

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

B. HELFFER

J. SJÖSTRAND

**Analyse semi-classique pour l'équation de Harper. II :
comportement semi-classique près d'un rationnel**

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 40 (1990)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1990_2_40__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALYSE SEMI-CLASSIQUE POUR L'EQUATION DE HARPER II

Comportement semi-classique près d'un rationnel

PAR

B. HELFFER ET J. SJÖSTRAND

RÉSUMÉ.

Dans ce travail nous continuons notre étude de l'opérateur de Harper, $\cos hD_x + \cos x$ dans $L^2(\mathbf{R})$, par des méthodes d'analyse microlocale et de renormalisation. On traite ici le cas où $h/2\pi$ est proche d'un rationnel : $h/2\pi = 1/(q_0 + 1/(q_1 + \dots))$, avec $q_j \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $|q_j| \leq N_0$, pour $j \leq N_0$, et $q_j \geq C(N_0)$ pour $j \geq N_0 + 1$. Ici N_0 est arbitraire.

ABSTRACT.

In this paper, we continue our study of Harper's operator, $\cos hD_x + \cos x$ in $L^2(\mathbf{R})$, by microlocal analysis and renormalization. We treat here the case when $h/2\pi$ is close to rational number : $h/2\pi = 1/(q_0 + 1/(q_1 + \dots))$ with $q_j \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $|q_j| \leq N_0$ for $j \leq N_0$, and $q_j \geq C(N_0)$ for $j \geq N_0 + 1$. Here N_0 is arbitrary.

Texte reçu le 4 Novembre 1988, révisé le 19 Juin 1989.

B.HELFFER, Département de Mathématiques, UA CNRS 758, Université de Nantes,
44072 Nantes cedex 03 et D.M.I., Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm,
75005 Paris, France.

J.SJÖSTRAND, Département de Mathématiques, UA CNRS 760, Université Paris-Sud,
91405 Orsay cedex, France

0. INTRODUCTION.

Dans **[He-Sj5]**, nous avons étudié le spectre de l'équation de Harper

$$(0.1) \quad \begin{aligned} (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} &\xrightarrow{H_\theta} \frac{1}{2} (u_{k+1} + u_{k-1}) + \cos(ak + \theta) u_k \\ u &\longrightarrow H_\theta u \end{aligned}$$

ou plus précisément $\bigcup_{\theta} \text{Sp } H_\theta$ dans le cas où :

(0.2) $a/2\pi$ est rationnel (cas traité auparavant par J. BELLISSARD et B. SIMON **[BeSi]**).

(0.3) $a/2\pi$ est congru modulo \mathbb{Z} à \hbar avec \hbar petit ($\hbar = h/2\pi$).

On se propose ici de regarder le cas où :

$$(0.4) \quad a \equiv 2\pi \left(\frac{p}{q} \right) + h \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$$

avec $|h|$ assez petit et p et q premiers entre eux.

L'objet de cet article est donc de justifier les articles non rigoureux mathématiquement mais très fondés numériquement ou physiquement consacrés à cette situation pour lesquels nous référons à M. WILKINSON **[Wi1-5]** et un Survey de J.B. SOKOLOFF **[So]**. Mentionnons également un Survey récent de J. BELLISSARD **[Be2]** qui annonce des résultats mathématiques qui recoupent partiellement les nôtres en liaison avec les travaux de l'école de Grenoble (RAMMAL et ses collaborateurs **[WPR]**).

Nous espérons ainsi expliquer d'autres aspects du papillon de HOFSTADTER **[Ho]** tout en restant loin de l'explication générale du dessin car nous sommes limités par les contraintes de l'approximation semi-classique.

Par rapport à **[HeSj5]**, le gain peut sembler minime mais il élargit en fait sensiblement les résultats de cet article. On démontrera par exemple le résultat suivant pour l'opérateur de Harper :

$$(0.5) \quad P(a) = \cos(a D_X) + \cos x$$

dont le spectre est $\bigcup_{\theta} \text{Sp } H_{\theta}$.

Théorème 0.1. Soit $\varepsilon_0 > 0$, $C_0 \in \mathbb{N}$ ($C_0 \geq 2$). Il existe une constante $C(C_0, \varepsilon_0) > 0$ telle que si $a/2\pi$ admet le développement en fraction continue :

$$(0.6) \quad a/2\pi = q_0 + 1/(q_1 + 1/(q_2 + 1/\dots)) \equiv (p/q) + h$$

avec pour un certain $m \leq C_0$

$$(0.7) \quad \begin{array}{ll} 0 < |q_j| \leq C_0 & \text{pour } 0 \leq j \leq m \\ |q_j| \geq C(C_0, \varepsilon_0) & \text{pour } j \geq m+1 \end{array}$$

alors, si $a/2\pi \notin \mathbb{Q}$, le spectre de $P(a)$ est inclus dans la réunion de $q^{(m)}$ intervalles disjoints (si $h \neq 0$) $I_{\ell}(h)$ ($\ell = 1, \dots, q^{(m)}$) de la forme : $[\gamma_{\ell}(h), \delta_{\ell}(h)]$ avec :

$$(0.8) \quad \begin{array}{l} \gamma_{\ell}(h) > \gamma_{\ell} - Ch, \quad \delta_{\ell}(h) < \delta_{\ell} + Ch \\ \gamma_{\ell} < \delta_{\ell} \leq \gamma_{\ell+1} < \delta_{\ell+1} \\ \gamma_{\ell}(h), \delta_{\ell}(h) \in \text{Sp } P(a) \end{array}$$

où $q^{(m)}$ est défini comme le dénominateur de la fraction rationnelle obtenue en tronquant le développement en fraction continue à l'étape m :

$$(0.9) \quad a^{(m)} = p^{(m)} / q^{(m)} = q_0 + 1/(q_1 + 1/(q_2 + 1/\dots(q_{m-1} + 1/q_m)))$$

avec $p^{(m)}$ premier avec $q^{(m)}$; $q^{(m)} \in \mathbb{N}$.

$$(0.10) \quad h = a - 2\pi a^{(m)}$$

$$(0.11) \quad \bigcup_{\ell} [\gamma_{\ell}, \delta_{\ell}] \text{ correspond au spectre de } P(2\pi a^{(m)})$$

$$(0.12) \quad d(I_{\ell}(h), I_{\ell+1}(h)) \geq 1/C \text{ si } \delta_{\ell} \neq \gamma_{\ell+1} \text{ et } \geq 1/C \sqrt{h} \text{ si } \delta_{\ell} = \gamma_{\ell+1}.$$

Dans chaque intervalle $I_{\ell}(h)$, $\text{Sp } P(a) \cap I_{\ell}(h)$ se décrit comme une

réunion d'intervalles fermés $J_j^{(\ell)}$, où les $J_j^{(\ell)}$ sont des intervalles fermés de longueur $\neq 0$ avec $\partial J_j \subset \text{Sp}(P(a))$, $J_{j+1}^{(\ell)}$ se trouve à droite de $J_j^{(\ell)}$ et

$$(0.13) \quad 1/|q_{m+1}| \lesssim d(J_j^{(\ell)}, J_{j+1}^{(\ell)}) \lesssim 1/\sqrt{|q_{m+1}|}.$$

$$(0.14) \quad J_0^{(\ell)} \text{ est de longueur } 2\varepsilon_0 + O(1/|q_{m+1}|).$$

$$(0.15) \quad \text{Les autres bandes sont de largeur } e^{-C(j)/|q_{m+1}|} \text{ avec } C(j) \approx 1.$$

Pour $j \neq 0$, si $K_j^{(\ell)}$ désigne la fonction affine croissante qui transforme $J_j^{(\ell)}$ en $[-2, 2]$, on a alors $K_j^{(\ell)}(J_j^{(\ell)} \cap \text{Sp}(P(a))) \subset \bigcup_k J_{j,k}^{(\ell)}$ où les $J_{j,k}^{(\ell)}$ vérifient des propriétés analogues avec q_{m+1} remplacé par q_{m+2} et (0.13) peut être précisé en :

$$(0.16) \quad d(J_{j,k}^{(\ell)}, J_{j;k+1}^{(\ell)}) \approx 1/q_{m+1}$$

et ainsi de suite

(Ici $a \lesssim b$ signifie que a/b est majoré par une constante qui ne dépend que de C_0 et ε_0).

Dans le cas rationnel, on a le même résultat, mais la procédure s'arrête après un nombre fini d'étapes. ■

Remarque 0.2. ε_0 correspond à l'exclusion dans chaque intervalle (et à chaque étape de la renormalisation) d'un petit intervalle dans lequel il faut faire une étude différente et qui correspond à un voisinage de l'énergie 0 pour l'Hamiltonien $\cos \xi + \cos x$. Ce problème sera étudié dans [HeSj6].

Remarque 0.3. Compte-tenu des résultats très récents de P. VAN MOUCHE [VM] et de CHOI, ELLIOTT, et YUI [C-E-Y], on ne peut

avoir $\delta_{\ell} = \gamma_{\ell+1}$ que pour $q^{(m)}$ impair et pour $\ell = (q^{(m)} - 1)/2$.

Au niveau des méthodes, on ramène l'étude de l'opérateur de Harper

$$\cos((2\pi a^{(m)} + h)D_X) + \cos x$$

à l'étude d'un système pseudodifférentiel $q^{(m)} \times q^{(m)}$ dont on constate qu'il est à caractéristiques au plus doubles.

En étant très schématique, on se ramène alors à l'étude ou bien d'opérateurs pseudodifférentiels scalaires modélisés sur :

$$\cosh D_X + \cos x + h \psi(x, h D_X, h)$$

(où l'on voit apparaître un terme d'ordre inférieur lié à une phase de Berry discutée chez WILKINSON [Wi2] et chez BELLISSARD [Be2] ("Formule de Rammal-Wilkinson") et qui sera discuté au §.6 ou bien à l'étude de système 2×2 du type de Dirac analogues à celui observé dans le cas $a^{(m)} = \frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} \cosh D_X & \cos x \\ \cos x & -\cosh D_X \end{pmatrix}$$

près de l'énergie 0 et qui décriront la situation près des valeurs de l'énergie où deux bandes de $P(2\pi a^{(m)})$ se touchent.

Après une étape, on se retrouve dans la situation décrite dans [HeSj5].

Une grande partie de l'étude (§1,3,5) est en fait très générale et s'applique à des hamiltoniens assez généraux du type des exemples mentionnés par M. WILKINSON [Wi1].

Ce travail a été annoncé à la rencontre d'analyse microlocale d'Oberwolfach en Novembre 1987.

Nous tenons à remercier le referee pour toutes ses remarques constructives.

0. INTRODUCTION.

1. REDUCTION POUR L'ETUDE SEMI-CLASSIQUE PRES D'UN RATIONNEL

1.0. Introduction	9
1.1. Préliminaires	9
1.2. Détermination de $p \xrightarrow{\mathcal{V}_a} Q$	12
1.3. Suivi des symétries	18
1.4. Remarques.	22

2. ETUDE DU SYMBOLE PRINCIPAL DU SYSTEME $M^W(x, hD)$

2.1. Etude des valeurs propres	24
2.2. Réduction à une équation ou à un système 2×2 ...	26
2.3. Quelques lemmes techniques.	35

3. DECOMPOSITIONS PAR BLOC PSEUDODIFFERENTIELS ET RECHERCHE DE FORMES NORMALES

3.0. Introduction	41
3.1. Décomposition par bloc modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$: La méthode de Taylor	43
3.2. Décomposition par bloc modulo $\mathcal{O}(\exp - \varepsilon_0/h)$	49
3.3. Etude modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$. Cas de la bande simple	52
3.4. Forme normale pour un o.p.d. h -admissible à un puits non dégénéré (le cas C^∞)	55
3.5. Forme normale (le cas analytique): cas de la bande simple	59
3.6. Etude du cas de 2 bandes qui se touchent	65
3.7. Cas de la bande centrale (une autre approche).	74

4. DECROISSANCE EXPONENTIELLE 77

5. MATRICE D'INTERACTION

5.1. Problèmes de références. Conservation des propriétés d'invariance	85
5.2. Matrice d'interaction: étude générale	90
5.3. Etude de $W_{\alpha,0}$	94
5.4. Renormalisation.	103

**6. CALCULS B.K.W. "EXPLICITES" ET ETUDE DE
L'HOLONOMIE**

6.1.	Construction B.K.W. et estimation de l'interaction	..	108
6.2.	Calcul du sous-principal	113
6.3.	Etude de l'holonomie.	122

REFERENCES.	135
--------------------	-------	-----

1. REDUCTION POUR L'ETUDE SEMI-CLASSIQUE PRES D'UN RATIONNEL.

1.0. Introduction.

Il s'agit de développer la réduction à un système pseudodifférentiel pour l'étude de l'équation de Harper dans un cadre général. Nous allons démontrer que, pour un opérateur pseudo-différentiel $p^W(x, aD_x)$ où $a/2\pi$ est proche d'un rationnel p/q , l'étude spectrale se ramène à celle d'un système $q \times q$ d'opérateurs pseudo-différentiels h -admissibles avec $h/2\pi = a/2\pi - p/q$. Nous avons été influencés par les travaux de J.B. SOKOLOFF [So], M. WILKINSON [Wi] et J. BELLISSARD [Be2]. Ce dernier travaille dans le cadre des C^* -algèbres. Notre travail est sans doute simplement une version "pseudodifférentielle" de ce travail mais qui permet après d'appliquer cette machinerie (en particulier les techniques de [HeSj5]). La motivation d'une telle généralisation est naturelle. Quand on vient du problème "physique" : étude spectrale pour l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique et potentiel périodiques, que ce soit dans le cadre de l'approximation semi-classique (cf. §9 de [HeSj5], [HeSj6]), dans celui de l'approximation champ magnétique fort (cf. [Be2], [HeSj7]) ou bien de celui de l'approximation champ magnétique faible (cf. [Be2], [Ne], [HeSj7]), l'opérateur de Harper n'apparaît que comme une approximation d'un opérateur plus général.

