\xi})| \leq C \int \frac{q_0'}{q_0} < q, Jq' >^{-N} (1 + \|\vec{y}-\vec{y}'\|_{q'})^{-N}$$

$$< Jq, \xi >^{k+\lambda} (1 + \|\vec{x}-\vec{y}'\|_{q'})^{-k} e^{-2\pi \langle Jq, \xi \rangle} d\vec{y} d\vec{q} d\vec{y}' d\vec{q}' .$$

On majore  $q_0'$  par  $2q_0 < q, Jq' >$  et  $< Jq, \xi >$  par le produit  $2 < Jq, q' > < Jq, \xi >$ ; comme

$$\int (1 + \|\vec{y}-\vec{y}'\|_{q'})^{-N} (1 + \|\vec{x}-\vec{y}'\|_{q'})^{-k} d\vec{y} d\vec{y}' \leq C(q_0 q_0')^{-1}$$

si  $N > n$  et  $k > n$ , on obtient

$$|a_\lambda(\vec{x}, \vec{\xi})| \leq C \int < q, Jq' >^{-N+1+\lambda+k} < Jq, \xi >^{|\lambda+k|} e^{-2\pi \langle Jq, \xi \rangle} \frac{d\vec{q}}{q_0} \frac{d\vec{q}'}{q_0'}$$

et cette dernière intégrale est bornée si  $N > n + \lambda + 1 + k$ .

Il reste à montrer que  $a_\lambda$ , toujours définie par (10.9), reste bornée après application d'un produit d'opérateurs différentiels

$\sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$  avec  $\|\vec{\alpha}\|_{\xi} \leq 1$  ou celle d'un produit d'opérateurs  $\sum \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  avec  $\|\vec{\beta}\|_{\xi} \leq 1$  : compte tenu de la présence sous l'intégrale (10.10) du facteur  $< q, Jq' >^{-N} e^{2\pi \langle Jq, \xi \rangle}$

avec  $N$  arbitrairement grand, l'effet de ces opérateurs sur  $\psi_{\vec{y};\xi}^{\lambda}(\vec{x})$  est décrit par (10.8) de façon satisfaisante ; quant à leur effet sur  $\exp(-2\pi i \langle Jq + i(x-y), \xi \rangle)$ , il se traite par une application maintenant routinière de l'inégalité  $|\langle \vec{\alpha}, \vec{x} - \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{\alpha}\|_{\xi} \|\vec{x} - \vec{y}\|_{\xi}$  et du lemme 8.16. Ceci termine la preuve du théorème 10.1.

**THÉORÈME 10.2.** Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux opérateurs de poids  $m_1$  et  $m_2$  respectivement, c'est-à-dire de la forme  $A_j = \text{Op}(f_j)$  avec  $f_j \in \text{Sym}(m_j)$  : alors l'opérateur  $A_1 A_2$  est un opérateur de poids  $m_1 m_2$ .

Preuve. Remarquons d'abord qu'il est trivial que le produit de deux fonctions-poids est une fonction-poids ; par ailleurs le produit  $A_1 A_2$  est bien défini, d'après le théorème 9.5, puisque  $A_1$  et  $A_2$  opèrent tous deux de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Soit  $a_0$  le symbole standard d'un opérateur quelconque  $A$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  : on sait, d'après (7.1), que  $\langle \xi \rangle a_0(\vec{x}, \xi)$  est le symbole standard de l'opérateur  $A \langle D \rangle$ . La même relation lie, d'après (7.18), les  $\lambda$ -symboles des opérateurs  $A$  et  $A \langle D \rangle$  : bien entendu, cette multiplication par  $\langle \xi \rangle$  transforme un symbole de poids  $m(\vec{x}, \xi)$  en un symbole de poids  $\xi_0 m(\vec{x}, \xi)$ . Les théorèmes 8.19 et 8.21 montrent alors que  $A \langle D \rangle$  est un opérateur de poids  $p_0 m(\vec{x}, p)$  si  $A$  est de poids  $m(\vec{x}, p)$ .

Pour tout couple  $((\vec{y}, q), (\vec{y}', q'))$  de points de  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , l'identité contenue dans le théor. 9.3 permet d'écrire (l'étoile désignant ici l'adjonction relativement au produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ )

$$(10.11) \quad I = |(A_1 A_2 \varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}', q'})| = |(\langle D \rangle^{-1} A_2 \varphi_{\vec{y}, q}, (A_1 \langle D \rangle)^* \varphi_{\vec{y}', q'})| \\ \leq c_1^{-1} \int |(\langle D \rangle^{-1} A_2 \varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}'', q''})_{\frac{1}{2}}| |(A_1 \langle D \rangle \varphi_{\vec{y}'', q''}, \varphi_{\vec{y}', q'})| d\vec{y}'' d\vec{q}''.$$

Le premier facteur s'écrit aussi  $|(A_2 \varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}'', q''})|$ , et le théorème 9.2 fournit donc la majoration

$$(10.12) \quad I \leq C q_0^{-1} m_2(\vec{y}, q) m_1(\vec{y}', q')$$

$$\int \langle q, Jq \rangle^{-N} (1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\|_q)^{-N} \langle q, Jq' \rangle^{-N} (1 + \|\vec{y}' - \vec{y}'\|_{q'})^{-N} \\ d\vec{y}'' d\vec{q}''$$

avec  $N$  arbitrairement grand : en utilisant le fait que  $m_1$  est une fonction-poids, le lemme 8.1 et l'inégalité de Peetre, on obtient

finalement

$$(10.13) \quad I \leq C q_0^{-1} m_1(\vec{y}, q) m_2(\vec{y}, q) \langle q, Jq' \rangle^{-N_1} (1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\|_q)^{-N_1}$$

avec  $N_1$  arbitrairement grand : cette inégalité, jointe au théorème 10.1, achève de prouver le théorème 10.2.

COROLLAIRE 10.3. Soit A un opérateur d'ordre k, c'est-à-dire, rappelaons-le, de poids  $p_0^k$  : pour tout s réel, A s'étend en un opérateur continu de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$ .

Preuve. c'est immédiat, il suffit de remarquer que l'opérateur  $\langle D \rangle^{s-k} A \langle D \rangle^{-s}$  est un opérateur d'ordre 0.

COROLLAIRE 10.4. Soit m une fonction-poids et soit A un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Pour que A puisse s'écrire  $Op(f)$ , où f est un symbole de poids m, il faut et il suffit que pour tout  $N > 0$  il existe  $C > 0$  tel que, quels que soient  $(\vec{y}, q)$  et  $(\vec{y}', q') \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , on ait l'inégalité

$$|(A\varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}', q'})| \leq C m(\vec{y}, q) \langle q, Jq' \rangle^{-N} (1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\|_q)^{-N}.$$

Preuve. On applique à  $\langle D \rangle A$  les théorèmes 9.2 et 10.1.

Dans le reste de cette section, on abandonne le calcul de Klein-Gordon pour revenir aux calculs habituels : nous pensons que les précisions qui suivent pourront intéresser certains lecteurs. Rappelons que pour tout t réel on définit un calcul symbolique  $Op_t$  sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  en posant, pour tout symbole  $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ ,

$$(10.14) \quad (Op_t(a)u)(\vec{x}) = \int a((1-t)\vec{x} + t\vec{y}, \vec{\eta}) e^{2i\pi \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{\eta} \rangle} u(\vec{y}) d\vec{y} d\vec{\eta}.$$

Lorsque  $t = 0$ , le calcul en question est le calcul standard ; pour  $t = \frac{1}{2}$ , c'est le calcul de Weyl, et pour  $t = 1$  c'est le calcul qui donne la priorité aux opérateurs de multiplication par rapport à ceux de convolution. Si  $A = Op_t(a)$ , on dira aussi que a est le  $Op_t$ -symbole de l'opérateur A. La relation entre le  $Op_0$ -symbole a et le  $Op_1$ -symbole b du même opérateur est donnée par  $a = J^1 b$  avec



$$(10.15) \quad J^t = \exp \frac{t}{2i\pi} \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j}.$$

Dans [15], Hörmander a introduit les classes de symboles  $S_{\rho, \delta}^m$  ( $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ ,  $\delta < 1$ ) caractérisées par les inégalités

$$(10.16) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(\vec{x}, \vec{\xi}) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\vec{\xi}|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}.$$

Il est apparu très tôt que les classes de symboles  $S_{1,1}^m$  ne pouvaient conduire à un calcul acceptable des opérateurs pseudo-différentiels. Cependant, Stein a montré comment on pouvait récupérer la continuité sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  d'un opérateur à condition de supposer l'appartenance simultanée à  $S_{1,1}^0$  de son  $Op_0$ -symbole et de son  $Op_1$ -symbole ; plus récemment, Bourdaud a montré dans [4] que ce type de condition conduisait encore à des algèbres d'opérateurs.

Néanmoins, nous ne pensons pas que le calcul  $S_{1,1}$  soit réhabilité pour autant : la contrainte qui oblige à étudier simultanément deux symboles liés par la relation  $a = J^1 b$  empêche en effet d'effectuer sur les symboles des opérations très simples telles que les troncatures, et semble enlever au calcul pseudo-différentiel associé l'essentiel de son utilité.

Dans l'esprit de ce qui précède, voici une caractérisation des opérateurs dont le  $Op_0$ -symbole et le  $Op_1$ -symbole appartiennent tous deux à la classe  $\text{Symb}(m)$  introduite dans la définition 8.13. Il est nécessaire, cependant, de renforcer l'hypothèse sur la fonction-poids.

THÉORÈME 10.5. Soit  $m$  une fonction-poids vérifiant la condition suivante : il existe  $C_1 > 0$ ,  $N_1 \geq 0$  et  $N_2 \geq 0$  tels que, pour tout couple  $((\vec{y}, q), (\vec{y}', q'))$  de points de  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , on ait l'inégalité

$$m(\vec{y}, q) \leq C_1 m(\vec{y}', q') \inf(\langle q, Jq' \rangle, \langle q, q' \rangle)^{N_1} (1 + \|\vec{y} - \vec{y}'\|_q)^{N_2}.$$

Soit  $a$  (resp.  $b$ ) le  $Op_0$  (resp.  $Op_1$ )-symbole d'un opérateur linéaire continu  $A$  de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ . Les conditions (i) et (ii) sont équivalentes :

- (i)  $a$  et  $b$  appartiennent tous deux à  $\text{Symb}(m)$  ;
- (ii) pour tout  $N \geq 0$  il existe  $C > 0$  tel que, quels que soient  $(\vec{y}, q)$  et  $(\vec{y}', q')$  appartenant à  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , on ait l'inégalité

$$|(A\phi_{\vec{y},q}, \phi_{\vec{y}',q'})| \leq C m(\vec{y},q) q_0^{-1} (1 + \|\vec{y}-\vec{y}'\|_q)^{-N} \\ [\inf(\langle q, Jq' \rangle, \langle q, q' \rangle)]^{-N}.$$

Preuve. Rappelons, d'après le lemme 8.3, que  $\inf(\langle q, Jq' \rangle, \langle q, q' \rangle)$  est de l'ordre de

$$\delta(q, q') = (2q_0 q'_0)^{-1} (q_0^2 + q'^2 + |\vec{q} \wedge \vec{q}'|^2).$$

Supposons (i) vérifiée et reprenons la preuve du théorème 9.2 sous ces hypothèses, en partant de (9.9) écrite avec  $\lambda = 0$ . Comme on ne dispose plus, dans l'emploi du lemme 9.1, du facteur  $\langle Jq', \xi \rangle^{-\lambda}$ , on compense ce défaut au moyen d'une intégration par parties basée sur l'emploi de l'opérateur  $\Sigma \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  avec  $\|\vec{\beta}\|_q \leq 1$  : l'application au symbole  $a(\vec{x}, \vec{\xi})$  de puissances de cet opérateur fait perdre des puissances de  $\langle Jq, \xi \rangle$  mais cela est sans importance ; il en est de même pour son application à l'exponentielle  $\exp 2i\pi \langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle$ . La fonction  $\chi_{\vec{y}', \xi}^0(\vec{x})$  se réduit (cf. (9.3)) à

$$\psi_{\vec{y}', q'}(\vec{x}) = 2k_{\frac{n-1}{2}} (1 + |\vec{x} - \vec{y}'|^2 - 2i \langle \vec{x} - \vec{y}', \vec{q}' \rangle)$$

et on peut la dériver à l'aide de la proposition 4.2. L'application de  $\Sigma \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  met en évidence le facteur

$$\langle \vec{\beta}, \vec{x} - \vec{y}' \rangle - i \langle \vec{\beta}, \vec{q}' \rangle$$

et, pour  $\vec{\beta}$  bien choisi, l'intégration par parties correspondante permet de gagner des puissances arbitraires de  $\|\vec{q}'\|_q$ . Or

$$(10.17) \quad \|\vec{q}'\|_q^2 = q_0^{-2} [q_0'^2 - 1 + |\vec{q}' \wedge \vec{q}|^2] \\ = 2 \frac{q'_0}{q_0} \delta(q, q') - (1 + q_0^{-2})$$

de sorte que

$$(10.18) \quad 1 + \frac{1}{2} \|\vec{q}'\|_q^2 \geq \delta(q, q') \quad \text{si } q'_0 \geq q_0.$$

Si l'on est dans le cas opposé, il suffit d'échanger les rôles de  $\phi_{\vec{y}, q}$  et  $\phi_{\vec{y}', q'}$  puisque le  $Op_0$ -symbole de  $A^*$  est  $\bar{b}$ . Le reste de la preuve du théorème 9.2 s'étend sans modification.

Pour prouver que (ii) implique (i), c'est la preuve du théorème 10.1 qu'il s'agit d'étendre : compte tenu des lemmes 8.4 et 8.8, cela ne demande cette fois aucune modification, ce qui termine la preuve du théorème 10.5.

L'examen du théorème 10.5 d'une part, des théorèmes 9.2 et 10.1 d'autre part, permet une comparaison très précise des opérateurs dont le symbole de Klein-Gordon appartient à  $\text{Symb}(m)$  avec ceux qui ont à la fois un  $\text{Op}_0$ -symbole et un  $\text{Op}_1$ -symbole dans cette classe. Cette comparaison est à l'avantage du calcul de Klein-Gordon, mais les théorèmes de continuité 9.4 et 9.5, aussi bien que le théorème de composition 10.2, restent valables pour les opérateurs de la deuxième catégorie.

Si  $k \in \mathbb{R}$ , si  $m(\vec{x}, p) = p_0^k$ , et si enfin  $n = 1$ , la proposition 8.14 montre que  $\text{Symb}(m) = S_{1,1}^k$  de sorte que le calcul de Klein-Gordon nous paraît être, dans ce cas, "le" bon calcul pour la classe  $S_{1,1}$ . Il n'en est pas de même lorsque  $n \geq 2$ . Voici dans tous les cas, cependant, une caractérisation des opérateurs de la classe  $S_{1,1}$  au moyen d'états cohérents liés à ceux introduits dans la section 4. La preuve des résultats qui suivent est tout à fait parallèle à la preuve des propositions 5.1 et 5.2 de [37] : aussi l'omettrons-nous.

DÉFINITION 10.6. L'espace  $\Pi_0$  est constitué des points  $Y = (\varepsilon, \vec{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tels que  $\varepsilon > 0$  : il est muni de la métrique  $ds^2 = \varepsilon^{-2} (d\varepsilon^2 + |d\vec{y}|^2)$  et de la mesure associée  $d\mu(Y) = \varepsilon^{-n-1} d\varepsilon d\vec{y}$ .

Remarque : cet espace symétrique n'est qu'un autre modèle de l'hyperboloïde de masse (voir par exemple Lax-Phillips [21]); la distance  $d$  sur  $\Pi_0$  est donnée par

$$(10.19) \quad \text{ch } d(Y, Y') = (2\varepsilon\varepsilon')^{-1} (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + |\vec{y} - \vec{y}'|^2).$$

DÉFINITION 10.7. Soit  $\nu$  un entier ou demi-entier  $\geq -\frac{1}{2}$ . Pour tout  $(\varepsilon, \vec{y}) \in \Pi_0$  on définit la fonction  $\varphi_Y^\nu = \varphi_{\varepsilon, \vec{y}}^\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  par  $\varphi_{\varepsilon, \vec{y}}^\nu(\vec{x}) = \varphi_\varepsilon^\nu(\vec{x} - \vec{y})$ , où  $\varphi_\varepsilon^\nu$  est caractérisée par

$$\wedge_\varepsilon^\nu(\vec{\xi}) = \varepsilon^{\frac{n}{2} + 2\nu} \langle \vec{\xi} \rangle^{2\nu} e^{-2\pi i \varepsilon \langle \vec{\xi} \rangle}.$$

Remarque : si l'on se réfère à la définition 4.4, on voit que

$$(10.20) \quad \varphi_{\varepsilon, \vec{Y}}^{\nu} = \varepsilon^{\frac{n}{2} + 2\nu} \langle D \rangle^{2\nu+1} \psi_Z$$

avec  $Z = (\varepsilon, iy_1, \dots, iy_n) \in \Pi$ .

THÉOREME 10.8. Soit  $m = m(\varepsilon, \vec{Y}) = m(Y)$  une fonction  $> 0$  sur  $\Pi_0$  vérifiant pour un couple  $(N_1, C_1)$  de constantes positives l'inégalité

$$m(Y) \leq C_1 m(Y') e^{N_1 d(Y, Y')}$$

pour tout couple  $(Y, Y')$  de points de  $\Pi_0$ . Soient  $a$  et  $b$  le  $Op_0$ - et le  $Op_1$ -symbole d'un opérateur linéaire continu  $A$  de  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$ . Les conditions (i) et (ii) sont équivalentes :

(i)  $a$  est de classe  $C^\infty$  et vérifie les estimations

$$|(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \xi})^\beta a(\vec{x}, \vec{\xi})| \leq C \langle \xi \rangle^{|\alpha| - |\beta|} m(\langle \xi \rangle^{-1}, \vec{x}),$$

et la même condition est valable pour  $b$  ;

(ii) pour tout entier  $N \geq 0$  il existe  $\nu_0 > -\frac{1}{2}$  et, pour tout  $\nu$  entier ou demi-entier  $\geq \nu_0$ , une constante  $C > 0$  telle que l'on ait

$$|(A\varphi_Y^\nu, \varphi_Y^\nu)| \leq C m(Y) \exp(-Nd(Y, Y'))$$

pour tout couple  $(Y, Y')$  de points de  $\Pi_0$ .

Remarque. Ce résultat, basé sur la résolution de l'identité

$$(10.21) \quad (4\pi)^{-4\nu} (4\nu-1)! \|u\|^2 = \int_{\Pi_0} |(u, \varphi_Y^\nu)|^2 d\mu(Y)$$

valable si  $\nu \geq \frac{1}{2}$ , appelle quelques remarques.

La première est qu'il n'autorise que l'emploi de fonctions-poids radiales relativement à  $\vec{\xi}$  : en particulier les puissances de  $\langle \vec{\xi} \rangle$  sont permises, et ce théorème comprend donc une caractérisation des opérateurs de la classe  $S_{1,1}^k$ . Ensuite, on observera que l'espace  $\Pi_0$  qui paramétrise les états cohérents n'est ici que de dimension  $n+1$  alors que, aussi bien dans le calcul de Weyl sur  $\mathbb{R}^n$  que dans celui de Klein-Gordon, un espace de dimension  $2n$  est nécessaire. Néanmoins, cela suffit pour retrouver les résultats les plus importants (continuité sur  $L^2$ , composition) des opérateurs de la classe envisagée.



## XI - LA COMPOSITION DES SYMBOLES.

On donne dans cette section la formule intégrale permettant la composition des symboles de Klein-Gordon. Elle présente quelques ressemblances avec celle du calcul de Weyl mais aussi la différence fondamentale suivante : la valeur en un point  $\omega \in \Omega$  du composé  $f \# g$  de deux symboles ne dépend que de la restriction de  $f \otimes g$  à une partie de  $\Omega \times \Omega$  de complémentaire non négligeable, sauf dans le cas où  $n = 1$ . Les trois sections suivantes seront consacrées en partie à la description de formules de composition sous la forme des développements asymptotiques avec lesquels le calcul de Weyl nous a familiarisés.

D'après le théorème 8.18, le passage du symbole de Klein-Gordon actif au symbole de Klein-Gordon passif, de même que le passage inverse, conserve les classes de symboles de poids donné. Autant dire que l'utilisation du symbole de l'une plutôt que de l'autre espèce ne s'impose pas pour le moment : dans la présente section, nous choisirons le symbole passif, lequel conduit à une formule plus agréable.

Il suffit d'énoncer et de prouver la formule de composition des symboles dans le cas où les opérateurs envisagés varient dans une certaine algèbre  $\mathcal{K}$  d'opérateurs pourvu que  $\mathcal{K}$  soit dense, disons dans l'algèbre des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . Si  $\{\psi_Z\}_{Z \in \Pi}$  est la famille des états cohérents introduits dans la définition 4.4, nous avons choisi de prendre pour  $\mathcal{K}$  l'espace vectoriel engendré par les opérateurs de rang un du type

$$(11.1) \quad u \mapsto (u, \psi_Z)_Z \psi_Z$$

avec  $Z, Z'$  appartenant tous deux à  $\Pi$ . Si l'on note  $\pi_{Z,Z'}$  cet opérateur, on a

$$(11.2) \quad \pi_{Y,Y'} \pi_{Z,Z'} = (\psi_Z, \psi_{Y'})_{\frac{1}{2}} \pi_{Y,Z'}$$

et  $\mathcal{K}$  est bien une algèbre. Le symbole passif de  $\pi_{Z,Z'}$  est la fonction de Wigner dont le calcul fait l'objet de la proposition 4.5. Rappelons ici, pour la commodité du lecteur, que

$$(11.3) \quad (\psi_Z, \psi_{Z'})_{\frac{1}{2}} = \Psi(Z + \bar{Z}')$$

où  $\Psi$  est donnée dans la définition 4.3, et que

$$(11.4) \quad W(\psi_Z, \psi_{Z'}) (x; p) = 2^n \Psi(J_p(Z - ix) + \bar{Z}' + ix)$$

avec

$$J_p Z = -Z + 2\langle Z, p \rangle J_p.$$

THÉOREME 11.1. Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux opérateurs dans l'algèbre  $\mathcal{K}$  engendrée par les opérateurs de rang un de la forme (11.1), et soit  $A = A_1 A_2$ . Soient  $g_1, g_2$  et  $g_1 \# g_2$  les symboles passifs des opérateurs  $A_1, A_2$  et  $A$  respectivement. Soit  $\omega_0$  l'observateur de référence, c'est-à-dire le point  $(x, p) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  tel que  $x = 0$  et  $p = (1, 0, \dots, 0)$ . On a l'identité

$$(g_1 \# g_2)(\omega_0) = 2^{2n} \int \int (p'_0 p''_0)^n (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{-n-1} g_1(0, \vec{x}; p') g_2(0, \vec{x}''; p'') \\ \exp\{4i\pi(1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{-\frac{1}{2}} [p'_0 \langle \vec{x}; \vec{p}'' \rangle - p''_0 \langle \vec{x}'', \vec{p}' \rangle] \} d\vec{x}' d\vec{x}'' \Big] d\vec{p}' d\vec{p}'',$$

intégrale étendue à la partie de  $\Omega \times \Omega$  définie par  $|\vec{p}' \wedge \vec{p}''| < 1$ .

Preuve. On peut supposer que

$$(11.5) \quad g_1 = W(\psi_Y, \psi_{Y'}) \quad , \quad g_2 = W(\psi_Z, \psi_{Z'})$$

d'où, d'après (11.2),

$$(11.6) \quad g_1 \# g_2 = (\psi_Z, \psi_{Y'})_{\frac{1}{2}} W(\psi_Y, \psi_{Z'})$$

et en particulier

$$(11.7) \quad (g_1 \# g_2)(\omega_0) = 2^n \Psi(Z + \bar{Y}') \Psi(JY + \bar{Z}')$$

$$= 2^n \int_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} e^{-2\pi(\langle \bar{z} + \bar{y}', p' \rangle + \langle J\bar{y} + \bar{z}', p'' \rangle)} (p'_0 p''_0)^{-1} d\vec{p}' d\vec{p}''.$$

On évalue maintenant l'intégrale au second membre de l'identité annoncée.

LEMME 11.2. Soient  $Y$  et  $Y' \in \Pi$  et  $p \in \mathcal{M}$ . Pour tout  $\vec{q} \in \mathbb{R}^n$ , posons

$$h(\vec{q}) = \int W(\psi_Y, \psi_{Y'})(Q\vec{x}; p) e^{4i\pi \langle \vec{x}, \vec{q} \rangle} d\vec{x}.$$

Si  $q = (q_0, \vec{q}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  est le vecteur caractérisé par  $\langle Jq, p \rangle = 0$  (i.e.  $q_0 = p_0^{-1} \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle$ ), on a

$$h(\vec{q}) = p_0^{-1} (1-r(q))^{-\frac{1}{2}} \exp -2\pi[(1-r(q))^{\frac{1}{2}} \langle Y + \bar{Y}', p \rangle - \langle Y - \bar{Y}', q \rangle]$$

avec, rappelons-le,  $r(q) = q_0^2 - |\vec{q}|^2$ .

Preuve. Comme les deux membres de la formule annoncée sont des fonctions holomorphes du couple  $(Y, \bar{Y}')$ , il suffit d'établir celle-ci dans le cas où  $Y' = Y = y + i\eta \in C + i\mathbb{R}^{n+1}$ , ce que nous supposons désormais. Rappelons (2.22) que lorsque  $x$  décrit le sous-espace vectoriel  $E_0$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  caractérisé par  $x_0 = 0$ , alors  $z = x - \langle x, p \rangle Jp$  décrit le sous-espace  $E_p$  caractérisé par  $\langle z, p \rangle = 0$ , et que  $d\vec{z} = p_0^2 d\vec{x}$ . La fonction  $W(\psi_Y, \psi_{Y'})$ , admissible, a la même valeur aux points  $(x; p)$  et  $(z; p)$ , et l'on a aussi  $\langle z, q \rangle = \langle x, q \rangle$  puisque  $\langle Jp, q \rangle = 0$ . Ceci permet d'écrire

$$h(\vec{q}) = p_0^{-2} \int_{E_p} W(\psi_Y, \psi_Y)(z; p) e^{4i\pi \langle z, q \rangle} d\vec{z}.$$

Soit  $\wedge$  le boost tel que  $p = \wedge^{-1} e_0$ ,  $e_0$  étant le point de base de  $\mathcal{M}$ : si l'on pose  $z = \wedge w$ , alors  $z$  décrit  $E_p$  lorsque  $w$  décrit  $E_0$  et (cf. (2.21))  $d\vec{z} = p_0 d\vec{w}$ . D'après la proposition 4.4, on a  $U(\wedge^{-1})\psi_Y = \psi_{\wedge^{-1}Y}$  et la propriété de covariance exprimée par la proposition 2.4 fournit

$$(11.8) \quad W(\psi_Y, \psi_Y)(z; p) = W(\psi_{\wedge^{-1}Y}, \psi_{\wedge^{-1}Y})(w; e_0)$$



d'où

$$(11.9) \quad h(\vec{q}) = p_0^{-1} \int_{E_0} w(\psi_{\wedge^{-1}Y}, \psi_{\wedge^{-1}Y})(w; e_0) e^{4i\pi \langle w, \wedge q \rangle} d\vec{w}.$$

De tout cela il résulte que l'on peut se borner à établir la formule indiquée dans le cas où  $p = e_0$ , auquel cas le deuxième membre se réduit à

$$(1 + |\vec{q}|^2)^{-\frac{1}{2}} \exp -4\pi [(1 + |\vec{q}|^2)^{\frac{1}{2}} y_0 - i \langle \vec{\eta}, \vec{q} \rangle].$$

Comme

$$(11.10) \quad J(Y - ix) + \bar{Y} + ix = 2(y_0, i(\vec{x} - \vec{\eta})),$$

la proposition 4.5 fournit

$$(11.11) \quad w(\psi_Y, \psi_Y)(0, \vec{x}; e_0) = 2^n \psi(4(y_0^2 + |\vec{x} - \vec{\eta}|^2))$$

et la formule qu'il s'agit enfin de prouver s'écrit donc

$$\begin{aligned} 2^n \int \psi(4(y_0^2 + |\vec{x} - \vec{\eta}|^2)) e^{4i\pi \langle \vec{x}, \vec{q} \rangle} d\vec{x} \\ = (1 + |\vec{q}|^2)^{-\frac{1}{2}} \exp -4\pi [(1 + |\vec{q}|^2)^{\frac{1}{2}} y_0 - i \langle \vec{\eta}, \vec{q} \rangle]. \end{aligned}$$

Or cette formule résulte, par inversion d'une transformation de Fourier, de la définition même (cf. définition 4.4) de la fonction  $\Psi(Z)$ , évaluée au point  $Z = 2(y_0, i(\vec{x} - \vec{\eta}))$ .

Ceci termine la preuve du lemme 11.2.

Fin de la preuve du théorème 11.1. Partant du membre de droite de l'identité annoncée, calculons pour tout couple  $(p; p'')$  l'intégrale

$$(11.12) \quad I(p; p'') = \int \exp \{4i\pi \mu^{-1} [p'_0 \langle \vec{x}', \vec{p}'' \rangle - p''_0 \langle \vec{x}'', \vec{p}' \rangle]\} \\ g_1(0, \vec{x}'; p') g_2(0, \vec{x}''; p'') d\vec{x}' d\vec{x}''$$

avec

$$(11.13) \quad \mu = \mu(p', p'') = (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Il n'y a qu'à appliquer deux fois le lemme 11.2, une fois avec  $q'$  tel que  $\vec{q}' = \mu^{-1} p'_0 \vec{p}''$ , soit

$$(11.14) \quad q' = \mu^{-1}(\langle \vec{p}', \vec{p}'' \rangle, p'_0 \vec{p}''),$$

et une fois avec

$$q'' = -\mu^{-1}(\langle \vec{p}', \vec{p}'' \rangle, p''_0 \vec{p}').$$

On a

$$\begin{aligned} r(q') &= \mu^{-2}[\langle \vec{p}', \vec{p}'' \rangle^2 - p_0'^2 |\vec{p}''|^2] = \mu^{-2}[-|\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2 - |\vec{p}''|^2] \\ &= \mu^{-2}(\mu^2 - p_0''^2) \end{aligned}$$

d'où

$$(11.15) \quad (1-r(q'))^{\frac{1}{2}} = \mu^{-1} p_0'' \quad , \quad (1-r(q''))^{\frac{1}{2}} = \mu^{-1} p_0'.$$

Le lemme 11.2 fournit donc

$$(11.16) \quad I(p', p'') = (p'_0 p_0'')^{-2} \mu^2 \exp(-2\pi \mu^{-1} t)$$

avec

$$\begin{aligned} (11.17) \quad t &= p_0'' \langle Y + \bar{Y}', p' \rangle - (Y_0 - \bar{Y}_0') \langle \vec{p}', \vec{p}'' \rangle - \langle \vec{Y} - \vec{Y}', p'_0 \vec{p}'' \rangle \\ &\quad + p_0' \langle Z + \bar{Z}', p'' \rangle + (Z_0 - \bar{Z}_0') \langle \vec{p}', \vec{p}'' \rangle + \langle \vec{Z} - \vec{Z}', p''_0 \vec{p}' \rangle. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(11.18) \quad A = Z + \bar{Y}' \quad , \quad B = JY + \bar{Z}' \quad ,$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} (11.19) \quad t &= B_0 \langle p', Jp'' \rangle + \langle \vec{B}, p'_0 \vec{p}'' - p''_0 \vec{p}' \rangle \\ &\quad + A_0 \langle p', p'' \rangle + \langle \vec{A}, p'_0 \vec{p}'' + p''_0 \vec{p}' \rangle. \end{aligned}$$

Comme

$$\langle p', p'' \rangle^2 - |p'_0 \vec{p}'' + p''_0 \vec{p}'|^2 = 1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2 = \mu^2,$$

le point  $q' \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que

$$(11.20) \quad q'_0 = \mu^{-1} \langle p', p'' \rangle \quad , \quad \vec{q}' = \mu^{-1} (p'_0 \vec{p}'' + p''_0 \vec{p}')$$

appartient à  $\mathcal{M}$ , et il en est de même de

$$(11.21) \quad q'' = \mu^{-1} (\langle p', Jp'' \rangle, p'_0 \vec{p}'' - p''_0 \vec{p}').$$

Soit, par définition,  $g(\omega_0)$  le second membre de la formule qui est l'objet du théorème 11.1. D'après la définition (11.12) de  $I(p;p'')$  et le calcul de cette intégrale résumé en (11.16), (11.19), on a

$$(11.22) \quad g(\omega_0) = 2^{2n} \int (p'_0 p''_0)^{n-2} [\mu(p;p'')]^{-2n} \\ \exp - 2\pi \langle Z + \bar{Y}; q' \rangle + \langle JY + \bar{Z}; q'' \rangle \, d\vec{p}' \, d\vec{p}''$$

avec  $q'$  et  $q''$  définis en (11.20), (11.21).

La transformation  $(p;p'') \mapsto (q;q'')$  définie par ces formules est un difféomorphisme de l'ouvert de  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$  caractérisé par  $|\vec{p}' \wedge \vec{p}''| < 1$  sur  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ ; il suffit pour le voir de les résoudre sous la forme

$$(11.23) \quad \frac{\vec{p}'}{p'_0} = \frac{\vec{q}' - \vec{q}''}{q'_0 + q''_0} \quad , \quad \frac{\vec{p}''}{p''_0} = \frac{\vec{q}' + \vec{q}''}{q'_0 + q''_0} \quad .$$

En effet, les vecteurs aux seconds membres de ces formules ont des normes inférieures à 1, et de plus (11.23) entraîne

$$(11.24) \quad |\vec{p}' \wedge \vec{p}''| = \left[ 1 - \frac{|\vec{q}' - \vec{q}''|^2}{(q'_0 + q''_0)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{|\vec{q}' + \vec{q}''|^2}{(q'_0 + q''_0)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2|\vec{q}' \wedge \vec{q}''|}{(q'_0 + q''_0)^2} \\ = (1 + \langle q'; q'' \rangle)^{-\frac{1}{2}} (1 + \langle q'; Jq'' \rangle)^{-\frac{1}{2}} < 1 \quad .$$

Calculons le jacobien de cette transformation, en rappelant le fait élémentaire (voir par exemple [36], lemme 12.9) que sur un ouvert de  $\mathbb{R}^k$  le jacobien de la transformation qui consiste à multiplier les vecteurs par une fonction scalaire  $f$  de classe  $C^1$  est la fonction

$$(11.25) \quad x \mapsto (f(x))^{k-1} (f(x) + \sum x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}) \quad .$$

Si nous posons, en conformité avec (2.1),  $v' = -p'_0{}^{-1}\vec{p}'$  et  $v'' = -p''_0{}^{-1}\vec{p}''$  on en déduit pour commencer

$$(11.26) \quad d\vec{p}' = p'_0{}^{n+2} dv' \quad , \quad d\vec{p}'' = p''_0{}^{n+2} dv'' \quad .$$

Les formules (11.23) donnent par ailleurs

$$\frac{dv' dv''}{d\vec{q}' d\vec{q}''} = 2^n (q'_0 + q''_0)^{-2n+1} [ (q'_0 + q''_0)^{-1} - (q'_0 + q''_0)^{-2} \left( \frac{q'_0{}^2 - 1}{q'_0} + \frac{q''_0{}^2 - 1}{q''_0} \right) ] \\ = 2^n (q'_0 + q''_0)^{-2n} (q'_0 q''_0)^{-1}$$

d'où, puisque  $p'_0 p''_0 = \frac{1}{2} (q'_0 + q''_0)$  (d'après (11.20), (11.21)),

$$(11.27) \quad \begin{aligned} d\vec{p}' d\vec{p}'' &= (p'_0 p''_0)^{n+2} 2^n (q'_0 + q''_0)^{-2n} (q'_0 q''_0)^{-1} d\vec{q}' d\vec{q}'' \\ &= \frac{1}{4} \mu^{n+2} (q'_0 + q''_0)^{-n+2} (q'_0 q''_0)^{-1} d\vec{q}' d\vec{q}'' . \end{aligned}$$

Si l'on effectue dans l'intégrale au second membre de (11.22) le changement de variables que l'on vient d'étudier, on obtient l'intégrale au second membre de (11.7) : par suite  $g(\omega_0) = (g_1 \# g_2)(\omega_0)$ , ce qui achève de prouver le théorème 11.1.

Remarque . La covariance du calcul de Klein-Gordon exprimée par la proposition 2.4 permet le calcul de  $(g_1 \# g_2)(\omega)$  pour tout  $\omega$  .

COROLLAIRE 11.3. Pour tout  $p \in \mathcal{M}$ , soit  $S_p$  la symétrie géodésique sur  $\mathcal{M}$  autour de  $p$  : celle-ci a été définie en (2.15). Le calcul en un point  $\omega = (x; p)$  d'un symbole produit  $g_1 \# g_2$  ne dépend que de la restriction de  $g_1(x'; p') g_2(x''; p'')$  à l'ouvert caractérisé par l'inégalité

$$\text{ch}^2 d(p, p') + \text{ch}^2 d(p, p'') > \text{ch} d(p', p'') \text{ch} d(S_p p', p'') .$$

Preuve. Cette condition s'écrit

$$\langle p', Jp \rangle^2 + \langle p'', Jp \rangle^2 - \langle p', Jp \rangle \langle S_p p', Jp \rangle > 0$$

et comme  $MS_p M^{-1} = S_{Mp}$  pour tout  $M \in \mathcal{L}_0$  (utiliser (2.15) ou bien se convaincre de l'évidence géométrique de cette égalité), cette condition est invariante par l'action du groupe de Lorentz propre.