En fait selon la démarche de Bellissard (qui se place dans le cadre de la méthode de projection de Feshbach) ou celle de [HeSj6] appelée : étude d'un problème de Grusin (méthode utilisée dans d'autres contextes en E.D.P., cf. en particulier [HeSj4] (étude des résonances)), on se ramène plutôt à un problème implicite du type : trouver z t.q. $0 \in \text{Ker } H(z)$ où $H(z) = \text{Harper} - z + \text{perturbation}$ dépendant de z qui est du type qui sera étudié dans [HeSj6]. Enfin, le suivi des symétries est indispensable pour l'étude spectrale. on suivra donc avec soin ces symétries dans le processus de réduction.

1.1. Réduction : préliminaires.

Soit :

$$(1.1.1) \quad a = 2\pi(p/q) + h + 2\pi\ell$$

avec $h/2\pi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\ell \in \mathbb{Z}$, p premier avec q , $0 < p/q < 1$.

On s'intéresse au problème :

- (1.1.2) Déterminer dans un intervalle d'énergie I , le spectre de l'opérateur $p^W(x, aD_x)$ où $p(x, \xi)$, p est C^∞
 2π -périodique en x et ξ , et où

$$(p^W(x, aD_x)u)(x) = |a|^{-1} \int e^{i/a \langle x-y, \xi \rangle} p[(x+y)/2, \xi] u(y) dy d\xi$$

qu'on peut ramener à :

- (1.1.3) Déterminer dans un intervalle d'énergie I , le spectre de l'opérateur $Q^W(x, hD_x)$, où
 $((x, \xi) \rightarrow Q(x, \xi)) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q)$, $Q^* = Q$,
 Q est 2π -périodique.

Bien entendu, on s'intéresse à une situation où h est petit de sorte que la réduction (1.1.2) \Rightarrow (1.1.3) nous ramène à un problème plus "connu" d'opérateurs h -admissibles.

Remarque initiale 1.1.1. On ne s'intéresse au spectre qu'au niveau ensembliste.

On se placera dans la suite dans le cas $h \neq 0$; pour $h=0$ il faudrait remplacer (1.1.3) par :

- (1.1.3)' Déterminer dans un intervalle I la réunion pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ des spectres des matrices $Q(x, \xi)$.

La théorie de Floquet classique (cf. [ReSi], [HeSj5]), montre que p étant 2π -périodique en x , le problème (1.1.2) est équivalent à :

- (1.1.4) Déterminer dans $I : \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} \text{Sp } H_\theta^a$ où H_θ^a est défini par :

$$H_\theta^a u = p^W(x, aD)u$$

$$D(H_\theta^a) = \{u \in L^2_{\text{loc}}, u(x+2\pi) = e^{i\theta} u(x)\}$$

ou encore (car $a \neq 0$) :

(1.1.5) Déterminer dans $I \cup \text{Sp } \tilde{H}_\theta^a$ où \tilde{H}_θ^a est défini par :

$$\theta \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{H}_\theta^a u = p^W(x, aD + \theta)u$$

$$D(\tilde{H}_\theta^a) = \{u \in L_{\text{loc}}^2, u(x+2\pi) = u(x)\}.$$

Le problème (1.1.5) est un problème sur le tore. On peut remarquer 2 propriétés simples :

(1.1.6) Si a est irrationnel, le spectre est indépendant de θ (cf. pour une démonstration de cette propriété classique [HeSj5]).

(1.1.7) \tilde{H}_θ^a et $\tilde{H}_\theta^a + 2\pi$ ont même spectre (ceci résulte de la périodicité en ξ du symbole de sorte que $e^{2i\pi D_x} = I$).

On est donc ramené à étudier

(1.1.8) $\bigcup_\theta \text{Sp } p^W(x, aD_x + \theta)$ où $p^W(x, aD_x + \theta)$ opère sur $L^2(S^1)$ et si nécessaire, on peut supposer $\ell=0$ dans (1.1.1).

De la même manière, si on regarde le problème (1.1.3), on montrera qu'il existe une matrice unitaire κ_0 de sorte que si on considère

$$(1.1.9) \quad \kappa = \kappa_0 \cdot \tau_{2\pi/q}$$

on ait

$$(1.1.10) \quad \kappa \cdot Q^W(x, hD_x) = Q^W(x, hD_x) \cdot \kappa$$

de sorte que l'étude du spectre de $Q^W(x, hD_x)$ se ramène à l'étude de Q_θ avec

$$(1.1.11) \quad Q_\theta^W = Q^W(x, hD_x)$$

$$D(Q_\theta) = \{u \in L_{\text{loc}}^2 \otimes \mathbb{C}^q, \kappa u = e^{i\theta} u\}$$

qu'on ramène à un problème sur un fibré sur le cercle de longueur $2\pi/q$ avec :

$$(1.1.12) \quad \begin{aligned} \tilde{Q}_\theta &= Q^W(x, hD_x + \theta) \\ D(\tilde{Q}_\theta) &= \{u \in L^2_{loc} \otimes \mathbb{C}^q; Xu = u\}. \end{aligned}$$

On ramène ainsi pour $h \neq 0$, le problème (1.1.3) (sous l'hypothèse d'existence de X vérifiant (1.1.9) et (1.1.10)) à l'étude de :

$$(1.1.13) \quad \left(\bigcup_{\theta} \text{Sp } \tilde{Q}_\theta \right) \cap I.$$

Dans la suite pour comparer les problèmes (1.1.2) et (1.1.3), il sera plus commode de comparer (1.1.8) et (1.1.13).

1.2. Détermination $p \xrightarrow{\mathcal{P}_a} Q$.

On cherche donc une application de l'algèbre des o.p.d à symboles 2π -périodiques en (x, ξ) dans une sous-algèbre de l'algèbre des systèmes $q \times q$ d'o.p.d à symboles 2π -périodiques en (x, ξ) :

$$p \xrightarrow{\mathcal{P}_a} Q$$

$$\text{t.q.} \quad \text{Sp } p^W(x, aD) = \text{Sp } Q^W(x, hD).$$

On souhaitera aussi conserver essentiellement des symétries en travaillant dans des algèbres d'o.p.d plus petites.

Etape 1. On reprend la discussion du §.6 de [HeSj5] (cf. formules (6.8), (6.11)) en écrivant l'opérateur pseudodifférentiel : $p^W(x, aD_x + \theta)$ sous la forme :

$$(1.2.1) \quad p^W(x, aD_x + \theta) = \sum_k \sum_j f(k, j) (\exp - ix)^j (\exp - i(aD_x + \theta))^k$$

$$(1.2.2) \quad p^W(x, aD_x + \theta) = \sum_k \sum_j f(k, j) L_1^j (L_2^\theta)^k$$

avec

$$(1.2.3) \quad L_1 = e^{-ix}$$

$$L_2^\theta = \exp(-i(aD_x + \theta)).$$

La correspondance $p \rightarrow p_a(p) = f$ de $C^\infty(S^1 \times S^1)$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{Z}^2)$, espace des suites doubles à décroissance rapide, est donné par :

$$(1.2.4) \quad q(k, j) = \exp[-i a(jk/2)] f(k, j)$$

où les $q(k, j)$ sont les coefficients de Fourier de p .

(Tout ce que nous faisons est très voisin de ce que fait BELLISSARD dans [Be2], sauf que nous travaillons sans doute dans des algèbres plus petites).

Si on munit $C^\infty(S_1 \times S_1)$ de la loi de Weyl $\#$ correspondant à la composition de Weyl, on a par transport de structure ($p \rightarrow p_a(p)$ est un isomorphisme) une loi noté $\#$ sur $\mathcal{A}(\mathbb{Z}^2)$ qui peut s'obtenir en utilisant (1.2.2).

$$\begin{aligned} & \sum_k \sum_j f(k, j) L_1^j (L_2^\theta)^k \cdot \sum_{k', j'} g(k', j') \cdot L_1^{j'} \cdot (L_2^\theta)^{k'} \\ &= \sum_k \sum_j \sum_{k'} \sum_{j'} f(k, j) g(k', j') L_1^j (L_2^\theta)^k L_1^{j'} (L_2^\theta)^{k'}. \end{aligned}$$

Remarquant que : $(L_2^\theta)^k L_1^{j'} = e^{-i a j' k} L_1^{j'} (L_2^\theta)^k$ on obtient :

$$(1.2.5) \quad (f \# g)[m, l] = \sum_{\substack{k+k'=m \\ j+j'=l}} f(k, j) g(k', j') \exp(i a j' k)$$

(qui correspond à une convolution dans le cas où $a=0$).

Pour définir la correspondance au niveau des opérateurs, on va dire maintenant comment on transforme :

$$(1.2.6) \quad L_1 \text{ et } L_2^\theta \text{ en } \mathfrak{L}_1 \text{ et } \mathfrak{L}_2^\theta$$

et on définira ensuite Q par :

$$(1.2.7) \quad Q^W(x, hD_x + \theta) = \sum_{k,j} f(k,j) \mathfrak{x}_1^j (\mathfrak{x}_2^\theta)^k$$

défini sur $L^2(S_1; \mathbb{C}^q)$.

Bien entendu, il s'agit pour l'instant d'une opération formelle et il nous faudra ensuite identifier $\bigcup_{\theta} p^W(x, aD_x + \theta)$ et

$$\bigcup_{\theta} \text{Sp } Q^W(x, hD_x + \theta).$$

Introduisons l'opérateur π_p de $L^2(S_1)$ dans $L^2(S_1) \otimes \mathbb{C}^q$ défini par :

$$(1.2.8) \quad (\pi_p u) = \left(u, \tau_{2\pi p/q} u, \dots, \tau_{2\pi p/q}^{q-1} u \right)$$

avec $(\tau_y u)(x) = u(x-y)$.

Si on introduit les matrices :

$$(1.2.9) \quad J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{q-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \omega = \exp 2i\pi/q.$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & & \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$(1.2.10) \quad \begin{aligned} \pi_p L_1 &= e^{-ix} J^p \cdot \pi_p \\ \pi_p L_2^\theta &= e^{-i(hD_x + \theta)} K^{-1} \pi_p \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à l'introduction de

$$(1.2.11) \quad \begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= e^{-ix} J^p \\ \mathfrak{x}_2^\theta &= e^{-i(hD_x + \theta)} K^{-1}. \end{aligned}$$

Si on veut retrouver le formalisme de Weyl, on doit écrire :

$$Q(x, \xi) = \sum_{j, k} \hat{Q}(k, j) \exp(-i(jx + k\xi))$$

$$Q^W(x, hD) = \sum_{j, k} \hat{Q}(k, j) \exp(ijk(h/2)) \exp(-ijx) \cdot \exp(-ikhD_x) .$$

D'où

$$\hat{Q}(k, j) \exp(ijk(h/2)) = f(k, j) \cdot (JP)^j (K^{-k})$$

$$\hat{Q}(k, j) = \exp(-ijk(h/2)) f(k, j) (JP)^j (K^{-k}) .$$

On définit pour p dans $C^\infty(S^1 \times S^1)$, Q par :

$$(1.2.12) \quad Q(x, \xi) = \sum_{j, k} e^{-i(jx + k\xi)} \exp(-ijk(h/2)) f(k, j) (JP)^j (K^{-k})$$

et on vérifie que :

$$(1.2.13) \quad Q(x, \xi) = \sum_{j, k} \exp(-i(jx + k\xi)) \exp \frac{1}{2} jk [2\pi p/q] \cdot q(k, j) (JP)^j K^{-k}$$

où q correspond aux coefficients de Fourier de p .

Compte tenu des propriétés de commutations de \mathfrak{L}_1 et \mathfrak{L}_2^θ qui sont les mêmes que pour L_1 et L_2^θ à savoir :

$$(1.2.14) \quad \begin{aligned} L_2^\theta L_1 &= e^{ia} L_1 L_2^\theta \\ \mathfrak{L}_2^\theta \mathfrak{L}_1 &= e^{ia} \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2^\theta . \end{aligned}$$

$$(1.2.15) \quad \text{On vérifie que } p \xrightarrow{\mathcal{P}_a} Q \text{ est un homomorphisme d'algèbre} \\ \text{et que } Q^W \Pi_p = \Pi_p Q^W .$$

Etape 2. Il nous reste à montrer que $\text{Spp}^W(x, aD_x) = \text{Sp} Q^W(x, hD_x)$ où les opérateurs sont considérés respectivement comme opérant sur $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q$. Cette propriété est sans doute classique,

dans la théorie des C^* -algèbres (cf. [Be2]). On en donne une démonstration à la main.

Démonstration de (a) \Rightarrow (b) : $\lambda \in \text{Sp } p^W(x, aD_X) \Rightarrow \lambda \in \text{Sp } Q^W(x, hD_X)$.

On a vu qu'il existe θ t.q. $\lambda \in \text{Sp } p^W(x, aD_X + \theta)$.

Cela simplifie l'existence d'une suite u_n t.q.

$$(1.2.16) \quad \begin{aligned} \| (p^W(x, aD_X + \theta) - \lambda) u_n \|_{L^2(S^1)} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \tau_{2\pi} u_n &= u_n, \quad \| u_n \|_{L^2(S^1)} = 1. \end{aligned}$$

Considérons $(\Pi_p u_n)$ on a :

$$\begin{aligned} \tau_{2\pi/q}(\Pi_p u_n) &= \\ &\left(\tau_{2\pi/q} u_n, \tau_{2\pi/q} \cdot \tau_{2\pi p/q} u_n, \dots, \tau_{2\pi/q} \tau_{2\pi p/q} u_n \right) \\ &= K^{\ell(p)}(\Pi_p u_n) \end{aligned}$$

où $\ell = \ell(p)$ est choisi de telle sorte que $(p \cdot \ell(p) + 1)/q \in \mathbb{Z}$.
Par exemple si $p=1$ on prend $\ell = -1$ (cf. formule (5.1.8) dans cet article).

On peut réécrire ceci sous la forme :

$$(1.2.18) \quad K^{-\ell(p)} \tau_{2\pi/q} \cdot (\Pi_p u_n) = (\Pi_p u_n)$$

et il est clair que $(\Pi_p u_n)$ vérifie

$$(1.2.19) \quad \| (Q^W(x, hD_X + \theta) - \lambda)(\Pi_p u_n) \|_{L^2([0, 2\pi/q] \otimes \mathbb{C}^q)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour en déduire que $\lambda \in \text{Sp } Q^W(x, hD_X)$, il suffit donc, compte-tenu des remarques (1.1.9) à (1.1.13) de montrer que $K = K^{-\ell(p)} \tau_{2\pi/q}$ vérifie bien la relation (1.1.10).

Notons d'abord que

$$\tau_{-2\pi/q} Q^W(x, h D_x) \tau_{2\pi/q} = Q^W(x + 2\pi/q, h D_x).$$

On doit donc calculer

$$K^{\ell(p)} Q(x + (2\pi/q), \xi) K^{-\ell(p)}$$

en utilisant la formule (1.2.13).

On a donc à vérifier :

$$\exp -ij(2\pi/q) K^{\ell(p)} J^p J K^{-\ell(p)} = J^p J.$$

Observons qu'on a la relation :

$$(1.2.20) \quad JK = \omega KJ$$

de sorte qu'il suffit de vérifier :

$$\exp -ij(2\pi/q) \cdot \omega^{-p} J^{\ell(p)} = 1$$

qui est bien vrai car $(p \ell(p) + 1)/q \in \mathbb{Z}$.

On a donc bien (1.1.10) et compte-tenu de (1.2.18), (1.2.19) ceci termine la démonstration de $a \Rightarrow b$.

Démonstration de $(b) \Rightarrow (a)$: i.e. $\lambda \in \text{Sp } Q^W(x, h D_x) \Rightarrow \lambda \in \text{Sp } p^W(x, a D_x)$. Soit donc $\lambda \in \text{Sp } Q^W(x, h D_x)$. Alors il existe θ et une suite v_n vérifiant :

$$(1.2.21) \quad \begin{aligned} (1) \quad & K^{-\ell(p)} \tau_{2\pi/q} \cdot v_n = v_n \\ (2) \quad & \| (Q^W(x, h D_x + \theta) - \lambda) v_n \|_{L^2([0, (2\pi/q)[[) \otimes \mathbb{C}^q)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ (3) \quad & \| v_n \|_{L^2([0, (2\pi/q)[[) \otimes \mathbb{C}^q)} = 1. \end{aligned}$$

(1.2.21)₍₁₎ exprime que $v_n = (\pi_p u_n)$ avec $\tau_{2\pi} u_n = u_n$.

On vérifie alors immédiatement que :

$$\pi_p(p^W(x, aD_x + \theta)u_n) = q^W(x, hD_x + \theta)v_n$$

de sorte que

$$(1.2.22) \quad \begin{aligned} &\| (p^W(x, aD_x + \theta)u_n) \|_{L^2(S_1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\tau_{2\pi} u_n = u_n \end{aligned}$$

ce qui exprime bien que $\lambda \in \text{Sp } \tilde{p}(x, aD_x)$, en remarquant que :

$$\|u_n\|_{L^2([0, 2\pi])} \approx \|v_n\|_{L^2([0, (2\pi/q)l]) \otimes \mathbb{C}^q}.$$

Remarque 1.2.1. Cas de l'équation de Harper. (Cf. Appendice pour une démonstration plus directe).

Soit $p(x, \xi) = e^{i\xi} + e^{-i\xi} + e^{ix} + e^{-ix}$, (1.2.13) donne :

$$Q(x, \xi) = e^{-ix} J p + e^{ix} J^{-p} + e^{-i\xi} K^{-1} + e^{i\xi} K.$$

La transformée de Fourier usuelle \mathcal{F}_h dans $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q$ correspond à la transformation canonique $(x, \xi) \rightarrow (-\xi, x)$ et nous ramène à un système pseudodifférentiel de symbole de Weyl.

$$(1.2.23) \quad M_{p,q}(x, \xi) = e^{i\xi} J p + e^{-i\xi} J^{-p} + e^{ix} K + e^{-ix} K^{-1}$$

qui sera celui que nous étudierons dans les paragraphes suivants.

C'est donc l'opérateur $M_{p,q}^W(x, hD_x)$ que nous étudierons dans les paragraphes suivants.

Remarque 1.2.2. L'application $p \rightarrow Q$ est injective.

1.3. Suivi des symétries.

Ce paragraphe est consacré à l'étude des symétries au travers de la transformation $p \rightarrow Q$. On renvoie à [Wi4] pour des considérations de ce type.

Nous examinerons successivement comment les

propriétés suivantes de p se transforment :

- (1) p réel
- (2) $p(x, \xi) = p(-\xi, x)$
- (3) $\bar{p}(x, -\xi) = p(x, \xi)$

correspondant au niveau des opérateurs quantifiés à :

- Q1) $p^W(x, a D_x)$ autoadjoint
- Q2) p^W commute avec \mathcal{F}_a
- Q3) p^W commute avec $\Gamma: u \rightarrow \Gamma u = \bar{u}$.

1.3.1. *Suivi du caractère auto-adjoint.*

On va montrer le lemme suivant (qu'on a déjà implicitement utilisé dans nos considérations spectrales) :

Lemme 1.3.1. Si p est réel, $Q = \varphi_a(p)$ est hermitien.

Compte tenu des propriétés de la quantification de Weyl, ceci implique que : $p^W(x, a D_x)$ auto-adjoint $\Rightarrow Q^W(x, h D_x)$ auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q$.

Démonstration du lemme 1.3.1. Si p est auto-adjoint, on a vu (compte tenu du fait que le symbole de Weyl de $p^W(x, a D_x)^*$ est $\bar{p}(x, \xi)$) que l'on a :

$$f(-k, -j) = \overline{f(k, j)} e^{i\partial j k}$$

(cf. §6 de [Hesj5] et (1.2.1)-(1.2.4)).

Au vu de la formule (1.2.7), il suffit d'observer que (avec $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2^\theta / \theta = 0$)

$$\mathfrak{x}_2^* = \mathfrak{x}_2^{-1} ; \mathfrak{x}_1^* = \mathfrak{x}_1^{-1}$$

ce qui est clair compte tenu du caractère unitaire de J et K .

1.3.2. *Invariance par Fourier.*

L'invariance par Fourier se traduit par : $p(x, \xi) = p(-\xi, x)$.

On a le :

Lemme 1.3.2.

$$(1.3.1) \quad p \text{ vérifie : } p(x, \xi) = p(-\xi, x)$$

si et seulement si :

$$(1.3.2) \quad U_p Q(\xi, -x) U_p^{-1} = Q(x, \xi)$$

où U_p est la transformée de Fourier discrète (cf. [HeSj5])

$$(1.3.3) \quad (U_p)_{jk} = 1/\sqrt{q} \, \omega^{p(j-1)(k-1)} \quad \begin{matrix} j=1, \dots, q \\ k=1, \dots, q. \end{matrix}$$

Si on désigne par \mathfrak{F}_a , \mathfrak{F}_h les quantifications de Fourier correspondantes (1.3.1) et (1.3.2) se traduisent quantiquement par, respectivement :

$$(1.3.4) \quad \mathfrak{F}_a^{-1} p^W(x, aD) \mathfrak{F}_a = p^W(x, aD)$$

$$(1.3.5) \quad \mathfrak{G}_h^{-1} Q^W(x, hD_x) \mathfrak{G}_h = Q^W(x, hD_x)$$

avec :

$$(1.3.6) \quad \mathfrak{G}_h = U_p^{-1} \mathfrak{F}_h.$$

Démonstration. On rappelle que pour p quelconque

$$(\mathfrak{F}_a^{-1} p^W(x, hD_x) \mathfrak{F}_a) = \tilde{p}^W(x, hD_x) \text{ avec } \tilde{p}(x, \xi) = p(\xi, -x)$$

et de même pour Q quelconque

$$(\mathfrak{F}_h^{-1} Q^W(x, hD_x) \mathfrak{F}_h) = \tilde{Q}^W(x, hD_x) \text{ avec } \tilde{Q}(x, \xi) = Q(\xi, -x).$$

Observons que l'invariance par Fourier pour p se traduit sur $f(j, k)$ par :

$$f(k, j) = f(-j, k) e^{iajk}.$$

On applique alors la formule (1.2.12). Le symbole doit vérifier

$$u_p Q(\xi, -x) u_p^{-1} = Q(x, \xi)$$

soit :

$$(1.3.7) \quad \sum_{j,k} e^{-i(j\xi - kx)} \exp(-ijk(h/2)) f(k, j) u_p(J^p j k^{-k}) u_p^{-1}.$$

Observons que :

$$(1.3.7) \quad \begin{aligned} u_p^{-1} J_p u_p &= K \\ u_p^{-1} K^{-1} u_p &= J_p \end{aligned} \quad (\text{avec } J_p = J^p)$$

de sorte qu'on peut réécrire (1.3.7) sous la forme (en posant $k = -\tilde{j}, j = \tilde{k}$) :

$$\begin{aligned} & \sum_{\tilde{j}, \tilde{k}} \exp(-i(\tilde{j}x + \tilde{k}\xi)) \exp(i\tilde{j}\tilde{k}(h/2)) f(-\tilde{j}, \tilde{k}) u_p(J^p \tilde{k} K \tilde{j}) u_p^{-1} \\ &= \sum_{\tilde{j}, \tilde{k}} \exp(-i(\tilde{j}x + \tilde{k}\xi)) \exp(i\tilde{j}\tilde{k}(h/2)) f(-\tilde{j}, \tilde{k}) K^{-\tilde{k}} J_p \tilde{j} \\ &= \sum_{\tilde{j}, \tilde{k}} \exp(-i(\tilde{j}x + \tilde{k}\xi)) \exp(-ia\tilde{j}\tilde{k}) \exp(i\tilde{j}\tilde{k}(h/2)) f[\tilde{k}, \tilde{j}] \\ & \quad \exp[(2i\pi p/q)\tilde{j}\tilde{k}] J_p \tilde{j} K^{-\tilde{k}} \\ &= \sum_{\tilde{j}, \tilde{k}} \exp(-i(\tilde{j}x + \tilde{k}\xi)) \exp(-i\tilde{j}\tilde{k}(h/2)) f(\tilde{k}, \tilde{j}) J_p \tilde{j} K^{-\tilde{k}} \\ &= Q(x, \xi). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.3.3. Notion d'opérateur réel.

Sur $L^2(\mathbb{R})$, on a une opération naturelle $u \rightarrow \bar{u}$ et on dit qu'un opérateur est réel si $\overline{P\bar{u}} = P\bar{u}$. En quantification de Weyl, ceci se traduit par la relation :

$$(1.3.9) \quad \bar{p}(x, -\xi) = p(x, \xi).$$

Pour $f(k,j)$ ceci se traduit par la propriété :

$$(1.3.10) \quad \overline{f(k, -j)} = f(+k, j).$$

Si on remarque que $\bar{K}=K$ et $\bar{J}=J^{-1}$ on obtient le :

Lemme 1.3.3. $p^W(x, aD)$ est réel si et seulement si $Q^W(x, hD)$ est réel ce qui se traduit par :

$$(1.3.11) \quad \bar{Q}(x, -\xi) = Q(x, \xi).$$

1.4. Remarques.

Remarque 1.4.1. On peut caractériser les $Q(x, \xi)$ obtenus comme image par \mathcal{P}_a d'un symbole C^∞ 2π -périodique en x, ξ comme les symboles C^∞ 2π -périodiques en (x, ξ) ayant les propriétés de commutations

$$(1.4.1) \quad \begin{cases} J Q(x, \xi) = Q(x, \xi - (2\pi/q)) J \\ K Q(x, \xi) = Q(x + 2\pi(p/q), \xi) K \end{cases}.$$

Dans un sens, cela se déduit facilement de l'expression (1.2.12).