Lorsque  $p = e_0$ , elle se réduit à

$$p_0'^2 + p_0''^2 - \langle p', p'' \rangle \langle p', Jp'' \rangle > 0,$$

ce qui n'est qu'une autre façon d'écrire  $|\vec{p}' \wedge \vec{p}''| < 1$  .

Il est instructif d'effectuer dans l'intégrale introduite dans le théorème 11.1 un dernier changement de variables, pour présenter celle-ci sous une forme d'apparence identique à celle qui intervient dans le calcul de Weyl.

LEMME 11.4. Soit  $\phi$  la transformation  $(\alpha', \beta'; \alpha'', \beta'') \mapsto (0, \vec{x}; p'; 0, \vec{x}; p'')$   $\in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  définie par les formules

$$p_0' \vec{x}' = \mu^{\frac{1}{2}} \alpha' , \quad p_0'' \vec{x}'' = \mu^{\frac{1}{2}} \alpha'' , \quad \vec{p}' = \mu^{\frac{1}{2}} \beta' , \quad \vec{p}'' = \mu^{\frac{1}{2}} \beta''$$

et

$$\mu = (1 + |\beta' \wedge \beta''|^2)^{-\frac{1}{2}} .$$

La transformation  $\Phi$  est un difféomorphisme  $C^\infty$  de  $(\mathbb{R}^n)^4$  sur l'ouvert de  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M} \times \{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  caractérisé par l'inégalité  $|\vec{p}' \wedge \vec{p}''| < 1$ . De plus, on a

$$d\vec{x}' d\vec{p}' d\vec{x}'' d\vec{p}'' = (p_0' p_0'')^{-n} \mu^{2n+2} d\alpha' d\beta' d\alpha'' d\beta'' .$$

Preuve : en évaluant  $|\vec{p}' \wedge \vec{p}''|$  , on trouve immédiatement

$$(11.28) \quad 1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2 = \mu^2 ,$$

ce qui montre que  $|\vec{p}' \wedge \vec{p}''| < 1$  et donne à  $\mu$  la même signification qu'en (11.13) ; l'inversion de la transformation  $\Phi$  est alors triviale. Son jacobien se calcule à l'aide de (11.25), ce qui est particulièrement simple en raison de l'identité d'Euler appliquée à la fonction homogène  $|\beta' \wedge \beta''|^2$  . On obtient

$$\begin{aligned} d\vec{p}' d\vec{p}'' &= \mu^{n-\frac{1}{2}} \left[ \mu^{\frac{1}{2}} - (\mu^{-2} - 1) \mu^{5/2} \right] d\beta' d\beta'' \\ &= \mu^{n+2} d\beta' d\beta'' , \end{aligned}$$

d'où le résultat indiqué.

THÉORÈME 11.5. Sous les hypothèses du théorème 11.1, on a l'identité

$$\begin{aligned} (g_1 \# g_2)(\omega_0) &= 2^{2n} \iint (g_1 \otimes g_2)(\Phi(\alpha', \beta'; \alpha'', \beta'')) \\ &\quad \cdot \exp(-4i\pi(-\langle \alpha', \beta'' \rangle + \langle \alpha'', \beta' \rangle)) d\alpha' d\alpha'' d\beta' d\beta'' \end{aligned}$$

dans laquelle  $\Phi$  est le difféomorphisme défini dans le lemme 11.4 et le domaine d'intégration est  $(\mathbb{R}^n)^4$ .

Preuve. Partant du théorème 11.1, on applique le changement de variables  $\Phi$  et l'on se sert de (11.28).

Remarque. On reconnaît au second membre, dans les variables  $(\alpha', \beta'; \alpha'', \beta'')$ , la formule exacte qui donne la valeur du composé de deux symboles de Weyl; mais si l'on étend, en se servant de la covariance du calcul de Klein-Gordon, la formule de façon à obtenir

$(g_1 \# g_2)(\omega)$  avec  $\omega \in \Omega$  quelconque, il y a lieu de remplacer la carte  $\phi$  par une carte  $\phi_\omega$  dépendant de  $\omega$  : c'est cette dépendance qui reflète la structure relativiste du calcul.

Le reste de cette section sera consacré à étendre la validité du théorème 11.1 au cas où  $g_1$  et  $g_2$  sont des symboles de poids quelconque.

Sur l'espace  $\Pi$  introduit dans la définition 4.3 il existe deux invariants de paires dont l'un est défini ([36], (2.27)) par

$$(11.29) \quad \delta_+(Z, Z') = \frac{|r(Z + \bar{Z}')|}{4(r(Z)r(Z'))}^{\frac{1}{2}}$$

si  $Z = z + i\zeta$  et  $Z' = z' + i\zeta'$  sont deux points de  $\Pi$ . Rappelons ([36], lemmes 5.1 et 5.2) que  $\delta_+$  peut être comparée à l'exponentielle de la distance intrinsèque  $d$  sur  $\Pi$  via les inégalités

$$(11.30) \quad \delta_+ \leq e^d \leq (4\delta_+)^{\sqrt{2}}$$

et

$$(11.31) \quad \delta_+(Z, Z') \leq 2^5 \delta_+(Z, Z'') \delta_+(Z'', Z').$$

Cet invariant nous aidera à estimer la fonction de Wigner définie en (11.4). Si  $Z$  et  $Z'$  sont deux points de  $\Pi$  et si  $p \in \mathcal{M}$ , posons

$$(11.32) \quad \rho_p(Z, Z') = r(J_p Z + \bar{Z}')$$

avec

$$(11.33) \quad J_p Z = -Z + 2\langle Z, p \rangle J_p.$$

Si  $p = Me_0$  ( $e_0$  point de base de  $\mathcal{M}$ ), on a

$$(11.34) \quad J_p Z = M'^{-1} J M' Z.$$

On pose en particulier (avec  $Z = (Z_0, \vec{Z})$ )

$$(11.35) \quad \begin{aligned} \langle Z \rangle_p^2 &= \rho_p(Z, Z) \\ &= r(JM'Z + M'\bar{Z}) \\ &= 4[(\operatorname{Re} M'Z)_0^2 + |\operatorname{Im} \overrightarrow{M'Z}|^2] \\ &= 4[\langle \operatorname{Re} Z, p \rangle^2 + \langle \operatorname{Im} Z, p \rangle^2 - r(\operatorname{Im} Z)]: \end{aligned}$$

c'est un nombre  $> 0$ .

LEMME 11.6. Soient  $Z$  et  $Z' \in \Pi$ . On a

$$\operatorname{Re}(\rho_p^{\frac{1}{2}}(Z, Z')) \geq 2^{-7} (\delta_+(Z, Z'))^{-2} \langle Z \rangle_p^{\frac{1}{2}} \langle Z' \rangle_p^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. D'après (11.32) et (11.31), on a

$$\begin{aligned} (11.36) \quad |\rho_p(Z, Z')| \delta_+(Z, Z') &= 4 \delta_+(J_p Z, Z') \delta_+(Z, Z') (r(Z) r(Z'))^{\frac{1}{2}} \\ &\geq 2^{-3} \delta_+(J_p Z, Z) (r(Z) r(Z'))^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-7} \langle Z \rangle_p^2 (r(Z))^{-\frac{1}{2}} (r(Z'))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si l'on échange  $Z$  et  $Z'$  (ce qui change  $\rho_p(Z, Z')$  en son conjugué) et que l'on effectue la moyenne géométrique des inégalités obtenues, on trouve

$$(11.37) \quad |\rho_p(Z, Z')| \geq 2^{-7} \langle Z \rangle_p \langle Z' \rangle_p (\delta_+(Z, Z'))^{-1}.$$

Comme  $J_p Z + Z' \in \Pi$ , on sait que  $\rho_p(Z, Z')$  ne peut pas être réel  $\leq 0$  : il nous reste à prouver que son argument (compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ ) ne peut pas trop s'approcher de  $\pm\pi$ . Nous allons établir que

$$(11.38) \quad |\operatorname{Arg} \rho_p(Z, Z')| \leq \pi - 2^{-2} (\delta_+(Z, Z'))^{-3/2}.$$

Comme d'après (11.34),

$$(11.39) \quad \rho_p(Z, Z') = r(JM'Z + M'\bar{Z}),$$

on peut se ramener, vu l'invariance de  $\delta_+$  par le groupe de Lorentz, au cas où  $p = e_0$ , ce que nous supposons désormais : posons  $\rho_{e_0} = \rho$  pour simplifier. On a

$$(11.40) \quad \operatorname{Re} \rho(Z, Z') = r(Jz + z') - r(J\zeta - \zeta')$$

et

$$(11.41) \quad \operatorname{Im} \rho(Z, Z') = 2 \langle Jz + z', \zeta - J\zeta' \rangle$$

comme il résulte de la formule

$$(11.42) \quad r(A+B) = r(A) + 2 \langle JA, B \rangle + r(B)$$

valable pour tout couple de vecteurs  $A, B$ . Evidemment, seul compte le cas où  $\operatorname{Re} \rho \leq 0$ , et l'on supposera en particulier  $r(J\zeta - \zeta') \geq 0$  dans ce qui suit. Comme  $Jz + z'$  et  $\zeta - J\zeta'$ , ou l'opposé de ce dernier vecteur,

appartiennent tous deux au cône de lumière C, on a, d'après une inégalité élémentaire et classique (cf [36], (2.2)) :

$$(11.43) \quad |\operatorname{Im} \rho| \geq 2(r(Jz+z'))^{\frac{1}{2}}(r(\zeta-J\zeta'))^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$(11.44) \quad \frac{-\operatorname{Re} \rho}{|\operatorname{Im} \rho|} \leq \frac{r(J\zeta-\zeta')}{|\operatorname{Im} \rho|} \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{r(J\zeta-\zeta')}{r(Jz+z')} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \leq \frac{1}{2} \frac{|\zeta_0 - \zeta'_0|}{(2\langle z, z' \rangle)^{\frac{1}{2}}}.$$

Soit  $z''$  le milieu de  $z$  et  $z'$  au sens de la géométrie du cône symétrique C. D'après ([36], lemme 5.6), on a  $\langle z, z' \rangle \geq |z''|^2$  et si l'on utilise également une inégalité écrite dans [36] entre (5.16) et (5.17), on en déduit

$$(11.45) \quad \frac{-\operatorname{Re} \rho}{|\operatorname{Im} \rho|} \leq 2^{-3/2} \frac{|\zeta_0 - \zeta'_0|}{|z''|} \leq 2^{3/2} (\delta_+(z, z'))^{3/2}.$$

L'inégalité (11.38) résulte de là : on en tire

$$(11.46) \quad \operatorname{Re}(\rho_p^{\frac{1}{2}}(z, z')) \geq 2^{-7/2} (\delta_+(z, z'))^{-3/2} |\rho_p(z, z')|^{\frac{1}{2}},$$

ce qui, avec l'aide de (11.37), achève de prouver le lemme 11.6.

On suppose désormais, conformément à (4.7), que (avec  $q$  et  $q' \in \mathcal{M}$ )

$$(11.47) \quad z = Jq + i(0, \vec{y}), \quad z' = Jq' + i(0, \vec{y}'),$$

et l'on rappelle (cf (11.4), définition 4.3 et (11.32)) que

$$(11.48) \quad W(\psi_z, \psi_{z'}) (0, \vec{x}; p) = 2^{n+1} k_{\frac{n-1}{2}}(\rho_p(x, x'))$$

avec

$$(11.49) \quad x = z - i(0, \vec{x}) \quad \text{et} \quad x' = z' - i(0, \vec{x}').$$

La formule (11.35), appliquée à  $x$  et  $x'$ , donne

$$(11.50) \quad \frac{1}{4} \langle x \rangle_p^2 = \langle Jq, p \rangle^2 + \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{p} \rangle^2 + |\vec{y} - \vec{x}|^2 \\ = \langle Jq, p \rangle^2 + \|\vec{y} - \vec{x}\|_p^2$$

et

$$(11.51) \quad \frac{1}{4} \langle x' \rangle_p^2 = \langle Jq', p \rangle^2 + \|\vec{y}' - \vec{x}'\|_p^2.$$



D'après (11.29) et (11.42), on a

$$(11.52) \quad \delta_+(X, X') = \delta_+(Z, Z') = \frac{1}{4} |r(J(q+q'+i(O, \vec{y}-\vec{y}')))| \\ = \frac{1}{4} |2+2\langle Jq, q' \rangle + 2i\langle \vec{q}+\vec{q}', \vec{y}-\vec{y}' \rangle + |\vec{y}-\vec{y}'|^2|.$$

En utilisant la définition 8.5 et le lemme 8.8, on obtient alors

$$(11.53) \quad \delta_+(X, X') \leq 4 \langle Jq, q' \rangle (1 + \|\vec{y}-\vec{y}'\|_q^2).$$

On estime maintenant la fonction de Wigner au sens de la proposition 8.14 et avec les notations introduites dans cette proposition.

LEMME 11.7. Pour tout couple  $(N, \mu)$  d'entiers  $\geq 0$ , on peut trouver une constante  $C_{N, \mu}$  vérifiant la propriété suivante : soit  $D \in \mathcal{A}$  une combinaison linéaire de produits des opérateurs différentiels  $e_j, e_{jk}, \varepsilon_j$  et  $\varepsilon$ , chaque terme ayant au plus  $\mu$  facteurs ; soient  $Z$  et  $Z'$  les deux points de  $\Pi$  définis en (11.47) ; alors

$$|DW(\psi_Z, \psi_{Z'}) (O, \vec{x}; p)| \leq C_{N, \mu} (\langle Jq, q' \rangle)^{2N+\frac{n}{2}+\mu} (1 + \|\vec{y}-\vec{y}'\|_q^2)^{2N+\frac{n}{2}+\mu} \\ [\langle Jq, p \rangle^2 + \|\vec{y}-\vec{x}\|_p^2]^{-\frac{1}{4}(N+n)+\frac{\mu}{2}} [\langle Jq', p \rangle^2 + \|\vec{y}'-\vec{x}\|_p^2]^{-\frac{1}{4}(N+n)+\frac{\mu}{2}}.$$

Preuve. Si  $\nu > 0$ , la fonction

$$k_\nu(t) = t^{-\nu/2} K_\nu(2\pi t)$$

a une singularité en  $t^{-\nu}$  en 0 et est à décroissance rapide en  $\text{Re}(t^{\frac{1}{2}})$  ; si  $\nu = 0$ , la singularité à l'origine est logarithmique. Dans tous les cas on peut écrire

$$(11.54) \quad |k_\nu(t)| \leq C_N |t|^{-\nu-\frac{1}{2}} (\text{Re } t^{\frac{1}{2}})^{-N}.$$

Partant de (11.48) et utilisant (11.37) et le lemme 11.6, on obtient (avec  $\nu + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ )

$$(11.55) \quad |W(\psi_Z, \psi_{Z'}) (O, \vec{x}; p)| \leq C_N \langle X \rangle_p^{-\frac{1}{2}(N+n)} \langle X' \rangle_p^{-\frac{1}{2}(N+n)} (\delta_+(X, X'))^{2N+\frac{n}{2}}.$$

Si l'on se sert de (11.50), (11.51) et (11.53), on arrive au cas  $\mu = 0$  du lemme 11.7. Pour dériver, il faut expliciter

$$(11.56) \quad \rho = \rho_p(X, X') = r(-X + 2\langle X, p \rangle Jp + \vec{X}')$$

$$\begin{aligned}
&= r(J(q'-q) + i(0, 2\vec{x}-\vec{y}-\vec{y}')) + 2\langle Jq - i(0, \vec{x}-\vec{y}), p \rangle Jp) \\
&= r(q'-q) + |2\vec{x}-\vec{y}-\vec{y}'|^2 + 2i\langle \vec{q}'-\vec{q}, 2\vec{x}-\vec{y}-\vec{y}' \rangle \\
&+ 4[\langle Jq, p \rangle - i\langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{p} \rangle][\langle Jq', p \rangle + i\langle \vec{x}'-\vec{y}', \vec{p} \rangle].
\end{aligned}$$

Rappelons (prop. 4.2) que  $k'_v = k_{v+1}$ , et le passage de  $v$  à  $v+1$  dans (11.54) fait perdre au plus (d'après 11.37) le facteur  $\delta_+(X, X')$ , majoré grâce à (11.53). Comme

$$\frac{\partial}{\partial p_j} [\langle Jq, p \rangle - i\langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{p} \rangle] = \frac{q_0}{p_0} p_j - q_j - i(x_j - y_j)$$

et que, d'après le lemme 8.9, on a

$$\|p_0^{-1} q_0 \vec{p} - \vec{q}\|_p \leq \langle Jq, p \rangle,$$

on voit que les dérivations en  $p$  (effectuées à l'aide des opérateurs  $\epsilon_j$  et  $\epsilon$ ) sont bien contrôlées de la façon indiquée. Quant aux dérivations  $e_j$ ,  $e_{jk}$ , elles font perdre au plus le facteur

$$|\vec{x}-\vec{y}| + |\vec{x}-\vec{y}'| + p_0^{-1}(|\vec{q}'-\vec{q}| + |\vec{p} \wedge (\vec{q}'-\vec{q})|)$$

et comme (lemme 8.8)

$$\|\vec{q}'-\vec{q}\|_p \leq 2^{3/2}(\langle Jq, p \rangle + \langle Jq', p \rangle),$$

la preuve du lemme 11.7 est terminée.

**PROPOSITION 11.8.** Posons  $\alpha = 4k_{n+1}(4)$ . Soit  $A$  un opérateur de poids  $m(\vec{x}; p)$ , de symbole  $g$ . Posons, pour tout entier  $k \geq 1$ ,

$$g_k(\vec{x}; p) = \alpha^{-2} \int (A \varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}', q'})_{\frac{1}{2}} W(\varphi_{\vec{y}', q'}, \varphi_{\vec{y}, q})(\vec{x}; p) d\vec{y} d\vec{q}' d\vec{y}' d\vec{q}',$$

l'intégrale étant étendue au domaine défini par  $q_0^2 + q_0'^2 + |\vec{y}|^2 + |\vec{y}'|^2 \leq k$ . Alors, quand  $k \rightarrow \infty$ , le symbole  $g_k$  tend vers  $g$  dans l'espace des symboles de poids  $m$  au sens de la définition 8.17.

**Preuve.** D'après le corollaire 10.4, on a pour tout entier  $N_1$  l'inégalité

$$(11.57) \quad |(A \varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}', q'})_{\frac{1}{2}}| \leq C_{N_1} m(\vec{y}; q) (\langle Jq, q' \rangle)^{-N_1} (1 + \|\vec{y}-\vec{y}'\|_q^2)^{-N_1}.$$

On a aussi, pour un certain  $N_2$  fixe,

$$(11.58) \quad m(\vec{y}; q) \leq C_1 m(\vec{x}; p) \langle Jp, q \rangle^{N_2} (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_p^2)^{N_2}.$$

Par ailleurs, le corollaire de l'appendice et le lemme 8.2 montrent que l'intégrale

$$\begin{aligned} & \int [\langle Jq, p \rangle^2 + \|\vec{y} - \vec{x}\|_p^2]^{-(n+1)} d\vec{y} d\vec{q} \\ & \leq C \int \langle Jq, p \rangle^{-n-1} p_0^{-1} d\vec{q} \leq C \int \langle Jq, p \rangle^{-n} q_0^{-1} d\vec{q} \\ & = C \int_{\mathcal{M}} q_0^{-n-1} d\vec{q} \end{aligned}$$

est bornée. Les trois inégalités qui précèdent et les estimations contenues dans le lemme 11.7 montrent que la suite  $(g_k)$  converge, dans l'espace des symboles de poids  $m$ , vers le symbole  $g_\infty$  défini de façon analogue en remplaçant le domaine d'intégration par le domaine entier  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ . Pour montrer que  $g_\infty = g$ , il suffit de montrer que l'opérateur  $G_k$  de symbole passif  $g_k$  converge vers  $A$  en un sens très faible, par exemple au sens que  $(G_k \psi_Z, \psi_{Z'})_{\frac{1}{2}}$  converge vers  $(A \psi_Z, \psi_{Z'})_{\frac{1}{2}}$  pour tout couple  $(Z, Z')$  de points de  $\Pi$ . Or, on a

$$(11.59) \quad (G_k \psi_Z, \psi_{Z'})_{\frac{1}{2}} = \alpha^{-2} \int (\psi_Z, \varphi_{\vec{y}, q})_{\frac{1}{2}} (A \varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}', q'})_{\frac{1}{2}} (\varphi_{\vec{y}', q'}, \psi_{Z'})_{\frac{1}{2}} d\vec{y} d\vec{q} d\vec{y}' d\vec{q}'$$

de sorte que la fin de la preuve résulte de la formule de résolution de l'identité qui est la forme polarisée de la proposition 4.6.

Voici une extension du théorème 11.1 dans laquelle  $g_1$  et  $g_2$  sont des symboles quelconques.

PROPOSITION 11.9. Posons

$$\vec{q}' = (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|)^{-\frac{1}{2}} p_0' \vec{p}'' \quad , \quad \vec{q}'' = (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{-\frac{1}{2}} p_0'' \vec{p}'.$$

Alors l'application  $(\vec{p}', \vec{p}'') \mapsto (\vec{q}', \vec{q}'')$  est un difféomorphisme de l'ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  caractérisé par  $|\vec{p}' \wedge \vec{p}''| < 1$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$ . Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux symboles de poids quelconque et soit  $g_1 \# g_2$  leur composé qui existe d'après le théorème 10.2. On a

$$(g_1 \# g_2)(\omega_0) = 2^{2n} \int (\mathcal{F}_1 g_1)(-2\vec{q}'; p') (\mathcal{F}_1 g_2)(2\vec{q}''; p'') (p'_0 p''_0)^n \\ (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{-n-1} \frac{D(\vec{p}', \vec{p}'')}{D(\vec{q}', \vec{q}'')} d\vec{q}' d\vec{q}'',$$

l'intégrale étant comprise au sens des distributions sur  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Preuve. Posons  $\vec{q}' = \lambda \vec{p}'$ ,  $\vec{q}'' = \mu \vec{p}''$ . Pour inverser la transformation, il faut résoudre le système

$$(11.60) \quad \lambda^2 = \frac{1 + \mu^{-2} |\vec{q}''|^2}{1 - (\lambda \mu)^{-2} |\vec{q}' \wedge \vec{q}''|^2}, \quad \mu^2 = \frac{1 + \lambda^{-2} |\vec{q}'|^2}{1 - (\lambda \mu)^{-2} |\vec{q}' \wedge \vec{q}''|^2}$$

d'où

$$(11.61) \quad \lambda^2 - \mu^2 = |\vec{q}''|^2 - |\vec{q}'|^2$$

et

$$(11.62) \quad 2\lambda^2 \mu^2 - (\lambda^2 + \mu^2) = |\vec{q}'|^2 + |\vec{q}''|^2 + 2|\vec{q}' \wedge \vec{q}''|^2.$$

En posant  $\theta = 2\lambda^2 \mu^2$ , on voit que  $\theta$  est l'unique racine plus grande que  $|\vec{q}'|^2 + |\vec{q}''|^2 + 2|\vec{q}' \wedge \vec{q}''|^2$  de l'équation

$$(11.63) \quad \theta^2 - 2[1 + |\vec{q}'|^2 + |\vec{q}''|^2 + 2|\vec{q}' \wedge \vec{q}''|^2] \theta + (|\vec{q}'|^2 + |\vec{q}''|^2 + 2|\vec{q}' \wedge \vec{q}''|^2)^2 \\ - (|\vec{q}'|^2 - |\vec{q}''|^2)^2 = 0.$$

Avec

$$(11.64) \quad \delta = (1 + |\vec{q}'|^2 + |\vec{q}''|^2)^2 - 4\langle \vec{q}', \vec{q}'' \rangle^2 \geq 1,$$

on obtient

$$(11.65) \quad \theta = 1 + |\vec{q}'|^2 + |\vec{q}''|^2 + 2|\vec{q}' \wedge \vec{q}''|^2 + \delta^{\frac{1}{2}} \geq 2$$

et

$$(11.66) \quad \lambda^2 = \frac{1}{2} [|\vec{q}''|^2 - |\vec{q}'|^2 + ((|\vec{q}''|^2 - |\vec{q}'|^2)^2 + \frac{\theta}{2})^{\frac{1}{2}}],$$

$\mu^2$  étant obtenu à partir de là en échangeant  $\vec{q}'$  et  $\vec{q}''$ . Cela permet d'obtenir  $(\vec{p}', \vec{p}'')$  en fonction de  $(\vec{q}', \vec{q}'')$ , et comme  $\lambda \mu > |\vec{q}' \wedge \vec{q}''|$  d'après (11.62), on a bien  $|\vec{p}' \wedge \vec{p}''| < 1$ . Notons également que toutes les expressions dont il faut prendre la racine carrée dans la résolution, à savoir  $\delta$ ,  $|\vec{q}''|^2 - |\vec{q}'|^2 + \frac{\theta}{2}$ ,  $\lambda^2$  et  $\mu^2$  sont plus grandes que 1 : par suite,  $\lambda$  et  $\mu$ , considérées comme fonctions de  $(\vec{q}', \vec{q}'') \in \mathbb{R}^{2n}$ , sont à croissance lente (ainsi que leurs dérivées). On a

$$(11.67) \quad \frac{\partial}{\partial q_j^1} = \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial p_j^1} - \lambda^{-2} \sum q_k^1 \frac{\partial \lambda}{\partial q_j^1} \frac{\partial}{\partial p_k^1} - \mu^{-2} \sum q_k^1 \frac{\partial \mu}{\partial q_j^1} \frac{\partial}{\partial p_k^1}$$

et une expression analogue pour  $\frac{\partial}{\partial q_j^1}$  : ces opérateurs de dérivation sont donc des combinaisons linéaires des opérateurs  $\frac{\partial}{\partial p_j^1}$ ,  $\frac{\partial}{\partial p_k^1}$  dont les coefficients sont des fonctions à croissance lente de  $\vec{q}', \vec{q}''$ . Il résulte également de là que le jacobien  $\frac{D(\vec{p}', \vec{p}'')}{D(\vec{q}', \vec{q}'')}$  est une fonction à croissance lente de  $(\vec{q}', \vec{q}'')$ .

En itérant la décomposition

$$g_1 = \frac{g_1}{1 + \|\vec{x}\|_p^2} + \sum x_j \frac{x_j g_1}{1 + \|\vec{x}\|_p^2} + \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle \frac{\langle \vec{x}, \vec{p} \rangle g_1}{(1 + \|\vec{x}\|_p^2)}$$

on peut écrire  $g_1$  sous la forme

$$(11.68) \quad g_1(\vec{x}'; p') = \sum \vec{x}'^\alpha h_\alpha^1(\vec{x}'; p')$$

où les symboles  $h_\alpha^1$ , en nombre fini, sont de poids

$$N_1 \frac{1}{p_0} (1 + \|\vec{x}\|_p^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)}$$

pour  $N_1$  bien choisi :  $N_1$ , et le maximum de  $|\alpha|$  dans la décomposition, ne dépendent que du poids du symbole  $g_1$ . On écrit de même

$$(11.69) \quad g_2(\vec{x}''; p'') = \sum \vec{x}''^\beta h_\beta(\vec{x}''; p'').$$

Soit  $k$  un entier  $\geq 0$ . D'après (8.6), on a

$$(11.70) \quad (\mathcal{F}_1 \nabla^k h_\alpha^1)(-2\vec{q}'; p') = [1 + |\vec{q}'|^2 - p_0'^{-2} \langle \vec{q}', \vec{p}' \rangle^2]^{k/2} (\mathcal{F}_1 h_\alpha)(-2\vec{q}'; p')$$

soit, puisque

$$\begin{aligned} |\vec{q}'|^2 - p_0'^{-2} \langle \vec{q}', \vec{p}' \rangle^2 &= (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{-1} [p_0'^2 |\vec{p}''|^2 - \langle \vec{p}', \vec{p}'' \rangle^2] \\ &= (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{-1} [|\vec{p}''|^2 + |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2], \end{aligned}$$

$$(11.71) \quad (\mathcal{F}_1 \nabla^k h_\alpha^1)(-2\vec{q}'; p') = p_0'^k (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{-\frac{k}{2}} (\mathcal{F}_1 h_\alpha^1)(-2\vec{q}'; p').$$

Cela permet d'écrire, si l'on appelle  $I$  l'intégrale au second membre de la proposition 11.9,

$$(11.72) \quad I = 2^{2n} (-1)^{|\alpha|} (4i\pi)^{-|\alpha| - |\beta|} \int (\mathcal{F}_1 v_{h_\alpha}^1)(-2\vec{q}'; p') (\mathcal{F}_1 v_{h_\beta}^2)(-2\vec{q}''; p'') \\ \left( \frac{\partial}{\partial \vec{q}'} \right)^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial \vec{q}''} \right)^\beta \{ (p'_0 p''_0)^{n-k} (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{k-n-1} \frac{D(\vec{p}', \vec{p}'')}{D(\vec{q}', \vec{q}'')} \} d\vec{q}' d\vec{q}''.$$

Pour terminer la preuve de la proposition 11.9, il suffit, d'après le théorème 11.1 et la proposition 11.8, de montrer que  $I$  est une forme bilinéaire séquentiellement continue sur les couples de symboles des poids considérés. Or chaque fonction  $v_{h^1}^1$  (ou  $v_{h^2}^2$ ) est de poids  $p_0^{N_1} (1 + \|\vec{x}\|_p^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)}$  d'après le théorème (8.18), et il ne reste plus qu'à montrer que, pour  $|\alpha|$  et  $|\beta|$  moindres qu'un entier fixé, la fonction

$$\left( \frac{\partial}{\partial \vec{q}'} \right)^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial \vec{q}''} \right)^\beta [ (p'_0 p''_0)^{-k} (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^k ]$$

est, pour  $k$  assez grand, majorée par telle puissance de  $(1 + |\vec{q}'|^2 + |\vec{q}''|^2)^{-1}$  que l'on souhaite. Or, on a

$$|\vec{q}'| + |\vec{q}''| \leq 2(1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{-1} p'_0 p''_0.$$

Ceci termine la preuve de la proposition 11.9.



## XII - SYMBOLES DES GÉNÉRATEURS INFINITÉSIMAUX DE LA REPRÉSENTATION DE BARGMANN-WIGNER.

Pour tout élément  $X$  de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, le groupe à un paramètre  $s \mapsto e^{sX}$  donne naissance, grâce à la représentation de Bargmann-Wigner  $U$ , au groupe  $s \mapsto U(e^{sX})$  d'opérateurs unitaires sur  $H^{\frac{1}{2}}(X)$  : le théorème de Stone permet d'écrire

$$(12.1) \quad U(e^{sX}) = \exp -2i\pi s \, dU(X)$$

où l'opérateur autoadjoint  $dU(X)$  dépend  $\mathbb{R}$ -linéairement de  $X$ . On peut regarder  $dU$  comme une version infinitésimale de la représentation  $U$  et appeler  $dU(X)$  le générateur infinitésimal correspondant à  $X$  : tout ceci est classique. On se propose dans cette section de calculer les générateurs infinitésimaux, les symboles de ces derniers et d'explicitier la composition par les symboles obtenus.

Voici une table de générateurs de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré dans laquelle les éléments  $X$  sont définis par le groupe à un paramètre  $(e^{sX})$  qu'ils engendrent : conformément à la définition de la section 1, un élément  $(M, a)$  du groupe de Poincaré est enfin caractérisé par son action sur les points  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Type 1 :  $e^{sX}.x = (x_0 + s, \vec{x})$

Type 2 :  $e^{sX}.x = (x_0, \dots, x_{j-1}, x_j + s, x_{j+1}, \dots, x_n)$

Type 3 :  $e^{sX}.x = (x_0 \cosh s + x_j \sinh s, \dots, x_{j-1}, x_0 \sinh s + x_j \cosh s, x_{j+1}, \dots)$

Type 4 :  $e^{sX}.x = (x_0, \dots, x_j \cos s - x_k \sin s, \dots, x_j \sin s + x_k \cos s, \dots) :$

dans cette dernière formule les coordonnées changées sous l'action de  $e^{sX}$  sont celles d'indices  $j$  et  $k$  ( $j < k$ ).

Les groupes à un paramètre des quatre types considérés correspondent à la translation temporelle, aux translations spatiales, aux boosts et enfin aux rotations. Dans tous les cas on calcule  $dU(X)$



par la formule

$$(12.2) \quad dU(X) = - (2i\pi)^{-1} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} U(e^{sX})$$

et  $U(M, a)$  par la formule (2.12) qu'il est commode de rappeler ici :

$$(12.3) \quad (\mathcal{U}_{U(M, a)u})(p) = e^{-2i\pi \langle a, p \rangle} (\mathcal{U}_u)(M'p)$$

avec  $\mathcal{U}_u(p) = p_0 \hat{u}(p)$ . Pour le type 1 on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(dU(X)u)}(p) &= - (2i\pi)^{-1} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left\{ e^{-2i\pi s p_0} p_0 \hat{u}(p) \right\} \\ &= p_0^2 \hat{u}(p) = \mathcal{U}_{\langle D \rangle u}(p) \end{aligned}$$

où, rappelons-le, la Notation 2.2 précise le sens de  $\langle D \rangle$ . Pour le type 3 avec  $j=1$  on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(dU(X)u)}(p) &= - (2i\pi)^{-1} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left\{ (p_0 \text{chs} + p_1 \text{shs}) \hat{u}(p_0 \text{shs} + p_1 \text{chs}, p_2, \dots) \right\} \\ &= - (2i\pi)^{-1} \left\{ p_1 \hat{u} + p_0^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial p_1} \right\} \\ &= - (2i\pi)^{-1} p_0 \frac{\partial}{\partial p_1} (p_0 \hat{u}) \\ &= \mathcal{U}_{(x_1 \langle D \rangle u)}(p). \end{aligned}$$

Les calculs sont encore plus simples pour les types 2 et 4, d'où la table de générateurs infinitésimaux :

$$\begin{aligned} \text{Type 1 :} \quad dU(X) &= \langle D \rangle \\ \text{Type 2 :} \quad dU(X) &= D_j \\ \text{Type 3 :} \quad dU(X) &= x_j \langle D \rangle \\ \text{Type 4 :} \quad dU(X) &= x_j D_k - x_k D_j. \end{aligned}$$

On peut, pour se rassurer, vérifier que ces opérateurs sont autoadjoints sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  : d'après (2.5),  $A$  est autoadjoint sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si  $\langle D \rangle A$  est autoadjoint sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Par ailleurs, le calcul standard des opérateurs pseudo-différentiels fournit la relation entre opérateurs

$$(12.4) \quad \langle D \rangle x_j = x_j \langle D \rangle + (2i\pi)^{-1} D_j \langle D \rangle^{-1},$$

qui conduit immédiatement à la vérification souhaitée.

Le symbole standard  $a_o(\vec{x}, \vec{\xi})$  de chaque opérateur des quatre types est suivant le cas  $\langle \vec{\xi} \rangle$ ,  $\xi_j$ ,  $x_j \langle \vec{\xi} \rangle$  ou  $x_j \xi_k - x_k \xi_j$ . Dans les deux premiers cas, on sait déjà (corollaire 7.2) que le symbole de Klein-Gordon actif  $f_o$  de l'opérateur coïncide avec  $a_o$ . D'après (7.17) et (7.15), on a en général

$$(12.5) \quad f_o(\vec{y}, \vec{p}) = \int \frac{\eta_o}{p_o} (\langle \xi, Jp \rangle)^{n-1} (\mathcal{F}_1^{-1} a_o)(\vec{\zeta}, \vec{\xi}) e^{-2i\pi \langle \vec{y}, \vec{\zeta} \rangle} d\vec{\zeta}$$

avec  $\eta = S_p \xi$  et  $\vec{\zeta} = \vec{\xi} - S_p \vec{\xi}$ . Pour le type 3, on a  $(\mathcal{F}_1^{-1} a_o)(\vec{\zeta}, \vec{\xi}) = (2i\pi)^{-1} \langle \vec{\xi} \rangle \delta^{(j)}(\vec{\zeta})$  et par suite  $f_o(\vec{y}, \vec{p}) = p_o y_j$  à condition de montrer que les dérivées du premier ordre de  $\eta_o \xi_o$  et de  $\langle \xi, Jp \rangle$  relativement à  $p$  sont toutes nulles lorsque  $\vec{\zeta} = 0$ , i.e. lorsque  $\xi = \eta = p$ . Comme le changement de variable  $\vec{\xi} \mapsto \vec{\zeta}$  est un difféomorphisme, on peut examiner les dérivées lorsque  $\xi = p$  de  $\xi_o \eta_o$  et de  $\langle \xi, Jp \rangle$  relativement à  $\xi$ : les formules

$$\eta_o = -\xi_o + 2\langle \xi, Jp \rangle p_o$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \langle \xi, Jp \rangle = -p_j + \xi_o \frac{p_j}{p_o}$$

conduisent au résultat indiqué. On voit de même que pour le type 4,  $f_o(\vec{y}, \vec{p})$  se réduit à  $y_j p_k - y_k p_j$  à condition de montrer l'égalité

$\frac{\partial}{\partial \zeta_j} (\eta_o \xi_k) = \frac{\partial}{\partial \zeta_k} (\eta_o \xi_j)$  lorsque  $\xi = p$ : comme, d'après (7.14), la matrice jacobienne  $\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial \vec{\xi}}$  coïncide en ce point avec l'identité, on peut se borner à montrer l'égalité  $\frac{\partial}{\partial \xi_j} (\eta_o \xi_k) = \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\eta_o \xi_j)$  lorsque  $\xi = p$ , laquelle est immédiate d'après la formule ci-haut qui donne  $\eta_o$ . Enfin, il est clair que l'opérateur  $\nabla$  et ses puissances (cf(2.25)) se réduisent à l'identité sur les symboles  $f$  tels que  $\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} f_o(\vec{y}, \vec{p}) = 0$ : on peut donc énoncer ce qui suit :

**PROPOSITION 12.1.** Le symbole de Klein-Gordon, actif ou passif, des opérateurs  $\langle D \rangle$ ,  $D_j$ ,  $x_j \langle D \rangle$  et  $x_j D_k - x_k D_j$  est la fonction  $f_o(\vec{x}, \vec{p})$   
 $= p_o, p_j, p_o x_j$  ou  $x_j p_k - x_k p_j$ .