Inversement, si $Q(x, \xi)$ vérifie (1.4.1) il est 2π -périodique en (x, ξ) (en itère (1.4.1) et on utilise $J^q=I, K^q=I$) et on peut écrire :

$$Q(x, \xi) = \sum_{(\ell, m) \in \mathbb{Z}^2} M_{\ell m} e^{i\ell x} e^{im\xi}.$$

On déduit alors de (1.4.1) que :

$$M_{\ell m} K^m J^{-p\ell} \text{ commute avec } J \text{ et } K$$

ce qui implique :

$$M_{\ell m} K^m J^{-p\ell} = b_{\ell m} \cdot I.$$

Si de plus $p(x, \xi)$ est indépendant de a , et si on fait varier \mathcal{P}_a , on en déduit que $b_{\ell m} = e^{-ih(m\ell/2)} e_{\ell m}$ avec $e_{\ell m}$ indépendant de h .

Les opérateurs $Q^W(x, hD_x)$ associés à $p^W(x, aD_x)$ sont donc les séries

$$\sum_{\ell, m} e_{\ell m} e^{-ih(m\ell/2)} x_1^\ell x_2^m$$

qui sont introduits chez BELLISSARD [Be2].

Il est cependant plus utile pour nous de les regarder comme la sous-algèbre des o.p.d. (systèmes $q \times q$) muni de la loi $\#_h$ de Weyl et commutant avec les opérateurs $\left(\tau_{2\pi/q}^*\right)^{-1} J$ et $\left(\tau_{2\pi/q}\right) K$.

Remarque 1.4.2. Compte tenu de la remarque 1.2.1, nous ne prendrons pas cette quantification et les propriétés de symétries seront modifiées en conséquence par transport de structure (cf. §.5.1).

Remarque 1.4.3. Si $f(j, k)$ vérifie des propriétés de décroissance exponentielle $|f(j, k)| \leq C \exp -1/C(|j| + |k|)$, nous obtiendrons des symboles holomorphes dans les 2 représentations (dans des domaines que l'on peut préciser).

Remarque 1.4.4. Dans le cas $h=0$, l'opérateur $p(x, aD_x)$ est envoyé sur l'opérateur de multiplication par $Q(x, \xi)$ opérant sur $L^2_{x, \xi}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}^q$. C'est ce qui a été rappelé au §.9 de [HeSj5].

2. ETUDE DU SYMBOLE PRINCIPAL DU SYSTEME $M^W(x, hD)$.

2.1. Etude des valeurs propres.

Rappelons quelques résultats du §.9.3 de **[HeSj5]** qui vont jouer un rôle important dans la suite. D'après le lemme 9.3.1 de cet article, on a :

$$(2.1.1) \quad \det(M_{p,q}(x, \xi) - E) = f_{p,q}(E) + (-1)^{q+1} 2 [\cos qx + \cos q\xi].$$

Cette formule remonte en fait à CHAMBERS **[Ch]**, BUTLER-BROWN **[Bu-Br]** et OBERMAIR. Si E est le niveau d'énergie qui nous intéresse, les surfaces d'énergie sont données par :

$$(2.1.2) \quad \cos qx + \cos q\xi = \frac{1}{2}(-1)^q f_{p,q}(E) = F.$$

A une dilatation près, ce sont donc les mêmes surfaces d'énergie qui apparaissent que dans le cas $q=1$. Rappelons les principaux résultats qui nous serviront concernant $M_{p,q}(x, \xi)$ introduit en **[HeSj5]** (cf. également (1.2.23)).

$$(2.1.3) \quad M_{p,q}(x, \xi) - E \text{ est inversible pour tout } (x, \xi), \text{ pour } E \text{ en dehors de } q \text{ bandes } B_\ell \ (\ell=1, \dots, q), B_\ell = [\gamma_\ell, \delta_\ell] \text{ (avec } \gamma_\ell < \delta_\ell).$$

On a toujours :

$$(2.1.4) \quad \delta_\ell \leq \gamma_{\ell+1}$$

(Cf. Remarque 0.3).

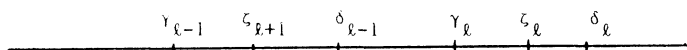
$$(2.1.5) \quad \begin{aligned} &\text{Si } f_{p,q}(E) \in]-4, +4[\text{ , } f'_{p,q}(E) \neq 0 \\ &\text{Si } f_{p,q}(E) = \pm 4 \text{ , } f'_{p,q}(E) = 0 \text{ , alors } f''_{p,q}(E) \neq 0. \end{aligned}$$

(Cf. Corollaire 9.3.4 dans **[HeSj5]**).

$$(2.1.6) \quad \text{Si on désigne par } \mu_\ell(x, \xi) \text{ la } \ell^{\text{ième}} \text{ valeur propre de } M_{p,q}(x, \xi), B_\ell \text{ est décrite par } \mu_\ell(x, \xi) \text{ pour } (x, \xi) \in [0, 2\pi]^2.$$

(2.1.7) Pour $f_{p,q}(E) \in]-4,4[\setminus \{0\}$, les surfaces d'énergie $\Sigma(E)$ introduites en (2.1.2) sont des réunions de "cercles" (translatés les uns des autres par $(2\pi(j/q), 2\pi(k/q))$; $\alpha = (j,k) \in \mathbb{Z}^2 : \Sigma(E) = \bigcup_{j,k} \Sigma_{j,k}(E)$ avec $\Sigma_{j,k}(E)$ connexe.

(2.1.8) Pour $f_{p,q}(E) = 0$, la surface d'énergie E est une réunion de droites $x = \pm \xi + 2\pi(m/q)$, $m \in \mathbb{Z}$. Nous ne traiterons pas ce cas ici. On notera ζ_ℓ le point dans B_ℓ t.q. $f_{p,q}(\zeta_\ell) = 0$.



Pour $E = \gamma_\ell$, on a 2 cas selon que :

$$\textcircled{a} \quad \delta_{\ell-1} < \gamma_\ell \qquad \textcircled{b} \quad \delta_{\ell-1} = \gamma_\ell.$$

Dans le cas \textcircled{a} , on a $f'_{p,q}(\gamma_\ell) \neq 0$ et près des points $(x_\ell^\alpha, \xi_\ell^\alpha)$ t.q.

$\mu_\ell(x_\ell^\alpha, \xi_\ell^\alpha) = \gamma_\ell$ (cf. Prop. 9.3.5 de [HeSj5]) on a :

$$(2.1.9) \quad \mu_\ell(x, \xi) = \gamma_\ell + \frac{q^2[(x - x_\ell^\alpha)^2 + (\xi - \xi_\ell^\alpha)^2]}{|f'_{p,q}(\gamma_\ell)|} + o((x - x_\ell^\alpha, \xi - \xi_\ell^\alpha)^3).$$

Dans le cas \textcircled{b} (qu'on appellera parfois, la situation Dirac), le système devient à caractéristiques doubles aux points $(x_\ell^\alpha, \xi_\ell^\alpha)$ et on a alors :

$$(2.1.10) \quad \begin{aligned} \mu_{\ell-1}(x, \xi) &= \gamma_\ell - \frac{\sqrt{2}}{|f''(\gamma_\ell)|^{1/2}} \sqrt{(x_\ell^\alpha)^2 + (\xi_\ell^\alpha)^2} \\ &\quad + o((x - x_\ell^\alpha, \xi - \xi_\ell^\alpha)^2) \\ \mu_\ell(x, \xi) &= \gamma_\ell - \frac{\sqrt{2}}{|f''(\gamma_\ell)|^{1/2}} \sqrt{(x_\ell^\alpha)^2 + (\xi_\ell^\alpha)^2} \\ &\quad + o((x - x_\ell^\alpha, \xi - \xi_\ell^\alpha)^2). \end{aligned}$$

Enfin, pour être complet, ajoutons le cas (c) : $E = \delta_{\ell} < \gamma_{\ell+1}$, où on est dans une situation analogue au cas (a) et où on a :

$$(2.1.11) \quad \mu_{\ell}(x, \xi) = \delta_{\ell} - \frac{q^2[(x - x_{\ell}^{\alpha})^2 + (\xi - \xi_{\ell}^{\alpha})^2]}{|f'_{p,q}(\delta_{\ell})|} + O((x - x_{\ell}^{\alpha}, \xi - \xi_{\ell}^{\alpha})^3).$$

Remarque 2.1.1. Rappelons que la situation (2.1.10) se produit toujours pour q pair avec $\ell = (q/2) + 1$ et que compte-tenu de la Remarque 0.3 c'est le seul cas où ceci se produit dans le cas de l'équation de Harper.

2.2. Réduction à une équation ou à un système 2×2 .

Traditionnellement, l'étude de systèmes pseudodifférentiels à caractéristiques simples se ramène à l'étude d'équations pseudodifférentielles et l'étude de systèmes à caractéristiques au plus doubles se ramène à l'étude de systèmes 2×2 .

On va préciser ces indications dans notre cas particulier, car nous aurons besoin de résultats plus fins. On se contente ici de l'étude du symbole principal de l'opérateur, l'étude du système pseudodifférentiel lui-même ne sera abordé qu'au §.3.

Quelques notations. On introduit en (2.1.2) la surface d'énergie E , $\Sigma(E)$, dont on n'a vu (et ceci est particulier au système que nous considérons) qu'il ne dépendait que de $f_{p,q}(E)$.

Dans le cas où $E \in B_{\ell}$, on a :

$$(2.2.1) \quad \Sigma(E) = \{\mu_{\ell}^{-1}(E)\}.$$

Racines simples. Plaçons nous d'abord dans la situation où :

$$(2.2.2) \quad E \in I \subset B_{\ell} \setminus \{\zeta_{\ell}\} \text{ où } I \text{ est un intervalle fermé sur lequel } f'_{p,q} \neq 0.$$

On définit :

$$(2.2.3) \quad \Sigma(I) = \bigcup_{E \in I} \Sigma(E).$$

Alors $\Sigma(I)$ est une réunion de couronnes $\Sigma_\alpha(I)$, ($\alpha \in \mathbb{Z}^2$), ou de disques si $\gamma_\ell \in I$ (ou $\delta_\ell \in I$).

On conviendra que $\Sigma_\alpha(I)$ est la couronne contenant le point $(2\pi/q)\alpha + (0,0)$ ou le point $(2\pi/q)\alpha + (\pi/q, \pi/q)$ selon que $I \subset [\gamma_\ell, \xi_\ell]$ ou $I \subset [\xi_\ell, \delta_\ell]$ c'est-à-dire selon que $f_{p,q}(I) < 0$ ou $f_{p,q}(I) > 0$. Ce point sera noté (x_α, ξ_α) , ($\alpha \in \mathbb{Z}^2$).

Il est clair qu'on peut localement diagonaliser par bloc mais on aura besoin de le faire uniformément dans un voisinage $V_\alpha(I)$ de $\Sigma_\alpha(I)$. Remarquons aussi que compte-tenu des propriétés de symétrie (cf. par exemple 1.4.1), on peut se contenter de traiter $\alpha = (0,0)$.

Lemme 2.2.1. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}^2$, I vérifiant (2.2.2) ; il existe une famille C^∞ de matrices unitaires $U_{x,\xi}$ telles que :

$$(2.2.4) \quad U_{(x,\xi)}^{-1} M_{x,\xi} U_{x,\xi} = \left(\begin{array}{c|c} \mu_\ell(x,\xi) & 0 \\ \hline 0 & A_{x,\xi} \end{array} \right)$$

pour $(x,\xi) \in V_\alpha(I)$.

De plus, il existe $\varepsilon_0 > 0$ t.q. les valeurs propres de $A_{x,\xi}$, $\mu_k(x,\xi)$ ($k \neq \ell$) vérifient $|\mu_k - \mu_\ell(x,\xi)| \geq \varepsilon_0$, $\forall (x,\xi) \in V_\alpha(I)$.

Enfin on a $\nabla_{x,\xi} \mu_\ell \neq 0$ pour (x,ξ) dans $V_\alpha(I)$ (assez petit) lorsque $I \cap \partial B_\ell = \emptyset$.

Démonstration. Il suffit de trivialisier au dessus de $V_\alpha(I)$ les 2 fibrés suivants associés à la donnée de $M_{x,\xi}$: le fibré dont la fibre est la droite complexe $\text{Ker}(M_{x,\xi} - \mu_\ell(x,\xi))$ et celui dont la fibre est l'hyperplan complexe $\text{Ker}(M_{x,\xi} - \mu_\ell(x,\xi))^\perp$.

Ces fibrés sont trivialisables. C'est d'abord clair quand la base est simplement connexe (cas où les $\Sigma_\alpha(I)$ sont des disques), mais également dans le cas de la couronne en utilisant le fait que $U(1)$ et $U(q-1)$ sont connexes par arc. Les autres points se déduisent facilement du §.2.1.

Remarque 2.2.2. Le résultat est encore vrai dans l'analytique.