On se propose d'explicitier la composition de symboles passifs  $g \mapsto f \# g$  par l'un des symboles ci-dessus. La partie la plus délicate de ce calcul consiste à passer de l'évaluation du symbole composé au

point  $\omega_0$  à celle en un point quelconque. Elle sera effectuée plus loin. Pour le calcul en  $\omega_0$ , on pourrait se baser sur la proposition 11.9. Nous avons préféré cependant un calcul direct, qui présente l'avantage de fournir une formule intéressante. Dans une situation plus compliquée, nous utiliserons dans la prochaine section la proposition 11.9.

LEMME 12.2. Soit  $g = W(\psi_Z, \psi_{Z'})$  la fonction de Wigner du couple  $(\psi_Z, \psi_{Z'})$  au sens des définitions et propositions 4.4 et 4.5. Pour tout entier  $k > 0$ , on a (avec  $g = g(x; p)$ )

$$\nabla^k g = \left[ -\frac{1}{2\pi} (p_0 \frac{\partial}{\partial z'_0} - \sum p_j \frac{\partial}{\partial z'_j}) \right]^k g.$$

Preuve. Remarquons d'abord que cette formule, appliquée avec  $k=n$ , permet d'obtenir la fonction de Wigner active du couple envisagé, symbole actif de l'opérateur de rang un associé. Rappelons que

$$(12.6) \quad g(x; p) = 2^n \Psi(-Z + 2\langle Z, p \rangle Jp + 2ix - 2i\langle x, p \rangle Jp + \bar{Z}')$$

avec  $\Psi$  définie dans la proposition 4.3. La formule (2.29) permet par ailleurs de définir  $g_{\mathbb{E}}$ , expression dans les coordonnées  $(\vec{x}; p)$  de la restriction de  $g$  au fibré spatial  $\mathbb{E}$ . On obtient ainsi

$$(12.7) \quad g_{\mathbb{E}}(\vec{x}; p) = 2^n \int \exp(-2\pi \langle q, -Z + 2\langle Z, p \rangle Jp + Z' \rangle) (\exp(-4i\pi \langle x, -\frac{q_0}{p_0} p + q \rangle q_0^{-1} d\vec{q}).$$

Si l'on pose  $h = \nabla^k g$ , la relation (2.31) entre  $\mathcal{F}_1 h_{\mathbb{E}}$  et  $\mathcal{F}_1 g_{\mathbb{E}}$  peut s'écrire

$$(12.8) \quad h_{\mathbb{E}}(\vec{x}; p) = \left[ 1 + \frac{1}{4} (D_{\vec{x}}^2 + \langle \vec{p}, D_{\vec{x}} \rangle^2) \right]^{k/2} g_{\mathbb{E}}(\vec{x}; p)$$

et comme, d'après un calcul élémentaire (déjà effectué, du reste, entre les lignes (2.34) et (2.35)),

$$1 + \left| -\frac{q_0}{p_0} \vec{p} + \vec{q} \right|^2 + \left( \langle \vec{p}, -\frac{q_0}{p_0} \vec{p} + \vec{q} \rangle \right)^2 = \langle Jp, q \rangle^2,$$

le lemme 12.2 est établi.

THEOREME 12.3. Soit  $g$  un symbole de poids quelconque au sens de la définition 8.13. On a les formules

$$p_0 \# g = (4i\pi)^{-1} \frac{\partial g}{\partial t} + p_0 \nabla g$$

et

$$p_j \# g = (4i\pi)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_j} + p_j \nabla g.$$

Preuve. A condition de multiplier à l'arrivée le poids par  $p_0$ , les seconds membres dépendent continûment de  $g$ , en vertu de la définition 8.13 et du théorème 8.18. Il en est de même des premiers membres d'après le théorème (de composition) 10.2. Il suffit donc d'établir ces relations dans le cas où  $g = W(\psi_Z, \psi_Z)$ , d'après la proposition 11.8. Il est aussi préférable de regarder les symboles comme des fonctions admissibles sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  plutôt que comme des fonctions sur  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ . Le symbole de l'opérateur  $A = \langle D \rangle$ ,  $D_j$ ,  $x_j \langle D \rangle$  ou  $x_j D_k - x_k D_j$  est ainsi (d'après la proposition 12.1) la fonction  $f(x; p) = p_0, p_j, p_0 x_j + p_j t$  ou  $x_j p_k - x_k p_j$ . Rappelons que  $A = dU(X)$  au sens défini en (12.2) et que, par ailleurs,  $g$  est le symbole passif de l'opérateur  $B$  tel que

$$(12.9) \quad Bu = (u, \psi_Z)_{\frac{1}{2}} \psi_Z$$

d'où

$$(12.10) \quad ABu = - (2i\pi)^{-1} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} ((u, \psi_Z)_{\frac{1}{2}} U(e^{sX}) \psi_Z)$$

de sorte que

$$(12.11) \quad f \# g = - (2i\pi)^{-1} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} W(U(e^{sX}) \psi_Z, \psi_Z).$$

Si l'on pose  $e^{sX} = (M, a)$  on a d'après la proposition 4.4 la relation

$$(12.12) \quad U(M, a) \psi_Z = \psi_{MZ+ia}$$

d'où, d'après (12.6),

$$(12.13) \quad W(U(e^{sX}) \psi_Z, \psi_Z)(x; p) \\ = 2^n \Psi(-MZ - ia + 2 \langle MZ + ia, p \rangle Jp + 2ix - 2i \langle x, p \rangle Jp + \bar{Z}).$$

La paire  $(M, a)$  est explicitée par les formules données au début de cette section. Ainsi, pour le premier type,  $M = I$  et  $a = (s, 0, \dots, 0)$ , d'où

$$(12.14) \quad p_0 \# g = - (2i\pi)^{-1} 2^n [-i \psi'_0 + 2i p_0 \langle Jp, \psi' \rangle]$$

et de même

$$p_1 \# g = - (2i\pi)^{-1} 2^n [-i \psi'_1 + 2ip_1 \langle Jp, \psi' \rangle],$$

les dérivées de  $\Psi$  devant être évaluées au point

$$-Z + 2 \langle Z, p \rangle Jp + 2ix - 2i \langle x, p \rangle Jp + \bar{Z}.$$

Par ailleurs, en dérivant (12.6), on obtient

$$(12.15) \quad \frac{\partial g}{\partial t} = 2^n [2i\Psi'_0 - 2i p_0 \langle Jp, \Psi' \rangle]$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2^n [2i\Psi'_1 - 2i p_1 \langle Jp, \Psi' \rangle].$$

La comparaison de (12.14) et (12.15), jointe à l'identité exprimée par le lemme 12.2, conduit au théorème 12.3.

Posons

$$(12.16) \quad b_j(x;p) = p_0 x_j + p_j t$$

et

$$(12.17) \quad r_{jk}(x;p) = x_j p_k - x_k p_j \dots$$

(le lecteur aura reconnu les initiales des mots "boost" et "rotation" et rappelons que  $\omega_0 = (0, \vec{0}; (1, 0, \dots))$  est le point de base de  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ . Conservons le symbole  $g$  utilisé dans la preuve du théorème 12.3 mais contentons-nous pour le moment de calculer les symboles  $b_1 \# g$  et  $r_{12} \# g$  au point  $\omega_0$ . Dans l'égalité (12.13) il faut aussi faire  $a=0$  et prendre pour  $M$  la matrice de boost ou de rotation correspondante. On obtient aussitôt (appliquant (12.11))

$$(12.18) \quad (b_1 \# g)(\omega_0) = -(2i\pi)^{-1} 2^n [z_1 \Psi'_0 - z_0 \Psi'_1]$$

et

$$(12.19) \quad (r_{12} \# g)(\omega_0) = - (2i\pi)^{-1} 2^n [z_2 \Psi'_1 - z_1 \Psi'_2],$$

les dérivées de  $\Psi$  devant être évaluées au point  $Jz + \vec{z}'$ .

Par ailleurs (partant de (12.6)), on a

$$(12.20) \quad \frac{\partial g}{\partial p_1}(\omega_0) = 2^{n+1} [z_1 \Psi'_0 - z_0 \Psi'_1]$$

d'où la relation

$$(12.21) \quad (b_1 \# g)(\omega_0) = -(4i\pi)^{-1} \frac{\partial g}{\partial p_1}(\omega_0).$$

Le calcul de  $(r_{12} \# g)(\omega_0)$  est plus compliqué. En posant  $e_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , on a

$$\frac{\partial g}{\partial p_j}(x; e_0) = 2^{n+1} [(z_j - ix_j) \Psi'_0 - (z_0 - ix_0) \Psi'_j],$$

le second membre étant évalué au point  $J(Z-ix)+\overline{Z}'$ , d'où

$$(12.22) \quad \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial p_1} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial p_2} \right) g(x; e_0) =$$

$$2^{n+2} [(iz_1 + x_1) \psi_{02}'' - (iz_2 + x_2) \psi_{01}''] .$$

Si l'on part de la définition (2.25) de  $\nabla^\lambda$ , le calcul standard des opérateurs pseudodifférentiels fournit la formule de commutation

$$(12.23) \quad [\nabla^{-1}, x_1] = (16\pi^2) \nabla^{-3} \frac{\partial}{\partial x_1}$$

d'où

$$\nabla^{-1} (x_1 \psi_{02}'' - x_2 \psi_{01}'') (\omega_0) = 0 .$$

Comme de plus  $\nabla^{-1}$  commute avec l'opérateur différentiel au premier membre de (12.22), on peut écrire

$$(12.24) \quad \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial p_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial p_2} \right) \nabla^{-1} g \right) (\omega_0) =$$

$$4i [z_1 \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}_1' \partial \overline{z}_2'} - z_2 \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}_1' \partial \overline{z}_2'}] (\nabla^{-1} g) (\omega_0) .$$

Or la formule (12.8) permet d'obtenir la relation

$$(12.25) \quad -2\pi g = \langle Jp, (\nabla^{-1} g)' \rangle ,$$

par la méthode utilisée pour la preuve du lemme 12.2 : le second membre se réduit à  $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1'} (\nabla^{-1} g)$  lorsque  $p = e_0$ , et le second membre de (12.24) à

$$-8i\pi [z_1 \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2'} - z_2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1'}] g(\omega_0) .$$

En comparant (12.19) et (12.24), on trouve donc

$$(12.26) \quad (r_{12} \# g) (\omega_0) = (16\pi^2)^{-1} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial p_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial p_2} \right) \nabla^{-1} g (\omega_0) .$$

Les formules (12.21) et (12.26) permettent le calcul de  $b_1 \# g$  et  $r_{12} \# g$  au point  $\omega_0$ . C'est une conséquence de la covariance que pour toute transformation  $(M, a) \in \mathcal{P}_0$  et toute paire  $(f, g)$  de symboles

(admissibles), on a

$$(12.27) \quad (f \# g) \circ (M, a) = [f \circ (M, a)] \# [g \circ (M, a)] ,$$

l'action de  $(M, a)$  sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  étant, rappelons-le, définie par

$$(12.28) \quad (M, a)(x; p) = (Mx + a; M^{-1}p) .$$

Cette formule permet en principe le calcul de  $b_1 \# g$  et  $r_{12} \# g$  en tout point. Néanmoins, le calcul direct est d'une grande complexité : un détour conceptuel nous permettra de l'éviter.

CONVENTION. Juste avant la définition 8.5, nous avons posé la convention que tout indice de sommation  $(j, k, \dots)$  était supposé (sauf mention expresse du contraire) parcourir l'ensemble d'entiers  $\{1, \dots, n\}$ : l'utilité de cette convention était de nous interdire de considérer  $p_0$  comme une variable indépendante de  $\vec{p}$ . Dans le but de permettre, en particulier dans le reste de cette section, le point de vue opposé, nous poserons que tout indice de sommation grec  $(\alpha, \beta, \dots)$  est supposé parcourir l'ensemble  $\{0, \dots, n\}$  : ceci est conforme à l'usage général en physique relativiste.

On pose également

$$(12.29) \quad \{\alpha\} = 1 \text{ si } \alpha = 0, \quad -1 \text{ si } \alpha \geq 1 .$$

DÉFINITION 12.4. Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M})$  une fonction admissible (cf. déf. 2.6). Soit  $C$  le cône de lumière solide introduit dans la définition 4.3. On appellera prolongement admissible de  $f$  toute fonction  $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \times C)$  vérifiant l'équation différentielle

$$\sum \{\alpha\} p_\alpha \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_\alpha} = 0$$

et coïncidant avec  $f$  sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ .

Il est clair que  $\tilde{f}$  est caractérisée par sa restriction à  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times C$ , laquelle peut être une fonction  $C^\infty$  arbitraire : en conséquence tout symbole  $f$  (admissible) de classe  $C^\infty$  admet des prolongements admissibles.

THÉORÈME 12.5. Soient  $f$  et  $g$  des symboles de classe  $C^\infty$ ,  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  des prolongements admissibles de  $f$  et  $g$ . Les restrictions à  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  des fonctions

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \sum \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial p_\alpha} \right)$$

et

$$\begin{aligned} \{\{\tilde{f}, \tilde{g}\}\} &= \Sigma \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_\beta \partial p_\alpha} \\ &- \Sigma p_\alpha p_\beta [\{\alpha\} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_\gamma \partial p_\beta} \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_\alpha \partial p_\gamma} + \{\beta\} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_\beta \partial p_\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_\gamma \partial p_\alpha}] \end{aligned}$$

ne dépendent que de  $f$  et  $g$ . Notons-les respectivement  $B_1(f, g)$  et  $B_2(f, g)$ . Les deux formes bilinéaires ainsi définies sont covariantes sous l'action du groupe de Poincaré, i.e. vérifient

$$(B_i(f, g)) \circ (M, a) = B_i(f \circ (M, a), g \circ (M, a))$$

pour toute transformation  $(M, a) \in \mathcal{P}_0$ .

Preuve. La forme symplectique  $\{ , \}$  est antisymétrique et la forme  $\{\{ , \}\}$  est symétrique. Il suffit pour le premier point de ce théorème de montrer que ces formes s'annulent sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  si  $\tilde{g}$  est de la forme

$$\tilde{g}(x; p) = (\Sigma \{\alpha\} p_\alpha^2 - 1) \theta(x; p)$$

où  $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{C})$  est elle-même admissible. Dans ce cas on a sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  les relations

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial p_\alpha} = 2\{\alpha\} p_\alpha \theta, \quad \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_\beta \partial p_\alpha} = 2\{\alpha\} p_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\beta}$$

ainsi que  $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_\alpha} = 0$ . La nullité de  $\{\tilde{f}, \tilde{g}\}$  résulte aussitôt de la relation d'admissibilité  $\Sigma \{\alpha\} p_\alpha \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_\alpha} = 0$ . On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{\{\tilde{f}, \tilde{g}\}\} &= \Sigma \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_\alpha \partial p_\beta} \{\alpha\} p_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\beta} \\ &- \Sigma p_\alpha p_\beta [\{\alpha\} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_\gamma \partial p_\beta} \{\gamma\} p_\gamma \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \{\beta\} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_\beta \partial p_\gamma} \{\alpha\} p_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\gamma}]. \end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite est nul parce que  $\theta$  est admissible, i.e.  $\Sigma \{\alpha\} p_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} = 0$ . Comme  $\Sigma \{\alpha\} p_\alpha^2 = 1$  sur  $\mathcal{M}$ , le troisième terme s'obtient à partir du premier par le changement de  $(\alpha, \beta)$  en  $(\beta, \gamma)$  : d'où  $\{\{\tilde{f}, \tilde{g}\}\} = 0$ .

Pour le deuxième point, faisons opérer  $\mathcal{P}_0$  sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{C}$  par la formule (12.28) : il suffit alors (c'est beaucoup plus facile avant de restreindre !) d'établir la formule



$$(12.30) \quad \{(\tilde{f}, \tilde{g})\} \circ (M, a) = \{(\tilde{f} \circ (M, a), \tilde{g} \circ (M, a))\},$$

la relation analogue relative à la forme symplectique étant bien sûr évidente. L'expression  $\{(\tilde{f}, \tilde{g})\}$  apparaît comme la somme de trois termes  $L_1(\tilde{f}, \tilde{g})$  ( $i=1,2,3$ ), avec  $L_3(\tilde{f}, \tilde{g}) = L_2(\tilde{g}, \tilde{f})$ . La covariance par les translations  $(I, a)$  est évidente, et celle du premier terme  $L_1(\tilde{f}, \tilde{g})$  par les transformations de Lorentz  $(x; p) \mapsto (Mx; M^{-1}p)$  l'est également. Il ne reste plus qu'à établir la relation

$$(L_2(\tilde{f}, \tilde{g})) \circ M = L_2(\tilde{f} \circ M, \tilde{g} \circ M)$$

pour toute matrice de Lorentz  $M = (\lambda_{\mu\nu})$  : on note, puisque  $M^{-1} = JMJ$ , que

$$(12.31) \quad M.(x; p) = ((\sum_{\nu} \lambda_{\mu\nu} x_{\nu})_{\mu}; (\sum_{\nu} \{\mu\}\{\nu\} \lambda_{\mu\nu} p_{\nu})_{\mu})$$

d'où

$$(12.32) \quad \frac{\partial^2 (\tilde{f} \circ M)}{\partial x_{\gamma} \partial p_{\beta}} = \sum \{\beta\}\{\mu\} \lambda_{\mu\beta} \lambda_{\nu\gamma} \left( \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_{\nu} \partial p_{\mu}} \circ M \right)$$

et

$$(12.33) \quad L_2(\tilde{f} \circ M, \tilde{g} \circ M) =$$

$$-\sum p_{\alpha} p_{\beta} \{\alpha\}\{\beta\}\{\mu\} \lambda_{\mu\beta} \lambda_{\nu\gamma} \left( \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p_{\mu} \partial x_{\nu}} \circ M \right) \{\gamma\}\{\rho\} \lambda_{\rho\gamma} \lambda_{\sigma\alpha} \left( \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial p_{\rho} \partial x_{\sigma}} \circ M \right).$$

Si l'on utilise la relation

$$\sum_{\gamma} \{\gamma\} \lambda_{\nu\gamma} \lambda_{\rho\gamma} = \delta_{\rho\nu} \{\rho\},$$

on obtient enfin

$$\begin{aligned} (12.34) \quad L_2(\tilde{f} \circ M, \tilde{g} \circ M) &= \\ &= -\sum p_{\alpha} p_{\beta} \{\alpha\}\{\beta\}\{\mu\} \lambda_{\mu\beta} \lambda_{\sigma\alpha} \left( \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_{\nu} \partial p_{\mu}} \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_{\sigma} \partial p_{\nu}} \right) \circ M \\ &= -\sum \{\sigma\} (M'^{-1} p)_{\sigma} (M'^{-1} p)_{\mu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_{\nu} \partial p_{\mu}} \circ M \right) \left( \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_{\sigma} \partial p_{\nu}} \circ M \right) \\ &= (L_2(\tilde{f}, \tilde{g})) \circ M, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du théorème 12.5.

**THÉOREME 12.6.** Soient  $f$  et  $g$  des fonctions  $C^{\infty}$  admissibles sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  : alors  $B_1(f, g)$  et  $B_2(f, g)$  sont admissibles et

$$B_1(f, g) = \sum \left( \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right).$$

Avec  $b_j$  et  $r_{jk}$  définis en (12.16) et (12.17),

on a

$$B_2(b_1, g) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial t \partial p_1} + (p_1 \frac{\partial}{\partial t} - p_0 \frac{\partial}{\partial x_1}) (1 + \sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j}) \right] g$$

et

$$B_2(r_{12}, g) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial p_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial p_2} - (p_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) (1 - \sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j}) \right] g.$$

Preuve. Pour le premier point, il suffit d'utiliser les formules de définition : les opérateurs différentiels qui y interviennent ont des coefficients indépendants de  $x$  et  $\tilde{f}(x; p)$  ainsi que  $\tilde{g}(x; p)$  ne dépendent que de  $(\vec{x} + x_0 p_0^{-1} \vec{p}; p)$ ; il en est donc de même du résultat. On explicite un prolongement admissible de  $f$  en posant

$$(12.35) \quad \tilde{f}(x; p) = f(x + x_0(p_0^{-1} \vec{p})^{-1}) \left( \frac{0}{p} \right); p)$$

avec  $\langle \vec{p} \rangle = (1 + |\vec{p}|^2)^{\frac{1}{2}}$  : on a en effet, sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ , les égalités

$$(12.36) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_0} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

d'où résulte aussitôt l'équation différentielle d'admissibilité. Par ailleurs, sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ ,

$$(12.37) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_0} = - \frac{x_0}{p_0^2} \sum p_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = - \frac{x_0}{p_0} \frac{\partial f}{\partial x_0}$$

et

$$(12.38) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_j} = \frac{\partial f}{\partial p_j} + x_0 p_0^{-3} p_j \sum p_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial p_j} + x_0 p_0^{-2} p_j \frac{\partial f}{\partial x_0}.$$

On a des relations analogues pour  $\tilde{g}$ , ce qui permet d'écrire sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  l'identité

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_\alpha} &= - p_0^{-1} x_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} \frac{\partial g}{\partial x_0} + \sum \left( \frac{\partial f}{\partial p_j} + x_0 p_0^{-2} p_j \frac{\partial f}{\partial x_0} \right) \frac{\partial g}{\partial x_j} \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

qui conduit à la formule indiquée pour  $B_1(f, g)$ .

La formule générale pour  $B_2(f, g)$  est trop compliquée mais  $b_1$  et

$r_{12}$  admettent les prolongements admissibles

$$\tilde{b}_1(x, p) = p_0 x_1 + p_1 x_0, \quad \tilde{r}_{12}(x, p) = p_2 x_1 - x_1 p_2.$$

En appliquant la définition de  $\{\{ \} \}$ , on obtient

$$(12.39) \quad \{\{\tilde{b}_1, \tilde{g}\}\} = \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_0 \partial p_1} + \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_1 \partial p_0} - p_0^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_0 \partial p_1} + \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_1 \partial p_0} \right) \\ + \sum p_1 p_j \left( \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_j \partial p_0} + \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_0 \partial p_j} \right) + \sum p_0 p_j \left( \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_j \partial p_1} - \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_1 \partial p_j} \right)$$

ainsi que

$$(12.40) \quad \{\{\tilde{r}_{12}, \tilde{g}\}\} = \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_2 \partial p_1} - \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_1 \partial p_2} \\ - p_0 p_1 \left( \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_0 \partial p_2} - \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_2 \partial p_0} \right) + p_0 p_2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_0 \partial p_1} - \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_1 \partial p_0} \right) \\ + \sum p_1 p_j \left( \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_j \partial p_2} + \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_2 \partial p_j} \right) - \sum p_2 p_j \left( \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_j \partial p_1} + \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_1 \partial p_j} \right).$$

Il faut maintenant, se restreignant à  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ , calculer les membres de droite de ces formules à l'aide de  $g$ , non de son prolongement.

Comme  $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_\alpha}$  est admissible (et coïncide avec  $\frac{\partial g}{\partial x_\alpha}$  sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ ), les formules (12.37) et (12.38) donnent sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$

$$(12.41) \quad \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_\alpha \partial p_0} = -p_0^{-1} x_0 \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial x_\alpha}$$

et

$$(12.42) \quad \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_\alpha \partial p_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_\alpha \partial p_j} + p_0^{-2} x_0 p_j \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial x_\alpha}.$$

En substituant ces deux relations dans (12.39) et (12.40), on obtient (après avoir noté des simplifications spectaculaires)

$$(12.43) \quad B_2(b_1, g) = (1 - p_0^2) \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial p_1} + p_1 \sum p_j \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial p_j} \\ + \sum p_0 p_j \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial p_1} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial p_j} \right)$$

et

$$(12.44) \quad B_2(r_{12}, g) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial p_1} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial p_2} + p_0 (-p_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial p_2} + p_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial p_1}) \\ + p_j (p_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial p_2} - p_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial p_1} + p_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial p_j} - p_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial p_j}) .$$

Enfin, en dérivant la relation d'admissibilité, on obtient la relation

$$(12.45) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial p_k} = p_0^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_k} - p_0^{-2} p_k \frac{\partial g}{\partial x_0} + p_0^{-1} \sum_j p_j \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial p_k} ,$$

à l'aide de quoi les formules (12.43) et (12.44) fournissent aussitôt le théorème 12.6.

**THÉORÈME 12.7.** Soit  $g$  un symbole de poids quelconque, et soit  $f$  le symbole d'un générateur de la représentation de Bargmann-Wigner, c'est-à-dire un élément de l'espace vectoriel engendré par les fonctions  $p_0, p_j, b_j$  et  $r_{jk}$ . Alors

$$f \# g = f \cdot \nabla g + (4i\pi)^{-1} B_1(f, g) + (16\pi^2)^{-1} B_2(f, \nabla^{-1} g)$$

et

$$g \# f = f \cdot \nabla g - (4i\pi)^{-1} B_1(f, g) + (16\pi^2)^{-1} B_2(f, \nabla^{-1} g) .$$

**Preuve.** Examinons la première de ces formules. D'après l'argument utilisé au début de la preuve du théorème 12.3, il suffit de l'établir lorsque  $g$  est de la forme  $W(\psi_Z, \psi_Z)$ . D'après la formule de covariance (12.27) et le théorème 12.5, joints au fait que  $\nabla$  commute à l'action du groupe de Poincaré, on peut se ramener à établir la validité de la formule au seul point  $\omega_0 = (0, \vec{0}; (1, 0, \dots))$ .

Il est immédiat, d'après le théorème 12.6, que l'on a

$$(12.46) \quad B_1(p_0, g) = \frac{\partial g}{\partial t} \qquad B_1(p_j, g) = \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

ainsi que

$$(12.47) \quad B_1(b_1, g) = x_0 \frac{\partial g}{\partial x_1} + p_0^{-1} \sum_j p_j x_1 \frac{\partial g}{\partial x_j} - p_0 \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ = t \frac{\partial g}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial g}{\partial t} - p_0 \frac{\partial g}{\partial p_1} ,$$

(expression qui se réduit à son dernier terme en  $\omega_0$ ) et

$$(12.48) \quad B_1(r_{12}, g) = -x_2 \frac{\partial g}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial g}{\partial x_2} - p_2 \frac{\partial g}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial g}{\partial p_2},$$

expression nulle au point  $\omega_0$ .

D'après le théorème 12.5, on a  $B_2(p_0, g) = B_2(p_j, g) = 0$  (utiliser les prolongements évidents de  $p_0$  et  $p_j$ ); d'après (12.43) et (12.44) on a au point  $\omega_0$  l'égalité  $B_2(b_1, g) = 0$  ainsi que

$$(12.49) \quad B_2(r_{12}, g)(\omega_0) = \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial p_1} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial p_2} \right)(\omega_0).$$

Si l'on se sert des relations

$$(12.50) \quad (b_1 \# g)(\omega_0) = -(4i\pi)^{-1} \frac{\partial g}{\partial p_1}(\omega_0)$$

et

$$(12.51) \quad (r_{12} \# g)(\omega_0) = (16\pi^2)^{-1} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial p_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial p_2} \right) \nabla^{-1} g(\omega_0)$$

établies en (12.21) et (12.26), ainsi que du théorème 12.3, on vérifie aussitôt la formule qui donne  $f \# g$ , en additionnant les résultats qui précèdent.

Pour calculer  $f \# g - g \# f$ , on peut utiliser la covariance. Soit  $dU(X)$  (opérateur défini en (12.2)) l'opérateur de symbole  $f$ , et soit  $G$  l'opérateur de symbole passif  $g$ .

D'après (12.1) le symbole passif de l'opérateur

$$(\exp -2i\pi s dU(X)) G (\exp 2i\pi s dU(X))$$

n'est autre que  $g \circ e^{-sX}$  d'où

$$(12.52) \quad f \# g - g \# f = -(2i\pi)^{-1} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (g \circ e^{-sX}).$$

On évalue enfin le membre de droite en se servant de la liste par types fournie tout au début de cette section, sans oublier que  $(g \circ M)(x; p) = g(Mx; M^{-1}p)$ : on obtient

$$(12.53) \quad \begin{aligned} p_0 \# g - g \# p_0 &= (2i\pi)^{-1} \frac{\partial g}{\partial t}, \\ p_j \# g - g \# p_j &= (2i\pi)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \\ b_1 \# g - g \# b_1 &= (2i\pi)^{-1} \left( x_1 \frac{\partial g}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial g}{\partial x_1} - p_0 \frac{\partial g}{\partial p_1} \right) \end{aligned}$$

et

$$r_{12} \# g - g \# r_{12} = (2i\pi)^{-1} \left( -x_2 \frac{\partial g}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial g}{\partial x_2} - p_2 \frac{\partial g}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial g}{\partial p_2} \right),$$

ce qui achève de prouver le théorème 12.7.

Remarque. On peut écrire les deux formules du théorème 12.7 sous la forme unique

$$(12.54) \quad f \# g = \nabla f \cdot \nabla g + (4i\pi)^{-1} B_1(f, g) + (16\pi^2)^{-1} B_2(\nabla^{-1} f, \nabla^{-1} g),$$

le symbole du type spécial pouvant être aussi bien  $f$  que  $g$ .



### XIII - L'ALGÈBRE ENVELOPPANTE

On se propose d'expliciter ici la formule de composition des symboles des opérateurs qui appartiennent à l'algèbre  $\mathcal{E}$  engendrée par les générateurs infinitésimaux de la représentation de Bargmann-Wigner. L'analogie dans le calcul de Weyl consiste en la formule bien connue

$$(13.1) \quad (f \#_W g)(x, \xi) = \sum \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha! \beta!} \left( \frac{1}{4i\pi} \right)^{|\alpha| + |\beta|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x, \xi) \cdot \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha g(x, \xi)$$

qui peut s'écrire aussi

$$(13.2) \quad (f \#_W g)(X) = \left[ e^{i\pi L} (f(X+Y)g(X+Z)) \right] (Y=Z=0)$$

avec

$$(13.3) \quad i\pi L = (4i\pi)^{-1} \sum \left( -\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial \zeta_j} + \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \eta_j} \right)$$

si  $Y = (y, \eta)$  et  $Z = (z, \zeta)$ . Ces formules équivalentes sont valables dans le cas de deux symboles  $f$  et  $g$  polynomiaux en  $(x, \xi)$ , autrement dit pour des symboles d'opérateurs appartenant à l'algèbre engendrée par les opérateurs infinitésimaux de la représentation d'Heisenberg. On sait bien entendu qu'elles restent valables en un sens asymptotique pour  $f$  et  $g$  appartenant à des classes de symboles convenables (ceci est sûrement l'un des fondements de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels!) mais ce n'est pas le point qui sera discuté dans cette section. Revenons au calcul de Klein-Gordon.

DÉFINITION 13.1. Soit  $m$  un entier  $\geq 0$ . Désignons par  $\mathcal{Q}_m$  l'espace vectoriel des fonctions  $f = f(x; p)$  admissibles sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  qui peuvent s'écrire sous la forme



$$f(x;p) = F(p_0, (p_j), (b_j), (r_{jk})_{j < k}) = F(p_0, \vec{p}, \vec{b}, \vec{r})$$

où  $F$  est un polynôme en les variables indiquées de degré relativement à  $(\vec{b}, \vec{r})$  au plus égal à  $m$  et où, rappelons-le,  $b_j = p_0 x_j + p_j x_0$  et  $r_{jk} = p_k x_j - p_j x_k$ . Posons  $\mathcal{Q}_{-1} = \mathcal{Q}_{-2} = 0$ , et  $\mathcal{Q} = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{Q}_m$ .

**THÉOREME 13.2.** Il y a identité entre la classe des symboles (actifs ou passifs) des opérateurs dans l'algèbre  $\mathcal{E}$  engendrée par les opérateurs de symboles  $p_0, p_j, b_j, r_{jk}$ , et l'espace vectoriel  $\mathcal{Q}$ .

Deux lemmes seront utiles au préalable.

**LEMME 13.3.** Soient  $g \in \mathcal{Q}_m$  et  $\lambda$  réel. Alors  $\nabla^\lambda g \in \mathcal{Q}_m$  et  $\nabla^{\lambda-g} \in \mathcal{Q}_{m-2}$ .

Preuve. Partons de la formule de commutation

$$(13.4) \quad \begin{aligned} \nabla^\lambda ((x_j + p_0^{-1} p_j x_0) g) &= (x_j + p_0^{-1} p_j x_0) \nabla^\lambda g \\ &\quad - \frac{\lambda}{16\pi^2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - p_0^{-1} p_j \frac{\partial}{\partial x_0} \right) \nabla^{\lambda-2} g. \end{aligned}$$

Comme tous les opérateurs qui y interviennent conservent les fonctions admissibles, on peut pour l'établir se borner à vérifier la formule analogue relative aux traces sur  $x_0 = 0$ , dans laquelle (cf. (8.6))  $\nabla^\lambda$  devient l'opérateur elliptique de convolution en  $\vec{x}$  de symbole

$$\vec{\xi} \mapsto \left[ 1 + \frac{1}{4} (|\vec{\xi}|^2 - p_0^{-2} \langle \vec{\xi}, \vec{p} \rangle^2) \right]^{\lambda/2},$$

qu'il s'agit de commuter avec l'opérateur de symbole  $x_j$  : la formule (13.4) est alors une conséquence de la relation d'admissibilité

$$\frac{\partial g}{\partial x_0} = p_0^{-1} \sum p_k \frac{\partial g}{\partial x_k}.$$

On déduit de (13.4) les relations

$$(13.5) \quad \nabla^\lambda (b_j g) = b_j \nabla^{\lambda-g} - \lambda (16\pi^2)^{-1} (p_0 \frac{\partial}{\partial x_j} - p_j \frac{\partial}{\partial x_0}) \nabla^{\lambda-2} g$$

et

$$(13.6) \quad \nabla^\lambda (r_{jk} g) = r_{jk} \nabla^{\lambda-g} - \lambda (16\pi^2)^{-1} (p_k \frac{\partial}{\partial x_j} - p_j \frac{\partial}{\partial x_k}) \nabla^{\lambda-2} g.$$

Par ailleurs, si

$$g(x;p) = F(p_0, \vec{p}, \vec{b}, \vec{r}),$$

on peut écrire

$$(13.7) \quad \frac{\partial g}{\partial x_0} = \sum p_j \frac{\partial F}{\partial b_j}$$

et

$$(13.8) \quad \frac{\partial g}{\partial x_j} = p_0 \frac{\partial F}{\partial b_j} + \sum_{k>j} p_k \frac{\partial F}{\partial r_{jk}} - \sum_{k<j} p_k \frac{\partial F}{\partial r_{kj}}.$$

Les formules (13.7) et (13.8) montrent que si  $g \in \mathcal{Q}_m$  alors  $\frac{\partial g}{\partial x_0}$  et  $\frac{\partial g}{\partial x_j}$  appartiennent à  $\mathcal{Q}_{m-1}$ . On est maintenant en mesure de prouver le lemme 13.3 par récurrence sur  $m$ . Tout élément  $h$  de  $\mathcal{Q}_{m+1}$  est une somme de termes de la forme  $b_j g$  ou  $r_{jk} g$  avec  $g \in \mathcal{Q}_m$  et, si l'on suppose que  $\nabla^\mu g$  appartient à  $\mathcal{Q}_{m-2}$  pour tout  $\mu$ , la relation

$$(\nabla^\lambda (b_j g) - b_j g) = \nabla^\lambda (b_j g) - b_j \nabla^\lambda g + b_j (\nabla^\lambda g - g)$$

et la formule (13.5) montrent que  $\nabla^\lambda (b_j g) - b_j g$  appartient à  $\mathcal{Q}_{m-1}$ . On peut procéder de même pour étudier  $\nabla^\lambda (r_{jk} g) - r_{jk} g$ , ce qui termine la preuve du lemme 13.3.

LEMME 13.4. Soit  $g \in \mathcal{Q}_m$ . Si  $f = p_0$  ou  $p_j$ , alors  $f \# g - fg$  appartient à  $\mathcal{Q}_{m-1}$ ; si  $f = b_j$  ou  $r_{jk}$ , alors  $f \# g - fg$  appartient à  $\mathcal{Q}_m$ .