En effet soit par exemple $V_\alpha(I) \ni (x, \xi) \rightarrow e(x, \xi) \in \mathbb{C}^n$ la section C^∞ trouvée pour $\text{Ker}(M_{x, \xi} - \mu_\ell(x, \xi))$. Soit Γ un contour dans le complexe entourant I et évitant les bandes B_k ($k \neq \ell$).

Soit alors $\Pi_\ell(x, \xi) = \int_\Gamma (M(x, \xi) - z)^{-1} dz$ le projecteur orthogonal sur $\text{Ker}(M_{x, \xi} - \mu_\ell(x, \xi))$. On a $\Pi_\ell(x, \xi) e(x, \xi) = e(x, \xi)$.

Soit $\tilde{e}(x, \xi)$ un vecteur dépendant analytiquement de (x, ξ) t.q. $\|\tilde{e}(x, \xi) - e(x, \xi)\| \leq \varepsilon_1$, $\forall (x, \xi) \in V_\alpha(I)$ avec ε_1 assez petit.

Il est alors clair que $\frac{\Pi_\ell(x, \xi) \tilde{e}(x, \xi)}{\|\Pi_\ell(x, \xi) \tilde{e}(x, \xi)\|}$ est une section analytique de $\text{Ker}(M_{(x, \xi)} - \mu_\ell(x, \xi))$.

On procède de même pour $\text{Ker}(M_{x, \xi} - \mu_\ell(x, \xi))^\perp$ en utilisant $(1 - \Pi_\ell(x, \xi))$ et remarquant que le procédé d'orthogonalisation standard respecte l'analyticité (en choisissant $\varepsilon_1 > 0$ assez petit).

Remarque 2.2.3. On aura éventuellement à effectuer des décompositions par bloc dans le complexe dans 2 situations.

Dans le premier cas, il s'agit de diagonaliser par bloc dans un voisinage complexe de $\Sigma_\alpha(I)$. Ceci ne pose pas de problème puisqu'on a un théorème dans l'analytique pour $(x, \xi) \in \Sigma_\alpha(I)$ et on peut prolonger holomorphiquement dans un petit voisinage de $\Sigma_\alpha(I)$ (qui est borné) : $V_\alpha^{\mathbb{C}}(I)$.

Le prolongement satisfait à :

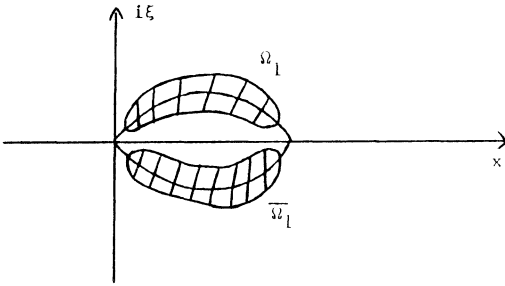
$$(2.2.5) \quad \left(u_{(x,\xi)} \right)^* = u_{\bar{x}, \bar{\xi}}^{-1} \text{ pour } (x,\xi) \in V_{\alpha}^{\mathbb{C}}(I).$$

Dans le deuxième cas, on souhaitera diagonaliser par blocs plus loin dans le complexe dans des voisinages $\Omega^{\mathbb{C}}$ de courbes dans le complexe incluses dans $\mu_{\mathbb{R}}^{-1}(I) \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2)$ et qui seront décrites sous la forme :

$$\xi = \pm i \psi'(x)$$

avec ψ réel, x réel, ψ' non nul.

Ces voisinages auront 2 composantes connexes conjuguées Ω_1 et $\bar{\Omega}_1$ ne rencontrant pas le réel.



Une technique analogue à celle utilisée pour la démonstration de la remarque 2.2.3 permet de construire $u_{(x,\xi)}$ holomorphe par rapport à (x,ξ) inversible diagonalisant $M_{x,\xi}$ pour (x,ξ) dans Ω_1 puis, en utilisant que :

$$(M_{x,\xi})^* = M_{\bar{x}, \bar{\xi}}$$

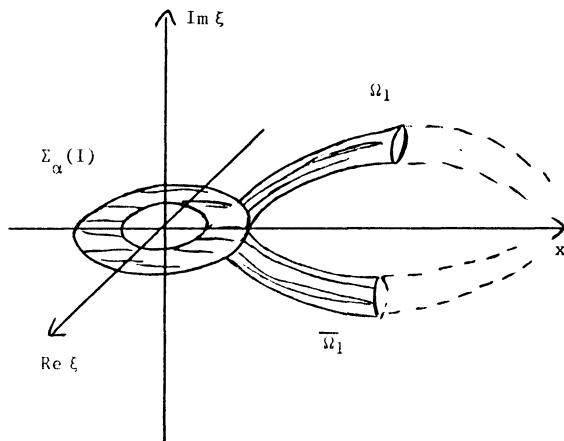
de vérifier que si, pour $(x,\xi) \in \bar{\Omega}_1$ on définit $u_{x,\xi}$ par :

$$u_{x,\xi} = \left(u_{\bar{x}, \bar{\xi}}^{-1} \right)^*,$$

on diagonalise bien $M_{x,\xi}$ pour (x,ξ) dans $\Omega^{\mathbb{C}}$.

$u_{x,\xi}$ satisfait évidemment à (2.2.5).

On souhaiterait avoir une famille holomorphe satisfaisant (2.2.5) et permettant de diagonaliser par bloc dans un (voisinage complexe de $\Sigma_\alpha(I) \cup \Omega^{\mathbb{C}}$ dans le cas où l'intersection est non vide :



Nous ne savons pas démontrer ce point qui ne sera pas nécessaire pour la suite (mais cela simplifierait certaines constructions B.K.W).

Racines au plus doubles. Considérons maintenant le cas (b) où

$$(2.2.6) \quad I = [\gamma_L - \varepsilon_3, \gamma_L + \varepsilon_3] , \quad \varepsilon_3 > 0 \text{ "petit" avec } \delta_{L-1} = \gamma_L .$$

On a d'abord une première réduction analogue à celle du lemme 2.2.1.

Lemme 2.2.4. Dans un voisinage convenable V_α^I du "disque" $\Sigma_\alpha(I)$ il existe une famille analytique $U_{x,\xi}$ $((x,\xi) \in V_\alpha(I))$ de matrices unitaires telles que :

$$(2.2.7) \quad U_{x,\xi}^{-1} M_{x,\xi} U_{x,\xi} = \left(\begin{array}{c|c} A_{x,\xi}^{11}(x,\xi) & 0 \\ \hline 0 & A_{x,\xi}^{22} \end{array} \right) .$$

où $A_{x,\xi}^{11}$ a comme valeurs propres $\mu_{L-1}(x,\xi), \mu_L(x,\xi)$

$A_{x,\xi}^{22}$ a comme valeurs propres $\mu_k(x,\xi)$ $k \neq L, L-1$.

Remarque 2.2.5. On a des décompositions analogues dans l'holomorphe (cf. Remarque 2.2.3).

On va maintenant s'efforcer de trouver (pour ε_3 assez petit) une nouvelle famille analytique de matrices unitaires $W_{x,\xi}$ de la forme :

$$(2.2.7) \quad W_{x,\xi} = \left(\begin{array}{c|c} W_{x,\xi}^{11} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right).$$

de sorte que $A_{(x,\xi)}^{11}$ ait une forme canonique plus maniable.

Lemme 2.2.6. Quitte à restreindre I et $V_\alpha(I)$ il existe une famille analytique de matrices unitaires 2×2 $W_{x,\xi}^{11}$ telle que :

$$(2.2.8) \quad W_{x,\xi}^{11} {}^{-1} A_{x,\xi}^{11} W_{x,\xi}^{11} = \begin{pmatrix} c(x,\xi) & b(x,\xi) \\ \bar{b}(x,\xi) & c(x,\xi) \end{pmatrix}$$

avec

$$(2.2.9) \quad b(x,\xi) = b_0[(\xi - \xi^\alpha) + i(x - x^\alpha) + \mathcal{O}((\xi - \xi^\alpha, x - x^\alpha)^2)]$$

$$(2.2.10) \quad c(x,\xi) = \gamma_\xi + \mathcal{O}(|(x - x^\alpha), (\xi - \xi^\alpha)|^2).$$

Démonstration. Notons que $c(x,\xi) = \frac{1}{2} \text{Trace } A_{(x,\xi)}^{11}$.

(2.2.10) résulte alors de (2.1.10). On peut donc toujours se ramener dans ce qui suit au cas où $\text{Trace } A_{(x,\xi)}^{11} = 0$ (en retranchant à $A_{(x,\xi)}^{11}$, $c(x,\xi)I$).

Par changement de variable, on suppose qu'on s'est ramené à $x^\alpha = \xi^\alpha = 0$. La démonstration se fera en 2 étapes correspondant au cas "linéaire" puis au cas général.

Etape 1. On traite d'abord le cas "linéaire" où la matrice $A_{(x,\xi)}^{11}$ est remplacée par son développement de Taylor à l'ordre 1 au point $(0,0)$. Après multiplication par une constante de $A_{x,\xi}^{11}$, on peut

supposer qu'on regarde une famille hermitienne 2×2

$$(x, \xi) \rightarrow H(x, \xi)$$

linéaire en (x, ξ) , de trace nulle et de déterminant $-(x^2 + \xi^2)$.

Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a :

$$(2.2.11) \quad H(x, \xi)^2 = (x^2 + \xi^2) I.$$

Par ailleurs, par linéarité on a :

$$H(x, \xi) = x H_1 + \xi H_2.$$

Donc H_1 et H_2 sont deux matrices auto-adjointes de trace nulle, telles que :

$$\begin{aligned} H_1^2 &= H_2^2 = I \\ H_1 H_2 + H_2 H_1 &= 0. \end{aligned}$$

Si $H_3 = -i H_1 H_2$, il s'ensuit que (H_1, H_2, H_3) satisfont aux mêmes relations algébriques que les 3 matrices de Pauli. Par conséquent, il existe une matrice W_0 dans $SU(2)$ unique au signe près telle que $W_0 H_1 W_0^{-1}$ ce qui implique :

$$(2.2.12) \quad W_0^{-1} H(x, \xi) W_0 = \sigma_1 x + \sigma_2 \xi = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \xi + ix \\ \hline \xi - ix & 0 \end{array} \right).$$

Etape 2. Compte tenu de l'étape 1, on peut déjà supposer que :

$$(2.2.13) \quad A^{II}(x, \xi) = \begin{pmatrix} a_0(x, \xi) & b_0(x, \xi) \\ \bar{b}_0(x, \xi) & -a_0(x, \xi) \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} a_0(x, \xi) &= \mathcal{O}(|(x, \xi)|^2) \\ b_0(x, \xi) &= b_0(\xi + ix) + \mathcal{O}(|(x, \xi)|^2). \end{aligned}$$

Il s'agit donc de trouver une famille holomorphe de matrices (unitaires pour (x, ξ) réels) définies au voisinage de $(0, 0)$ t.q.

$$W(0, 0) = I$$

$$(2.2.14) \quad [W^{-1}(x, \xi) A^{11}(x, \xi) W(x, \xi)]_{11} = 0.$$

On cherche $W(x, \xi)$ sous la forme $\frac{1}{\sqrt{1+|e|^2}} \begin{bmatrix} -\bar{e}(x, \xi) & e(x, \xi) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
et on doit trouver e analytique au voisinage de 0 t.q.

$$(2.2.15) \quad a_0(x, \xi) - b_0(x, \xi) \bar{e}(x, \xi) - \bar{b}_0(x, \xi) e(x, \xi) - a_0(x, \xi) |e|^2 = 0 \\ e(0, 0) = 0.$$

Après changement de coordonnée $(x, \xi) \rightarrow (y, \eta)$, on peut supposer que $b_0(x, \xi) = \bar{b}_0(y, \eta) = \eta + iy$.

On peut alors développer a_0 sous la forme :

$$a_0 = f_0 b_0^2 + \bar{f}_0 \bar{b}_0^2 + g_0 b_0 \bar{b}_0 \text{ avec } f_0, g_0 \text{ analytiques, } g_0 = \bar{g}_0$$

et on cherche e sous la forme : $e = c_0 b_0 + d_0 \bar{b}_0$ avec c_0, d_0 analytique, $c_0 = \bar{c}_0$.

On vérifie alors que (2.2.15) est vérifiée dès qu'on a les équations suivantes satisfaites :

$$\begin{cases} f_0 - \bar{d}_0 - a_0 c_0 \bar{d}_0 = 0 \\ g_0 - 2c_0 - a_0(c_0^2 + |d_0|^2) = 0 \\ \begin{cases} \operatorname{Re} d_0 - \operatorname{Re} f_0 + a_0 c_0 \operatorname{Re} d_0 = 0 \\ \operatorname{Im} d_0 + \operatorname{Im} f_0 - a_0 c_0 \operatorname{Im} d_0 = 0 \end{cases} \\ c_0 + \frac{a_0}{2} c_0^2 - \frac{g_0}{2} + a_0 |d_0|^2 = 0. \end{cases}$$

Ce dernier système se résout aisément en c_0, d_0 par le théorème des fonctions implicites. ■

Remarque 2.2.7. Dans le cas général, on ne peut pas s'assurer que $c=0$ dans le lemme 2.2.6. C'est toutefois le cas lorsque q est pair pour $\ell = (q/2) + 1$ (cf. §9 de [HeSj5] ou le §3.7) qui est le seul cas utile pour l'équation de Harper (cf. Remarque 0.3). Les

réductions considérées ici ont une portée plus générale. ■

On va encore "améliorer" la forme générale de $A_{x,\xi}^{11}$ en utilisant le calcul fonctionnel.