Preuve. Le premier point résulte des formules de composition (par  $p_0$  ou  $p_j$ ) données dans le théorème 12.3, du lemme 13.3 et de la remarque déjà utilisée que  $\frac{\partial}{\partial x_0}$  et  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  abaissent le degré total en  $(\vec{b}, \vec{r})$ . Pour étudier la composition par  $f = b_j$  ou  $r_{jk}$ , on se sert du théorème 12.7 et, toujours, du lemme 13.3. On est amené à montrer que  $B_1(b_j, g)$  et  $B_1(r_{jk}, g)$  appartiennent à  $\mathcal{Q}_m$ : si l'on complète (13.7) et (13.8) par

$$(13.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial p_j} &= p_0^{-1} p_j \frac{\partial F}{\partial p_0} + \frac{\partial F}{\partial p_j} + x_0 \frac{\partial F}{\partial b_j} + p_0^{-1} p_j \sum x_k \frac{\partial F}{\partial b_k} \\ &\quad - \sum_{k>j} x_k \frac{\partial F}{\partial r_{jk}} + \sum_{k<j} \frac{\partial F}{\partial r_{kj}}, \end{aligned}$$

les formules (12.47) et (12.48) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} B_1(b_1, g) &= x_0 \left( \sum_{k>1} p_k \frac{\partial F}{\partial r_{1k}} + p_0 \frac{\partial F}{\partial b_1} \right) + x_1 \sum p_j \frac{\partial F}{\partial b_j} \\ &\quad - p_1 \frac{\partial F}{\partial p_0} - p_0 \frac{\partial F}{\partial p_1} - p_0 x_0 \frac{\partial F}{\partial b_1} - p_1 \sum x_k \frac{\partial F}{\partial b_k} + \sum_{k>1} p_0 x_k \frac{\partial F}{\partial r_{1k}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k>1} b_k \frac{\partial F}{\partial r_{1k}} + \sum_{k>1} r_{1k} \frac{\partial F}{\partial b_k} - p_1 \frac{\partial F}{\partial p_0} - p_0 \frac{\partial F}{\partial p_1}$$

et de même (toutes réductions faites)

$$\begin{aligned} B_1(r_{12}, g) &= \sum_{k>2} (r_{1k} \frac{\partial F}{\partial r_{2k}} - r_{2k} \frac{\partial F}{\partial r_{1k}}) \\ &+ b_1 \frac{\partial F}{\partial b_2} - b_2 \frac{\partial F}{\partial b_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial F}{\partial p_1}. \end{aligned}$$

Ces formules montrent que  $B_1(b_1, g)$  et  $B_1(r_{12}, g)$  appartiennent à  $\mathcal{Q}_m$ .

Le théorème 12.6 permet le calcul de  $B_2(b_1, g)$  et de  $B_2(r_{12}, g)$ , qui est très laborieux.

Pour le simplifier, on définira  $r_{jk} = p_k x_j - p_j x_k$  que  $k$  soit ou non supérieur à  $j$ , et l'on posera conventionnellement  $\frac{\partial}{\partial r_{jk}} = -\frac{\partial}{\partial r_{kj}}$  si  $j > k$ , 0 si  $j = k$  : la formule (13.8) devient

$$(13.10) \quad \frac{\partial g}{\partial x_j} = p_0 \frac{\partial F}{\partial b_j} + \sum_k p_k \frac{\partial F}{\partial r_{jk}}.$$

On écrira  $\equiv$  pour indiquer que les expressions de part et d'autre de ce signe diffèrent par un élément de  $\mathcal{Q}_{m-1}$  : pourvu que l'on fasse attention au degré (il n'y a dans le calcul qui suit aucune difficulté liée à celui-ci), on peut négliger dans les expressions à évaluer les termes dont les coefficients ne dépendent que de  $\vec{p}, \vec{b}, \vec{r}$ ; tout le problème est lié à la présence, dans les calculs intermédiaires, de coefficients dans lesquels  $\vec{x}$  apparaît explicitement.

En partant de (13.9) et (13.7), on obtient

$$\begin{aligned} (13.11) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial p_1} &\equiv x_0 \sum p_j \frac{\partial^2 F}{\partial b_1 \partial b_j} + p_0^{-1} p_1 \sum p_j x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_j \partial b_k} \\ &- \sum p_j x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_j \partial r_{1k}}. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (13.9),

$$\begin{aligned} (13.12) \quad \sum p_j \frac{\partial g}{\partial p_j} &= (p_0 - p_0^{-1}) \frac{\partial F}{\partial p_0} + \sum p_j \frac{\partial F}{\partial p_j} + \sum b_j \frac{\partial F}{\partial b_j} - p_0^{-1} \sum x_k \frac{\partial F}{\partial b_k} \\ &+ \sum_{j<k} r_{jk} \frac{\partial F}{\partial r_{jk}} \end{aligned}$$

et, d'après (13.10) et (13.7),

$$(13.13) \quad (p_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - p_0 \frac{\partial}{\partial x_1})g = p_1 \sum p_j \frac{\partial F}{\partial b_j} - p_0^2 \frac{\partial F}{\partial b_1} - \sum p_0 p_j \frac{\partial F}{\partial r_{1j}} \equiv 0$$

d'où

$$(13.14) \quad (p_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - p_0 \frac{\partial}{\partial x_1}) \sum p_j \frac{\partial g}{\partial p_j} \equiv -p_0^{-1} p_1 \sum p_j x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_j \partial b_k} \\ + p_0 \sum x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_1 \partial b_k} + \sum p_j x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_k \partial r_{1j}}.$$

En additionnant (13.11), (13.13) et (13.14) et en utilisant le théorème 12.6, on obtient

$$(13.15) \quad B_2(b_1, g) \equiv \sum b_j \frac{\partial^2 F}{\partial b_1 \partial b_j} + \sum r_{jk} \frac{\partial^2 F}{\partial b_j \partial r_{1k}} \equiv 0.$$

D'après (13.9) et (13.10), on a

$$(13.16) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial p_1} \equiv p_0 x_0 \frac{\partial^2 F}{\partial b_1 \partial b_2} + p_1 \sum x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_2 \partial b_k} - p_0 \sum x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_2 \partial r_{1k}} \\ + x_0 \sum p_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_1 \partial r_{2k}} + p_0^{-1} p_1 \sum p_j x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_k \partial r_{2j}} - \sum p_j x_k \frac{\partial^2 F}{\partial r_{1k} \partial r_{2j}}.$$

Dans le calcul de  $\frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial p_1} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial p_2}$ , le coefficient de  $\frac{\partial^2 F}{\partial b_1 \partial r_{2k}}$  est  $x_0 p_k + p_0 x_k = b_k$  et le terme correspondant appartient à  $\mathcal{Q}_{m-1}$ : en notant également que  $-p_j x_k + p_k x_j = r_{jk}$ , il reste

$$(13.17) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial p_1} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial p_2} \equiv p_1 \sum x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_2 \partial b_k} - p_2 \sum x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_1 \partial b_k} \\ + p_0^{-1} p_1 \sum p_j x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_k \partial r_{2j}} - p_0^{-1} p_2 \sum p_j x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_k \partial r_{1j}}.$$

D'autre part (d'après (13.10)),

$$(13.18) \quad (p_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial x_1})g = p_0 p_1 \frac{\partial F}{\partial b_2} - p_0 p_2 \frac{\partial F}{\partial b_1} \\ + p_1 \sum p_k \frac{\partial F}{\partial r_{2k}} - p_2 \sum p_k \frac{\partial F}{\partial r_{1k}} \equiv 0$$

et, en utilisant (13.12) à nouveau,

$$\begin{aligned}
 (13.19) \quad & (p_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) \sum p_j \frac{\partial g}{\partial p_j} \equiv - p_1 \sum x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_2 \partial b_k} \\
 & + p_2 \sum x_k \frac{\partial^2 F}{\partial b_1 \partial b_k} - p_0^{-1} p_1 \sum p_k x_j \frac{\partial^2 F}{\partial b_j \partial r_{2k}} + p_0^{-1} p_2 \sum p_k x_j \frac{\partial^2 F}{\partial b_j \partial r_{1k}}.
 \end{aligned}$$

En additionnant (13.17), (13.18) et (13.19) et en utilisant le théorème 12.6, on obtient

$$(13.20) \quad B_2(r_{12}, g) \equiv 0,$$

ce qui achève de prouver le lemme 13.4.

Preuve du théorème 13.2. Pour montrer que si  $g \in \mathcal{Q}_m$ , alors l'opérateur  $A$  dont  $g$  est le symbole passif appartient à  $\mathcal{E}$ , on raisonne par récurrence sur  $m$  : c'est une conséquence immédiate du lemme 13.4. Ce lemme montre aussi que si un opérateur  $A$  a son symbole dans  $\mathcal{Q}$ , il en est de même de  $BA$  pour tout opérateur infinitésimal  $B$  de la représentation de Bargmann-Wigner. Enfin, le lemme 13.3 montre l'équivalence de l'appartenance à  $\mathcal{Q}$  du symbole actif ou du symbole passif d'un même opérateur.

Soit  $f(x;p) = F(p_0, \vec{p}, \vec{b}, \vec{r})$  le symbole passif d'un opérateur dans l'algèbre enveloppante. En écrivant  $\vec{r} = p_0^{-1}(\vec{b} \wedge \vec{p})$ , on peut mettre  $f$  sous la forme (non unique puisque  $p_0^2 = 1 + |\vec{p}|^2$ ) d'une somme finie

$$(13.21) \quad f(x;p) = \sum p_0^m f_m(\vec{b}; \vec{p})$$

où les  $m$  sont des entiers rationnels et les  $f_m$  sont des polynômes en  $2n$  variables. En particulier

$$(13.22) \quad f(0, \vec{x}; p) = \sum p_0^m f_m(p_0 \vec{x}; p)$$

et, d'après (13.5), (13.7) et (13.8), l'application de  $\nabla^\lambda$  conserve la classe des symboles qui sont des polynômes en  $(\vec{b}; \vec{p})$ . Le théorème qui suit permet de composer deux symboles de ce type.

THÉORÈME 13.5. Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux symboles tels que  $g_{j_2}(0, \vec{x}; p)$  soit (pour  $j = 1$  ou  $2$ ) une fonction polynomiale de  $(p_0 \vec{x}; \vec{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux nombres réels. On a

$$((p_0^\lambda g_1) \# (p_0^\mu g_2))(\omega_0) = \Sigma \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha! \beta!} (4i\pi)^{-|\alpha| - |\beta|} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}'}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \vec{p}'}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}''}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \vec{p}''}\right)^\alpha$$

$$[(1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{\frac{1}{2}(\lambda + \mu + |\alpha| + |\beta|)} - 1] (\nabla^\mu g_1)(0, p_0'^{-1} \vec{x}' ; p') (\nabla^\lambda g_2)(0, p_0''^{-1} \vec{x}'' ; p'') ] (\omega_0, \omega_0).$$

Preuve. On part de la proposition 11.9 dont on conserve les notations. D'après (11.71) on a

$$(13.23) \quad (\mathcal{F}_1 g_1)(-2\vec{q}' ; p') = p_0''^{-\mu} (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{\frac{\mu}{2}} (\mathcal{F}_1 \nabla^\mu g_1)(-2\vec{q}' ; p')$$

et une formule similaire pour  $g_2$ ,  $\mu$  étant remplacé par  $\lambda$ . Cela permet d'écrire, au sens des distributions,

$$(13.24) \quad ((p_0^\lambda g_1) \# (p_0^\mu g_2))(\omega_0) = 2^{2n} \int (\mathcal{F}_1 \nabla^\mu g_1)(-2\vec{q}' ; p') (\mathcal{F}_1 \nabla^\lambda g_2)(2\vec{q}'' ; p'')$$

$$(p_0' p_0'')^n (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{-n-1+\frac{1}{2}(\lambda+\mu)} d\vec{p}' d\vec{p}''.$$

Posons

$$(13.25) \quad (\nabla^\mu g_1)(0, \vec{x}' ; p') = \Sigma (p_0' \vec{x}')^\alpha h_\alpha^1(\vec{p}'),$$

$$(\nabla^\lambda g_2)(0, \vec{x}'' ; p'') = \Sigma (p_0'' \vec{x}'')^\beta h_\beta^2(\vec{p}'').$$

Alors, d'après la définition de  $\vec{q}'$  et  $\vec{q}''$  donnée dans la proposition 11.9,

$$(13.26) \quad ((p_0^\lambda g_1) \# (p_0^\mu g_2))(\omega_0) = \Sigma (-1)^{|\alpha|} (4i\pi)^{-|\alpha| - |\beta|}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{p}''}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \vec{p}'}\right)^\beta [(1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{\frac{1}{2}(\lambda + \mu + |\alpha| + |\beta|)} - 1] h_\alpha^1(\vec{p}') h_\beta^2(\vec{p}'')]$$

le résultat étant évalué en  $\vec{p}' = \vec{p}'' = 0$ . En écrivant

$$(13.27) \quad h_\alpha^1(\vec{p}') = \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}'}\right)^\alpha [(\nabla^\mu g_1)(0, p_0'^{-1} \vec{x}' ; p')] (\vec{x}' = 0)$$

et une formule similaire pour  $h_\beta^2$ , on parvient à la formule du théorème 13.5.

Remarques. Si  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions polynomiales relativement

à  $\vec{x}$ , quelconques relativement à  $\vec{p}$  (mais restant bien entendu des symboles de poids convenables), la série n'a qu'un nombre fini de termes et la formule reste valable sans modification de la preuve.

Aussi important est le cas où  $g_2$  est un symbole quelconque (de poids convenable),  $g_1$  étant à nouveau un polynôme en  $(\vec{b}, \vec{p})$ . En écrivant

$$(13.28) \quad (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^\nu = \sum_{k \geq 0} c_{\nu, k} |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^{2k},$$

on remarque que  $(\frac{\partial}{\partial \vec{p}'})^\beta (\frac{\partial}{\partial \vec{p}''})^\alpha (|\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^{2k}) (\vec{0}, \vec{0})$  ne peut être non nul que si  $2k \leq |\alpha|$  (puisqu'on peut faire  $\vec{p}'' = 0$  avant de dériver par rapport à  $\vec{p}'$ ) : il en résulte que dans la série au second membre du théorème 13.5, on peut remplacer  $(1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^\nu$  par une troncature (à un ordre ne dépendant que de  $\alpha$ ) de la série au second membre de (13.28). Comme cette troncature est un polynôme, la série au second membre du théorème 13.5 n'a encore qu'un nombre fini de termes non nuls : une modification insignifiante de la preuve montre que le théorème 13.5 reste valable dans ce cas.

Considérons la formule

$$(p_0 \# g)(\omega_0) = (\nabla g)(\omega_0)$$

énoncée dans le théorème 12.3. Il n'y a qu'un terme au second membre, mais il y en aurait une infinité si l'on avait développé  $\nabla = (1 + (4\pi)^{-2} \square)^{\frac{1}{2}}$  en série d'opérateurs différentiels : c'est la raison pour laquelle, dans le théorème 13.5, il est nécessaire d'"absorber" les puissances impaires ou négatives de  $p_0$  par des puissances de  $\nabla$ . Ainsi obtient-on un développement qui n'a qu'un nombre fini de termes dans le cas de deux opérateurs dans l'algèbre enveloppante. Plus loin, nous étendrons ces développements au cas de deux symboles quelconques : il n'y aura alors, bien entendu, aucun espoir d'obtenir un développement fini, ni aucune raison pour isoler ainsi les puissances de  $p_0$ .

Pour évaluer un symbole composé en un autre point, il faut faire appel à la formule de covariance

$$(13.29) \quad (g_1 \# g_2)(0, \vec{y}; q) = [(g_1 \circ (M, a)) \# (g_2 \circ (M, a))](\omega_0)$$

valable si  $(\vec{y}; q) = (M, a) \cdot \omega_0$ . Il faut prendre  $a = (0, \vec{y})$  et on peut prendre pour  $M$  le boost tel que  $M^{-1}e_0 = q$  : il est donné, d'après (2.20), par les formules

$$(13.30) \quad \begin{aligned} (Mx)_0 &= \langle Jq, x \rangle \\ \vec{Mx} &= \vec{x} - x_0 \vec{q} + (1 + q_0)^{-1} \langle \vec{q}, \vec{x} \rangle \vec{q} \end{aligned}$$

d'où

$$(13.31) \quad \begin{aligned} (g \circ (M, a)) (0, \vec{x}; p) &= g((M, a) \cdot (0, \vec{x}); M^{-1}p) \\ &= g(-\langle \vec{q}, \vec{x} \rangle, \vec{x} + \frac{\langle \vec{q}, \vec{x} \rangle}{1 + q_0} \vec{q} + \vec{y}; \langle q, p \rangle, \vec{p} + p_0 \vec{q} + \frac{\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle}{1 + q_0} \vec{q}). \end{aligned}$$

Si l'on appelle  $(x'; p')$  le point en lequel  $g$  est évaluée au second membre de (13.31), la condition d'admissibilité permet de remplacer ce point par  $(0, \vec{x}''; p')$  avec

$$(13.32) \quad \begin{aligned} \vec{x}'' &= \vec{x}' + \frac{x'_0}{p'_0} \vec{p}' \\ &= \vec{x} + \vec{y} + \frac{\langle \vec{q}, \vec{x} \rangle}{1 + q_0} \vec{q} \left\{ \frac{\vec{q}}{1 + q_0} - \langle q, p \rangle^{-1} [\vec{p} + p_0 \vec{q} + \frac{\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle}{1 + q_0} \vec{q}] \right\} \\ &= \vec{x} + \vec{y} - \frac{\langle \vec{q}, \vec{x} \rangle}{\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle} [\vec{p} + \frac{p_0}{1 + q_0} \vec{q}] \quad , \end{aligned}$$

la dernière égalité nécessitant deux lignes de calcul.

Pour montrer le bon usage de cette méthode, traitons le cas du composé  $p_j \# g$ , où  $g$  est un symbole quelconque. Ici,

$$(13.33) \quad p_j \circ (M, a) = p_j + q_j p_0 + \frac{q_j}{1 + q_0} \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle.$$

D'après le théorème (13.5), on a simplement

$$(13.34) \quad ((q_j p_0) \# (g \circ (M, a))) (\omega_0) = q_j (\nabla g) (0, \vec{y}; q)$$

et

$$(13.35) \quad (p_k \# h) (\omega_0) = (4i\pi)^{-1} \frac{\partial h}{\partial x_k} (\omega_0)$$

d'où (d'après (13.31) et (13.32))

$$(13.36) \quad (p_k \# (g \circ (M, a))) (\omega_0)$$



$$\begin{aligned}
&= (4i\pi)^{-1} \left[ \frac{\partial g}{\partial y_k} - \frac{q_k}{q_o} (1+q_o)^{-1} \sum q_m \frac{\partial g}{\partial y_m} \right] \\
&= (4i\pi)^{-1} \left[ \frac{\partial g}{\partial y_k} - \frac{q_k}{1+q_o} \frac{\partial g}{\partial y_o} \right]
\end{aligned}$$

et par suite (revenant à (13.33))

$$\begin{aligned}
(13.37) \quad (p_j \# g)(0, \vec{y}; q) &= q_j \nabla g + (4i\pi)^{-1} \left[ \frac{\partial g}{\partial y_j} - \frac{q_j}{1+q_o} \frac{\partial g}{\partial y_o} \right. \\
&\quad \left. + \frac{q_j}{1+q_o} \sum q_k \left( \frac{\partial g}{\partial y_k} - \frac{q_k}{1+q_o} \frac{\partial g}{\partial y_o} \right) \right] \\
&= q_j \nabla g + (4i\pi)^{-1} \frac{\partial g}{\partial y_j} .
\end{aligned}$$

On retrouve bien entendu la formule du théorème 12.3. Il est temps d'introduire de nouvelles classes de symboles pour lesquelles les termes du développement iront en s'améliorant, ce qui, comme à l'accoutumée, permettra le plus souvent de n'en retenir qu'un petit nombre.

#### XIV - DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES.

Les classes de symboles sont définies, rappelons-le, par l'ap-  
plicabilité des opérateurs  $e_j, e_{jk}, \epsilon_j, \epsilon$ : cela fait  $\frac{n(n+1)}{2}$  vecteurs  
de dérivation par rapport à  $\vec{x}$ ,  $n+1$  vecteurs de dérivation par rapport  
à  $\vec{p}$ , aussi allons-nous introduire ici un système équivalent de  $n+n$   
vecteurs. Peut-être est-il utile d'insister ici, également, sur le  
fait que c'est la restriction  $g_0$  à  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$  d'un symbole  $g$  qui  
doit rester bornée après application de ces opérateurs et non le sym-  
bole  $g$  lui-même. En effet, un opérateur tel que  $\epsilon_j = \frac{\partial}{\partial p_j}$ , par exem-  
ple, ne conserve pas l'admissibilité (effectuer son crochet avec  
l'opérateur  $p_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum p_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ) et devrait être remplacé, si l'on exi-  
geait quant aux dérivées des symboles des majorations valables par-  
tout, par l'opérateur moins commode

$$(14.1) \quad \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{x_0}{p_0} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{x_0 p_j}{p_0^2} \frac{\partial}{\partial x_0}.$$

La définition 8.5 a introduit les normes duales  $\| \cdot \|_p$  et  $\| \cdot \|_p$   
sur  $\mathbb{R}^n$ , que la contraction de Lorentz va nous permettre de mieux  
comprendre. En relativité, la ligne d'univers d'un point matériel  
classique est l'ensemble des positions qu'il occupe dans l'espace-  
temps : ainsi, s'il est au repos relativement à l'observateur de ré-  
férence  $\omega_0$ , sa ligne d'univers est, pour un certain  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , l'en-  
semble des points  $(t, \vec{x})$  avec  $t$  quelconque ; plus généralement, si  $v$   
est la vitesse d'un observateur  $\omega$  relativement à  $\omega_0$ , si  
 $\vec{p} = -(1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}}v$  et si l'on considère un point matériel classique au  
repos relativement à  $\omega$ , la ligne d'univers de ce point est une droite  
de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dont un vecteur directeur est  $(1, v)$  ou, si l'on préfère,  $J_p$ .  
Dans l'espace de phase  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ , que l'on peut considérer indiffé-  
remment comme l'espace des observateurs ou comme l'espace des couples

$(x;p)$  où  $x$  est un point de l'espace-temps et  $p \in \mathcal{M}$ , on peut regarder  $(x, -p_0^{-1}\vec{p})$  comme décrivant la position d'espace-temps ainsi que la vitesse d'un point matériel classique libre relativement à l'observateur de référence. Si l'on appelle alors ligne d'univers de ce point dans l'espace de phase l'ensemble des couples  $(y;p)$  où  $y$  appartient à la ligne d'univers précédemment définie, on voit qu'une fonction admissible n'est pas autre chose qu'une fonction qui reste constante sur les lignes d'univers dans l'espace de phase.

Les physiciens appellent règle au repos relativement à l'observateur de référence un couple de points  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $\mathbb{R}^n$  (l'espace du point de vue de  $\omega_0$ ) : la longueur au repos de la règle est  $|\vec{x}-\vec{y}|$ . Soit  $\omega = (z;p)$  un deuxième observateur. Chaque extrémité de la règle décrit sa ligne d'univers  $\{(t, \vec{x})\}$  ou  $\{(t, \vec{y})\}$  : pour mesurer la règle,  $\omega$  prendra la longueur du vecteur purement spatial (de son point de vue) dont les extrémités sont les intersections de ces deux lignes d'univers avec un hyperplan sur lequel (du point de vue de  $\omega$ ) le temps est fixé ; ce vecteur  $\xi$  est déterminé par la condition que  $\langle \xi, p \rangle = 0$  (vu que  $\xi \in \mathbb{E}_p$ , espace des vecteurs purement spatiaux pour  $\omega$ ) et par celle que  $\xi - (0, \vec{y}-\vec{x})$  est un multiple de  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ . Finalement

$$(14.2) \quad \xi = \left( -\frac{\langle \vec{y}-\vec{x}, \vec{p} \rangle}{p_0}, \vec{y}-\vec{x} \right)$$

et le carré de la longueur de la règle, perçue par  $\omega$ , est

$$(14.3) \quad -ds^2(\xi) = |\vec{y}-\vec{x}|^2 - p_0^{-2} \langle \vec{y}-\vec{x}, \vec{p} \rangle^2 = \|\vec{y}-\vec{x}\|_p^2$$

d'après la définition 8.5 : la norme  $\|\cdot\|_p$  n'est donc autre que la norme sur  $\mathbb{R}^n$  qui résulte de la contraction de Lorentz correspondant à la vitesse  $-p_0^{-1}\vec{p}$  ; bien entendu, lorsque  $v = (v_1, 0, \dots, 0)$ , on retrouve la forme usuelle

$$(14.4) \quad \|\vec{y}-\vec{x}\|_p^2 = (1-v_1^2)(y_1-x_1)^2 + \sum_{j \geq 2} (y_j-x_j)^2.$$

Soit  $\bigwedge_p$  le boost (i.e.  $\bigwedge_p = \bigwedge_p^1 > 0$ ) défini en (2.20), caractérisé par  $p = \bigwedge_p^{-1} e_0$  : rappelons, pour la commodité du lecteur, que

$$(14.5) \quad \begin{aligned} (\bigwedge_p z)_0 &= \langle Jp, z \rangle \\ (\bigwedge_p z)_j &= z_j - z_0 p_j + \frac{\langle \vec{p}, \vec{z} \rangle}{1+p_0} p_j. \end{aligned}$$

L'application linéaire  $\bigwedge_p$ , confondue avec sa dérivée, transforme des vecteurs de dérivation purement spatiaux (i.e. combinaisons linéaires de  $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ ) en vecteurs de dérivation dans les directions de  $\mathbb{E}_p$  : si l'on ne s'intéresse qu'à l'application de ces derniers à des fonctions admissibles, on peut se ramener à des dérivations dans les directions de  $\mathbb{E}_0$  en leur ajoutant un multiple convenable de  $p_0 \frac{\partial}{\partial z_0} - \sum p_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ . En d'autres termes, on est amené à s'intéresser à la dérivée de l'application linéaire  $\vec{z} \mapsto \vec{x} = \theta_p(\vec{z})$  telle que  $(0, \vec{x}) = \bigwedge_p(0, \vec{z}) + \lambda J_p$  : il faut donc prendre  $\lambda = p_0^{-1} \langle \vec{p}, \vec{z} \rangle$  et poser

$$(14.6) \quad \vec{x} = \theta_p(\vec{z}) = \vec{z} - \frac{\langle \vec{p}, \vec{z} \rangle}{p_0(1+p_0)} \vec{p}.$$

En développant, on obtient immédiatement la relation fondamentale

$$(14.7) \quad \|\vec{x}\|_p^2 = |\vec{x}|^2 + \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle^2 = |\vec{z}|^2$$

qui va nous permettre de remplacer le système d'opérateurs  $e_j, e_{jk}$  par le système "équivalent" ne comportant que  $n$  opérateurs, défini par  $\vec{e} = \theta_p^{-1} \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$  : en inversant  $\theta_p$  à l'aide de l'appendice, on obtient de même un système de vecteurs de dérivations orthonormé pour  $\|\cdot\|_p$  pouvant remplacer  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon\}$ .

DÉFINITION 14.1. On définit, sur les fonctions de  $(\vec{x}; p)$ , les opérateurs

$$e^{(j)} = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{p_j}{p_0(1+p_0)} \sum p_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

et

$$\epsilon^{(j)} = \frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{p_j}{1+p_0} \sum p_k \frac{\partial}{\partial p_k}.$$

PROPOSITION 14.2. Soient  $m = m(\vec{x}; p)$  une fonction-poids et  $g$  une fonction admissible : posons  $g_0(\vec{x}; p) = g(0, \vec{x}; p)$ . Pour que  $g$  soit un symbole de poids  $m$ , il faut et il suffit que  $m^{-1} B g_0$  soit une fonction bornée pour tout opérateur différentiel  $B$  appartenant à l'algèbre  $\mathcal{B}$  engendrée par les opérateurs  $e^{(j)}, \epsilon^{(k)}$ .

Preuve. Si l'on renvoie à la proposition 8.14, on voit qu'il suffit de comparer  $\mathcal{B}$  et l'algèbre  $\mathcal{A}$  engendrée par les opérateurs  $e_j, e_{jk}, \epsilon_j$  et  $\epsilon$ . Or, on vérifie immédiatement les formules

$$(14.8) \quad e^{(j)} = e_j - \sum_k \frac{p_k}{1+p_0} e_{jk}$$

(développer le membre de droite) et

$$(14.9) \quad \varepsilon^{(j)} = \varepsilon_j + \frac{p_j}{1+p_0} \varepsilon :$$

comme les coefficients des combinaisons linéaires aux seconds membres sont des symboles de poids 1, l'applicabilité des éléments de l'algèbre  $\mathcal{A}$  entraîne la même chose pour  $\mathcal{B}$ . Dans l'autre sens, on écrit

$$(14.10) \quad \begin{aligned} e_j &= p_0^{-1} e^{(j)} + \frac{p_j}{1+p_0} \sum \frac{p_k}{p_0} e^{(k)} , \\ e_{jk} &= p_0^{-1} (p_j e^{(k)} - p_k e^{(j)}) , \end{aligned}$$

et

$$(14.11) \quad \begin{aligned} \varepsilon_j &= \varepsilon^{(j)} - \frac{p_j}{p_0(1+p_0)} \sum p_k \varepsilon^{(k)} \\ \varepsilon &= p_0^{-1} \sum p_k \varepsilon^{(k)} , \end{aligned}$$

et l'on conclut de même.

Pour obtenir un véritable calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels, il est nécessaire de supposer que certains opérateurs de dérivation diminuent le poids des symboles : dans les calculs usuels, ce sont les dérivations par rapport à  $\xi$  qui jouent en général ce rôle ; ici, ce seront au contraire les dérivations relatives à  $\vec{x}$ .

DÉFINITION 14.3. Pour tout couple  $(N, N')$  d'entiers  $\geq 0$ , désignons par  $\mathcal{B}_{N, N'}$  l'ensemble des opérateurs différentiels de la forme

$\eta_1 \dots \eta_N \theta_1 \dots \theta_{N'}$  produits de  $N$  opérateurs choisis parmi les  $e^{(j)}$  et de  $N' \leq N$  opérateurs choisis parmi les  $\varepsilon^{(k)}$ . Soient par ailleurs  $m$  et  $\mu$  deux poids, avec  $\mu \geq 1$ , et  $g$  une fonction admissible de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ . Nous dirons que  $g$  est de poids  $m$  et de type  $\mu$  si pour tout couple  $(N, N')$  et tout opérateur  $D \in \mathcal{B}_{N, N'}$  on peut trouver  $C > 0$  telle que l'on ait

$$|(Dg)(0, \vec{x}; p)| \leq C m(\vec{x}; p) [\mu(\vec{x}; p)]^{-N}$$

pour tout  $(\vec{x}; p)$ . On désignera enfin par  $\|g\|_{m, \mu}^{N_0, N'_0}$  la borne inférieure des constantes  $C$  pour lesquelles cette inégalité est valable avec

n'importe quel opérateur  $D \in \mathcal{B}_{N,N'}$  lorsque  $N \leq N_0$ ,  $N' \leq N'_0$ .

Remarques : 1) les formules (14.8) à (14.11) montrent que l'on peut, dans la définition 14.3, remplacer  $\mathcal{B}_{N,N'}$  par l'ensemble  $\mathcal{A}_{N,N'}$  constitué d'une façon analogue à partir des opérateurs  $e_j, e_{jk}, e_j$  et  $\varepsilon_j$ ;

2) la relation de commutation

$$(14.12) \quad [e^{(k)}, \varepsilon^{(j)}] = \frac{p_k}{p_0(1+p_0)} \frac{\partial}{\partial x_j} + \left[ \frac{\delta_{jk}}{p_0(1+p_0)} - \frac{p_j p_k}{p_0^2(1+p_0)^2} \right] \sum p_m \frac{\partial}{\partial x_m} \\ = \frac{p_k}{p_0(1+p_0)} e^{(j)} + \delta_{jk} \sum \frac{p_m}{1+p_0} e^{(m)}$$

permet si l'on veut de s'affranchir, dans la définition 14.3, du fait que les opérateurs du genre  $e$  sont tous écrits à gauche des opérateurs du genre  $\varepsilon$ ; 3) lorsque  $\mu = 1$ , on retrouve la notion de symbole de poids  $m$ .

On se propose maintenant de donner des développements asymptotiques pour le calcul de  $\nabla^\lambda g$  ou de  $g_1 \# g_2$  lorsque les symboles qui interviennent ici sont de poids et de type donné. Lorsque  $\mu = 1$ , il n'y a rien à gagner à effectuer un développement, et le résultat se réduit au théorème 8.18 pour ce qui concerne  $\nabla^\lambda g$ , au théorème 10.2 pour ce qui est de la composition des symboles. On ramène à ces résultats déjà obtenus le cas général, à condition d'effectuer une étude préalable des développements tayloriens relativement à  $\vec{x}$ .

Si  $f$  est une fonction  $C^\infty$  sur un espace  $\mathbb{R}^n$  et si, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , et tout entier  $k \geq 0$ , on pose  $f = T_y^{k-1} f + R_y^k f$  avec

$$(14.13) \quad (T_y^{k-1} f)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{1}{\alpha!} (x-y)^\alpha (\partial^\alpha f)(y),$$

alors on a les inégalités élémentaires

$$(14.14) \quad |\partial_Y^\gamma ((\partial_x^\beta T_y^{k-1} f)(x))| \leq C(1+|x-y|)^{k-1} \sum_{|\alpha| \leq k-1+|\gamma|} |(\partial^\alpha f)(y)|$$

et

$$(14.15) \quad |\partial_Y^\gamma ((\partial_x^\beta R_y^k f)(x))| \leq C(1+|x-y|)^k \frac{\max(k, |\beta|) + |\gamma|}{|\alpha| = k}$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |(\partial^\alpha f)((1-t)y + tx)|$$

dans lesquelles les constantes  $C$  ne dépendent que de  $n, k, \beta$  et  $\gamma$ : le seul point notable est l'identité

$$(14.16) \quad (\partial_Y^\gamma \partial_X^\beta R_Y^k f)(x) = (R_Y^{k-|\beta|} \partial^{\beta+\gamma} f)(x).$$

Dans ce qui suit, on supposera que le poids  $m$  vérifie les inégalités (cf. déf.8.10)

$$(14.17) \quad m(\vec{y}; p) \leq C_1 m(\vec{x}; q) < J_{p,q}^{N_1} (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_q)^{N_1}$$

et que le poids  $\mu$  vérifie l'inégalité analogue avec les mêmes constantes  $C_1$  et  $N_1$ .

On se donne un symbole  $g$  de poids  $m$  et de type  $\mu$  et l'on pose  $g_0(\vec{x}; p) = g(0, \vec{x}; p)$ ; pour tout  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , et tout entier  $k \geq 0$ , on pose

$$(14.18) \quad g_0 = T_{\vec{y}}^{k-1} g_0 + R_{\vec{y}}^k g_0$$

avec

$$(14.19) \quad (T_{\vec{y}}^{k-1} g_0)(\vec{x}; p) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{1}{\alpha!} (\vec{x} - \vec{y})^\alpha (\partial_{\vec{y}}^\alpha g_0)(\vec{y}; p).$$

LEMME 14.4. Sous les hypothèses (14.17) à (14.19) on peut, avec les notations de la définition 14.3, écrire pour tout couple  $(N, N')$  d'entiers  $\geq 0$  et tout  $D \in \mathcal{B}_{N, N'}$  les inégalités

$$|(DT_{\vec{y}}^{k-1} g_0)(\vec{x})| \leq CC_1 m(\vec{x}; p) (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_p)^{k-1+N_1} \|g\|_{m, \mu}^{k-1, N'}$$

et

$$|(DR_{\vec{y}}^k g_0)(\vec{x})| \leq CC_1^{k+1} m(\vec{x}; p) (\mu(\vec{x}; p))^{-k} (1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_p)^{k+N_1+kN_1} \|g\|_{m, \mu}^{\max(k, N), N'}$$

dans lesquelles la constante  $C$  ne dépend que de  $(n, k, N, N')$ .

Preuve. Comme la constitution des développements de Taylor d'ordre donné relativement à  $\vec{x}$  commute aux opérateurs différentiels  $\frac{\partial}{\partial p}$ , on se ramène au cas où  $N' = 0$ . Les opérateurs  $e^{(j)}$  introduits dans la définition 14.1 commutent entre eux, ce qui permet de définir  $e^\alpha$  pour tout multi-indice  $\alpha$ . Du reste, si l'on pose, avec  $\theta_p$  définie en (14.6),

$$(14.20) \quad h_0(\vec{x}'; p) = g_0(\theta_p \vec{x}'; p),$$

on a

$$(14.21) \quad (e^\alpha g)(\theta_p \vec{x}') = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}'}\right)^\alpha h_0(\vec{x}'; p)$$

et, avec  $\vec{y} = \theta_p \vec{y}'$ , l'égalité  $|\vec{x}' - \vec{y}'| = \|\theta_p \vec{x}' - \vec{y}'\|_p$ .

L'application de (14.14) à la fonction  $h_0$  fournit, si  $D \in \mathcal{B}_{N,0}$  :

$$(14.22) \quad |(DT_{\vec{y}}^{k-1} g_0)(\vec{x}; p)| \leq C(1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_p)^{k-1} m(\vec{y}; p) \|g\|_{m, \mu}^{k-1, 0}$$

et la première inégalité annoncée résulte de là avec l'aide de (14.17). Pour ce qui concerne la deuxième inégalité annoncée dans le lemme 14.4, c'est la version  $\gamma = 0$  de (14.15) qu'il suffit d'utiliser, après avoir noté que

$$(14.23) \quad m((1-t)\vec{y} + t\vec{x}; p) \leq C_1 m(\vec{x}; p) (1 + \|\vec{y} - \vec{x}\|_p)^{N_1}$$

et qu'une inégalité analogue vaut pour  $\mu^{-1}$ . Ceci termine la preuve du lemme 14.4.

**THÉOREME 14.5.** Soit  $g$  un symbole de poids  $m$  et de type  $\mu$  ( $\mu \geq 1$ ) et soit  $\lambda$  un nombre réel. Pour tout entier  $k \geq 0$ , le symbole

$$\nabla^\lambda g - \sum_{j \leq k-1} \frac{1}{j!} \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda}{2} - j + 1\right) \left(\frac{\square}{16\pi^2}\right)^j g$$

est de poids  $m \mu^{-2k}$  et de type  $\mu$ .

Preuve. Dans le cas où  $g_0$  est, relativement à  $\vec{x}$ , un polynôme de degré  $\leq 2k-1$  (à coefficients fonctions de  $p$ ), la formule (8.6) fournit, puisque  $(\mathcal{F}_1 g_0)(\vec{\xi}; p)$  est, relativement à  $\vec{\xi}$ , combinaison linéaire de dérivées d'ordre  $\leq 2k-1$  de la mesure de Dirac, la formule

$$(\mathcal{F}_1 \nabla^\lambda g_0)(\vec{\xi}; p) = \sum_{j \leq k-1} \frac{1}{j!} \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda}{2} - j + 1\right) \left[ \frac{|\vec{\xi}|^2 - p_0^{-2} \langle \vec{\xi}, \vec{p} \rangle^2}{4} \right]^j (\mathcal{F}_1 g_0)(\vec{\xi}; p)$$

et le reste introduit dans le théorème 14.5 est donc nul. Il ne reste plus, dans ce cas, qu'à se convaincre que  $\square^j g$  est un symbole de poids



$m\mu^{-2j}$  et de type  $\mu$  pour tout  $j$  : or cela résulte de la formule

$$(14.24) \quad -\square = \sum (e^{(j)})^2$$

de vérification immédiate.

Le cas général s'obtient par une combinaison du calcul que nous venons de faire et du théorème 8.18. Un coup d'oeil à la preuve de ce dernier montre qu'il présente une large part d'uniformité relativement au poids  $m$ , puisque dans les inégalités (8.8) seul intervient le rapport  $m(\vec{y};p)^{-1}m(\vec{x};p)$ . En d'autres termes, si  $m$  vérifie (14.17), on peut préciser le théorème 8.18 comme suit : pour tout  $(N, N')$ , on peut trouver  $(\tilde{N}, \tilde{N}')$  ne dépendant que de  $(N, N', N_1)$  et une constante  $C > 0$  ne dépendant que de  $(n, N, N', N_1, C_1)$  tels que, pour tout poids  $m$  vérifiant (14.17) et tout symbole  $g$  de poids  $m$  jusqu'à l'ordre de différentiabilité  $\tilde{N} + \tilde{N}'$ , on ait

$$(14.25) \quad \|\nabla^\lambda g\|_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^m \leq C \|g\|_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^m;$$

les semi-normes qui interviennent ici sont celles de la définition 14.3, l'absence du deuxième indice inférieur  $\mu$  signifiant que  $\mu = 1$ ,

Conformément à (14.18), pour tout  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$(14.26) \quad g_0 = T_{\vec{y}}^{2k-1} g_0 + R_{\vec{y}}^{2k} g_0$$

d'où, d'après ce qui précède,

$$(14.27) \quad (\nabla^\lambda g_0)(\vec{y}; p) = \nabla^\lambda (R_{\vec{y}}^{2k} g_0)(\vec{y}; p) + \sum_{j \leq k-1} \frac{1}{j!} \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda}{2} - j + 1\right) \left[\left(\frac{\square}{16\pi^2}\right)^j T_{\vec{y}}^{2k-1} g_0\right](\vec{y}; p).$$

Evidemment,  $\square^j T_{\vec{y}}^{2k-1} g_0$  et  $\square^j g_0$  coïncident au point  $(\vec{y}; p)$  si  $j \leq k-1$ .

Posons par ailleurs

$$(14.28) \quad v_{\vec{y}}(\vec{x}; p) = 1 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_p.$$

D'après (8.8), la fonction  $v_{\vec{y}}$  est une fonction-poids : elle vérifie en effet

$$(14.29) \quad v_{\vec{y}}(\vec{x}; p) \leq 2^{5/2} \langle p, \mathbb{J}p \rangle (1 + \|\vec{x} - \vec{x}'\|_p) v_{\vec{y}}(\vec{x}'; p')$$

c'est-à-dire (14.17) pourvu que l'on suppose  $N_1 \geq 1$  et  $C_1 \geq 2^{5/2}$ . La fonction

$$(14.30) \quad m_{\vec{y}} = m_{\mu}^{-2k} v_{\vec{y}}^{2k+N_1+2k N_1}$$

est elle-même une fonction-poids qui vérifie (14.17) à condition de remplacer dans cette dernière inégalité le couple  $(C_1, N_1)$  par un couple  $(C_1', 2(N_1+k+2kN_1))$ ,  $C_1'$  ne dépendant que de  $(C_1, N_1, k)$ . La deuxième des inégalités fournies par le lemme 14.4 peut s'écrire

$$(14.31) \quad \|R_{\vec{y}}^{2k} g_O\|_{m_{\vec{y}}}^{\tilde{N}, \tilde{N}'} \leq C \|g\|_{m, \mu}^{2k+\tilde{N}, \tilde{N}'},$$

inégalité dans laquelle  $C$  ne dépend que de  $(n, k, \tilde{N}, \tilde{N}', N_1, C_1)$ . L'inégalité (14.25) donne alors

$$(14.32) \quad \|\nabla^{\lambda} R_{\vec{y}}^{2k} g_O\|_{m_{\vec{y}}}^{N, N'} \leq C \|g\|_{m, \mu}^{2k+\tilde{N}, \tilde{N}'}$$

et en particulier

$$(14.33) \quad |(\nabla^{\lambda} R_{\vec{y}}^{2k} g_O)(\vec{y}; p)| \leq C \|g\|_{m, \mu}^{2k+\tilde{N}, \tilde{N}'} m(\vec{y}; p) [\mu(\vec{y}; p)]^{-2k}$$

puisque  $v_{\vec{y}}(\vec{y}; p) = 1$ . L'inégalité (14.32) fournit également la majoration souhaitée des dérivées relativement à  $\vec{p}$  : pour dériver relativement à  $\vec{y}$ , il suffit de généraliser (c'est immédiat) le lemme 14.4 en  $y$  faisant intervenir les inégalités générales (14.14) et (14.15) et non seulement la version " $\gamma = 0$ " de ces dernières.

De ce qui précède il résulte que la fonction  $(\vec{y}; p) \mapsto \nabla^{\lambda} (R_{\vec{y}}^{2k} g_O)(\vec{x}; p)$  est un symbole de poids  $m_{\mu}^{-2k}$  et de type 1 : pour montrer que c'est un symbole de poids  $m_{\mu}^{-2k}$  et de type  $\mu$ , il suffit de pousser le développement de Taylor plus loin puisque, ainsi qu'il a déjà été remarqué, les termes réguliers du développement énoncé dans le théorème 14.5 sont du poids souhaité et de type  $\mu$ .

Ceci termine la preuve du théorème 14.5.

La composition des symboles pourra se traiter d'une façon tout à fait analogue à ce qui précède. Il nous faut cependant transformer un peu, pour commencer, la formule de composition donnée dans le

théorème 13.5, auquel nous renvoyons. C'est le cas où les deux symboles  $g_1$  et  $g_2$  sont polynomiaux relativement à  $x$ , et quelconques relativement à  $p$ , qui nous intéresse : la série fournit dans ce cas, rappelons-le, une formule exacte ; Également, nous nous dispenserons ici des facteurs  $p_0^\lambda$  et  $p_0^\mu$  du membre de gauche (qui deviennent  $\nabla^\lambda$  et  $\nabla^\mu$  dans celui de droite), dont le rôle était de fournir une somme finie pour le développement du produit d'un symbole quelconque par le symbole d'un élément de l'algèbre enveloppante.

LEMME 14.6. Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux symboles de poids quelconque, polynomiaux relativement aux variables spatio-temporelles, et soit  $(y; q) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ . Soit  $M_q \in \mathcal{L}_0$  une transformation de Lorentz arbitraire telle que  $q = M_q'^{-1} e_0$ . Alors

$$(g_1 \# g_2)(y; q) = \Sigma \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha! \beta!} (4i\pi)^{-|\alpha| - |\beta|} \left( \frac{\partial}{\partial \vec{x}'} \right)^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial \vec{p}'} \right)^\beta \left( \frac{\partial}{\partial \vec{x}''} \right)^\beta \left( \frac{\partial}{\partial \vec{p}''} \right)^\alpha$$

$$[(1 - |\vec{p}'| \wedge \vec{p}''|)^2]^{\frac{1}{2}(|\alpha| + |\beta|) - 1} g_1(y + p_0'^{-1} M_q(0, \vec{x}'); M_q'^{-1} p')$$

$$g_2(y + p_0''^{-1} M_q(0, \vec{x}''; M_q'^{-1} p'')] (\vec{x}' = \vec{x}'' = 0; p' = p'' = e_0).$$

Preuve. Si  $N_q$  est une autre transformation de Lorentz telle que  $q = N_q'^{-1} e_0$ , on peut trouver  $K \in \{1\} \times SO(n)$  telle que  $M_q = N_q K$  et  $M_q'^{-1} = N_q'^{-1} K$  : il résulte de là que le second membre ne dépend pas du choix de la transformation  $M_q$  telle que  $q = M_q'^{-1} e_0$ . D'après le théorème 13.5 et la remarque qui suit sa démonstration, la formule annoncée ici est exacte lorsque  $(y; q) = \omega_0$ . Si  $(M, a)$  est une transformation de Poincaré arbitraire et si l'on pose

$$(14.34) \quad h_j(y; q) = (g_j \circ (M, a))(y; q) = g_j(My + a; M'^{-1} q),$$

alors

$$(14.35) \quad h_1(p_0'^{-1}(0, \vec{x}'); p') = g_1(a + p_0'^{-1} M(0, \vec{x}'); M'^{-1} p')$$

et l'on voit, grâce à la formule de covariance (12.27), que la formule annoncée est vraie quel que soit  $(y; q) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ .

La formule n'est pas encore satisfaisante pour notre propos parce que, même lorsque  $y = (0, \vec{y})$ , le calcul ne dépend pas seulement de la restriction de  $g_1$  et  $g_2$  à  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ . Nous allons donner une

formule moins esthétique, indispensable néanmoins pour comprendre dans quelles classes de symboles se situent les termes successifs du développement.

DÉFINITION ET PROPOSITION 14.7. Etant donnés  $p, p'$  et  $p'' \in \mathcal{M}$ , on définit  $\tau(p, p', p'') > 0$  par

$$\tau^2(p, p', p'') = \langle p', Jp'' \rangle^2 + \langle p'', Jp \rangle^2 + \langle p, Jp' \rangle^2 - 2\langle p', Jp'' \rangle \langle p'', Jp \rangle \langle p, Jp' \rangle.$$

La fonction  $\tau$  est symétrique, invariante par l'action du groupe de Lorentz, et vérifie

$$\tau(e_0, p', p'') = (1 - |\vec{p}' \wedge \vec{p}''|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. Les deux premiers points sont évidents, et le troisième s'obtient en écrivant  $\langle p, Jp'' \rangle = p_0 p_0'' - \langle \vec{p}', \vec{p}'' \rangle$  et en développant le membre de droite.

DÉFINITION 14.8. Soit  $q \in \mathcal{M}$ . Sur les fonctions de  $(\vec{y}'; q') \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , on définit les opérateurs

$$e_q^{(j)} = \frac{\partial}{\partial y_j'} - \frac{q_j}{q_0(1+q_0)} \sum q_k \frac{\partial}{\partial y_k'},$$

$$\varepsilon_q^{(j)} = \frac{\partial}{\partial q_j'} + \frac{q_j}{1+q_0} \sum q_k \frac{\partial}{\partial q_k'}.$$

Remarque. La différence avec les opérateurs  $e^{(j)}$  et  $\varepsilon^{(j)}$  introduits dans la définition 14.1 est qu'ici les coefficients dépendent d'un point  $q$  fixé  $\in \mathcal{M}$ : on a donc, ici, des opérateurs différentiels à coefficients constants. Comme la base des  $e^{(j)}$  est orthonormée pour la norme  $\|\cdot\|_{q'}$ , et que la base des  $e_q^{(j)}$  est orthonormée pour la norme  $\|\cdot\|_q$ , le lemme 8.8 donne une majoration des coefficients de la matrice de passage de l'une à l'autre. Ainsi, si  $g(0, \vec{y}'; q')$  est un symbole de poids  $m$  et de type  $\mu$ , et si  $D$  est un produit de  $N$  opérateurs du type  $e_q^{(j)}$  et de  $N'$  opérateurs du type  $\varepsilon_q^{(j)}$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que l'on ait

$$(14.36) \quad |(Dg)(0, \vec{y}'; q')| \leq C \langle q, Jq' \rangle^{N+N'} m(\vec{y}'; q') [\mu(\vec{y}'; q')]^{-N}.$$

LEMME 14.9. Soit  $q \in \mathcal{M}$ . Sur les fonctions de  $(\vec{y}'; q') \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ , définissons les opérateurs

$$A'_q(j) = \langle Jq, q' \rangle^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial y_j^1} + q_j \sum \left( \frac{q_k}{1+q_0} - \frac{q'_k}{q_0^1} \right) \frac{\partial}{\partial y_k^1} \right],$$

$$B'_q(j) = \frac{\partial}{\partial q_j^1} + \langle Jq, q' \rangle^{-1} \left( q_j - \frac{q'_0 q_j}{1+q_0} \right) \sum q_k \frac{\partial}{\partial q_k^1}.$$

Si l'on pose  $q' = \bigwedge_q^{-1} p' (p' \in \mathcal{M})$ , ces opérateurs sont liés à ceux introduits dans la définition 14.8 par les formules

$$A'_q(j) = p_0'^{-1} \left[ e_q'(j) - \frac{q_j}{\langle q, p' \rangle} \sum p_k' e_q'(k) \right],$$

$$B'_q(j) = \varepsilon_q'(j) + \frac{p_j'}{p_0'} \sum \frac{q_k}{q_0} \varepsilon_q'(k).$$

Enfin,  $B'_q(j) = \frac{\partial}{\partial p_j^1}$  ; les opérateurs  $A'_q(j)$  commutent entre eux, de même que les opérateurs  $B'_q(j)$ .

Preuve. D'après (14.5), on a

$$\begin{aligned} (14.37) \quad q' &= \bigwedge_q^{-1} p' = \bigwedge_{Jq} p' \\ &= (\langle q, p' \rangle, \vec{p}' + p_0' \vec{q} + \frac{\langle \vec{q}, \vec{p}' \rangle}{1+q_0} \vec{q}) \end{aligned}$$

d'où

$$(14.38) \quad \frac{\partial}{\partial p_j^1} = \frac{\partial}{\partial q_j^1} + \frac{p_j'}{p_0'} \sum q_k \frac{\partial}{\partial q_k^1} + \frac{q_j}{1+q_0} \sum q_k \frac{\partial}{\partial q_k^1}.$$

En calculant  $p_0'^{-1} p_j'$  à l'aide de

$$(14.39) \quad p' = \bigwedge_q q' = (\langle Jq, q' \rangle, \vec{q}' - q_0' \vec{q} + \frac{\langle \vec{q}, \vec{q}' \rangle}{1+q_0} \vec{q})$$

et en simplifiant, on identifie  $\frac{\partial}{\partial p_j^1}$  à la première expression donnée pour  $B'_q(j)$ . Pour ce qui concerne la deuxième expression donnée pour  $B'_q(j)$ , il suffit de substituer dans le membre de droite les expressions de  $\varepsilon_q'(j)$ ,  $\varepsilon_q'(k)$  pour obtenir immédiatement le membre de droite de (14.38).

Si l'on part de la deuxième expression proposée pour  $A'_q(j)$  en y substituant les expressions connues de  $e_q'(j)$ ,  $e_q'(k)$  et en utilisant la relation  $q_0' = \langle q, p' \rangle$ , on obtient

$$(14.40) \quad A_q^{(j)} = \frac{1}{q'_0} \frac{\partial}{\partial y_j'} - \frac{q_j}{p'_0 q'_0} \sum p'_k \frac{\partial}{\partial y_k'} + \frac{q_j}{p'_0 q'_0 (1+q_0)} \left[ -1 + \frac{\langle \vec{p}', \vec{q}' \rangle}{q'_0} \right] \\ \sum q_k \frac{\partial}{\partial y_k'}.$$

L'identification avec la première expression de  $A_q^{(j)}$  requiert la vérification de la relation

$$(14.41) \quad -\frac{p'_k}{q'_0} - \frac{q_k}{q_0(1+q_0)} + \frac{\langle \vec{p}', \vec{q}' \rangle q_k}{q_0 q'_0 (1+q_0)} = \frac{q_k}{1+q_0} - \frac{q'_0}{q'_0},$$

une conséquence de (14.39) et de la relation

$$(14.42) \quad \frac{\langle \vec{p}', \vec{q}' \rangle}{q_0} = \langle \vec{q}, \vec{q}' \rangle - q_0 q'_0 + \frac{q'_0}{q_0}$$

qui s'en déduit : ceci termine la preuve du lemme 14.9, dont la dernière assertion est évidente.

LEMME 14.10. Soient  $g_1$  et  $g_2$  des symboles polynomiaux relativement aux variables spatio-temporelles, et soit  $(\vec{y}; q) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$ . Sur les fonctions de  $(\vec{y}', q'; \vec{y}'', q'')$ , on introduit les opérateurs  $A_q^{(j)}$  et  $B_q^{(j)}$  définis dans le lemme 14.9 et de même les opérateurs  $A_q^{(j)}$  et  $B_q^{(j)}$ . Alors

$$(g_1 \# g_2)(0, \vec{y}; q) = \sum \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha! \beta!} (4i\pi)^{-|\alpha| - |\beta|} B_q^{\beta} B_q^{\alpha} A_q^{\alpha} A_q^{\beta}$$

$$[\tau(q, q', q'')^{|\alpha| + |\beta| - 2} g_1(0, \vec{y}'; q') g_2(0, \vec{y}''; q'')] ((\vec{y}'; q') = (\vec{y}''; q'') = (\vec{y}; q)).$$

Preuve. On peut définir les puissances multi-indicielles de  $B_q^1, \dots$ , mais on prendra garde ici de ne pas commuter entre eux les opérateurs du genre  $A_q^1$  et  $B_q^1$ . On part du lemme 14.6 avec  $y = (0, \vec{y})$  et  $M_q = \bigwedge_q$  : le symbole  $g_1$  doit donc être évalué au point

$$(-p_0'^{-1} \langle \vec{q}, \vec{x}' \rangle, \vec{y} + p_0'^{-1} (\vec{x}' + \frac{\langle \vec{q}, \vec{x}' \rangle}{1+q_0} \vec{q}); \bigwedge_q^{-1} p').$$

Comme dans le lemme 14.9, on pose  $q' = \bigwedge_q^{-1} p'$  et, l'admissibilité permettant d'ajouter à la variable spatio-temporelle un multiple de  $Jq'$ , on a  $g_1 = g_1(0, \vec{y}'; q')$  avec

$$(14.43) \quad \vec{y}' = \vec{y} + p_0'^{-1} (\vec{x}' + \frac{\langle \vec{q}, \vec{x}' \rangle}{1+q_0} \vec{q}) - \frac{\langle \vec{q}, \vec{x}' \rangle}{p_0' q'_0} \vec{q}'$$

d'où

$$(14.44) \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_j^1} = [p_0'^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j^1} + \frac{q_j}{p_0'} \sum (\frac{q_k}{1+q_0} - \frac{q_k'}{q_0'}) \frac{\partial}{\partial y_k^1}] g_1 ,$$

identité que l'on peut itérer : l'opérateur différentiel au membre de droite n'est autre que  $A_q^{(j)}$ . Par ailleurs, nous avons déjà remarqué dans le lemme 14.9 que  $\frac{\partial}{\partial p_j^1} = B_q^{(j)}$ , ce qui semble terminer la preuve du lemme 14.10 si l'on observe enfin que  $\tau(q, q', q'') = \tau(e_0, \wedge_q^{-1} q', \wedge_q^{-1} q'') = \tau(e_0, p', p'') = (1 - |\vec{p} \wedge \vec{p}''|^2)^{\frac{1}{2}}$  : il faut prendre garde, cependant, au fait que lorsque qu'on écrit  $g_1 = g_1(0, \vec{y}'; q')$  en profitant de l'admissibilité,  $\vec{y}'$  dépend de  $\vec{p}'$  par l'intermédiaire de  $q'$ , ce qui ajoute à  $\frac{\partial}{\partial p_j^1}$  des termes complémentaires. Cependant, ces derniers sont nuls lorsque  $\vec{x}' = 0$ , et bien entendu il est permis, dans le lemme 14.6, de fixer  $\vec{x}' = \vec{x}'' = 0$  avant de dériver par rapport à  $\vec{p}', \vec{p}''$ . On obtient alors le lemme 14.10.

THÉOREME 14.11. Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux symboles de poids  $m_1$  et  $m_2$  respectivement et de même type  $\mu$  ( $\mu \geq 1$ ). Pour tout entier  $k \geq 1$ , soit  $S_{k-1}(g_1 \# g_2)$  la somme des termes au second membre de la formule du lemme 14.10 pour lesquels  $|\alpha| + |\beta| \leq k-1$ . Alors  $g_1 \# g_2 - S_{k-1}(g_1 \# g_2)$  est un symbole de poids  $m_1 m_2 \mu^{-k}$  et de type  $\mu$ .

Preuve. Il faut d'abord se convaincre que chaque terme  $s_{\alpha, \beta}(g_1 \# g_2)$  de la somme au second membre est un symbole de poids  $m_1 m_2 \mu^{-|\alpha| - |\beta|}$  et de type  $\mu$ . D'après la deuxième formule donnée pour  $A_q^{(j)}$  dans le lemme 14.9, on voit que  $A_q^\alpha g_1(0, \vec{y}; q')$  est une combinaison linéaire de termes

$$\left(\frac{\vec{p}'}{p_0'}\right)^\delta \left(\frac{\vec{q}}{\langle q, p' \rangle}\right)^\varepsilon (e_q^\gamma g_1)(0, \vec{y}; q')$$

où  $\gamma, \delta, \varepsilon$  sont des multi-indices et  $|\gamma| = |\alpha|$  ; l'application, à la fonction de  $p'$  apparue comme coefficient, d'un produit des opérateurs  $B_q^{(j)} = \frac{\partial}{\partial p_j^1}$  fournit toujours une fonction de la forme  $\frac{p(\vec{p}')}{p_0'^a} \frac{q(\vec{q}, q_0)}{\langle q, p' \rangle^b}$

dans laquelle  $a$  et  $b$  sont des entiers  $\geq 0$ ,  $P$  et  $Q$  sont des polynômes et le degré de  $Q$  est moindre que  $b$  : lorsque  $p' = e_0$ ,  $\langle q, p' \rangle$  devient  $q_0$ . Les mêmes remarques valent pour la fonction  $g_2$ , et lorsque  $\vec{p}' = \vec{p}'' = 0$  les dérivées de  $\tau$  deviennent des constantes. Finalement, si l'on revient aux notations de la définition 14.1 et de la définition 14.3, on voit que  $s_{\alpha, \beta}(g_1 \# g_2)$  est combinaison linéaire de

termes  $q_0^{-b} Q(\vec{q}) D_1 g_1 \cdot D_2 g_2$  dans lesquels  $Q$  est un polynôme de degré  $\leq b$ ,  $D_1 \in \mathcal{B}_{|\alpha|, |\beta|}$  et  $D_2 \in \mathcal{B}_{|\beta|, |\alpha|}$  : en particulier c'est un symbole de poids  $m_1 m_2 \mu^{-|\alpha| - |\beta|}$  et de type  $\mu$ .

La fin de la preuve est tout à fait analogue à celle du théorème 14.5. En écrivant, un peu abusivement,  $g_1(\vec{y}', q')$  pour  $g_1(0, \vec{y}'; q')$ , on décompose  $g_1$ , comme en (14.26), sous la forme

$$(14.45) \quad g_1 = T_{\vec{y}}^{j-1} g_1 + R_{\vec{y}}^j g_1$$

avec  $j \geq k$ , et l'on fait de même pour  $g_2$ .

Evidemment, on a

$$(14.46) \quad A_q^\alpha (T_{\vec{y}}^{j-1} g_1)(\vec{y}; q') = (A_q^\alpha g_1)(\vec{y}; q')$$

pour  $|\alpha| \leq j-1$ , d'où

$$(14.47) \quad s_{\alpha, \beta} (T_{\vec{y}}^{j-1} g_1 \# T_{\vec{y}}^{j-1} g_2)(\vec{y}; q) = s_{\alpha, \beta} (g_1 \# g_2)(\vec{y}; q)$$

si  $|\alpha| + |\beta| \leq j-1$ . Il ne reste plus qu'à montrer que chacun des trois termes résiduels provenant de la décomposition (14.45) et de celle similaire relative à  $g_2$  (l'un d'eux est la fonction  $(\vec{y}; q) \mapsto [(T_{\vec{y}}^{j-1} g_1) \# (R_{\vec{y}}^j g_2)](\vec{y}; q)$ ) est, pourvu que  $j$  soit assez grand, un symbole de poids  $m_1 m_2 \mu^{-k}$  (et de type 1) jusqu'à tel ordre de différentiabilité que l'on souhaite. Or, ceci est une conséquence de l'estimation (14.31) du reste  $R_{\vec{y}}^j g_2$  et de la version suivante du théorème de composition 10.2. Soient  $C_1 > 0$  et  $N_1 > 0$ . Pour tout couple d'entiers  $(N, N')$ , on peut trouver  $(\tilde{N}, \tilde{N}')$  ne dépendant que de  $(N, N'; N_1)$  et une constante  $C > 0$  ne dépendant que de  $(n, N, N'; N_1, C_1)$  vérifiant ce qui suit : pour tout couple  $(m_1, m_2)$  de fonctions-poids vérifiant toutes deux (14.17), et pour tout symbole  $g_1$  (resp.  $g_2$ ) de poids  $m_1$  (resp.  $m_2$ ) jusqu'à l'ordre de différentiabilité  $\tilde{N} + \tilde{N}'$ , le symbole  $g_1 \# g_2$  est de poids  $m_1 m_2$  jusqu'à l'ordre de différentiabilité  $N + N'$  et de plus

$$(14.48) \quad \|g_1 \# g_2\|_{m_1 m_2}^{N, N'} \leq C \|g_1\|_{m_1}^{\tilde{N}, \tilde{N}'} \|g_2\|_{m_2}^{\tilde{N}, \tilde{N}'}.$$

La nouveauté de cette assertion par rapport au théorème 10.2



réside dans l'uniformité des estimations relativement aux poids  $m_1$  et  $m_2$ . Or le théorème 10.2 est une conséquence de l'estimation fondamentale fournie par le théorème 9.2 et de la réciproque (théorème 10.1) de celle-ci : de plus, dans la preuve de chacun de ces deux théorèmes, le poids  $m$  n'intervient que par l'intermédiaire d'une majoration du rapport  $m(\vec{y};q)^{-1}m(\vec{x};p)$  ou de son inverse, ce qui fait que les estimations ne dépendent de  $m$  que par l'intermédiaire des constantes  $C_1$  et  $N_1$  qui figurent dans (14.17).

Ceci termine la preuve du théorème 14.11.

Le calcul effectif des termes successifs du développement est assez compliqué, ainsi que le montre déjà la forme de l'invariant  $B_2$  du théorème 12.5. Cependant, la somme des termes pour lesquels  $|\alpha| + |\beta| \leq 1$  ne diffère pas de la somme correspondante du calcul de Weyl.

PROPOSITION 14.12. Avec les notations du théorème 14.11, on a

$$S_1(g_1 \# g_2) = g_1 g_2 + (4i\pi)^{-1} \sum \left( -\frac{\partial g_1}{\partial y_j} \frac{\partial g_2}{\partial q_j} + \frac{\partial g_1}{\partial q_j} \frac{\partial g_2}{\partial y_j} \right).$$

Preuve. On a

$$(14.49) \quad (A_q^{(j)} g_1)(0, \vec{y}; q) = \frac{\partial g_1}{\partial y_j} - \frac{q_j}{q_0(1+q_0)} \sum q_k \frac{\partial g_1}{\partial y_k},$$

$$(B_q^{(j)} g_1)(0, \vec{y}; q) = \frac{\partial g_1}{\partial q_j} + \frac{q_j}{1+q_0} \sum q_k \frac{\partial g_1}{\partial q_k}$$

et si l'on développe à l'aide de ces formules

$$\sum (-B_q^{(j)} g_2 \cdot A_q^{(j)} g_1 + B_q^{(j)} g_1 \cdot A_q^{(j)} g_2)$$

il ne subsiste que la forme symplectique.

#### LA BOULE UNITÉ DE $\mathbb{R}^n$

Un sous-produit non dépourvu d'intérêt du calcul de Klein-Gordon est une analyse pseudo-différentielle sur la boule unité  $B_n$  de  $\mathbb{R}^n$  : nous nous contenterons ici de quelques indications car ce sujet nous éloigne des concepts relativistes qui sont le propos de ce volume.

Intéressons-nous pour commencer à la classe des symboles qui, au sens de la définition 14.3, sont de poids  $m$  et de type  $\mu$  avec

$$(14.50) \quad \mu(\vec{x}; p) = (1 + \|\vec{x}\|_p^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + |\vec{x}|^2 + \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Le prolongement admissible de cette fonction est la fonction (sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ )  $(x, p) \mapsto (1 - r(x) + \langle x, p \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$  qui, on le voit, est invariante par l'action du groupe de Lorentz telle que  $M.(x; p) = (Mx; M'^{-1}p)$ . Les classes de symboles ainsi définies sont, de façon uniforme, invariantes par l'action du groupe de Lorentz (mais, non, bien sûr, par les translations purement spatiales) : de façon plus précise, avec  $g_M(x; p) = g(Mx; M'^{-1}p)$  et  $m_M(x; p) = m(Mx; M'^{-1}p)$ , les normes  $\|g_M\|_{m_M}^{N, N'}$  introduites dans la définition 14.3 sont majorées indépendamment de  $M$  ; nous omettrons la preuve de ce fait, qui nécessite quelques pages de calculs peu attrayants.

Si l'on conjugue le calcul pseudo-différentiel de Klein-Gordon au moyen de la transformation  $\mathcal{Q}_y(2.7)$ , on obtient une analyse pseudo-différentielle sur l'espace riemannien  $\mathcal{M}$  : bien entendu, à présent, ce sont les variables  $(p_1, \dots, p_n)$  qui jouent le rôle de variables "de configuration" et les variables  $(x_1, \dots, x_n)$  celui de variables duales. Les formules réciproques

$$(14.51) \quad \vec{p} = \frac{2z}{1-|z|^2}, \quad z = (p_0+1)^{-1} \vec{p}$$

établissent un difféomorphisme de  $\mathcal{M}$  sur la boule-unité  $B_n$  (pour le voir, tirer de la première formule les relations  $p_0 = (1-|z|^2)^{-1}(1+|z|^2)$  et  $p_0+1 = 2(1-|z|^2)^{-1}$ ). L'avantage principal de cette nouvelle réalisation de  $\mathcal{M}$  (bien classique : voir par exemple Lax-Phillips [21]) est que le  $ds^2$  de  $B_n$  est proportionnel au  $ds^2$  euclidien puisque

$$(14.52) \quad ds^2 = |d\vec{p}|^2 - p_0^{-2} \langle \vec{p}, d\vec{p} \rangle^2 = 4(1-|z|^2)^{-2} |dz|^2.$$

On a

$$(14.53) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_j} &= - \frac{p_j}{p_0(p_0+1)^2} \sum p_k \frac{\partial}{\partial z_k} + (p_0+1)^{-1} \frac{\partial}{\partial z_j} \\ &= \frac{1-|z|^2}{2} \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} z_j \sum z_k \frac{\partial}{\partial z_k} \end{aligned}$$

et, sur les fonctions de  $p$  seul, l'opérateur  $\varepsilon^{(j)}$  introduit dans la

définition 14.1 se réduit à

$$(14.54) \quad \varepsilon^{(j)} = \frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{p_j}{1+p_0} \sum p_k \frac{\partial}{\partial p_k} = \frac{1}{2}(1-|z|^2) \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Comme variables duales de  $(z_1, \dots, z_n)$ , on utilise  $\zeta \in \mathbb{R}^n$  caractérisé par  $\sum \zeta_j dz_j = \sum x_j dp_j$ , soit

$$(14.55) \quad \zeta_k = (p_0+1)x_k + \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle p_k$$

d'où

$$(14.56) \quad \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle = (1+|z|^2)^{-1} (1-|z|^2) \langle \zeta, z \rangle$$

et

$$(14.57) \quad x_k = \frac{1-|z|^2}{2} \zeta_k - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \langle \zeta, z \rangle z_k.$$

Par ailleurs

$$(14.58) \quad \|\vec{x}\|_p = [|\vec{x}|^2 + \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1-|z|^2) |\zeta|.$$

Toujours par référence à la définition 14.1, on a

$$(14.59) \quad e^{(j)} = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{p_j}{p_0(1+p_0)} \sum p_k \frac{\partial}{\partial x_k} = (p_0+1) \frac{\partial}{\partial \zeta_j} = 2(1-|z|^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta_j}.$$

Enfin, sur les fonctions de  $(z, \zeta)$ ,  $\varepsilon^{(j)}$  ne se réduit pas à (14.54), et un terme complémentaire  $\varepsilon^{(j) '}$  provient du fait que  $\zeta$  dépend de  $\vec{p}$  via (14.55) : un calcul à peine plus laborieux fournit

$$(14.60) \quad \begin{aligned} \varepsilon^{(j) '}&= \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle \frac{\partial}{\partial \zeta_j} + p_j \sum x_k \frac{\partial}{\partial \zeta_k} + [x_j + \frac{2p_j}{1+p_0} \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle] \sum p_k \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \\ &= \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \langle z, \zeta \rangle \frac{\partial}{\partial \zeta_j} + z_j \sum \zeta_k \frac{\partial}{\partial \zeta_k} + \zeta_j \sum z_k \frac{\partial}{\partial \zeta_k}. \end{aligned}$$

Soit  $\tilde{m}$  le transformé du poids  $m$  par le changement de coordonnées  $(\vec{x}, \vec{p}) \mapsto (\zeta, z)$ . Si l'on se sert de (14.54), (14.59), (14.58) et (14.60), on voit que les symboles de poids  $m$  et de type  $\mu$  sont caractérisés dans les nouvelles coordonnées par le fait que l'on peut, sans sortir de la classe des fonctions majorées par  $\tilde{C}m$ , leur appliquer autant de fois que l'on veut les opérateurs  $(1-|z|^2) \frac{\partial}{\partial z_j}$ ,  $(1-|z|^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta_j}$ .

et  $|\zeta| \frac{\partial}{\partial \zeta_j}$ . Si l'on pose

$$(14.61) \quad g(z, \zeta) = h(z, (1-|z|^2)\zeta) = h(z, \xi) ,$$

on voit qu'il s'agit de pouvoir appliquer à  $h$  tout produit des opérateurs  $(1-|z|^2) \frac{\partial}{\partial z_j}$  et  $(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ . Si l'on renforce considérablement les hypothèses sur les symboles  $h$  en y remplaçant  $(1-|z|^2) \frac{\partial}{\partial z_j}$  par  $\frac{\partial}{\partial z_j}$  et en supposant que les symboles ont des traces de tous ordres sur la sphère-unité, on obtient enfin une classe de symboles qui n'est pas sans analogie avec la classe des symboles totalement caractéristiques de Melrose [26] : elle est cependant conçue comme une algèbre qui englobe les opérateurs du premier ordre  $(1-|z|^2) \frac{\partial}{\partial z_j}$  dont la dégénérescence sur la sphère  $S^{n-1}$  est, on le voit, isotrope, au contraire des classes pour lesquelles seules les dérivations suivant la direction normale au bord dégénèrent ; il serait intéressant de pousser plus loin l'étude des applications de ces classes de symboles, mais c'est un point de vue qui nous éloignerait trop, ici, de l'analyse relativiste. R. Mazzeo nous a signalé qu'il a développé dans [23] un calcul pseudo-différentiel ayant précisément ce type de dégénérescence sur une variété à bord générale ; pour le cône de lumière solide, une analyse du même genre est décrite dans la section 15 de [36] .



XV - OPÉRATEUR D'EULER RELATIVISTE, GROUPE DE DE SITTER,  
OSCILLATEUR DE MATHIEU.

L'un des buts de l'analyse pseudo-différentielle est la théorie spectrale des opérateurs, centrée autour des opérateurs autoadjoints pour sa plus grande partie. Une situation très satisfaisante est obtenue dans les rares cas où l'on sait construire explicitement le groupe unitaire engendré par un opérateur autoadjoint. C'est ainsi que le groupe métaplectique permet d'exponentier tous les opérateurs symétriques sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  qui sont des polynômes de degré 2 en les générateurs infinitésimaux de la représentation d'Heisenberg : ces opérateurs sont du reste essentiellement autoadjoints.