Rappelons que $A_{(x,\xi)}^{11}$ provient de la décomposition par bloc de $M(x,\xi)$. Compte tenu de (2.1.1) et du théorème de Cayley-Hamilton, on en déduit que :

$$f_{p,q}[A_{x,\xi}^{11}] = 2(-1)^q [\cos qx + \cos q\xi] I_2.$$

On peut aussi trouver g analytique sur I t.q. :

$$g(E) \sim E - \gamma_L$$

et

$$f_{p,q}(E) - f_{p,q}(\gamma_L) = g(E)^2.$$

Considérons $g[A_{x,\xi}^{11}]$, on a :

$$g(A_{x,\xi}^{11}) = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0(x,\xi) & \tilde{b}_0(x,\xi) \\ \tilde{b}_0(x,\xi) & \tilde{c}_0(x,\xi) \end{pmatrix}$$

avec \tilde{c}_0 et \tilde{b}_0 vérifiant (2.2.9) et (2.2.10) (avec $\gamma_L = 0$).

Observant que $\left(g(A_{x,\xi}^{11})\right)^2$ est diagonale, on obtient $\tilde{c}_0 \equiv 0$ compte-tenu de l'ellipticité de \tilde{b}_0 près de $x = \xi = 0$.

On a donc montré le :

Lemme 2.2.8. Il existe une fonction analytique g_0 et une famille analytique $u_{x,\xi}$ t.q.

$$g_0(E) = E - \gamma_L + \mathcal{O}((E - \gamma_L)^2)$$

$$u_{x,\xi} g_0(A_{(x,\xi)}^{11}) u_{x,\xi}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b(x,\xi) \end{pmatrix}$$

$$b(x, \xi) = \tilde{\xi} + i \tilde{x} + \mathcal{O}((\tilde{x}, \tilde{\xi})^2),$$

avec $\tilde{\xi} = \xi - \xi^\alpha$, $\tilde{x} = x - x^\alpha$.

2.3. Quelques lemmes techniques.

Dans l'étude ultérieure du spectre un rôle important est joué par des problèmes à un "puits", i.e. dont les surfaces d'énergie n'ont plus qu'une composante connexe.

L'un des objectifs de ce paragraphe est de montrer comment on peut définir de tels problèmes. On étudie différents cas. On traite d'abord le :

Cas I .

$$(2.3.1) \quad \begin{array}{ll} \textcircled{a} & I_0 = [\gamma_\ell, \gamma'_\ell] \text{ avec } \delta_{\ell-1} < \gamma_\ell < \gamma'_\ell < \zeta_\ell \\ \text{ou} & \\ \textcircled{b} & I_0 = [\delta'_\ell, \delta_\ell] \text{ avec } \zeta_\ell < \delta'_\ell < \delta_\ell < \gamma_{\ell+1}. \end{array}$$

On pose $I_\varepsilon = I_0 + [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Lemme 2.3.1. Sous l'hypothèse (2.3.1), il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, une constante C_0 et une matrice $\tilde{M}_\varepsilon(x, \xi)$ autoadjointe t.q. :

$$(2.3.2) \quad \tilde{M}_\varepsilon(x, \xi) = M(x, \xi) \text{ pour } (x, \xi) \in \Sigma_{(0,0)}(I_\varepsilon)$$

$$(2.3.3) \quad \forall (r, s) \in \mathbb{N}, \exists C_{rs} \text{ t.q. } \|D_x^r D_\xi^s \tilde{M}_\varepsilon(x, \xi)\| \leq C_{rs}.$$

Il existe une famille C^∞ d'opérateurs (bornés au sens de (2.3.2)) unitaire $\tilde{U}(x, \xi)$ t.q.

$$(2.3.4) \quad \tilde{U}(x, \xi) \tilde{M}_\varepsilon(x, \xi) \tilde{U}^{-1}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_{\ell, \varepsilon}(x, \xi) & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{\ell, \varepsilon}(x, \xi) \end{pmatrix}$$

avec

$$(2.3.5) \quad \begin{cases} \tilde{\mu}_{\ell, \varepsilon}(x, \xi) = \mu_\ell(x, \xi) \text{ dans } \Sigma_{(0,0)}(I_\varepsilon) \\ \tilde{\mu}_{\ell, \varepsilon}^{-1}(I_\varepsilon) = \Sigma_{(0,0)}(I_\varepsilon) \end{cases}$$

$$(2.3.6) \quad \begin{cases} d(\operatorname{Sp} \tilde{A}_{\ell, \varepsilon}(x, \xi), I_{\varepsilon}) > 1/C_0 > 0, \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \\ d(\tilde{\mu}_{\ell, \varepsilon}(x, \xi), I_{\varepsilon}) > 1/C_0 \text{ pour } |x| + |\xi| > C_0. \end{cases}$$

Remarque 2.3.2. On a alors bien entendu le même résultat pour tout sous-intervalle de I_0 .

Démonstration : Considérons la couronne $\Sigma_{(0,0)}([\gamma'_{\ell} + (3\varepsilon/2), \gamma'_{\ell} + 2\varepsilon])$ (avec $\varepsilon > 0$ assez petit).

Observons que dans cette couronne, on a $\det(M(x, \xi) - E) \neq 0$ pour $E \in I_{\varepsilon}$.

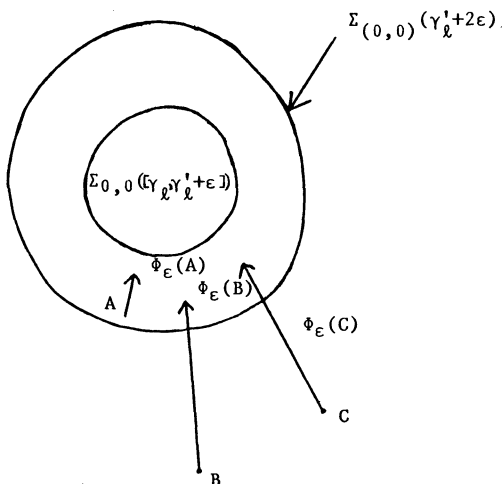
On peut construire un difféomorphisme global Φ_{ε} de \mathbb{R}^2 sur $\Sigma_{(0,0)}([\gamma'_{\ell}, \gamma'_{\ell} + 2\varepsilon])$ t.q.

$$\Phi_{\varepsilon} \wedge \Sigma_{(0,0)}([\gamma'_{\ell}, \gamma'_{\ell} + \varepsilon]) = \operatorname{id}$$

et

$$|D_X^r D_{\xi}^s \Phi_{\varepsilon}| \leq C_{rs} \quad \forall r, s \in \mathbb{N}.$$

Φ_{ε} contracte \mathbb{R}^2 sur le pseudodisque $\Sigma_{(0,0)}([\gamma'_{\ell}, \gamma'_{\ell} + 2\varepsilon])$ en laissant fixe $\Sigma_{(0,0)}([\gamma'_{\ell}, \gamma'_{\ell} + \varepsilon])$.



Alors $\tilde{M}_\varepsilon(x, \xi) = M(\Phi_\varepsilon(x, \xi))$ répond à la question. Les autres affirmations se déduisent alors des résultats du §.2.2. ■

On traite maintenant le :

Cas II.

$$(2.3.7) \quad \textcircled{a} \quad I_0 = [\gamma'_\ell, \gamma''_\ell] \text{ avec } \delta_{\ell-1} = \gamma_\ell < \gamma'_\ell < \gamma''_\ell < \zeta_\ell$$

$$\textcircled{b} \quad I_0 = [\delta'_\ell, \delta''_\ell] \text{ avec } \zeta_\ell < \delta'_\ell < \delta''_\ell < \delta_\ell = \gamma_{\ell+1}.$$

Lemme 2.3.3. Le lemme 2.3.1. est vrai sous les hypothèses (2.3.3).

Démonstration : On traite le cas (a).

Bien entendu, la difficulté nouvelle est qu'on a une racine double pour :

$$\mu_\ell(x_\ell^{(0,0)}, \xi_\ell^{(0,0)}) = \gamma_\ell.$$

On note dans la suite $x_\ell^0, \xi_\ell^0, x_\ell^\alpha, \xi_\ell^\alpha$ pour $\alpha = (0,0)$.

On va donc commencer par modifier $M(x, \xi)$ dans $\Sigma_{(0,0)}([\gamma_\ell, \gamma'_\ell - \varepsilon])$ de telle sorte que les racines deviennent simples. Cette modification étant faite, on termine alors la démonstration comme pour le lemme 2.3.1.

Observons tout d'abord que dans $\Sigma_{(0,0)}([\gamma_\ell, \gamma_\ell + \eta])$, ($\eta > 0$ assez petit), on peut conjuguer d'après les lemmes 2.2.4 et 2.2.6

$$M(x, \xi) \text{ à : } \left(\begin{array}{cc|c} c(x, \xi) & b(x, \xi) & 0 \\ \hline \bar{b}(x, \xi) & c(x, \xi) & \\ \hline 0 & & A_0^{22}(x, \xi) \end{array} \right)$$

par une famille unitaire $U(x, \xi)$.

On est donc conduit à modifier la matrice :

$$\begin{pmatrix} c(x, \xi) & b(x, \xi) \\ \bar{b}(x, \xi) & c(x, \xi) \end{pmatrix}$$

pour la rendre à racines simples.

Soit χ une fonction C^∞ positive t.q. $\chi(x_\ell^0, \xi_\ell^0) > 0$ (assez petit) et $\text{supp } \chi$ dans un voisinage assez petit de (x_ℓ^0, ξ_ℓ^0) .

On introduit $A_\chi^{11}(x, \xi) = \begin{pmatrix} c - \chi & b \\ b & c + \chi \end{pmatrix}$ qui coïncide avec $A_0^{11}(x, \xi)$ dans $\Sigma_{(0,0)}([y_\ell + (\eta/2), y_\ell + \eta])$ pour un bon choix de χ .

Il est clair que l'on a 2 racines simples : $\tilde{\mu}_\ell = c + \sqrt{\chi^2 + |b|^2}$, $\tilde{\mu}_{\ell-1} = c - \sqrt{\chi^2 + |b|^2}$ pour $(x, \xi) \in \Sigma_{(0,0)}([y_\ell, y_\ell + \eta])$ et on peut choisir χ assez petite de telle sorte que :

$$(2.3.8) \quad \sup_{\Sigma_{(0,0)}([y_\ell, y_\ell + (\eta/2)])} \tilde{\mu}_\ell \leq \inf_{\Sigma_{(0,0)}([y_\ell + (\eta/2), y_\ell + \eta])} \mu_\ell.$$

Notons, pour un usage éventuel futur, qu'on peut choisir χ de sorte que :

$$(2.3.9) \quad \tilde{\mu}_\ell \text{ admet dans } \Sigma_{(0,0)}(y_\ell, y_\ell + \eta) \text{ un unique minimum non dégénéré en } (x_\ell^0, \xi_\ell^0) \text{ égal à } \chi(x_\ell^0, \xi_\ell^0) + y_\ell (> y_\ell).$$

Prenant la conjugaison inverse par $U^{-1}(x, \xi)$, on obtient ainsi une matrice $M_\chi(x, \xi)$ qui a toutes les propriétés voulues dans $\Sigma_{(0,0)}([y_\ell, y_\ell + \eta])$ et coïncide avec $M(x, \xi)$ dans $\Sigma_{(0,0)}([y_\ell + (\eta/2), y_\ell + \eta])$. On applique alors la construction faite dans la démonstration du lemme 2.3.2 à la matrice définie par $M_\chi(x, \xi)$ pour (x, ξ) dans $\Sigma_{(0,0)}([y_\ell, y_\ell + \eta])$ et $M(x, \xi)$ dans $\Sigma_{(0,0)}([y_\ell + \eta, y_\ell'' + 2\varepsilon])$.