S'il n'y a pas d'analogue relativiste du groupe métaplectique (la raison en est que la relation de commutation entre les opérateurs de boost et ceux d'impulsion, moins simple que celle d'Heisenberg, ne permet guère de construire des algèbres de Lie de dimension finie dans l'algèbre enveloppante), il existe en revanche des opérateurs symétriques sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  qui présentent une forte analogie avec certains générateurs du groupe métaplectique : d'ailleurs, cette analogie sera éclairée par la prochaine section, consacrée à la contraction lorsque  $c \rightarrow \infty$  de l'analyse de Klein-Gordon. C'est l'objet de la présente section d'étudier certains de ces opérateurs, en particulier ceux qui sont la version relativiste de l'opérateur d'Euler et de l'oscillateur harmonique.

PROPOSITION 15.1. Notons  $\langle D \rangle$ ,  $D_j$ ,  $B_j (= x_j \langle D \rangle)$  et  $R_{jk} (= x_j D_k - x_k D_j)$  les opérateurs de symboles respectifs (actifs ou passifs)  $p_0, p_j, b_j = p_0 x_j + p_j x_0$  et  $r_{jk} = p_k x_j - p_j x_k$ .

On a les relations de commutation

$$[B_j, D_k] = -(2i\pi)^{-1} \delta_{jk} \langle D \rangle,$$

$$[B_j, B_k] = (2i\pi)^{-1} R_{jk}$$

et

$$[B_j, \langle D \rangle] = -(2i\pi)^{-1} D_j.$$

Preuve. C'est une conséquence de (12.53) que nous rappelons :

$$(15.1) \quad b_j \# g - g \# b_j = (2i\pi)^{-1} (x_j \frac{\partial g}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial g}{\partial x_j} - p_0 \frac{\partial g}{\partial p_j}).$$

Jusqu'ici, nous avons pu nous limiter à la considération du groupe de Poincaré orthochrone et à la représentation (2.3) de ce groupe dans  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . Il est dans ce qui suit impossible de se passer de l'espace  $\check{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  décrivant au sens de la physique (voir l'interprétation de Feynman dans [9], p.68) l'espace correspondant à l'antiparticule : il importe de noter que si les généralisations de l'opérateur d'Euler proposées ci-dessous sont bien des opérateurs symétriques sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , ce ne sont pas des opérateurs essentiellement autoadjoints, et leur extension autoadjointe qui semble la plus naturelle a pour domaine  $H^{\frac{1}{2}} \oplus \check{H}^{\frac{1}{2}}$ , espace dans lequel  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  n'est pas dense !

DÉFINITION 15.2. On définit  $\tilde{H}^{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}} \oplus \check{H}^{\frac{1}{2}}$ , somme directe hilbertienne (externe) de deux copies de  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . On étend l'application  $\mathcal{G}$  définie en (2.7) en une isométrie de  $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}$  sur  $L^2(\tilde{\mathcal{M}}; p_0^{-1} dp)$ , avec  $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup (-\mathcal{M})$ , en posant  $\mathcal{G}(u \oplus v)(p) = p_0 \hat{u}(\vec{p})$  si  $p_0 = \langle \vec{p} \rangle$  et  $-p_0 \hat{v}(\vec{p})$  si  $p_0 = -\langle \vec{p} \rangle$ . Enfin, on définit (généralisant (2.12)) une représentation  $U$  du groupe de Poincaré  $\mathcal{P}$  (complet) sur  $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}$  en posant

$$\mathcal{G}(U(M, a)(u \oplus v))(p) = e^{-2i\pi \langle a, p \rangle} \mathcal{G}(u \oplus v)(M'p)$$

pour tout  $p \in \tilde{\mathcal{M}}$ .

Remarque. Si  $(M, a)$  appartient au groupe de Poincaré orthochrone, alors  $U(M, a)$  opère séparément sur  $u$  et  $v$  ; si  $M$  est la symétrie de temps  $(t, x) \mapsto (-t, x)$ , alors  $U(M, 0)$  échange  $u$  et  $v$ .

L'hyperboloïde complet  $\tilde{\mathcal{M}}$  admet pour compactifié projectif la variété projective réelle d'équation  $\tau_0^2 - \tau_1^2 - \dots - \tau_n^2 = 0$ ,  $\tilde{\mathcal{M}}$  étant

obtenu en supposant  $\tau \neq 0$  et posant  $p_0 = \tau^{-1}\tau_0$ ,  $p_j = \tau^{-1}\tau_j$ . Il s'agit du cône de lumière en  $(n+1)$  dimensions d'espace, sur lequel opère le groupe de Lorentz correspondant  $SO_0(1, n+1)$ , que nous appellerons groupe de De Sitter puisque c'est ainsi qu'on l'appelle si  $n = 3$ . Si l'on écrit, en matrices-blocs,

$$(15.2) \quad g = \begin{pmatrix} A & \mu \\ \nu & a \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}$$

l'appartenance de  $g$  à  $SO(1, n+1)$  est caractérisée par l'équation  $g' \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  c'est-à-dire par le système

$$(15.3) \quad AJ\nu = a\mu, \quad r(\nu) = a^2 - 1, \quad AJA' = \mu\mu' + J.$$

Lorsque  $\nu = 0$ , on a  $\mu = 0$  d'où  $A \in SO(1, n)$  et l'on n'obtient rien de nouveau. Dans les coordonnées  $p$ , l'action (presque partout définie) de  $g$  est donnée en général par

$$(15.4) \quad [g](p) = (\langle \nu, p \rangle + a)^{-1} (Ap + \mu).$$

Pour tout nombre  $\rho$  réel, on en déduit une représentation unitaire  $V_\rho$  dans  $L^2(\widetilde{\mathcal{M}}; p_0^{-1} d\vec{p})$  au moyen de la formule

$$(15.5) \quad (V_\rho(g)v)(p) = v([g']p) \frac{p_0'^{-1} d\vec{p}'^{\frac{1}{2} + i\rho}}{p_0^{-1} d\vec{p}}$$

avec  $p' = [g']p$ .

D'après (2.12), on retrouve lorsque  $\nu = 0$  une double copie de la représentation connue du groupe de Lorentz,  $\rho$  ne servant à rien dans ce cas. On peut procéder comme dans la section 12 pour exhiber les générateurs infinitésimaux de la représentation (15.5).

PROPOSITION 15.3. Les générateurs infinitésimaux de la représentation unitaire  $g \mapsto U_\rho(g) = \mathcal{G}^{-1} V_\rho(g) \mathcal{G}$  de  $SO_0(1, n+1)$  dans  $\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}$  décrivent l'espace vectoriel engendré par les générateurs infinitésimaux de la représentation du groupe de Lorentz et par les opérateurs auto-adjoints

$$E = \frac{1}{2} \sum (B_K D_K + D_K B_K) - \frac{n\rho}{2\pi} \langle D \rangle$$

et

$$E_j = \frac{1}{2} [\langle D \rangle^{-1} (D_j E + B_j) + (E D_j + B_j) \langle D \rangle^{-1}] .$$



Preuve. L'algèbre de Lie de  $SO_0(1, n+1)$  est constituée des matrices-blocs

$$(15.6) \quad X = \begin{pmatrix} 0 & \beta' & c \\ \beta & Y & \gamma \\ c & -\gamma' & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ n \\ 1 \end{matrix} :$$

on obtient un supplémentaire dans cette algèbre de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz en ne gardant comme coefficients non nuls que  $c$  et  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  ; en particulier soit  $X_0$  la matrice qui correspond à  $(c=-1, \gamma=0)$  et soit  $X_1$  celle qui correspond à  $(c=0, \gamma=(-1, 0, \dots, 0))$ . On a alors

$$(15.7) \quad e^{sX_0} = \begin{pmatrix} \text{ch } s & 0 & -\text{sh } s \\ 0 & I & 0 \\ -\text{sh } s & 0 & \text{ch } s \end{pmatrix}$$

d'où, si  $p' = [e^{sX_0}]p$ ,

$$(15.8) \quad p' = (\text{ch } s - p_0 \text{ sh } s)^{-1} (p_0 \text{ ch } s - \text{sh } s, \vec{p}).$$

La formule (11.25) permet de calculer

$$(15.9) \quad \frac{d\vec{p}'}{dp} = (\text{ch } s - p_0 \text{ sh } s)^{1-n} \left[ \frac{1}{\text{ch } s - p_0 \text{ sh } s} + \frac{p_0^2 - 1}{p_0} \frac{\text{sh } s}{(\text{ch } s - p_0 \text{ sh } s)^2} \right]$$

d'où

$$(15.10) \quad \frac{p_0'^{-1} d\vec{p}'}{p_0^{-1} dp} = (\text{ch } s - p_0 \text{ sh } s)^{-n}$$

et

$$(15.11) \quad (V_p(e^{sX_0})v)(p) = (\text{ch } s - p_0 \text{ sh } s)^{-\frac{n}{2} - i n p} v(p').$$

On obtient le générateur infinitésimal correspondant à ce sous-groupe, soit  $dV_p(X_0)$ , par la formule (12.2), ce qui donne

$$(15.12) \quad dV_p(X_0) = -(2i\pi)^{-1} \left[ \left( \frac{n}{2} + i n p \right) p_0 + p_0 \sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right].$$

Il reste dans ce cas à calculer le générateur infinitésimal

$$(15.13) \quad dU_p(X_0) = \mathcal{Q}_j^{-1} dV_p(X_0) \mathcal{Q}_j.$$

Si l'on note les relations

$$(15.14) \quad \mathcal{Q}_{\langle D \rangle} \mathcal{Q}_j^{-1} = p_0, \quad \mathcal{Q}_{B_j} \mathcal{Q}_j^{-1} = -(2i\pi)^{-1} p_0 \frac{\partial}{\partial p_j},$$

$$\mathcal{Q}_{D_j} \mathcal{Q}_j^{-1} = p_j,$$

on obtient

$$(15.15) \quad dU_\rho(X_0) = -(2i\pi)^{-1} \left( \frac{n}{2} + i n \rho \right) \langle D \rangle + \sum D_j B_j,$$

soit finalement  $dU_\rho(X_0) = E$  si l'on se sert de la proposition 15.1.

Lorsque  $X$  est donnée par (15.6) et que  $\beta = 0$ ,  $c = 0$  et  $\gamma = 0$  on obtient

$$(15.16) \quad e^X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\cos|\gamma|-1}{|\gamma|^2} \gamma\gamma' & -\frac{\sin|\gamma|}{|\gamma|} \gamma \\ 0 & \frac{\sin|\gamma|}{|\gamma|} \gamma' & \cos|\gamma| \end{pmatrix}$$

et en particulier, avec  $p' = [(e^{sX_1})']p$ , et  $X_1$  définie plus haut,

$$(15.17) \quad p' = (\cos s - p_1 \sin s)^{-1} (p_0, p_1 \cos s + \sin s, p_2, \dots).$$

On calcule comme plus haut

$$\frac{d\vec{p}'}{d\vec{p}} = (\cos s - p_1 \sin s)^{-n-1}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{p_0}{p_0'} \frac{d\vec{p}'}{d\vec{p}} = (\cos s - p_1 \sin s)^{-n}$$

et

$$(15.18) \quad (V_\rho(e^{sX_1})v)(p) = (\cos s - p_1 \sin s)^{-\frac{n}{2} - i n \rho} v(p').$$

Il en résulte

$$(15.19) \quad dV_\rho(X_1) = -\frac{n}{4i\pi} p_1 - \frac{n\rho}{2\pi} p_1 \\ - (2i\pi)^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial p_1} + p_1 \sum p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right]$$

d'où

$$(15.20) \quad dU_\rho(X_1) = -\frac{n}{4i\pi} D_1 - \frac{n\rho}{2\pi} D_1 + \langle D \rangle^{-1} B_1 + \langle D \rangle^{-1} D_1 \Sigma D_k B_k.$$

Cette dernière formule, avec l'aide de

$$(15.21) \quad B_k \langle D \rangle^{-1} = \langle D \rangle^{-1} B_k + (2i\pi)^{-1} \langle D \rangle^{-2} D_k$$

(une conséquence de la proposition 15.1) et de (15.15), entraîne  $dU_\rho(X_1) = E_1$ , ce qui termine la preuve de la proposition 15.3.

Si la proposition 15.3 a fourni des exemples d'opérateurs symétriques sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  dont l'extension autoadjointe la plus naturelle nécessitait l'introduction de l'espace  $\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}$ , la généralisation relativiste de l'oscillateur harmonique va nous permettre de revenir à l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ .

Dans le calcul de Weyl sur  $\mathbb{R}^n$ , une importance tout à fait fondamentale s'attache à l'oscillateur harmonique

$$(15.22) \quad L_W = \pi \sum x_j^2 - (4\pi)^{-1} \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

qui est l'opérateur de symbole de Weyl  $\pi(|\vec{x}|^2 + |\vec{\xi}|^2)$ . Le spectre de cet opérateur est constitué des valeurs propres  $\frac{n}{2} + k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ): les fonctions propres sont des fonctions d'Hermite, l'état fondamental (i.e. la fonction propre correspondant à  $k=0$ ) normalisé étant donné par

$$(15.23) \quad \varphi(\vec{x}) = 2^{\frac{n}{4}} e^{-\pi|\vec{x}|^2}.$$

On voit que l'opérateur de symbole (pas toujours  $\geq 0$ )  $\pi(|\vec{x}|^2 + |\vec{\xi}|^2) - \frac{n}{2}$  est cependant  $\geq 0$ : ce fait est le point de départ du travail de Melin [25] sur une amélioration de l'inégalité de Gårding.

L'oscillateur harmonique a un rôle puissant en mécanique quantique puisqu'il donne une traduction, en termes de la théorie spectrale d'un seul opérateur, des opérateurs de création et d'annihilation (cf. Cartier [5]: on peut voir également, dans cet article, en quoi l'oscillateur harmonique constitue la moitié de la structure nécessaire à l'édification de la théorie des fonctions thêta).

On peut expliciter (cf [32], déf. 6.1) le symbole de Weyl  $f_t$  de l'opérateur  $\exp(-t(L_W - \frac{n}{2}))$ : c'est

$$(15.24) \quad f_t(\vec{x}, \vec{\xi}) = \left[ \frac{1+e^{-t}}{2} \right]^{-n} \exp[-2\pi(\operatorname{th} \frac{t}{2})(|\vec{x}|^2 + |\vec{\xi}|^2)].$$

Le cas particulier qui correspond à  $t = -\frac{i\pi}{2}$  est le fait que la transformation de Fourier inverse  $\mathcal{F}^{-1}$  a pour symbole

$$(15.25) \quad f_{-\frac{i\pi}{2}}(\vec{x}, \vec{\xi}) = 2^{n/2} e^{-\frac{in\pi}{4}} e^{2i\pi(|\vec{x}|^2 + |\vec{\xi}|^2)}.$$

Le cas limite  $t = +\infty$  est le fait que la fonction de Wigner (du calcul de Weyl) de la paire  $(\varphi, \varphi)$ , i.e. le symbole du projecteur  $u \mapsto (u, \varphi)\varphi$ , est la fonction

$$(15.26) \quad W(\varphi, \varphi)(\vec{x}, \vec{\xi}) = 2^n e^{-2\pi(|\vec{x}|^2 + |\vec{\xi}|^2)}.$$

On constate d'ailleurs que cette fonction n'est autre que l'état fondamental normalisé de l'oscillateur harmonique  $L_{\frac{1}{2}}$  en  $2n$  dimensions obtenu à partir de (15.22) en remplaçant  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  par  $\frac{W_{\frac{1}{2}}}{2} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j}$  (et de même pour  $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ), c'est-à-dire en "divisant la constante de Planck par 2".

Une partie des résultats concernant l'oscillateur harmonique qui viennent d'être décrits peuvent être généralisés au cadre relativiste, surtout (la complexité des calculs étant considérable) dans le cas où  $n = 1$ . Ce sera pour nous une occasion d'utiliser le calcul symbolique des opérateurs, principalement pour ce qui concerne les calculs dans l'algèbre enveloppante. Dans le cas où  $n = 1$ , nous verrons que l'analogue relativiste de l'oscillateur harmonique est l'opérateur de Mathieu modifié

$$(15.27) \quad M = -(4\pi)^{-1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\pi^2 \operatorname{ch} 2t + 2\pi^2 \right].$$

On peut trouver une introduction à la théorie des fonctions de Mathieu dans le livre de Whittaker et Watson [43], et une étude approfondie dans celui de Meixner et Schäfke [24]. Ces fonctions, introduites par Mathieu en 1868, ont leur origine dans la résolution du problème de Dirichlet pour l'équation  $\Delta u + k^2 u = 0$  dans un domaine plan de forme elliptique. Dans les coordonnées telles que  $x+iy = b \operatorname{ch}(\xi+i\eta)$  qu'impose la considération de deux familles de coniques confocales, la séparation des variables conduit en effet à deux

équations

$$(15.28) \quad u'' + (a - 2q \cos 2t)u = 0,$$

$$u'' - (a - 2q \operatorname{ch} 2t)u = 0$$

dont la première est l'équation de Mathieu et la seconde l'équation de Mathieu modifiée.

Il a déjà été observé que les fonctions de Mathieu occupent dans la théorie des fonctions spéciales une place tout à fait à part : leur étude est en effet beaucoup plus difficile, les résultats sont plus minces et, surtout, elles sont peut-être les seules (voir par exemple les livres de Vilenkin [41] et de Wawrzynczyk [42]) dont la relation avec la théorie de la représentation des groupes paraît aussi limitée. Quoiqu'il en soit, il est intéressant de constater que l'oscillateur de Mathieu n'est autre que la déformation relativiste de l'oscillateur harmonique : la prochaine section rendra ce fait encore plus significatif.

PROPOSITION 15.4. Appelons oscillateur relativiste l'opérateur (formellement autoadjoint sur  $H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ )

$$L = \pi \sum_j (B_j^2 + D_j^2) - \pi \sum_{j < k} R_{jk}^2.$$

On a

$$-4\pi L = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum x_j x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + n \sum x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - 4\pi^2 |\vec{x}|^2$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(-4\pi L) \mathcal{L}^{-1} &= \Delta_{\mathcal{M}} - 4\pi^2 |\vec{p}|^2 \\ &= \sum \frac{\partial^2}{\partial p_j^2} + \sum p_j p_k \frac{\partial^2}{\partial p_j \partial p_k} + n \sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j} - 4\pi^2 |\vec{p}|^2. \end{aligned}$$

Le symbole passif de L est la fonction  $\ell$  telle que

$$\pi^{-1} \ell(0, \vec{x}; p) = \|\vec{x}\|_p^2 + \frac{1-n}{8\pi^2} p_0^2 + \frac{(n-1)(n+2)}{16\pi^2} + p_0^2 - 1.$$

Preuve. Avant de la donner, voici quelques remarques. La première est que  $L$ , somme de carrés de générateurs infinitésimaux de la représentation de Bargmann-Wigner, est une sorte d'opérateur de Casimir, avec la restriction que le groupe de Poincaré n'est pas semi-simple

et que rien ne justifie a priori le choix des coefficients dans cette décomposition. La deuxième est que les formules données pour  $L$  et pour  $\mathcal{L}_j L \mathcal{L}_j^{-1}$  permettent de dire que  $L$  commute avec  $\mathcal{L}_j$  si l'on identifie  $\mathcal{M}$  à  $\mathbb{R}^n$  via les coordonnées  $\vec{p}$ . Enfin, l'opérateur  $R = \pi \sum R_{jk}^2$  est l'opérateur de moment cinétique total : il commute aussi avec  $\mathcal{L}_j$  puisque, en fait,  $\mathcal{L}_j$  commute avec chacun des  $R_{jk}$  ; l'opérateur

$$L-R = \pi \sum (B_j^2 + D_j^2)$$

pourra apparaître également comme une généralisation naturelle de l'oscillateur harmonique  $L_W = \pi \sum (x_j^2 + D_j^2)$ . Les opérateurs  $L$  et  $L-R$  ont même partie radiale, et coïncident lorsque  $n=1$ .

Pour prouver la première formule annoncée, on écrit, grâce à la proposition 15.1,

$$(15.29) \quad B_j^2 = x_j \langle D \rangle B_j = (2i\pi)^{-1} x_j D_j + x_j^2 \langle D \rangle^2.$$

Par ailleurs

$$(15.30) \quad \sum_{j < k} R_{jk}^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k} (x_j D_k - x_k D_j)^2$$

$$= \sum x_j^2 D_k^2 - \sum x_j x_k D_j D_k + \frac{1-n}{2i\pi} \sum x_j D_j,$$

et il suffit d'additionner ces deux formules.

On utilise ensuite les relations

$$(15.31) \quad \mathcal{L}_j D_j \mathcal{L}_j^{-1} = p_j, \quad \mathcal{L}_j B_j \mathcal{L}_j^{-1} = -(2i\pi)^{-1} p_0 \frac{\partial}{\partial p_j}$$

dont la deuxième a, du reste, déjà été employée au début de la section 12, ainsi que

$$(15.32) \quad \mathcal{L}_j R_{jk} \mathcal{L}_j^{-1} = (2i\pi)^{-1} (p_j \frac{\partial}{\partial p_k} - p_k \frac{\partial}{\partial p_j}),$$

formule également triviale. Il en résulte que

$$(15.33) \quad \mathcal{L}_j (-4\pi L) \mathcal{L}_j^{-1} =$$

$$\sum (p_0 \frac{\partial}{\partial p_j})^2 - 4\pi^2 \sum p_j^2 - \sum_{j < k} (p_j \frac{\partial}{\partial p_k} - p_k \frac{\partial}{\partial p_j})^2,$$

ce qui conduit à la deuxième formule indiquée si l'on utilise à nouveau (15.30) pour développer le dernier terme. L'expression de l'opérateur  $\Delta_{\mathcal{M}}$  a été fournie en (8.3).

Pour calculer  $\ell$ , il faut renvoyer aux calculs de la section 12, en particulier aux théorèmes 12.6 et 12.7. On a

$$(15.34) \quad \pi^{-1}\ell = \sum_j (b_j \# b_j + p_j \# p_j) - \sum_{j < k} r_{jk} \# r_{jk},$$

avec  $p_j \# p_j = p_j^2$  d'après le théorème 12.3, et

$$(15.35) \quad b_j \# b_j = b_j^2 + (16\pi^2)^{-1} B_2(b_j, b_j)$$

ainsi que

$$(15.36) \quad r_{jk} \# r_{jk} = r_{jk}^2 + (16\pi^2)^{-1} B_2(r_{jk}, r_{jk}).$$

Comme, rappelons-le,  $b_1 = p_0 x_1 + p_1 x_0$ , le théorème 12.6 fournit aussitôt

$$(15.37) \quad B_2(b_1, b_1) = 1 + (p_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - p_0 \frac{\partial}{\partial x_1}) (p_0 x_1 + 2p_1 x_0 + \frac{(p_0^2 - 1)x_1}{p_0}) \\ = 2(1 - p_0^2 + p_1^2)$$

et de même

$$(15.38) \quad B_2(r_{12}, r_{12}) = (\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial p_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial p_2}) (p_2 x_1 - p_1 x_2) \\ = -2,$$

d'où

$$(15.39) \quad \pi^{-1}\ell = \sum b_j^2 + \frac{1}{8\pi^2} \sum (1 - p_0^2 + p_j^2) + \sum p_j^2 \\ - |\vec{x} \wedge \vec{p}|^2 + \frac{n(n-1)}{16\pi^2} :$$

si l'on se rappelle que  $b_j = p_0 x_j$  lorsque  $x_0 = 0$  et que  $|\vec{x} \wedge \vec{p}|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{p}|^2 - \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle^2$ , enfin que  $\|\vec{x}\|_p^2 = |\vec{x}|^2 + \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle^2$ , on en déduit la dernière formule de la proposition 15.4.

PROPOSITION 15.5. L'oscillateur relativiste  $L$ , de domaine initial  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ , est essentiellement autoadjoint sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . Son spectre est

constitué de valeurs propres, et les fonctions propres correspondantes appartiennent à  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ .

Preuve. On supposera dans un premier temps que  $n \leq 79$ , auquel cas

$$(15.40) \quad \pi^{-1} \ell(o, \vec{x}; p) = \|\vec{x}\|_p^2 + \alpha |\vec{p}|^{2+\beta}$$

avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . Vu les relations

$$(15.41) \quad p_o^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} (\|\vec{x}\|_p^2) = 2p_o^{-1} x_j + 2p_o^{-1} p_j \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle$$

et

$$(15.42) \quad p_o^{-1} (p_k \frac{\partial}{\partial x_j} - p_j \frac{\partial}{\partial x_k}) (\|\vec{x}\|_p^2) = 2p_o^{-1} (p_k x_j - p_j x_k),$$

la première remarque qui suit la définition 14.3 montre que le symbole  $\ell^{-1}$  est de poids  $(\|\vec{x}\|_p^2 + p_o^2)^{-1} \sim \ell^{-1}$  et de type  $\ell^{\frac{1}{2}}$  : en effet chaque dérivation du genre  $e_j$  ou  $e_{jk}$  diminue d'une unité l'exposant de  $\ell$  au prix de facteurs supplémentaires majorés par  $C\ell^{\frac{1}{2}}$  ; les dérivations  $\varepsilon_j$  ou  $\varepsilon$ , sans améliorer la situation, ne la détériorent pas non plus.

En partant de  $\ell^{-1}$  et en suivant la procédure usuelle d'inversion des opérateurs elliptiques (basée ici, bien sûr, sur l'application du théorème 14.11 à des symboles de type  $\ell^{\frac{1}{2}}$ ), on construit une suite  $(g_k)_{k \geq 1}$  de symboles de poids  $\ell^{-1}$  et de type  $\ell^{\frac{1}{2}}$  tels que

$$(15.43) \quad r_k = g_k \# \ell^{-1}$$

soit de poids  $\ell^{-\frac{k}{2}}$  (et de type  $\ell^{\frac{1}{2}}$ ). Soit  $G_k$  (resp.  $R_k$ ) l'opérateur de symbole passif  $g_k$  (resp.  $r_k$ ).

Désignons par  $L$  l'extension unique de l'oscillateur relativiste en un opérateur faiblement continu de  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$ . D'après le théorème 9.5, les opérateurs du calcul de Klein-Gordon de poids quelconque se prolongent également en des opérateurs faiblement continus de  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$ . Si  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  est tel que  $Lu$  appartient à  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\langle D \rangle^2 u$ ,  $|\vec{x}|^2 u$  et  $\sum x_j D_j u$  appartiennent à  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  : en effet, avec les notations définies plus haut, on peut écrire

$$(15.44) \quad \langle D \rangle^2 u = \langle D \rangle^2 G_2 L u - \langle D \rangle^2 R_2 u$$



et noter que le symbole  $p_0^2 \# g_2$  de  $\langle D \rangle^2 G_2$  est de poids 1, de même que  $p_0^2 \# r_2$  ; on procède de même pour les deux autres termes. Si l'on introduit alors, pour tout entier  $N \geq 0$ , l'espace

$$(15.45) \quad K_N = \{u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n) : L^N u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)\},$$

on voit que si  $u \in K_N$ , alors  $\langle D \rangle^{2N} u$  et  $|\vec{x}|^{2N} u$  appartiennent à  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  ; en conséquence  $L$  est un opérateur symétrique sur le domaine  $K_N$  pour  $N$  assez grand.

Pour montrer que  $L$ , de domaine initial  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , est essentiellement autoadjoint, il suffit alors de montrer qu'étant donnés  $u \in K_1$  et  $N \in \mathbb{N}$ , on peut trouver une famille  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  dans  $K_N$  telle que, pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $u_\varepsilon$  converge vers  $u$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  et  $Lu_\varepsilon$  converge vers  $Lu$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . A cet effet, on choisit  $(v_\varepsilon)$  telle que  $v_\varepsilon$  converge vers  $Lu$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  et l'on pose (se servant de (15.43))

$$(15.46) \quad u_\varepsilon = G_{2N} v_\varepsilon - R_{2N} u = u + G_{2N} (v_\varepsilon - Lu) :$$

comme  $R_{2N}$  est de poids  $\ell^{-N}$  on voit que  $u \in K_N$  ; évidemment  $u_\varepsilon$  converge vers  $u$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . Par ailleurs

$$(15.47) \quad Lu_\varepsilon = LG_{2N} v_\varepsilon - LR_{2N} u$$

converge dans  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  (puisque  $LG_{2N}$  est de poids 1) vers  $LG_{2N} Lu - LR_{2N} u = Lu$ .

Il nous reste à étudier le spectre de  $L$ . D'après ce qui a été vu plus haut, l'injection canonique de  $K_1$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  est compacte, et il en est de même de l'opérateur  $R_2$  (de poids  $\ell^{-1}$ ). L'identité  $G_2 L = I + R_2$  montre donc que le spectre de  $L$  est constitué de valeurs propres (réelles) de multiplicité finie, formant une suite croissant vers  $+\infty$ . Si  $Lu = \lambda u$  pour une certaine fonction propre  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$(15.48) \quad u = \lambda G_2 u - R_2 u$$

et comme  $G_2$  et  $R_2$  sont tous deux de poids  $\ell^{-1}$ , on voit que  $u \in K_{N+1}$  dès que  $u \in K_N$  ; par suite,  $u \in \bigcap_N K_N = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Pour terminer la preuve de la proposition 15.5, il reste à se

débarrasser de l'hypothèse que  $n \leq 79$ , ce que nous faisons désormais.

La légère difficulté, dès que  $n \geq 2$ , vient de ce que le symbole  $\pi^{-1} \ell - p_0^2 + 1$  de l'opérateur  $-(2\pi)^{-2} \mathcal{Q}_y^{-1} \Delta_{\mathcal{M}} \mathcal{Q}_y$  a, d'après la proposition 15.4, un terme en  $p_0^2$  accompagné d'un coefficient négatif. Cet opérateur est néanmoins positif puisque, si  $f$  et  $g \in L^2(\mathcal{M}; p_0^{-1} d\vec{p})$  et si  $f, g$  de même que les dérivées premières  $\frac{\partial f}{\partial p_j}, \frac{\partial g}{\partial p_j}$  sont à décroissance suffisamment rapide lorsque  $|\vec{p}| \rightarrow \infty$ , une intégration par parties montre que

$$(15.49) \quad -(\Delta_{\mathcal{M}} f, g) = \int \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{d\vec{p}}{p_0} + \int \left( \sum p_j \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) \left( \sum p_k \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) \frac{d\vec{p}}{p_0}.$$

Posons, avec  $\theta > 0$ ,

$$(15.50) \quad L_0 = -(4\pi)^{-1} \mathcal{Q}_y^{-1} [\theta \Delta_{\mathcal{M}} - 4\pi^2 |\vec{p}|^2] \mathcal{Q}_y,$$

de sorte que, si  $\theta > 0$  est assez petit, le symbole  $\ell_0$  de  $L_0$  a tous ses termes accompagnés de coefficients positifs : on peut donc affirmer, au sujet de  $L_0$ , tout ce qui a été dit plus haut concernant l'opérateur  $L$  lui-même dans le cas où  $n \leq 79$  ; en particulier, c'est un opérateur autoadjoint, défini positif d'après (15.49) puisque ses fonctions propres appartiennent à  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , et l'on définit les espaces  $K_N$ , comme en (15.45), par référence à l'opérateur  $L_0$ . Partant de  $a_1 = \ell_0^{\frac{1}{2}}$ , on construit par récurrence, à l'aide du calcul symbolique de type  $\ell_0^{\frac{1}{2}}$ , une suite  $(a_k)$  de symboles de poids  $\ell_0^{\frac{1}{2}}$  tels que  $a_k \# a_{k-\ell_0}$  soit de poids  $\ell_0^{\frac{1}{2}}$  ; puis, partant de  $b_1 = \ell_0^{-\frac{1}{2}}$ , une suite  $(b_k)$  de symboles de poids  $\ell_0^{-\frac{1}{2}}$  telle que  $b_k \# a_{k-1}$  (ainsi que  $a_k \# b_{k-1}$  en considérant l'adjoint) soit de poids  $\ell_0^{-\frac{1}{2}}$ . Soient  $A_k$  et  $B_k$  les opérateurs correspondants. D'après (15.50) et la proposition 15.4, la différence

$$(15.51) \quad L - A_k \left[ I - \frac{1-\theta}{4\pi} B_k \mathcal{Q}_y^{-1} \Delta_{\mathcal{M}} \mathcal{Q}_y B_k \right] A_k$$

est un opérateur dont le poids est, pour  $k$  grand, une haute puissance de  $\ell_0^{-1}$ . Comme l'opérateur

$$(15.52) \quad C_k = - \frac{1-\theta}{4\pi} B_k \mathcal{Q}_y^{-1} \Delta_{\mathcal{M}} \mathcal{Q}_y B_k,$$

de poids 1, est borné et (d'après (15.49)) positif, on voit que  $L$  est essentiellement autoadjoint. Si  $Lu = \lambda u$  avec  $u$  appartenant déjà à  $K_N$ , on a (à condition de choisir  $k$  assez grand)

$$(15.53) \quad (I+C_k)A_k u \sim B_k L u \sim \lambda B_k u$$

avec un terme d'erreur dans  $K_{N+1}$ , d'où

$$(15.54) \quad u \sim B_k (I+C_k)^{-1} \lambda B_k u \\ \sim \lambda^2 B_k (I+C_k)^{-1} B_k^2 (I+C)^{-1} B_k u :$$

le terme d'erreur est toujours dans  $K_{N+1}$  parce que  $(I+C_k)^{-1} = L_O^{-N-1} (I+L_O^{N+1} C_k L_O^{-N-1})^{-1} L_O^{N+1}$  est un opérateur borné dans  $K_{N+1}$ . Comme  $B_k^2$  est de poids  $\lambda_O^{-1}$ , (15.54) montre que  $u$  appartient à  $K_{N+1}$ , ce qui termine la preuve de la proposition 15.5.

L'opérateur de Mathieu modifié (15.27) ou une généralisation intervient comme partie radiale de l'oscillateur relativiste  $L$ . D'après (15.29),  $L$  a même effet sur les fonctions de  $|\vec{x}|$  que l'opérateur

$$(15.55) \quad \pi \Sigma (B_j^2 + D_j^2) = (-4\pi)^{-1} [(1+|\vec{x}|^2) \Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \Sigma x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - 4\pi^2 |\vec{x}|^2] .$$

DÉFINITION ET PROPOSITION 15.6. Appelons opérateur de Mathieu-Hermite l'opérateur M.H., autoadjoint sur  $L^2(\mathbb{R}, (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx)$ , défini par

$$M.H. = (-4\pi)^{-1} [(1+x^2) \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - 4\pi^2 x^2] ,$$

autrement dit l'oscillateur relativiste  $L$  dans le cas où  $n=1$ . Appelons opérateur de Mathieu-Laguerre l'opérateur M.L., symétrique sur  $L^2(\mathbb{R}_*, dr)$ , défini par

$$M.L. = (-4\pi)^{-1} [r(1+r) \frac{d^2}{dr^2} + (2r+1) \frac{d}{dr} - 4\pi^2 r] .$$

Sous le changement de variable  $x = \text{sh } t$  (resp.  $r = \text{sh}^2 t$ ), ces opérateurs se transforment en les opérateurs (dont le premier est identifiable à l'opérateur de Mathieu modifié classique (15.27))

$$(-4\pi)^{-1} [\frac{d^2}{dt^2} - 4\pi^2 \text{sh}^2 t]$$

$$\text{et} \quad (-16\pi)^{-1} [\frac{d^2}{dt^2} + 2(\coth 2t) \frac{d}{dt} - 16\pi^2 \text{sh}^2 t] .$$

Preuve. Dans le premier cas, on écrit

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\text{ch } t} \frac{d}{dt} , \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\text{ch}^2 t} \frac{d^2}{dt^2} - \frac{\text{sh } t}{\text{ch}^3 t} \frac{d}{dt}$$

et, dans le second,

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{\operatorname{sh} 2t} \frac{d}{dt} \qquad \frac{d^2}{dr^2} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 2t} \frac{d^2}{dt^2} - \frac{2\operatorname{ch} 2t}{\operatorname{sh}^3 2t} \frac{d}{dt}.$$

C'est sur l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$  que nous avons montré le caractère essentiellement autoadjoint de M.H., initialement défini sur  $\mathcal{G}(\mathbb{R})$  : mais cet opérateur est invariant par  $\mathcal{Q}$ , transformation qui envoie  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$  sur  $L^2(\mathbb{R}, (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx)$ . Ceci termine la preuve de la proposition 15.6.

Nous aurons besoin également de la résolution spectrale d'une extension autoadjointe de l'opérateur M.L. L'identification, explicitée dans la proposition qui suit, de M.L. avec la partie radiale d'un certain opérateur  $L_{\frac{1}{2}}$  sur  $\mathbb{R}^2$  permet de l'obtenir puisque, par des méthodes identiques à celles de la proposition 15.5, on vérifie que  $L_{\frac{1}{2}}$  est essentiellement autoadjoint sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$  si  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$  est son domaine initial, qu'il admet une suite de valeurs propres de multiplicité finie et que ses fonctions propres sont dans  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ . On observera l'analogie de  $L_{\frac{1}{2}}$  avec l'opérateur défini en (15.55), la seule différence étant que la constante de Planck a été divisée par 2, au sens expliqué à la suite de (15.26).

PROPOSITION 15.7. Considérons l'opérateur  $L_{\frac{1}{2}}$  défini sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$-4\pi L_{\frac{1}{2}} = (1+|\vec{x}|^2) \left( \frac{1}{4}\Delta \right) + \frac{1}{2} \sum x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - 4\pi^2 |\vec{x}|^2.$$

Il est essentiellement autoadjoint sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , et commute avec la transformation  $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$  définie par  $(\mathcal{F}_{\frac{1}{2}} u)(\vec{x}) = 2\hat{u}(2\vec{x})$ . En posant  $|\vec{x}|^2 = r$  (et non  $r^2$ ), on identifie la partie radiale de  $L_{\frac{1}{2}}$  à l'opérateur de Mathieu-Laguerre.