On traite finalement le cas :

Cas III.

$$(2.3.10) \quad I_0 = [\delta'_{\ell-1}, \gamma'_{\ell}] \text{ avec } \delta'_{\ell-1} < \delta_{\ell-1} = \gamma_{\ell} < \gamma'_{\ell} \\ \text{et } |\gamma'_{\ell} - \delta'_{\ell-1}| \text{ assez petit.}$$

Par des techniques voisines des autres cas, on a le :

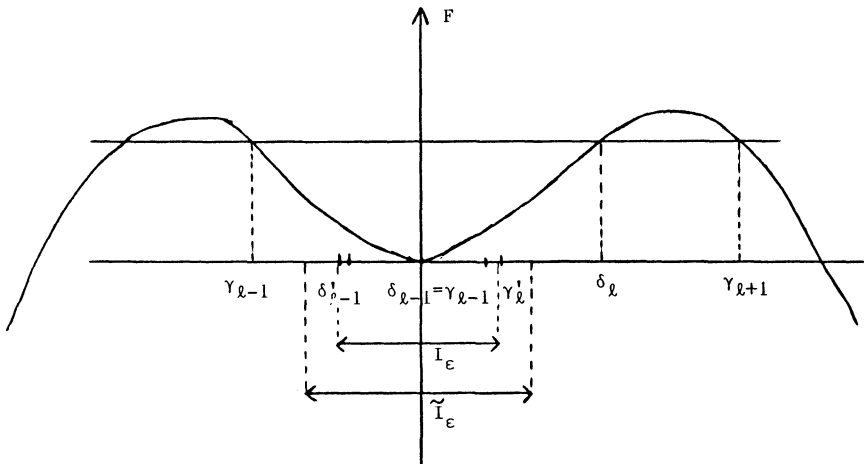
Lemme 2.3.4. Sous l'hypothèse (2.3.10), on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit une constante C_0 , $\tilde{M}_{\varepsilon}(x, \xi)$ vérifiant (2.3.2), (2.3.3), \tilde{U} unitaire vérifiant (2.3.3) et :

$$(2.3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U} \tilde{M}_{\varepsilon} \tilde{U}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}^{11} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A}^{22} \end{array} \right) \\ \text{avec } \tilde{A}^{11} = \begin{pmatrix} c & b \\ b & c \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

\tilde{A}^{11} admet comme valeurs propres $\tilde{\mu}_{\ell-1, \varepsilon}, \tilde{\mu}_{\ell, \varepsilon}$ avec :

$$(2.3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_{\ell-1} = \tilde{\mu}_{\ell-1, \varepsilon} \leq \tilde{\mu}_{\ell, \varepsilon} = \mu_{\ell} \text{ dans } \Sigma(0,0)(I_{\varepsilon}) \\ \tilde{\mu}_{\ell, \varepsilon}^{-1}(\tilde{I}_{\varepsilon}) = \tilde{\mu}_{\ell-1, \varepsilon}^{-1}(\tilde{I}_{\varepsilon}) = \Sigma(0,0)(I_{\varepsilon}) \text{ où } \tilde{I}_{\varepsilon} \text{ est} \\ \text{le plus grand intervalle contenant } I_{\varepsilon} \text{ t.q.} \\ f_{p,q}(\tilde{I}_{\varepsilon}) = f_{p,q}(I_{\varepsilon}). \text{ (Voir figure).} \end{array} \right.$$

$$(2.3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} d(\text{Sp } \tilde{A}^{22}(x, \xi), \tilde{I}_{\varepsilon}) > 1/C_0 > 0 \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \\ d(\text{Sp } \tilde{A}^{11}(x, \xi), \tilde{I}_{\varepsilon}) > 1/C_0 \text{ pour } |x| + |\xi| > C_0. \end{array} \right.$$



Remarque 2.3.5. On peut utiliser le calcul fonctionnel pour se ramener au cas où $c=0$ en utilisant le lemme 2.2.8.

3. DECOMPOSITION PAR BLOCS PSEUDODIFFERENTIELS ET RECHERCHE DE FORMES NORMALES

3.0. Introduction.

L'objet de ce paragraphe est d'étendre les résultats du §.2 de [HeSj5] à la situation de systèmes. Pour l'essentiel, nous avons déjà travaillé dans le cadre de systèmes pour les principaux résultats concernant l'étude modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$. Il reste toutefois à démontrer l'analogue pour les systèmes du résultat de [HeRo3] utilisé dans la proposition 3.2 de [HeSj5] donnant une minoration uniforme de la distance entre 2 valeurs propres consécutives (par $(1/C_0)h$) pour un o.p.d $p_0(x, h D_x)$ dans tout intervalle I ne contenant comme valeur critique éventuelle qu'un minima ou un maxima non dégénéré avec $p_0^{-1}(I)$ connexe) dans le cas de la dimension 1.

L'étude présentée ici dépasse de loin les applications développées ultérieurement car l'étude de systèmes pseudo-différentiels du type considéré ici apparaît dans de nombreux problèmes de physique des solides où un petit paramètre h apparaît qui peut être selon les cas la constante de Planck, le flux d'un champ magnétique ou l'inverse de ce flux. Avant de passer à des énoncés précis, il est peut être utile de préciser la nature des résultats obtenus pour mieux cerner leurs applications potentielles.

Les § 3.1 et 3.2 sont consacrés à une théorie du découplage pour des systèmes pseudodifférentiels $A(x, h D_x, h)$ opérant dans $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k)$. Au moins en première approximation beaucoup des propriétés (lorsque h tend vers 0) de tels systèmes se déduisent de l'étude du symbole principal $A(x, \xi; 0)$ et de ses valeurs propres $\lambda_\ell(x, \xi)$ ($\ell=1, \dots, k$). Lorsque toutes ses racines sont simples, on a l'idée que l'étude de tels systèmes se ramène à l'étude de k opérateurs pseudo-différentiels scalaires à une erreur près qu'il s'agit d'optimiser. Il n'est pas possible de réaliser un tel découplage complètement (et ceci est bien connu dans l'étude de l'équation de Dirac relativiste). la théorie des pseudo-différentiels à petit paramètre h se trouve être un instrument très adapté pour construire un tel découplage. Celui-ci est réalisé modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ dans le § 3.1 et sous des hypothèses plus strictes (symboles analytiques) modulo $\mathcal{O}(\exp(-\varepsilon_0/h))$ (pour un $\varepsilon_0 > 0$) dans le § 3.2.

Dans le § 3.3, on utilise le découplage du § 3.1 pour ramener l'étude du spectre d'un système dans une certaine zone d'énergie à l'étude d'un opérateur pseudodifférentiel scalaire $\mu(x, hD_x; h)$. Au moins formellement et dans le cas de la dimension 1 (le cas de la dimension >1 nécessiterait des théories plus développées à la MASLOV [Ma]), le spectre dans des zones d'énergie non-critique pour $\mu(x, \xi)$ (ou près d'un minimum ou maximum non dégénéré) est bien connu modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ et déterminé par des conditions de Bohr-Sommerfeld (celles qui sont écrites en général le sont avec une erreur de l'ordre de $\mathcal{O}(h^2)$). Une manière de produire ces valeurs propres approchées consiste à chercher des quasi-modes sous la forme B.K.W. mais pour justifier qu'on obtenait ainsi tout le spectre, HELFFER et ROBERT ont été conduits dans [HeRo3] à trouver une fonction $f(E, h)$ telle que, localement dans une certaine bande d'énergie, l'opérateur $f(P, h)$ ait le même spectre que l'oscillateur harmonique. La démonstration de ce résultat était plutôt indirecte puisqu'on vérifiait plutôt que :

$$\chi(P) e^{-2\pi i f(P, h)} = \chi(P)$$

où χ est une fonction à support compact qui vaut 1 dans la zone d'énergie non-critique choisie.

Le § 3.4 toujours spécifique de la dimension 1 précise la construction précédente en explicitant l'équivalence unitaire entre $f(P, h)$ et l'oscillateur harmonique. L'opérateur Fourier-intégral qui réalise cette équivalence unitaire permet de mieux connaître les quasi-modes de $f(P, h)$ et donc de P à partir de la donnée des quasi-modes de l'oscillateur harmonique qui sont explicitement connus (ce sont les fonctions d'Hermite). De plus, on obtient ainsi une bonne connaissance du spectre et des quasi-modes près d'un extremum non-dégénéré (la zone la plus délicate est la zone transitoire entre celle où on étudie un nombre fini de valeurs propres en fond de puits (si c'est un minimum) et la zone non critique où on peut utiliser des constructions B.K.W. plus classiques).

Le § 3.5 présente la même étude dans le cadre analytique avec des résultats modulo $\mathcal{O}(\exp(-\varepsilon_0/h))$.

A partir du § 3.6, on étudie des systèmes pour lesquels une valeur propre devient double. La réduction au cas scalaire n'est plus possible mais on peut par découplage se ramener à l'étude d'un système 2×2 qui dans le cas particulier qui nous concerne se

présente comme un système du type Dirac. On tente dans les § 3.6 et 3.7 de développer une théorie analogue pour des systèmes dont le modèle est :

$$\begin{pmatrix} 0 & hD_X + ix \\ hD_X - ix & 0 \end{pmatrix}$$

et de trouver l'analogue des conditions de Bohr-Sommerfeld dans cette situation. On essaye en particulier de trouver une fonction $f(E, h)$ et une transformation unitaire U telle que $U^{-1} f(P, h) U$ corresponde exactement au modèle. On n'y arrivera pas complètement mais une forme légèrement affaiblie de ce résultat nous donnera tous les renseignements nécessaires pour la suite.

3.1. Décomposition par bloc modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$: la méthode de Taylor.

Nous nous intéressons à l'étude d'opérateurs pseudodifférentiels associés à un symbole $A(x, \xi, h)$, $h \in]0, h_0]$ (ou même t.q. $|h| \in]0, h_0]$) ou bien par la quantification classique, ou bien par la quantification de Weyl : $A(x, hD_X, h)$ ou $A^W(x, hD_X, h)$ (cf. Remarque 3.1).

On va rappeler quelques faits connus sur ces o.p.d pour fixer les notations (cf. [Ro]). Ici nos symboles vérifient des estimations uniformes.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie (par exemple $\mathfrak{L}(\mathbb{C}^k; \mathbb{C}^k)$), $m \in \mathbb{Z}$, et Ω est un ouvert de $T^*\mathbb{R}^n$, on définit :

$$(3.1.1) \quad S_h^m(\Omega, E) = \left\{ \text{ensemble des applications } h \rightarrow A(\cdot, \cdot, h) \text{ de }]0, h_0] \text{ dans } C_b^\infty(\Omega; E) \text{ t.q. } (x, \xi) \rightarrow h^m A(x, \xi, h) \text{ est uniformément borné par rapport à } h \text{ dans } C_b^\infty(\Omega; E) \right\}$$

i.e.

$$A_h \in S_h^m(\Omega, E) \text{ ssi } \forall \gamma, \forall \delta, \exists C_{\gamma\delta} \text{ t.q.}$$

$$(3.1.2) \quad h^m \| D_x^\gamma D_\xi^\delta A(x, \xi, h) \| \leq C_{\gamma\delta}, \quad \forall (x, \xi) \in \Omega.$$

Lorsque $m=0$, $\Omega = T^*\mathbb{R}^n$, $E = \mathcal{B}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$, on associe un opérateur pseudodifférentiel $A(x, hD, h)$ (ou $A^W(x, hD, h)$) continu de $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}^k$ dans lui-même.

Il existe un isomorphisme e_{WC} de $S_h^m(T^*\mathbb{R}^n, E)$ sur $S_h^m(T^*\mathbb{R}^n, E)$, $A \xrightarrow{e_{WC}} B$ t.q. $A^W(x, hD, h) = B(x, hD_x, h)$.

On s'intéressera plus particulièrement aux symboles classiques et à la classe $S_h^{m, c\ell}(\Omega; E)$ des symboles admettant un développement de la forme

$$(3.1.3) \quad A(x, \xi, h) \sim h^{-m} \sum_{j \in \mathbb{N}} h^j A_j(x, \xi)$$

et $A_j(x, \xi) \in S^0(\Omega, E)$ indépendant de h avec le contrôle naturel du reste correspondant.

Lorsqu'on s'intéresse aux propriétés de l'opérateur $A^W(x, hD_x, h)$ (ou $A(x, hD_x, h)$) avec un symbole $A(x, \xi, h)$ dans $S^{0, c\ell}(T^*\mathbb{R}^n; \mathcal{B}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k))$ modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$, on peut travailler sur les symboles formels c'est-à-dire la donnée de la suite A_j dans $S^0(T^*\mathbb{R}^n; \mathcal{B}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k))$. On note alors $S^{0, f}$ cette classe. Les lois de composition des o.p.d. de Weyl, et classiques induisent des lois de compositions sur les symboles formels qui s'avèrent être localisables dans des ouverts de $T^*\mathbb{R}^n$.

De même l'application e_{WC} opère bien dans les symboles formels.

On note $\#_h^w$ et $\#_h$ les opérations obtenues. On a pour : $A \sim \sum A_j h^j$ et $B \sim \sum B_k h^k$ symboles formels dans $S_h^{0, f}(\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k))$

$$(3.1.4) \quad (A \#_h^w B)_\ell(x, \xi) = \sum_{|\gamma| + j + k = \ell} (1/\gamma!) (\partial_\xi^\gamma A)_j (D_x^\gamma B)_k(x, \xi)$$

$\frac{w}{h}$ est donné par une formule analogue.

Rappelons seulement que :

$$(3.1.5) \quad \frac{w}{h} = (e_{WC})^{-1} \cdot \frac{w}{h} \cdot e_{WC}$$

et que sur les symboles formels (e_{WC}) est l'opérateur :

$$(3.1.6) \quad (e_{WC}) = \left(\exp (1/2i) h \sum_j \partial_{x_j} \partial_{\xi_j} \right).$$

Notons le fait classique :

$$(3.1.7) \quad ((e_{WC})(A))_0 = A_0$$

i.e. le symbole principal ne dépend pas de la quantification

$$(3.1.8) \quad ((e_{WC})^{-1}A)_1 = A_1 - (1/2i) \sum_j \partial_{x_j} \partial_{\xi_j} A_0$$

(c'est une des manières de voir la notion de symbole sous-principal de $A(x, h D_x)$ (qui n'est pas le coefficient de $h!$)).