Preuve. La transformation  $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$  fait passer de l'opérateur de multiplication par  $x_j$  à l'opérateur  $-(4i\pi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}$  et de  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  à l'opérateur de multiplication par  $4i\pi x_j$  : le fait que  $L_{\frac{1}{2}}$  commute avec  $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$  résulte alors d'un calcul immédiat. On peut écrire

$$(15.56) \qquad -16\pi L_{\frac{1}{2}} = \sum \frac{\partial}{\partial x_j} (1+|\vec{x}|^2) \frac{\partial}{\partial x_j} - 16\pi^2 |\vec{x}|^2$$

d'où

$$(15.57) \qquad 16\pi (L_{\frac{1}{2}} u, v) = \int (1+|\vec{x}|^2) \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \bar{v} \, d\vec{x} + 16\pi^2 \int |\vec{x}|^2 u \bar{v} \, d\vec{x}$$

pour tout couple  $(u, v)$  de fonctions de  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$  : le caractère essen-

tiellement autoadjoint de  $L_{\frac{1}{2}}$  et ce qui a été dit plus haut concernant la résolution spectrale de cet opérateur résultent de cette identité et des méthodes de la proposition 15.5. Si  $u(\vec{x}) = v(|\vec{x}|^2) = v(r)$ , on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = 2x_j v'(r) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 4x_j^2 v''(r) + 2v'(r) ,$$

et la partie radiale de  $L_{\frac{1}{2}}$  s'identifie à l'opérateur de Mathieu-Laguerre, ce qui termine la preuve de la proposition 15.7.

Nous supposons désormais que  $n = 1$ , auquel cas  $L = M.H.$  se ramène à l'opérateur de Mathieu modifié classique. Le symbole passif  $\pi^{-1}_L$  de  $\pi^{-1}_L$  s'écrit simplement

$$(15.58) \quad \pi^{-1}_L(0, x_1; p) = x_1^2 + x_1^2 p_1^2 + p_1^2 = p_0^2 x_1^2 + p_1^2 .$$

Si l'on pose  $g_0(\xi_1, p_1) = g(0, \xi_1; (1+p_1^2)^{\frac{1}{2}}, p_1)$ , la formule (8.6) se réduit dans ce cas à

$$(15.59) \quad \mathcal{F}_1(\nabla^\lambda g_0)(\xi_1, p_1) = (1 + \frac{\xi_1^2}{4p_0^2})^{\lambda/2} (\mathcal{F}_1 g_0)(\xi_1, p_1) .$$

En particulier (prendre  $\lambda = 1$ ), le symbole actif de  $\pi^{-1}_L$  est  $p_0^2 x_1^2 + p_1^2 - (16\pi^2)^{-1}$  : la valeur de la constante n'a pas d'importance, mais il est essentiel que ce symbole soit encore une fonction de  $p_0^2 x_1^2 + p_1^2$ . Nous allons montrer le fait remarquable que les opérateurs qui sont des "fonctions" de l'oscillateur  $L$  sont exactement ceux dont les symboles actifs sont des fonctions de  $p_0^2 x_1^2 + p_1^2$  : le fait analogue relatif à l'oscillateur harmonique et au calcul de Weyl, exprimé par exemple par la formule (15.24) est, au contraire du présent résultat, un simple fait de covariance ; ici, il n'y a pas de covariance du calcul de Klein-Gordon à l'égard du groupe de transformations unitaires dont  $L$  est le générateur infinitésimal.

Avant de démontrer cela, donnons-en un exemple intéressant. Nous savons que  $L$  commute avec l'opérateur  $\mathcal{G}$  défini par  $(\mathcal{G}v)(x_1) = (1+x_1^2)^{\frac{1}{2}} \hat{v}(x_1)$ . Le wronskien  $uv' - u'v$  de deux fonctions propres de  $L$  correspondant à la même valeur propre est un multiple de  $(1+x_1^2)^{-\frac{1}{2}}$ , en fait 0 puisque  $u$  et  $v$  appartiennent à  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  d'après la proposition 15.5. Par suite à chaque valeur propre ne correspond qu'un sous-espace propre de dimension 1, et  $\mathcal{G}$  est une "fonction" de  $L$ , i.e. admet une résolution suivant les projecteurs spectraux de  $L$ . Bien

entendu, lorsque  $n \geq 2$ , les valeurs propres (sauf la plus petite) sont multiples à cause de l'invariance de  $L$  par rotation.

PROPOSITION 15.8. Lorsque  $n=1$ , le symbole actif de l'opérateur  $\mathcal{G}^{-1}$  est la fonction  $f$  telle que

$$f(0, x_1; p) = 2^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{2i\pi(p_0^2 x_1^2 + p_1^2)}.$$

Preuve. Observons avant de la donner l'analogie étonnante de cette formule avec la formule (15.25) qui donne le symbole de Weyl de  $\mathcal{F}^{-1}$  : cependant, l'opérateur  $\mathcal{G}^{-1}$  n'est unitaire ni sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$  ni sur  $L^2(\mathbb{R}, (1+x_1^2)^{-\frac{1}{2}} dx_1)$ , mais constitue une isométrie entre ces deux espaces. Si  $u \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$  on a

$$(15.60) \quad (\mathcal{G}^{-1}u)(x_1) = \int e^{2i\pi(x_1+\xi_1)y_1} (1+y_1^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{u}(\xi_1) dy_1 d\xi_1$$

et la formule (7.1) montre que le symbole standard  $a_0$  de  $\mathcal{G}^{-1}$  est

$$(15.61) \quad a_0(x_1, \xi_1) = e^{-2i\pi x_1 \xi_1} \int (1+y_1^2)^{-\frac{1}{2}} e^{2i\pi(x_1+\xi_1)y_1} dy_1$$

d'où

$$(15.62) \quad (\mathcal{F}_1^{-1}a_0)(\zeta_1, \xi_1) = (1+(\zeta_1-\xi_1)^2)^{-\frac{1}{2}} e^{2i\pi\xi_1^2} e^{-2i\pi\xi_1\zeta_1}.$$

Terminons le calcul formellement, en faisant observer au lecteur qu'on pourrait ici insérer le facteur  $e^{-\pi\varepsilon\xi_1^2}$  et faire tendre  $\varepsilon$  vers 0 tout à la fin. La formule (7.17) permet le calcul du symbole de Klein-Gordon actif  $f$  de  $\mathcal{G}^{-1}$  : lorsque  $\zeta_1 = \xi_1 - \eta_1$ , on a  $\eta_0 = (1+(\zeta_1-\xi_1)^2)^{\frac{1}{2}}$ , d'où

$$(15.63) \quad f(0, y_1; p) = 2 \int \langle \xi, Jp \rangle e^{2i\pi\xi_1\eta_1} e^{2i\pi y_1(\eta_1-\xi_1)} \frac{d\xi_1}{\xi_0}$$

avec  $\eta = S_p \xi$ , soit  $\eta_1 = -\xi_1 + 2\langle \xi, Jp \rangle p_1$ .

Avec  $\zeta_0 = (1+\zeta_1^2)^{\frac{1}{2}}$ , posons  $\xi_1 = p_1\zeta_0 + p_0\zeta_1$  d'où  $\xi_0 = p_0\zeta_0 + p_1\zeta_1$  et  $\xi_0^{-1}d\xi_1 = \zeta_0^{-1}d\zeta_1$  : alors  $\langle \xi, Jp \rangle = \zeta_0$  et  $\eta_1 = p_1\zeta_0 - p_0\zeta_1$ , et l'intégrale se simplifie sous la forme

$$(16.64) \quad \begin{aligned} f(0, y_1; p) &= 2 \int e^{2i\pi(p_1^2\zeta_0^2 - p_0^2\zeta_1^2)} e^{-4i\pi p_0\zeta_1 y_1} d\zeta_1 \\ &= 2 e^{2i\pi p_1^2} \int e^{-2i\pi\zeta_1^2} e^{-4i\pi p_0\zeta_1 y_1} d\zeta_1, \end{aligned}$$

qui conduit à la formule indiquée.

Dans la section 12, nous avons explicité la composition  $\#$  des symboles passifs dans le cas où l'un des facteurs est le symbole d'un générateur infinitésimal de la représentation de Bargmann-Wigner : si l'on identifie un symbole à sa restriction à  $x_0 = 0$ , et si  $n = 1$ , les symboles des générateurs infinitésimaux sont  $p_0, p_1$  et  $b_1 = p_0 x_1$ , et il n'y a pas bien sûr de rotation. Rappelons le théorème 12.3 :

$$(15.65) \quad p_1 \# g = (4i\pi)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_1} + p_1 \nabla g .$$

Lorsque  $n = 1$ , la forme  $B_2(b_1, g)$  calculée dans le théorème 12.6 se réduit à 0. En effet,

$$(15.66) \quad B_2(b_1, g) = (1 + p_1^2) \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial p_1} - p_0 p_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial p_1} + p_1 \frac{\partial g}{\partial x_0} - p_0 \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

et, d'après l'admissibilité,  $\frac{\partial g}{\partial x_0} = p_0^{-1} p_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}$  et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial p_1} = p_0^{-1} p_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial p_1} + p_0^{-3} \frac{\partial g}{\partial x_1} ,$$

ce qui conduit au résultat que nous venons d'indiquer. Toujours d'après le théorème 12.6,

$$(15.67) \quad B_1(b_1, g) = \frac{p_1}{p_0} x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} - p_0 \frac{\partial g}{\partial p_1} ,$$

et le théorème 12.7 fournit

$$(15.68) \quad b_1 \# g = p_0 x_1 \nabla g + \frac{1}{4i\pi} \left[ \frac{p_1}{p_0} x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} - p_0 \frac{\partial g}{\partial p_1} \right] .$$

Désignons par  $\natural$ , au lieu de  $\#$ , la composition des symboles actifs. Comme  $g = \nabla^{-1} f$  si  $f$  et  $g$  sont les symboles actif et passif d'un même opérateur, les formules (15.65) et (15.68) deviennent

$$(15.69) \quad p_1 \natural f = \nabla(p_1 f) + (4i\pi)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

et

$$(15.70) \quad b_1 \natural f = \nabla(p_0 x_1 f) + \frac{1}{4i\pi} \left[ \frac{p_1}{p_0} x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - p_0 \frac{\partial f}{\partial p_1} \right] .$$

La deuxième de ces formules demande une justification : il s'agit de montrer que l'opérateur  $\frac{p_1}{p_0} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - p_0 \frac{\partial}{\partial p_1} D_1^2$  commute avec l'opérateur  $\nabla$  donné par (15.59) sous la forme  $\nabla = (1 + \frac{D_1^2}{4p_0})^{\frac{1}{2}}$ . Or le calcul pseudo-différentiel standard fournit

$$(15.71) \quad [x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \nabla] = - (4p_0^2)^{-1} D_1^2 \nabla^{-1} ;$$

par ailleurs

$$(15.72) \quad [p_0 \frac{\partial}{\partial p_1}, \nabla] = - \frac{p_1}{p_0} \frac{D_1^2}{4} \nabla^{-1} ,$$

d'où la formule de commutation souhaitée. Pour un usage ultérieur, mentionnons également la formule

$$(15.73) \quad [x_1, \nabla] = (16\pi^2)^{-1} p_0^{-2} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^{-1}$$

et sa conséquence

$$(15.74) \quad \begin{aligned} \nabla x_1 \nabla x_1 &= x_1 \nabla^2 x_1 - (16\pi^2)^{-1} p_0^{-2} \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \\ &= x_1^2 \nabla^2 - \frac{3}{16\pi^2} p_0^{-2} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{16\pi^2} p_0^{-2} . \end{aligned}$$

PROPOSITION 15.9. Supposons  $n = 1$ . La composition par le symbole actif

$$\ell_1 = \pi [p_0^2 x_1^2 + p_1^2 - (16\pi^2)^{-1}]$$

de l'oscillateur de Mathieu  $L = M.H.$  est donnée par la formule

$$\pi^{-1} \ell_1 \nabla f = \pi^{-1} \ell_1 f - (16\pi^2)^{-1} A f + (2i\pi)^{-1} \nabla B f$$

avec

$$A = \frac{p_1^2}{p_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_1^2} + x_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 3 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left[ \frac{p_1}{p_0} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - p_0 \frac{\partial}{\partial p_1} \right]^2$$

et

$$B = p_1 (1 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_1} - p_0^2 x_1 \frac{\partial}{\partial p_1} ,$$



les symboles (actifs) étant identifiés à leur restriction à  $x_0 = 0$ .

Preuve. Quand  $n = 1$ ,  $\pi^{-1}L$  se réduit à  $B_1^2 + D_1^2$  d'où

$$(15.75) \quad \pi^{-1} \ell_1 \hbar = b_1 \hbar b_1 \hbar + p_1 \hbar p_1 \hbar$$

où les opérateurs  $b_1 \hbar$  et  $p_1 \hbar$  sont donnés par (15.70) et (15.69). On a immédiatement

$$(15.76) \quad p_1 \hbar p_1 \hbar = p_1^2 \nabla^2 - \frac{1}{16\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2i\pi} \nabla p_1 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Par ailleurs, l'opérateur  $p_0^{-1} p_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - p_0 \frac{\partial}{\partial p_1}$  (qui intervient dans  $b_1 \hbar$ ) commute, on l'a vu, avec  $\nabla$ , et l'on constate qu'il commute également avec l'opérateur de multiplication par  $p_0 x_1$ . On tire de là que

$$(15.77) \quad b_1 \hbar b_1 \hbar = p_0^2 \nabla x_1 \nabla x_1 + \frac{1}{2i\pi} \nabla [p_1 x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - p_0^2 x_1 \frac{\partial}{\partial p_1}] - \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{p_1}{p_0} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - p_0 \frac{\partial}{\partial p_1} \right)^2.$$

D'après (15.74), on a

$$(15.78) \quad p_0^2 \nabla x_1 \nabla x_1 = p_1^2 x_1^2 - (16\pi^2)^{-1} [x_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 3x_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + 1].$$

En additionnant (15.76) et (15.77) en tenant compte de cette dernière identité, on obtient la proposition 15.9.

PROPOSITION 15.10. Supposons  $n = 1$ , et posons

$$r = p_0^2 x_1^2 + p_1^2 = \pi^{-1} \ell_1 + (16\pi^2)^{-1}.$$

Si un symbole  $f$  est une fonction de  $\ell_1$ , à savoir si  $f(x_1; p_1) = h(r)$ , alors

$$-4\pi \ell_1 \hbar f = r(r+1)h'' + (2r+1)h' - 4\pi^2 r h + \frac{1}{4} h.$$

Preuve. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2p_0^2 x_1 h', \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial p_1} = 2(1+x_1^2)p_1 h', \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4p_0^4 x_1^2 h'' + 2p_0^2 h'$$

et il est immédiat que  $Bf = 0$ . Par ailleurs

$$\frac{p_1}{p_0} x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - p_0 \frac{\partial f}{\partial p_1} = -2p_0 p_1 h'$$

d'où

$$(15.79) \quad \left( \frac{p_1}{p_0} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - p_0 \frac{\partial}{\partial p_1} \right)^2 f = 4p_0^2 p_1^2 h'' + 2(p_0^2 + p_1^2) h'.$$

On tire de là que

$$(15.80) \quad \begin{aligned} Af = & (p_1^2 + p_0^2 + p_0^2 x_1^2) (4p_0^2 x_1^2 h'' + 2h') \\ & + 6p_0^2 x_1^2 h' + 4p_0^2 p_1^2 h'' + 2(p_0^2 + p_1^2) h' \end{aligned}$$

soit

$$(15.81) \quad \begin{aligned} \frac{1}{4} Af = & (p_0^2 p_1^2 x_1^2 + p_0^4 x_1^2 + p_0^4 x_1^4 + p_0^2 p_1^2) h'' + (2p_0^2 x_1^2 + p_0^2 + p_1^2) h' \\ = & r(r+1)h'' + (2r+1)h', \end{aligned}$$

et la proposition 15.10 est donc une conséquence de la proposition 15.9.

THÉOREME 15.11. Supposons  $n = 1$ , et soit  $(\lambda_k)_{k \geq 0}$  la suite croissante des valeurs propres de l'oscillateur de Mathieu-Hermite  $L = M.H.$  Pour tout  $k \geq 0$ , soit  $\psi_k$  une fonction propre de  $L$  correspondant à la valeur propre  $\lambda_k$ , normalisée pour la norme de  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ . Soit  $W^{\#}(\psi_k, \psi_k)$  la fonction de Wigner active du couple  $(\psi_k, \psi_k)$ , c'est-à-dire le symbole actif de l'opérateur  $u \mapsto (u, \psi_k)_{\frac{1}{2}} \psi_k$ . La fonction  $W^{\#}(\psi_k, \psi_k)(0, x_1; p)$  ne dépend que de  $r = p_0^2 x_1^2 + p_1^2$  et, si on la note  $h_k(r)$ , la fonction  $h_k$  est une fonction propre, pour la valeur propre  $\lambda_k + (16\pi)^{-1}$ , de l'opérateur de Mathieu-Laguerre  $M.L.$  Les opérateurs  $M.H.$  et  $M.L. - (16\pi)^{-1}$ , ou plus précisément, pour ce qui concerne ce dernier, son extension autoadjointe définie par la proposition 15.7, sont isospectraux, c'est-à-dire que  $M.L.$  n'a pas d'autre valeur propre que les nombres  $\lambda_k + (16\pi)^{-1}$ .

Preuve. Pour toute fonction  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  les formules (4.7) et (4.5) permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
 (15.82) \quad (\varphi_{\vec{y}, q}, \psi)_{\frac{1}{2}} &= \int_{\mathcal{M}} (\mathcal{Q}_{\vec{y}, q}^{\varphi})(p) \overline{\hat{\psi}(\vec{p})} d\vec{p} \\
 &= \int_{\mathcal{M}} \overline{\hat{\psi}(p)} e^{-2\pi i \langle Jq, p \rangle} e^{-2i\pi \langle \vec{y}, \vec{p} \rangle} d\vec{p}
 \end{aligned}$$

pour tout  $(\vec{y}, q) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$ , d'où

$$(15.83) \quad |(\varphi_{\vec{y}, q}, \psi)_{\frac{1}{2}}| \leq C(q_0^2 + |\vec{y}|^2)^{-N}$$

pour tout  $N$ , et  $C$  bien choisie. Si  $A$  est l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace engendré par  $\psi$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ , on a

$$(15.84) \quad (A\varphi_{\vec{y}, q}, \varphi_{\vec{y}', q'})_{\frac{1}{2}} = (\varphi_{\vec{y}, q}, \psi)_{\frac{1}{2}} (\psi, \varphi_{\vec{y}', q'})_{\frac{1}{2}}$$

et il résulte alors du corollaire 10.4 que le symbole passif de  $A$  est de poids

$$(15.85) \quad m(x_1, p) = p_0^{-N} (1+x_1^2)^{-N}$$

pour tout  $N$ . Il en est de même du symbole actif de  $A$  d'après le théorème 8.18, et ceci s'applique en particulier au cas où  $\psi = \psi_k$ , fonction qui est dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  d'après la proposition 15.5.

Posons  $W^{\#}(\psi_k, \psi_k) = f_k$ . Dans les formules (15.69) et (15.70), il n'y a qu'à changer le coefficient apparent  $i$  en  $-i$  pour changer l'ordre des facteurs dont ces formules décrivent la composition. La proposition 15.9 fournit alors

$$(15.86) \quad \pi^{-1}(\ell_1 \natural f_k - f_k \natural \ell_1) = (i\pi)^{-1} \nabla B f,$$

avec

$$(15.87) \quad B = p_1 (1+x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_1} - p_0^2 x_1 \frac{\partial}{\partial p_1}.$$

Comme  $\psi_k$  est fonction propre de  $L$  pour une valeur propre réelle, il est clair que

$$(15.88) \quad \ell_1 \natural W^{\#}(\psi_k, \psi_k) = W^{\#}(L\psi_k, \psi_k) = W^{\#}(\psi_k, L\psi_k) = W^{\#}(\psi_k, \psi_k) \natural \ell_1$$

d'où  $Bf_k = 0$ . Comme les courbes intégrales de  $B$  sont les courbes de

niveau, connexes (difféomorphes à un cercle sauf celle qui est réduite à un point) de l'intégrale première  $r = p_0^2 x_1^2 + p_1^2$ , cette condition exprime que  $f_k$  ne dépend que de  $r$ .

On notera par ailleurs que si l'on pose

$$(15.89) \quad f(0, x_1; p) = g(p_0 x_1, p_1) = g(y_1, p_1),$$

alors

$$p_0^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial y_1}, \quad p_0 \frac{\partial f}{\partial p_1} = \frac{p_1}{p_0} y_1 \frac{\partial g}{\partial y_1} + p_0 \frac{\partial g}{\partial p_1}$$

et, inversement,

$$\frac{\partial g}{\partial p_1} = \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{p_1 x_1}{p_0} p_0^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_1} :$$

il résulte de là que la condition que  $f$  est, pour tout  $N$ , un symbole du poids  $m$  défini en (15.85) est équivalente à la condition que  $g$  appartient à  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ .

D'après la définition (et proposition) 15.6 et la proposition 15.10, on voit que si l'on pose

$$(15.90) \quad f_k(0, x_1; p) = w^{\#}(\psi_k, \psi_k)(0, x_1; p) = h_k(p_0^2 x_1^2 + p_1^2)$$

alors  $\ell_1 \nsubseteq f_k$  n'est autre que  $h'_k(p_0^2 x_1^2 + p_1^2)$  si  $h'_k$  est l'image de  $h_k$  par l'opérateur  $M.L. - (16\pi)^{-1}$ . D'après (15.88), on a aussi  $\ell_1 \nsubseteq f_k = \lambda_k f_k$ , ce qui prouve enfin que  $h_k$  est une fonction propre de l'opérateur de Mathieu-Laguerre pour la valeur propre  $\lambda_k + (16\pi)^{-1}$ .

Réciproquement, soit  $h$  une fonction propre de l'opérateur de Mathieu-Laguerre pour la valeur propre  $\mu$  : d'après la proposition 15.7 et la remarque qui suit (15.89), la fonction  $\phi$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$(15.91) \quad \phi(x_1, p_1) = h(p_0^2 x_1^2 + p_1^2)$$

est, pour tout  $N$ , un symbole du poids  $m$  défini en (15.85) : il convient ici, bien sûr, d'identifier  $\phi(x_1, p_1)$  et  $\phi(0, x_1; (1+p_1^2)^{\frac{1}{2}}, p_1)$ . L'utilisation de la proposition 15.10 permet d'obtenir

$$(15.92) \quad \ell_1 \nsubseteq \phi = \phi \nsubseteq \ell_1 = [\mu - (16\pi^2)^{-1}] \phi.$$

Soit  $P$  l'opérateur de symbole actif  $\phi$ . Pour tout entier  $k \geq 0$ , cette relation entraîne

$$(15.93) \quad [\mu - (16\pi^2)^{-1}]P\psi_k = LP\psi_k = PL\psi_k = \lambda_k P\psi_k$$

d'où  $P\psi_k = 0$  ou  $\lambda_k = \mu - (16\pi^2)^{-1}$ ,  $P\psi_k$  étant dans ce dernier cas proportionnel à  $\psi_k$  puisque  $L(P\psi_k) = \lambda_k(P\psi_k)$ . Si  $P\psi_k = 0$  pour tout  $k$ , alors  $P = 0$ . Le deuxième cas n'est possible que pour une valeur au plus de  $k$  : si l'on s'y trouve, on voit aussi que  $P$  est un multiple de l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace engendré par  $\psi_k$ .

Ceci termine la preuve du théorème 15.11.

Remarque. Dans le cadre du calcul de Weyl, c'est l'oscillateur harmonique standard, ou un opérateur s'en déduisant par conjugaison par un élément du groupe métaplectique, qu'il faut considérer. Les fonctions propres d'un tel opérateur sont des fonctions d'Hermite, et la proposition 5.6 de [32] montre que la fonction de Wigner (au sens du calcul de Weyl) de deux fonctions propres de deux oscillateurs de ce type est encore une fonction d'Hermite (sur un espace de dimension double) : si l'on considère la fonction de Wigner de deux fonctions identiques, fonctions propres de l'oscillateur standard, on obtient une fonction liée à un polynôme de Laguerre de  $|x|^2 + |\xi|^2$ . Ces faits, et ceux contenus dans la prochaine section, justifient les appellations d'opérateurs de Mathieu-Hermite et de Mathieu-Laguerre que nous avons adoptées.

Dans le théorème 15.11, nous n'avons défini  $\psi_k$  qu'à la multiplication près par un nombre complexe de module 1 : cela détermine cependant sans aucune ambiguïté la fonction  $W^{\#}(\psi_k, \psi_k)$ , et par suite la fonction  $h_k$  ; il nous faut donc caractériser celle-ci dans l'espace propre de l'opérateur de Mathieu-Laguerre. Nous en profiterons pour rendre le théorème 15.11 explicite sous la forme d'une relation intégrale.

THÉORÈME 15.12. Soit  $h_k$  la  $(k+1)$ -ème fonction propre de l'opérateur de Mathieu-Laguerre caractérisée par la relation supplémentaire

$$2 \int_0^{\infty} h_k(r) dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+r \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta = 1$$

et soit  $(\psi_k)$  la suite des fonctions propres de l'opérateur de Mathieu-Hermite introduite dans le théorème 15.11. Quels que soient les entiers  $j$  et  $k \geq 0$ , on a l'identité

$$2 \int h_k(p_0^2 x_1^2 + p_1^2) \psi_j(-p_1' + 2\langle p_1', Jp \rangle p_1) e^{4i\pi x_1[-p_1' + \langle p_1', Jp \rangle p_1]} dx_1 dp_1 = \delta_{jk} \psi_k(p_1').$$

Preuve. Définissons  $h_k$  par la relation (15.90). La proposition 2.7 s'énonce aussi sous la forme

$$\text{Tr}(BA) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(0, \vec{x}; \vec{p}) g(0, \vec{x}; \vec{p}) d\vec{x} d\vec{p}$$

si  $A = \text{Op}(f)$  et si  $B$  est un opérateur à trace sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  de symbole passif  $g$  : évidemment on peut supprimer l'hypothèse que  $B$  est à trace si  $f$  est un symbole de poids  $(p_0^2 + \|\vec{x}\|^2)^{-N}$  pour tout  $N$  et si  $B$  est un opérateur borné sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . Prenons pour  $A$  l'opérateur  $u \mapsto (u, \psi_k)_{\frac{1}{2}} \psi_k$  et pour  $B$  l'identité, de sorte que  $\text{Tr}(BA) = 1$ , d'où

$$(15.94) \quad 1 = \int h_k(p_0^2 x_1^2 + p_1^2) dx_1 dp_1 = \int p_0^{-1} h_k(y_1^2 + p_1^2) dy_1 dp_1 :$$

en posant  $y_1 = r^{\frac{1}{2}} \cos \theta$ ,  $p_1 = r^{\frac{1}{2}} \sin \theta$ , on obtient la normalisation de  $h_k$  indiquée.

On a  $A\psi_j = \delta_{jk} \psi_k$  et, d'après (2.23),

$$(15.95) \quad \mathcal{G}Au = 2 \int h_k(p_0^2 x_1^2 + p_1^2) \mathcal{G}_{\sigma(0, x_1; p)} u \, dx_1 dp_1$$

pour toute fonction  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ ; de plus, d'après (2.14), on a

$$(\mathcal{G}_{\sigma(0, x_1; p)} u)(p') = (\mathcal{G}u)(-p' + 2\langle p_1', Jp \rangle p_1) e^{4i\pi x_1[-p_1' + \langle p_1', Jp \rangle p_1]}$$

Enfin, la remarque qui précède la proposition 15.8 montre que l'on a  $(\mathcal{G}\psi_k)(p) = \alpha_k \psi(p_1)$  pour une certaine constante  $\alpha_k \neq 0$ , ce qui termine la preuve du théorème 15.12.

Remarque. Evidemment, le théorème 15.11 ramène à la connaissance des fonctions  $h_k$  le calcul du symbole actif d'une "fonction" quelconque de l'opérateur de Mathieu-Hermite, c'est-à-dire d'un opérateur admettant une résolution suivant les mêmes projecteurs spectraux. Par ailleurs, la connaissance des fonctions  $h_k$  ou celle des fonctions  $\psi_k$  est équivalente d'après ce théorème. Cependant, en un certain sens, l'opérateur de Mathieu-Laguerre est un peu plus simple que celui de Mathieu-Hermite : voici une dernière information concernant les fonc-

tions  $h_k$ .

PROPOSITION 15.13. Pour tout entier  $j \geq 0$ , posons, pour  $r \in [0, \infty[$ ,

$$\gamma_j(r) = (4\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi r} L_k(4\pi r),$$

où les  $L_k$  sont les polynômes de Laguerre. Chaque fonction  $h_k$  appartient au sous-espace fermé de  $L^2((0, \infty), dr)$  engendré par les seules fonctions  $\gamma_j$  d'indices pairs, ou d'indices impairs.

Preuve. Considérons les fonctions radiales  $\vec{x} \mapsto u(\vec{x})$  sur  $\mathbb{R}^2$ , identifiées à des fonctions de  $r = |\vec{x}|^2$  de domaine  $(0, \infty)$ . Si l'on pose  $u(\vec{x}) = U(|\vec{x}|^2)$  et, avec la notation introduite dans la proposition 15.7,

$$(15.96) \quad (\mathcal{F}_{\frac{1}{2}} u)(\vec{x}) = v(\vec{x}) = V(|\vec{x}|^2),$$

un simple changement de variable dans la formule classique de transformation de Fourier des fonctions radiales (cf. Schwartz [29]; VII, 7, 22) fournit la relation

$$(15.97) \quad V(r) = 2\pi \int_0^\infty U(t) J_0(4\pi(rt)^{\frac{1}{2}}) dt.$$

Désignons par  $\sigma_1^0$  la transformation  $U \mapsto V$ : d'après la proposition 15.7, l'opérateur de Mathieu-Laguerre commute avec cette transformation.

Par ailleurs,  $\sigma_1^0$  est une version de la transformation de Hankel. Plus précisément, si l'on se réfère à la théorie de la quantification du demi-plan de Poincaré attachée à la série discrète des représentations de  $SL(2, \mathbb{R})$ , l'opérateur  $\sigma_1^0$  n'est autre ([38], (2.31) : faire  $Y = 1$  et  $\lambda = 0$ ) que l'opérateur de symétrie attaché à la symétrie géodésique autour du point 1. D'après ([38], (2.33) et (2.3)), on a donc

$$(15.98) \quad \sigma_1^0 = \exp i\pi(\mathcal{L} - \frac{1}{2})$$

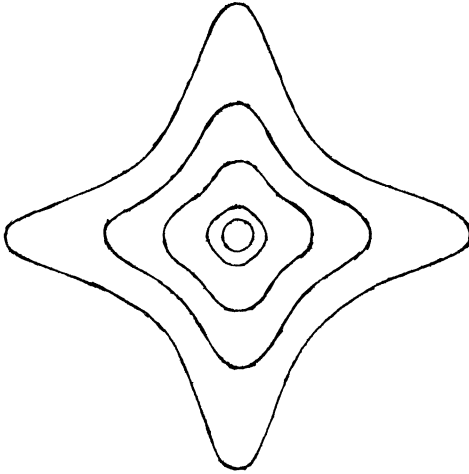
avec

$$(15.99) \quad \mathcal{L} = (-4\pi)^{-1} \left[ r \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} - 4\pi^2 r \right].$$

Cet opérateur est l'opérateur de Laguerre, dont le spectre, purement ponctuel, est constitué des nombres  $\frac{1}{2} + j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) et dont les fonctions propres ([38], (2.9)) sont les fonctions  $\gamma_j$ . Evidemment, une

fonction propre d'un opérateur qui commute avec  $\phi_1^0$  ne peut être qu'une superposition de fonctions propres toutes de niveau pair, ou toutes de niveau impair, de  $\mathcal{L}$ , ce qui termine la preuve de la proposition 15.13.

Remarque. L'opérateur de Mathieu-Hermite (resp. Mathieu-Laguerre) est la déformation relativiste de l'oscillateur harmonique  $L_W$  (resp. de l'oscillateur de Laguerre  $\mathcal{L}$ ) : il s'agit en fait d'une perturbation singulière, et le terme correctif est, en unités générales, précédé du coefficient  $c^{-2}$ , comme le montrera la section suivante ; seul M.L. est autoadjoint sur un espace de Hilbert indépendant de  $c$  (à savoir  $L^2(\mathbb{R}^+, dr)$ ). Enfin, M.L. est plus simple que M.H. à un autre égard : le calcul montre en effet que l'image d'une fonction d'Hermite par M.H. est une combinaison linéaire de cinq fonctions d'Hermite alors que  $M.L.\gamma_j$  est combinaison linéaire de  $\gamma_{j-2}, \gamma_j, \gamma_{j+2}$ .



La relation  $\pi^{-1}(\ell_1 \ni f-f \ni \ell_1) = (2i\pi)^{-1} \nabla \{p_0^2 x_1^2 + p_1^2, f\}$  n'est pas la version infinitésimale d'une relation de covariance mais s'en approche. La période du flot hamiltonien le long de la courbe de niveau d'équation  $p_0^2 x_1^2 + p_1^2 = a^2$  est donnée par  $T = 2 \int_0^1 [(1+a^2 t^2)(1-t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt$  : elle dépend de  $a$  contrairement à ce qui se passe dans le cas de l'oscillateur harmonique.





## XVI - CONTRACTION DE L'ANALYSE DE KLEIN-GORDON VERS CELLE DE WEYL.

La mécanique quantique relativiste dépend des deux grands paramètres que sont la vitesse de la lumière  $c$  et l'inverse  $h^{-1}$  de la constante de Planck. A ce titre, elle admet au moins deux limites, ou pour mieux dire contractions : seule la première ( $c \rightarrow \infty$ ) nous occupera ici. Notre propos dans cette section est de montrer que, lorsque  $c \rightarrow \infty$ , toutes les notions introduites dans ce volume pour ce qui concerne le calcul de Klein-Gordon dégénèrent vers les notions correspondantes (souvent triviales et presque toujours plus simples) relatives au calcul de Weyl.

L'essentiel de la présente section consiste en un formulaire : il s'agit de mettre en évidence la dépendance du calcul de Klein-Gordon à l'égard de la vitesse de la lumière. Cessant bien entendu de prendre celle-ci pour unité, nous fixons une unité de vitesse arbitraire (ce qui permet de considérer  $c$  comme un nombre), tout en gardant  $h$  et la masse de la particule libre observée comme unités d'action et de masse.

En un certain sens (on le verra dans les formules (16.15) et (16.19)), le changement dans la théorie qui résulte d'un nouveau choix d'unité de vitesse est insignifiant, c'est-à-dire que l'on peut se ramener au cas où  $c = 1$  à l'aide de changements d'échelle élémentaires portant sur les fonctions sur  $\mathbb{R}^n$  et sur les symboles des opérateurs. Tout n'est cependant pas aussi simple, et c'est ce qui justifie l'existence de ce chapitre : pour commencer, la bonne normalisation des générateurs infinitésimaux de la représentation de Bargmann-Wigner fait que ceux-ci, pour  $c = 1$  et pour  $c$  quelconque, ne se correspondront pas exactement sous la transformation à laquelle il a été fait allusion plus haut ; ensuite, les oscillateurs relativistes (de Mathieu) dépendent également de  $c$  d'une façon essentielle;

enfin, il en est de même de la famille  $(\varphi_{\vec{y}, q})$  d'états cohérents.

Le  $ds^2$  relativiste est à présent  $c^2 dt^2 - |\vec{dx}|^2$  et  $\square$  doit être défini comme

$$(16.1) \quad \square = c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

L'équation de Klein-Gordon (2.10) devient  $\square \tilde{u} = -4\pi^2 c^2 \tilde{u}$  et (2.11) devient

$$(16.2) \quad (2i\pi)^{-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = c^2 \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tilde{u}.$$

L'équation de l'hyperboloïde de masse  $\mathcal{M}$  est

$$(16.3) \quad p_0 = c^2 (1 + c^{-2} |\vec{p}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

et la transformation  $\mathcal{G}$  définie en (2.7) doit être remplacée par

$$(16.4) \quad (\mathcal{G}u)(p) = c^{-2} p_0 \hat{u}(\vec{p})$$

de sorte que

$$(16.5) \quad c^2 \int_{\mathcal{M}} |(\mathcal{G}u)(p)|^2 p_0^{-1} d\vec{p} = \int \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} |\hat{u}(\vec{p})|^2 d\vec{p}$$

sera maintenant pris comme définition de  $\|u\|_{\frac{1}{2}}$ , à condition de ne pas oublier que la norme ainsi définie dépend de  $c$ .

La forme duale de la forme de Minkowski sur l'espace des covecteurs d'énergie-impulsion est  $c^{-2} dp_0^2 - |d\vec{p}|^2$  : l'opposée de cette forme se restreint sur l'hyperboloïde de masse en la forme

$$(16.6) \quad ds_{\mathcal{M}}^2 = |d\vec{p}|^2 - c^2 p_0^{-2} \langle \vec{p}, d\vec{p} \rangle^2$$

et le calcul qui a conduit à (8.3) fournit

$$(16.7) \quad \Delta_{\mathcal{M}} = \sum \frac{\partial^2}{\partial p_j^2} + c^{-2} \sum p_j p_k \frac{\partial^2}{\partial p_j \partial p_k} + c^{-2} n \sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j}.$$

On remarquera que l'application  $p \mapsto q = (c^{-2} p_0, c^{-1} \vec{p})$  est une application conforme de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{M}_1$  (feuillet d'hyperboloïde d'équation  $q_0 = (1 + |\vec{q}|^2)^{\frac{1}{2}}$ ) puisque

$$(16.8) \quad |\vec{d}\vec{q}|^2 - q_0^{-2} \langle \vec{q}, \vec{d}\vec{q} \rangle^2 = c^{-2} ds_{\mathcal{M}}^2(p),$$

et le transfert au moyen de cette application fournit les symétries géodésiques sur  $\mathcal{M}$  (partant de (2.15)) sous la forme

$$(16.9) \quad s_p p' = -p' + 2[c^{-4} p_0 p'_0 - c^{-2} \langle \vec{p}, \vec{p}' \rangle] p.$$

En possession de  $\mathcal{Q}_y$  (définie en 16.4) et des symétries géodésiques, on définit les opérateurs de parité  $\sigma_\omega$  exactement comme en (2.14) et l'on définit les symboles de Klein-Gordon actif et passif d'un opérateur au moyen de la définition 2.3 et de (2.23), sans autre changement que celui qui consiste à tenir compte de  $c$  dans la définition (16.5) de la norme sur  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . L'application (2.1) qui à une vitesse  $v$  associe le covecteur d'énergie-impulsion d'une particule de masse 1 et de vitesse  $v$  (relativement à l'opérateur de référence) est maintenant caractérisée par la formule

$$(16.10) \quad p = (1 - \frac{|v|^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} (c^2, -v),$$

et la condition d'admissibilité des symboles (i.e. l'indépendance de  $f(x_0 + \lambda, \vec{x} - c^2 \lambda p_0^{-1} \vec{p}; p)$  à l'égard de  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) s'écrit

$$(16.11) \quad c^{-2} p_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} = \sum p_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Examinons ce que deviennent les notions qui précèdent lorsque  $c \rightarrow \infty$ . La norme (16.5) sur l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  tend vers  $\|u\|_0$ , norme de  $u$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Un développement limité dans (16.3) donne, sur l'hyperboloïde de masse,  $p_0 \sim c^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{2}$ , c'est-à-dire l'équation du paraboloïde de masse (non relativiste) considéré dans la section 3 avec le terme additionnel en  $c^2$ . Mais, comme il est bien connu, l'addition d'une constante à l'énergie ne change rien à la mécanique classique d'un problème, et ne modifie la mécanique quantique que d'une façon insignifiante. Ainsi, lorsque  $c \rightarrow \infty$ , (16.2) fournit, à des termes en  $c^{-2}$  près,

$$4i\pi \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \sim -8\pi^2 c^2 \tilde{u} + \Delta \tilde{u},$$

autrement dit

$$(16.12) \quad 4i\pi \frac{\partial}{\partial t} (e^{-2i\pi c^2 t} \tilde{u}) \sim \Delta (e^{-2i\pi c^2 t} \tilde{u}) .$$

En ce sens, l'équation de Klein-Gordon (16.2) dégénère, lorsque  $c \rightarrow \infty$ , vers l'équation de Schrödinger (3.8) : le facteur  $e^{-2i\pi c^2 t}$  a d'autant moins d'importance que, aussi bien dans le calcul de Weyl que dans celui de Klein-Gordon, les fonctions sur l'espace-temps sont identifiées à leur restriction à  $t = 0$ .

Le lecteur attentif aura peut-être observé que le signe du coefficient  $4i\pi$  de  $\frac{\partial}{\partial t}$  dans l'équation de Schrödinger libre (3.8) n'est pas le signe traditionnel. Cette très légère incohérence apparaît forcément à un endroit au moins de la théorie : elle est liée, ultimement, au fait que l'identification de  $\mathbb{R}^n$  à son dual utilisée en mécanique non relativiste est opposée à celle fournie par le  $ds^2$  de Minkowski ; d'autres difficultés de signe (relatives à l'analyse vectorielle) ont la même source, ce qui nous permettra de nous protéger d'une critique éventuelle à cet égard en nous abritant derrière Feynman ([10], p.79) : "Il est mal commode d'avoir ces signes moins, mais ainsi va le monde".

Lorsque  $c \rightarrow \infty$ , les formules (16.3) et (16.4) montrent que  $\mathcal{U}$  converge vers la transformation de Fourier ordinaire  $\mathcal{F}$ . D'après (16.9) et (16.4), on voit que  $S_p p' \sim -p' + 2p$  et, en particulier,  $\overrightarrow{S_p p'} \sim -\overrightarrow{p'} + 2\overrightarrow{p}$ . Il est alors immédiat que si  $f_0 = f_0(\vec{x}, \vec{p})$  est une fonction donnée sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  (et identifiée à une fonction admissible sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}$  de la façon usuelle), l'opérateur  $Op(f)$ , au sens du calcul de Klein-Gordon, converge lorsque  $c \rightarrow \infty$  vers l'opérateur dont le symbole de Weyl est  $f_0$  : il suffit en effet (partant de (2.14) et (2.23) qui, on l'a dit plus haut, restent valables sans modification), d'écrire

$$(16.13) \quad (\mathcal{U} Op(f) u)(p') = 2^n \int f(0, \vec{x}; p) (\mathcal{U} u)(S_p p') e^{4i\pi \langle \vec{x}, \overrightarrow{S_p p'} - \overrightarrow{p'} \rangle} d\vec{x} d\vec{p}$$

et de passer à la limite. En unités générales, on a

$$(16.14) \quad \nabla^\lambda = (1 + (4\pi c)^{-2} \square)^{\lambda/2}$$

au lieu de (2.24), et l'opérateur  $\nabla^{-n}$  qui lie les symboles de Klein-Gordon actif et passif d'un même opérateur tend vers l'identité quand  $c \rightarrow \infty$  : il ne pouvait évidemment en être autrement puisque dans le calcul de Weyl les deux notions de symbole coïncident.

Il est bien connu des physiciens, et depuis longtemps, que la représentation de Bargmann-Wigner se contracte lorsque  $c \rightarrow \infty$  vers une représentation du groupe de Galilée : voir la section 54 de Guillemin-Sternberg [11] pour un exposé mathématique sur des questions reliées. Quelques détails sur les générateurs infinitésimaux de la représentation de Bargmann-Wigner et leurs symboles permettront de mieux comprendre ce qui se passe. Il n'est heureusement pas nécessaire de refaire tous les calculs pour voir comment  $c$  s'insère dans les formules : il est en effet possible, jusqu'à un certain point, d'établir une correspondance entre l'ensemble de la théorie pour  $c$  quelconque et celle pour laquelle  $c = 1$ , dont les différents éléments seront affectés de l'indice supérieur 1. Ainsi on obtient une isométrie de  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  sur  $(H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n))^1$  en associant à  $u$  la fonction  $u^1$  telle que

$$(16.15) \quad u^1(\vec{x}) = c^{-n/2} u(c^{-1}\vec{x}),$$

d'où  $(\mathcal{U}^1 u^1)(q) = (1 + |\vec{q}|^2)^{\frac{1}{2}} c^{n/2} \hat{u}(c\vec{q})$ , c'est-à-dire

$$(16.16) \quad (\mathcal{U}^1 u^1)(q) = c^{n/2} (\mathcal{U} u)(c^2 q_0, c\vec{q}), \quad q \in \mathcal{M}^1.$$

Si  $p \in \mathcal{M}$ ,  $p' \in \mathcal{M}$  et que l'on pose

$$(16.17) \quad p = (c^2 q_0, c\vec{q}) \quad \text{et} \quad p' = (c^2 q'_0, c\vec{q}')$$

avec  $q \in \mathcal{M}^1$  et  $q' \in \mathcal{M}^1$ , on vérifie à l'aide de (16.9) et de (16.16) que

$$(16.18) \quad (\mathcal{U} u)(S_p p') = c^{-n/2} (\mathcal{U}^1 u_1)(-q' + 2\langle q', Jq \rangle p).$$

On tire de là, et de (16.13), que si  $v = Op(f)u$ , et si  $u_1$  et  $v_1$  sont liés à  $u$  et  $v$  par (16.15), alors  $v^1 = Op^1(f^1)u^1$  pourvu que l'on définisse  $f^1$  sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}^1$  par

$$(16.19) \quad f^1(y; q) = f(c^{-2} y_0, c^{-1} \vec{y}; c^2 q_0, c\vec{q}) :$$

évidemment  $f^1$  est admissible au sens de la théorie pour laquelle  $c = 1$  si  $f$  est admissible.

Les opérateurs de la représentation de Bargmann-Wigner s'obtiennent par exemple à partir de (2.12). Les groupes de Lorentz ortho-

chrones  $\mathcal{L}^\uparrow$  et  $(\mathcal{L}^\uparrow)^1$  (caractérisés par le fait que, dans chaque cas,  $M'$  doit conserver l'hyperboloïde de masse) se correspondent sous la transformation de  $q \in \mathcal{M}^1$  en  $(c^2 q_0, c\vec{q}) \in \mathcal{M}$ , ce qui fait que les opérateurs cherchés s'obtiennent à partir des opérateurs dans la théorie pour laquelle  $c = 1$  en conjuguant par la transformation  $u \mapsto u^1$  définie en (16.15). Il est immédiat que les opérateurs qui correspondent par (16.15) aux générateurs infinitésimaux  $\langle D \rangle$ ,  $D_j$ ,  $x_j \langle D \rangle$  et  $x_j D_k - x_k D_j$  dont il a été question dans la section 12 sont les opérateurs  $[1 - (2\pi c)^{-2} \Delta]^{\frac{1}{2}}$ ,  $c^{-1} D_j$ ,  $c x_j [1 - (2\pi c)^{-2} \Delta]^{\frac{1}{2}}$  et  $x_j D_k - x_k D_j$ ; d'après la proposition 12.1 et la règle (16.19), les symboles (actif ou passif)  $f_0(\vec{x}, \vec{p})$  de ces opérateurs sont les fonctions  $(1 + c^{-2} |\vec{p}|^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $c^{-1} p_j$ ,  $(1 + c^{-2} |\vec{p}|^2)^{\frac{1}{2}} c x_j$  et  $x_j p_k - x_k p_j$ . Cependant, le choix que nous avons effectué, dans la section 12, d'une base de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré en vue de définir ces générateurs était arbitraire, et nous allons renormaliser notre choix comme suit :

<u>Générateur infinitésimal</u>	<u>Symbole</u> (restreint à $x_0=0$ )
$D_j$	$p_j$
$\langle D \rangle = (1 - \frac{\Delta}{4\pi^2 c^2})^{\frac{1}{2}}$	$(1 + \frac{ \vec{p} ^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} = c^{-2} p_0$
$B_j = x_j \langle D \rangle$	$x_j (1 + \frac{ \vec{p} ^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}$
$R_{jk} = x_j D_k - x_k D_j$	$x_j p_k - x_k p_j$

Observons les relations de commutation

$$\begin{aligned}
 (16.20) \quad [B_j, \langle D \rangle] &= -(2i\pi)^{-1} c^{-2} D_j, \\
 [B_j, D_k] &= -(2i\pi)^{-1} \delta_{jk} \langle D \rangle, \\
 [B_j, B_k] &= (2i\pi)^{-1} c^{-2} R_{jk}.
 \end{aligned}$$

Evidemment, lorsque  $c \rightarrow \infty$ ,  $\langle D \rangle$  dégénère vers l'opérateur identique,  $B_j$  vers l'opérateur  $x_j$  et les relations (16.20) vers celle du groupe de Galilée, la deuxième étant la relation d'Heisenberg; les symboles correspondants dégénèrent vers les symboles de Weyl des opérateurs limites. Il semble que le seul aspect de la théorie relativiste plus simple que sa contrepartie non-relativiste réside dans le fait que la représentation de Bargmann-Wigner est une vraie (i.e. non projec-

tive) représentation, au contraire de celle de Galilée : la section 3 explique l'origine de ce fait, lié à ce qu'il faut, dans le cas non relativiste, faire opérer sur le paraboloïde de masse un groupe de transformations affines, non linéaires.

L'oscillateur relativiste (cf. prop.15.4) doit être défini, pour  $c$  quelconque, par

$$(16.21) \quad \pi^{-1}L = \sum_j (B_j^2 + D_j^2) - c^{-2} \sum_{j < k} R_{jk}^2$$

soit

$$(16.22) \quad -4\pi L = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - 4\pi^2 |\vec{x}|^2 + c^{-2} [\sum x_j x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + n \sum x_j \frac{\partial}{\partial x_j}] .$$

Comme  $\mathcal{G}_j B_j \mathcal{G}_j^{-1} = -(2i\pi)^{-1} (1 + c^{-2} |\vec{p}|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial p_j}$ , c'est en effet ce choix qui permet d'obtenir le fait fondamental que  $L$  commute avec  $\mathcal{G}_j$  (comme le groupe de Poincaré n'est pas semi-simple, nous n'avons pas trouvé de raison a priori pour le choix des coefficients dans (16.21)).

Observons que, d'après (15.22), l'oscillateur  $L$  est la somme de l'oscillateur harmonique  $L_W$  et d'un terme accompagné du coefficient  $c^{-2}$  : encore une fois,  $L$  dégénère vers  $L_W$  quand  $c \rightarrow \infty$ . On voit que, lorsque  $n = 1$ , l'oscillateur de Mathieu-Hermite  $L = M.H.$  s'écrit

$$(16.23) \quad M.H. = (-4\pi)^{-1} \left[ \frac{d^2}{dx^2} - 4\pi^2 x^2 + c^{-2} \left( x \frac{d}{dx} \right)^2 \right] :$$

sous le changement de variable  $x = c \sinh t$ , cet opérateur devient l'opérateur de Mathieu modifié général (cf. (15.28))

$$(16.24) \quad (-4\pi c^2)^{-1} \left[ \frac{d^2}{dt^2} - 2\pi^2 c^4 \cosh 2t + 2\pi^2 c^4 \right] .$$

Si l'on identifie les symboles admissibles à des fonctions de  $(\vec{x}, \vec{p})$  par la restriction habituelle, l'opérateur  $\nabla^\lambda$  défini en (16.14) devient lorsque  $n = 1$  l'opérateur

$$(16.25) \quad \nabla^\lambda = \left( 1 + \frac{p^2}{16\pi^2 c^2} \right)^{\lambda/2} = \left[ 1 - \frac{1}{16\pi^2 (c^2 + p_1^2)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right]^{\lambda/2} ,$$

et la formule (16.19), jointe au calcul effectué plus haut du transfert par (16.15) des générateurs infinitésimaux, fournit (15.65) et (15.68) sous la forme



$$(16.26) \quad p_1 \# g = (4i\pi)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_1} + p_1 \nabla g$$

et

$$(16.27) \quad \left(x_1 \left(1 + \frac{p_1^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \# g = x_1 \left(1 + \frac{p_1^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \nabla g \\ + (4i\pi)^{-1} \left[ c^{-2} p_1 x_1 \left(1 + \frac{p_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g}{\partial x_1} - \left(1 + \frac{p_1^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial g}{\partial p_1} \right].$$

Le symbole actif de l'oscillateur de Mathieu est

$$(16.28) \quad \ell_1(x_1, p_1) = \pi \left[ x_1^2 \left(1 + \frac{p_1^2}{c^2}\right) + p_1^2 - (4\pi c)^{-2} \right]:$$

il se contracte bien entendu vers le symbole de Weyl  $\pi(x_1^2 + p_1^2)$  de l'oscillateur harmonique quand  $c \rightarrow \infty$ .

La formule de la proposition 15.9, qui donne  $\ell_1 \# f$ , doit être modifiée en y remplaçant  $2B$  par le hamiltonien de  $\pi^{-1}\ell_1$  et en prenant

$$(16.29) \quad A = c^{-2} p_1^2 \left(1 + \frac{p_1^2}{c^2}\right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c^{-2} x_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 3c^{-2} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ + \left[ c^{-2} p_1 x_1 \left(1 + \frac{p_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_1} - \left(1 + \frac{p_1^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial p_1} \right]^2.$$

On en déduit que si  $f(x_1; p) = h(r)$  avec

$$(16.30) \quad r = \left(1 + \frac{p_1^2}{c^2}\right) x_1^2 + p_1^2,$$

alors

$$(16.31) \quad -4\pi \ell_1 \# f = r \left(\frac{r}{c^2} + 1\right) h'' + \left(2 \frac{r}{c^2} + 1\right) h' - 4\pi^2 r h + \frac{1}{4c^2} h.$$

Autrement dit, le théorème 15.11 reste valable si l'opérateur M.L.  $-(16\pi)^{-1}$  qui y apparaît est remplacé par M.L.  $-(16\pi c^2)^{-1}$  et si l'on pose maintenant

$$(16.32) \quad -4\pi \text{ M.L.} = r \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} - 4\pi^2 r + c^{-2} \left[ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr} \right].$$

D'après (15.99), la limite de cet opérateur quand  $c \rightarrow \infty$  est l'opé-

rateur de Laguerre  $\mathcal{L}$  : il ne pouvait en être autrement puisque les fonctions de Wigner, au sens du calcul de Weyl, des fonctions propres de l'oscillateur harmonique, sont les fonctions  $\gamma_j(x_1^2 + \xi_1^2)$  si l'on définit les fonctions  $\gamma_j$  comme dans la proposition 15.13.

Pour terminer, nous allons indiquer brièvement comment il convient de faire dépendre de  $c$  les états cohérents  $\psi_Z$  (définition 4.3) et  $\varphi_{\vec{y},q}$  (cf. (4.7)). On pose toujours

$$(16.33) \quad (\mathcal{D}_j \psi_Z)(p) = e^{-2\pi \langle Z, p \rangle}, \quad Z \in \Pi$$

d'où

$$(16.34) \quad \psi_Z(\vec{x}) = 2c^n k_{\frac{n-1}{2}}(c^4 z_0^2 - c^2 \sum (z_j - ix_j)^2)$$

avec  $k_{\frac{n-1}{2}}$  comme dans la définition 4.1 : il suffit pour le voir de reprendre les propositions 4.3 et 4.4, ou de les "transférer" au moyen de (16.15). Pour définir  $\varphi_{\vec{y},q}$  comme en (4.7), il faut prendre garde que  $J$  doit être l'isomorphisme du dual de  $\widetilde{\mathcal{M}}_{n+1}$  sur  $\widetilde{\mathcal{M}}_{n+1}$  associé naturellement au  $ds^2$  de Minkowski, en d'autres termes

$$(16.35) \quad Jp = (c^{-2} p_0, -\vec{p}).$$

On a donc, avec  $q \in \mathcal{M}$ ,

$$(16.36) \quad \varphi_{\vec{y},q}(\vec{x}) = 2c^n k_{\frac{n-1}{2}}(c^4 + c^2 |\vec{y} - \vec{x}|^2 + 2ic^2 \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{q} \rangle)$$

et

$$(16.37) \quad \hat{\varphi}_{\vec{y},q}(\vec{\xi}) = (1 + \frac{|\vec{\xi}|^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \exp -2\pi [q_0 (1 + \frac{|\vec{\xi}|^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} - \langle \vec{q} - i\vec{y}, \vec{\xi} \rangle].$$

Conformément à (3.18), posons

$$(16.38) \quad \chi_{\vec{y},\vec{q}}(\vec{x}) = 2^{n/4} e^{-\pi |\vec{x} - \vec{y}|^2} e^{2i\pi \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{q} \rangle} :$$

il s'agit de la famille d'états cohérents attachée au calcul de Weyl. La formule asymptotique ([22], p.139)

$$(16.39) \quad k_{\frac{n-1}{2}}(z) = \frac{1}{2} z^{-\frac{n}{4}} e^{-2\pi z^{\frac{1}{2}}}$$

valable quand  $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$ , montre que quand  $c \rightarrow \infty$ ,

$$(16.40) \quad e^{2\pi c^2 \varphi_{\vec{y}, \vec{q}}} \rightarrow 2^{-\frac{n}{4}} \chi_{\vec{y}, \vec{q}} :$$

on peut bien entendu, pour le voir, partir également de (16.37).

Ainsi, à la normalisation près, la famille  $(\varphi_{\vec{y}, \vec{q}})$  des états cohérents du calcul de Klein-Gordon converge vers la famille des états cohérents du calcul de Weyl.

Nous allons enfin expliciter, pour  $c$  quelconque, l'opérateur qui lie les symboles de Klein-Gordon et de Wick relativiste (théorème 6.2). Avec  $J$  défini en (16.35), on obtient après quelques calculs basés sur la proposition 4.5 la formule

$$(16.41) \quad W(\varphi_{\vec{y}, \vec{q}}, \varphi_{\vec{y}, \vec{q}})(0, \vec{x}; p) = 2^{n+1} c^{n+1} k_{\frac{n-1}{2}}(4\rho)$$

avec

$$(16.42) \quad \rho = \langle Jp, q \rangle^2 + c^2 |\vec{y} - \vec{x}|^2 + \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{p} \rangle^2.$$

Lorsque  $c \rightarrow \infty$ ,

$$(16.43) \quad \langle Jp, q \rangle = c^2 \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{|\vec{q}|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle \sim c^2 + \frac{1}{2} |\vec{p} - \vec{q}|^2$$

à des termes en  $c^{-2}$  près, d'où

$$(16.44) \quad \rho^{\frac{1}{2}} \sim c^2 + \frac{1}{2} [|\vec{p} - \vec{q}|^2 + |\vec{y} - \vec{x}|^2]$$

et par suite, d'après (16.39)

$$(16.45) \quad W(\varphi_{\vec{y}, \vec{q}}, \varphi_{\vec{y}, \vec{q}})(0, \vec{x}; p) \sim 2^{\frac{n}{2}} e^{-4\pi c^2} e^{-2\pi (|\vec{p} - \vec{q}|^2 + |\vec{y} - \vec{x}|^2)}$$

et l'on reconnaît dans le membre de droite le produit par  $2^{-\frac{n}{2}} e^{-4\pi c^2}$  de la fonction de Wigner, au sens du calcul de Weyl, de la paire  $(\chi_{\vec{y}, \vec{q}}, \chi_{\vec{y}, \vec{q}})$  : ceci confirme la formule (16.40).

L'opérateur  $C(\square, \Delta_{\mathcal{H}})$  qui, selon le théorème 6.2, fait passer du symbole de Klein-Gordon d'un opérateur à son symbole de Wick relativiste, est donné pour  $c$  quelconque par

$$C(\square, \Delta) = 2^{\frac{3-n}{2}} c \left(1 + \frac{\square}{16\pi^2 c^2}\right)^{\frac{n-1}{4}} K_{i[-c^2 \Delta - (\frac{n-1}{2})^2]^{\frac{1}{2}}} (4\pi c^2 \left(1 + \frac{\square}{16\pi^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}}) .$$

Posons  $\Delta_x = \Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  et  $\Delta_p = \Sigma \frac{\partial^2}{\partial p_j^2}$  : d'après (16.7),  $\Delta_{\mathcal{M}}$  converge vers  $\Delta_p$  quand  $c \rightarrow \infty$  et, d'après (16.1), on a

$$(16.46) \quad \left(1 + \frac{\square}{16\pi^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sim \left(1 - \frac{\Delta_x}{16\pi^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

à des termes en  $c^{-2}$  près.

Terminons par un argument tout à fait formel, qu'un peu de théorie spectrale pourrait cependant justifier. Lorsque  $v > 0$  et  $z > 0$  tendent vers  $\infty$ ,  $v^2 z^{-1}$  tendant vers une limite finie, une formule de [22], p.141 (appliquée dans des conditions sortant un peu de celles de cette référence) fournit

$$K_{iv}(z) \sim 2^{-\frac{1}{2}} (z^2 - v^2)^{-\frac{1}{4}} \exp[-(z^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{v^2}{z}] . \quad \pi^{\frac{1}{2}}$$

Avec  $v = (-c^2 \Delta_{\mathcal{M}} - (\frac{n-1}{2})^2)^{\frac{1}{2}}$  et  $z = 4\pi c^2 \left(1 + \frac{\square}{16\pi^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ , on a (pour  $c \rightarrow \infty$ )

$$(16.47) \quad z^2 - v^2 \sim 16\pi^2 c^4 - c^2 \Delta_x + c^2 \Delta_p$$

et  $v^2 z^{-1} \sim -(4\pi)^{-1} \Delta_p$ , d'où

$$(16.48) \quad (z^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{v^2}{z} \sim 4\pi c^2 - \frac{1}{8\pi} (\Delta_p + \Delta_x)$$

et

$$(16.49) \quad C(\square, \Delta) \sim 2^{-\frac{n}{2}} e^{-4\pi c^2} e^{(8\pi)^{-1} (\Delta_p + \Delta_x)} .$$

D'après (3.23) et la renormalisation imposée par (16.40), on voit qu'on retrouve à la limite non-relativiste l'opérateur qui fait passer du symbole de Weyl au symbole de Wick non-relativiste : cette vérification était le seul but des considérations formelles de ces dernières lignes.

## APPENDICE

Un certain système d'équations linéaires intervient si souvent dans ce travail qu'il est utile d'en écrire une fois pour toutes les formules de résolution.

LEMME. Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{a}$  et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ , et supposons  $\lambda \neq 0$ . La transformation  $\vec{x} \mapsto \vec{X}$  telle que

$$X_j = \lambda x_j + a_j + b_k x_k$$

a pour déterminant  $\lambda^{n-1}(\lambda + \sum a_j b_j)$ . Son inverse est donnée par

$$x_j = \lambda^{-1} X_j - \lambda^{-1} (\lambda + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)^{-1} a_j + b_k x_k.$$

Preuve. En écrivant

$$\vec{X} = \lambda \vec{x} + \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle \vec{a}$$

on obtient

$$\langle \vec{X}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle (\lambda + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle),$$

ce qui conduit aux formules de résolution. Pour le calcul du déterminant  $d$ , on se ramène par une rotation au cas où  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  appartiennent à l'espace engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , auquel cas

$$d = \lambda^{n-2} \det \begin{pmatrix} \lambda + a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & \lambda + a_2 b_2 \end{pmatrix} = \lambda^{n-1} (\lambda + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle).$$

COROLLAIRE. Pour tout  $p \in \mathcal{M}$ , la forme quadratique  $\| \cdot \|_p^2$  sur  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$\| \vec{x} \|_p^2 = |\vec{x}|^2 + \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle^2$$

a pour discriminant  $p_0^2$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] ALI, S.T., ANTOINE, J.P., GAZEAU, J.P. Triplets reproduisants, repères continus et carré-intégrabilité de représentations de groupes sur des espaces homogènes, à paraître.
- [ 2 ] BEALS, R. A general calculus of pseudodifferential operators, Duke Math. J. 42 (1975), 1-42.
- [ 3 ] BOGOLUBOV, N.N., LOGUNOV, A.A. et TODOROV, I.T. Introduction to axiomatic quantum field theory, W.A. Benjamin, Inc., Reading (Mass.), 1975.
- [ 4 ] BOURDAUD, G. Une algèbre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels, Comm. Part. Diff. Equ. 13,9 (1988), 1059-1084.
- [ 5 ] CARTIER, P. Quantum mechanical commutation relations and theta functions, Proc. Symp. Pure Math. IX (1966), 361-383.
- [ 6 ] CORDOBA, A. et FEFFERMAN, C. Wave packets and Fourier integral operators, Comm. Part. Diff. Equ. 3,11 (1978), 979-1006.
- [ 7 ] DAUTRAY, R., LIONS, J.L. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Collection CEA, Paris, 1985.
- [ 8 ] FARAUT, J. Analyse harmonique sur les espaces riemanniens symétriques de rang un, CIMPA, Ecole d'Eté "Analyse harmonique", Université de Nancy I, 1980.
- [ 9 ] FEYNMAN, R.P. Quantum Electrodynamics, Benjamin / Cummings Pub. Co, Inc., Reading (Mass.), 1962.
- [ 10 ] FEYNMAN, R.P. Le cours de Physique de Feynman, Electromagnétisme, InterEditions, Paris, 1979.
- [ 11 ] GUILLEMIN, V., STERNBERG, S. Symplectic techniques in physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [ 12 ] HEJHAL, D.A. The Selberg Trace Formula for  $PSL(2, \mathbb{R})$ , Lecture Notes in Math. n° 548, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [ 13 ] HELGASON, S. Differential geometry, Lie groups, and Symmetric spaces, Acad. Press, New-York, 1978.
- [ 14 ] HELGASON, S. Groups and geometric analysis, Acad. Press, New-York, 1984.
- [ 15 ] HÖRMANDER, L. Pseudodifferential operators and non-elliptic boundary problems, Ann. of Math. 83 (1966), 129-209.
- [ 16 ] HÖRMANDER, L. The Weyl calculus of pseudodifferential operators, Comm. Pure Appl. Math. 23,3 (1979), 359-443.
- [ 17 ] KUBOTA, T. Elementary theory of Eisenstein series, Kodansha Ltd, Tokyo, et J. Wiley and Sons, New-York, 1973.

- [18] LANDAU, L., LIFCHITZ, E. Théorie du champ, Editions Mir, Moscou, 1966.
- [19] LANDAU, L., LIFCHITZ, E. Théorie quantique relativiste, Editions Mir, Moscou, 1972.
- [20] LANG, S.  $SL(2, \mathbb{R})$ , Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1975.
- [21] LAX, P.D., PHILLIPS, R.S. Translation representation for the solutions of the non-euclidean wave equation, Comm. Pure Appl. Math. 32,5 (1979), 617-667.
- [22] MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., SONI, R.P. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, 3ème édition, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [23] MAZZEO, R. Hodge cohomology of negatively curved manifolds, Thesis, MIT, 1986.
- [24] MEIXNER, J., SCHÄFKE, F.W. Mathiesche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Springer-Verlag, Berlin, 1954.
- [25] MELIN, A. Lower bounds for pseudodifferential operators, Ark. för Mat. 9 (1970), 117-140.
- [26] MELROSE, R.B. Transformation of boundary problems, Acta Math. 147 (1981), 149-236.
- [27] PERELOMOV, A. Generalized coherent states and their applications, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [28] REED, M., SIMON, B. Methods of modern mathematical physics, vol. 2, Acad. Press, New-York, 1975.
- [29] SCHWARTZ, L. Théorie des distributions, t.2, Hermann, Paris, 1959.
- [30] UNTERBERGER, A. Symboles associés aux champs de repères de la forme symplectique, Note C.R. Acad. Sci. Paris 285 (1977), 1005-1008.
- [31] UNTERBERGER, A. Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels, Ann. Inst. Fourier 29 (1979), 201-221.
- [32] UNTERBERGER, A. Les opérateurs métadifférentiels, Lecture Notes in Physics 126 (1980), 205-241.
- [33] UNTERBERGER, A. Quantification de certains espaces hermitiens symétriques, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1979-80, Ecole Polytechnique, Paris, 1980.
- [34] UNTERBERGER, A. L'opérateur de Laplace-Beltrami du demi-plan et les quantifications linéaire et projective de  $SL(2, \mathbb{R})$ , Colloque en l'honneur de L.Schwartz, Astérisque 131 (1985), 255-275.
- [35] UNTERBERGER, A. Symbolic calculi and the duality of homogeneous spaces, Contemp. Math. 27 (1984), 237-252.
- [36] UNTERBERGER, A. Analyse harmonique et analyse pseudo-différentielle du cône de lumière, Astérisque n° 156, Soc. Math. de France, Paris, 1987.

- [37] UNTERBERGER, A. Pseudodifferential analysis, quantum mechanics and relativity, Comm. Part. Diff. Equ. 13,7 (1988), 847-894.
- [38] UNTERBERGER, A., UNTERBERGER, J. La série discrète de  $SL(2, \mathbb{R})$  et les opérateurs pseudo-différentiels sur une demi-droite, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 17 (1984), 83-116.
- [39] UNTERBERGER, A., UNTERBERGER, J. A quantization of the Cartan domain BDI ( $q=2$ ) and operators on the light cone, J. Funct. Anal. 72,2 (1987), 279-319.
- [40] UNTERBERGER, A., UNTERBERGER, J. Quantification et analyse pseudo-différentielle, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 21 (1988), 133-158.
- [41] VILENKIN, N.Ja. Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes, Dunod, Paris, 1969.
- [42] WAWRZYNCZYK, A. Group representations and special functions, D. Reidel Pub. Co, Dordrecht, 1984.
- [43] WHITTAKER, E.T., WATSON, G.N. A course of modern analysis, 4ème éd., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1965.





$a_o$	63	$\tilde{f}$	130	$\mathcal{P}$	7, 19
$a$	67	$f_E$	34	$\mathcal{P}_o$	19, 26
$\alpha, \beta, \dots, \{\alpha\} \dots$	130	$\mathcal{F}_{1/2}$	183	$\mathcal{P}^*$	26
$A'_q, B'_q(j)$	160	$\mathcal{Q}_{j,k\dots}$	8, 27	$\Pi$	45
$\mathcal{A}$	75	$J$	21	$\mathcal{Q}_m, \mathcal{Q}$	139, 140
$b_j$	22, 169	$J_p$	29	$r$	45
$B_j$	169	$k_\nu, K_\nu$	45	$r_{jk}$	22, 169
$B_1(f, g)$	131, 133	$\mathcal{K}$	105	$R_y^k$	153
$B_2(f, g)$	131	$L$	15, 186	$S_p$	28
$\mathcal{B}_{N,N'}$	152	$L_{1/2}$	183	$\text{Symb}(m)$	75, 78
$C$	46	$\mathcal{L}, \mathcal{L}_o$	19	$\sigma_\omega$	9, 26, 28
$C(\alpha, \Delta)$	60	$\wedge$	30	$T$	7, 119
$dU(X)$	123	$\wedge_p$	30, 150	$T_y^{k-1}$	153
$\delta(p, q)$	70	$M'$	21	$\tau$	159
$\delta_+(Z, Z')$	113	$(M, a)$	9, 21, 26	$\tilde{u}$	5, 27
$D_j$	169	$M.H., M.L.$	182, 203, 204	$U(M, a)$	9, 26
$\langle D \rangle$	5, 27, 124, 169	$\mathbb{M}_{n+1}$	7, 19	$\tilde{V}^j(\partial_x), \tilde{W}^k(\partial_\xi)$	75, 88, 97
$\nabla^\lambda$	10, 33	$\mathbb{M}_{n+1}$	19	$W(\psi_Z, \psi_{Z'})$	47
$\Delta_{\mathcal{M}}$	57, 72	$\mathcal{M}$	8, 25	$W^*(\psi_k, \psi_k)$	16, 189
$e_o$	25	$\nu_{\tilde{\sigma}}$	156	$x, \tilde{x}, x$	7, 21
$e_j, e_{jk}, e_{j,\varepsilon}$	13, 75	$Op$	31	$\chi_{\tilde{\sigma}, \eta}$	42
$e(j), e(i)$	151	$Op_o, Op_t, Op_1$	99	$\chi^\lambda_{\tilde{\sigma}, \xi}$	88
$e_q(j), e_q(i)$	159	$P, P_o, \tilde{P}$	8, 25	$\psi_Z, \psi_Z$	11, 46
$\varepsilon_\omega$	28	$  \tilde{P} \wedge \tilde{Q}^*  $	70	$\Psi$	46
$E$	7, 19	$Pr_E, Pr_T$	20	$\omega$	7, 19
$\mathbb{E}$	30	$P, \tilde{P}$	19	$\omega_o$	20, 106, 135
$f_o$	63	$P_\omega$	7, 20	$\Omega$	20, 26
$\varphi_{\tilde{x}, p}$	47				
$\langle \vec{\sigma} \rangle$	27	$\#$	106, 118, 158	$\parallel \parallel_{N, N'}$	152
$\square$	27	$\mathcal{H}$	186	$\parallel \parallel_{m, \mu}$	
$\{ \} \quad \{ \{ \} \}$	130, 131	$\parallel \parallel_p, \parallel \parallel_p$	72	$\parallel \parallel_{N, N'}$	156



admissible (fonction)	9, 29, 31	Mathieu (équ., opér.)	176
anti-Wick (symbole)	49	Mathieu modifié	15, 175, 176
Bargmann-Fock (transf.)	42	Mathieu-Hermite (opér.)	180
Bargmann-Wigner (rep.)	9, 26, 28	Mathieu-Laguerre (opér.)	16, 180
boost	21, 30	Minkowski (espace)	7, 19
Calderon-Vaillancourt (th.)	40, 42	observateur	7, 20
contraction	197	observateur non-restreint	19
Contraction de Lorentz	12, 149, 150	othochrone	26
covariance	5, 29	oscillateur harmonique	174
De Sitter (groupe)	171	oscillateur relativiste	176
énergie-impulsion	25	paraboloïde de masse	38
espace-temps	7, 19	parité (opér.)	9, 26, 28
états cohérents	10, 41, 47	phase (espace)	26
fibré spatial	30	Poincaré (transf., groupe)	7, 19, 21
fonction-poids	12, 74	point de base	25
Fourier (transf.)	27	résolution de l'identité	42, 48
Galilée (groupe)	37	standard (symbole)	63
genre espace	33	symbole actif	10, 31
Hermite (fonctions)	174	symbole passif	10, 29
hyperboloïde de masse	8, 25	symbole de poids m	75
infinitésimal (générateur)	123	symétrie spatiale	20
Klein-Gordon (calcul)	29	type	152
Klein-Gordon (équation)	5, 27, 28	vitesse	8, 20
ligne d'univers	149	Wick (symbole)	12, 42, 49
$\lambda$ -symbole	67	Wigner (fonction)	47, 106
Lorentz (transf., groupe)	19	Wigner active (fonction)	16, 189

André Unterberger  
Département de Mathématiques  
Université de Reims  
Moulin de la Housse, BP 347  
51062 Reims cedex