Tout ceci montre que, lorsque l'on fait des théories "elliptiques", il est indifférent de travailler en formalisme de Weyl ou en formalisme classique.

Pour terminer ces rappels, on a deux lois naturelles (correspondant dans le cas où $\Omega = T^*\mathbb{R}^n$ à prendre le symbole de l'adjoint Hilbertien de $A(x, h D_x, h)$ (resp. le symbole de Weyl de l'adjoint Hilbertien de $A^W(x, h D_x, h)$) qui par restriction aux symboles formels s'écrivent :

$$(3.1.9) \quad \text{"Adjonction classique"} \\ A \rightarrow A^* \text{ avec } (A^*)_j = \sum_{|\gamma|+k=j} (1/\gamma!) (\partial_{\xi}^{\gamma} D_x^{\gamma} A_k^*)(x, \xi)$$

$$(3.1.10) \quad \text{"Adjonction de Weyl"} \\ A \rightarrow A^{*W} \text{ avec } (A^{*W})_j = (A^*)_j .$$

On retrouve la propriété classique que $A = A^{*W} \Leftrightarrow A_j = A_j^*$ dans le formalisme de Weyl, et on a bien sûr

$$(3.1.11) \quad (e_{CW}(A))^{*W} = e_{CW}(A^*) .$$

Ces préliminaires étant faits, on adapte ici un résultat dû à TAYLOR [Ta] dans le cadre des o.p.d. classiques.

Proposition 3.1.1. Soit $A \in S_h^{0,f}(\Omega)$. On suppose que :

$$(3.1.12) \quad A_0(x, \xi) = \begin{pmatrix} A_0^{11} & 0 \\ 0 & A_0^{22} \end{pmatrix} (x, \xi)$$

Pour $C_0 > 0$ dans \mathbb{R} , on a :

$$(3.1.13) \quad \text{dist}(\text{Sp } A_0^{11}(x, \xi), \text{Sp } A_0^{22}(x, \xi)) \geq 1/C_0 > 0, \quad \forall (x, \xi) \in \Omega$$

$$(3.1.14) \quad A^* = A ,$$

Alors il existe $U(x, \xi, h)$ dans $S_h^{0,f}(\Omega; \mathcal{B}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k))$, formellement unitaire (i.e. $U^* \#_h U = U \#_h U^* = I$) t.q. :

$$(3.1.15) \quad U^* \#_h A \#_h U = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{11} & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \tilde{A}_0^{jj} = A_0^{jj}, \quad j=1,2.$$

Corollaire 3.1.2. Soit $A(x, hD, h)$ un système pseudodifférentiel h -admissible (au sens de [HeRo2]) dont le symbole est dans $S_h^{0, \mathcal{L}}(\mathbb{T}^* \mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k))$. Alors il existe un opérateur unitaire $U(x, hD, h)$ t.q.

$$(3.1.16) \quad U^*(x, hD, h) \circ A(x, hD, h) \circ U(x, hD, h) \\ = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{11}(x, hD, h) & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{22}(x, hD, h) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^\infty)$$

dans $\mathfrak{L}(L^2(\mathbb{R}^n)^k)$.

Bien entendu, on a un résultat analogue en prenant la quantification de Weyl.

Démonstration du Corollaire. Soit $U_0(x, hD, h)$ une réalisation du symbole formel $U(x, \xi, h)$ introduit en (3.1.15), c'est-à-dire l'o.p.d. associée à un symbole $U_0(x, \xi, h)$ dans $S_h^{0, c\ell}(\mathcal{T}^*\mathbb{R}^n; \mathfrak{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k))$ dont le symbole formel est U . On a :

$$U_0^*(x, hD, h) \circ U_0(x, hD, h) = I + R_h$$

avec $R_h = \mathcal{O}(h^\infty)$ et $R_h^* = R_h$. Pour $0 < h < h_0$, on peut considérer

$S_h = (I + R_h)^{-\frac{1}{2}}$ avec $S_h = S_h^*$ et $U(x, hD, h) = U_0(x, hD, h) \circ S_h$ vérifie :

$$U^*(x, hD, h) \circ U(x, hD, h) = I.$$

U étant par ailleurs inversible, U est bien unitaire et est une réalisation de $U(x, \xi, h)$. ■

Démonstration de la Proposition 3.1.1. Elle se fait par récurrence. On suppose qu'on a résolu (3.1.15) modulo $\mathcal{O}(h^\ell)$ (on note (3.1.15) $_\ell$) et on va montrer (3.1.15) $_{\ell+1}$ (notons que (3.1.12) = (3.1.15) $_1$).

Remarquons qu'il suffit de chercher U_ℓ sous la forme :

$$U_{\ell+1} = I + h^\ell \begin{pmatrix} 0 & B_{\ell+1} \\ B_{\ell+1}^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe en effet un symbole formel unitaire $\tilde{U}_{\ell+1}$ qui coïncide avec

$U_{\ell+1}$ modulo $\mathcal{O}(h^{\ell+1})$.

On suppose donc qu'on a trouvé \tilde{U}^ℓ t.q.

$$(3.1.17)_\ell \quad \left(\tilde{U}^\ell * \#_h A \#_h \tilde{U}^\ell \right)_{(x,\xi)} = {}^\ell A_{(x,\xi)} = \begin{pmatrix} {}^\ell \tilde{A}^{11} & {}^\ell \tilde{A}^{02} \\ 0 & {}^\ell \tilde{A}^{22} \end{pmatrix} \\ + h^\ell \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A}^{12} \\ \tilde{A}^{21} & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^{\ell+1}).$$

On cherche donc $U_{\ell+1}$ t.q.

$$(3.1.18) U_{\ell+1}^* \# {}^\ell A_{(x,\xi)} \# U_{\ell+1} = \begin{pmatrix} {}^{(\ell+1)}\tilde{A}^{11} & 0 \\ 0 & {}^{(\ell+1)}\tilde{A}^{22} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^{\ell+1}),$$

on pose alors

$$(3.1.19) \quad \tilde{U}^{\ell+1} = \tilde{U}^\ell \circ \tilde{U}_{\ell+1}.$$

On est amené à trouver $B_{\ell+1}$ t.q. :

$$(3.1.20) \quad \tilde{A}_\ell^{12} + A_0^{11} \cdot B_{\ell+1} - B_{\ell+1} \cdot A_0^{22} = 0$$

qu'on résout grâce au lemme suivant (cf. [Ta]).

Lemme 3.1.3. Soit $F \in M_{n \times n}$ ($M_{n \times n}$ est l'ensemble des matrices à coefficients dans \mathbb{C}) et $E \in M_{m \times m}$.

On définit $\Phi_{E,F} : M_{n \times m} \rightarrow M_{n \times m}$ par

$$\Phi_{E,F}(T) = TF - ET$$

alors $\Phi_{E,F}$ est bijective si E et F ont leur spectre disjoint.

Si E et F sont autoadjoints alors :

$$\|\Phi_{E,F}^{-1}\| \leq C d(\sigma(F), \sigma(E)) \text{ où } C \text{ est une constante universelle.}$$

(3.1.17) $_{\ell+1}$ est vérifié grâce à (3.1.18), (3.1.19) et (3.1.20).

3.2. Décomposition par bloc (modulo $\mathcal{O}(\exp(-\varepsilon_0/h))$).

On se place maintenant dans le cadre de la théorie des symboles analytiques formels (cf. [Sj]§1),

$$(3.2.1) \quad A(x, \xi, h) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} h^j A_j(x, \xi)$$

avec $(x, \xi) \in \Omega \subset \mathbb{C}^{2n}$ (Ω ouvert).

On suppose que les A_j sont holomorphes dans Ω et vérifient

$$(3.2.2) \quad \forall K \subset \subset \Omega, \exists C_K \text{ t.q. } \|A_j(x, \xi)\| \leq C_K^{j+1} \cdot j^j, \forall (x, \xi) \in K.$$

On note alors $A \in S_h^{0, a, f}(\Omega; \mathfrak{B}(\mathbb{C}^k))$.

Muni de la loi $\#_h$, il est classique que c'est une algèbre.

On n'aura besoin dans la suite que de constructions dans des ouverts Ω bornés (pour les constructions B.K.W).

Si $A \in S_h^{0, a, f}(\Omega, \mathfrak{B}(\mathbb{C}^k))$, on a un opérateur naturel A^* défini dans $S_h^{0, a, f}(\bar{\Omega}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}^k))$ ($\bar{\Omega} = \{z, t, \text{t.q. } \bar{z} \in \Omega\}$) par (cf. (3.1.9), (3.1.10)).

Adjonction classique.

$$(3.2.3) \quad (A^*(\bar{x}, \bar{\xi}))_j = \sum_{|\gamma|+k=j} \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma!} [(\partial_{\bar{\xi}}^{\gamma} D_x^{\gamma} A_k)(x, \xi)]^*.$$

Adjonction de Weyl.

$$(3.2.4) \quad A^{*W}(\bar{x}, \bar{\xi}) = (A(x, \xi))^*.$$

Dans toutes nos applications on aura $\Omega = \bar{\Omega}$; on dira, en général, que :

(3.2.5) A est autoadjoint si sur $\Omega \cap \bar{\Omega}$, $A = A^*$ (resp. $A = A^{*w}$) ce qui coïncide avec la notion classique sur $\Omega \cap \mathbb{R}^n$.

On va démontrer la :

Proposition 3.2.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^{2n}$.

Soit $A \in S_h^{0,af}(\Omega)$ vérifiant (3.1.12), (3.1.13) et formellement autoadjoint au sens de (3.2.5).

Alors il existe $U(x, \xi, h)$ dans $S_h^{0,af}(\Omega)$ inversible et formellement unitaire (i.e. $U^*(x, \xi, h) \#_h U(x, \xi, h) = 1$ pour $(x, \xi) \in \Omega \cap \bar{\Omega}$) tel que (3.1.15) soit vérifiée dans la catégorie des symboles analytiques formels.

L'hypothèse (3.1.13) et la continuité de A_0 assurent qu'on peut trouver une famille de contours $\Gamma = \Gamma(x, \xi)$ fermés avec $\bar{\Gamma}(x, \xi) = -\Gamma(\bar{x}, \bar{\xi})$ pour $(x, \xi) \in \Omega \cap \bar{\Omega}$ entourant le spectre de A_0^{11} dans le sens positif et à distance $> 1/4 C_0$ de $Sp A_0^{11}$ et $Sp A_0^{22}$.

Dans la catégorie des symboles analytiques formels, on peut grâce à la théorie elliptique définir pour tout $z \in \mathbb{C}$ t.q. $d[z, Sp A_0(x, \xi)] > 1/4 C_0$ la famille (dépendant holomorphiquement de z)

$$(z - A)^{-1}$$

et par conséquent

$$(3.2.6) \quad \pi_\Gamma = 1/2\pi i \int_{\Gamma(x, \xi)} (z - A)^{-1} dz$$

est un symbole analytique formel (notons qu'une petite variation de $\Gamma(x, \xi)$ ne modifie pas π_Γ) et on a :

$$(3.2.7) \quad \pi_\Gamma \#_h \pi_\Gamma = \pi_\Gamma$$

$$(3.2.8) \quad \pi_{\Gamma} \#_h A = A \#_h \pi_{\Gamma}$$

$$(3.2.9) \quad \pi_{\Gamma}^* = \pi_{\Gamma}.$$

On décompose : $\mathbb{C}^k = \mathbb{C}^{k_1} \times \mathbb{C}^{k_2}$ (correspondant à la décomposition (3.1.12) de A_0).

Soit T_1 (resp. T_2) la matrice $k \times k_1$ (resp. $k \times k_2$)

$$T_1 = \begin{pmatrix} I_{k_1} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (resp. } T_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{k_2} \end{pmatrix})$$

qui appartient à $S_h^{0,af}(\Omega; \mathfrak{X}(\mathbb{C}^{k_1}, \mathbb{C}^k))$ (resp. $S_h^{0,af}(\Omega; \mathfrak{X}(\mathbb{C}^{k_2}, \mathbb{C}^k))$).

On pose $\pi_1 = \pi_{\Gamma}$; $\pi_2 = I - \pi_{\Gamma}$. Considérons $(\pi_1 \# T_1)^* \# (\pi_1 \# T_1)$. Son symbole principal est égal à un :

$$(\pi_1 \# T_1)^* \# (\pi_1 \# T_1) = I + h S_1$$

et, pour h assez petit, on peut construire dans notre algèbre $B_1 = (I + h S_1)^{-\frac{1}{2}}$ par une série, comme symbole autoadjoint dans $S_h^{0,af}(\Omega, \mathfrak{X}(\mathbb{C}^{k_1} \times \mathbb{C}^{k_1}))$.

On pose $U_1 = \pi_1 \# T_1 \# B_1$. On construit de même U_2 et on a :

$$(3.2.10) \quad U_j^* \# U_j = \text{Id} \quad (\text{par construction}) \quad j=1,2.$$

Considérons

$$U = \sum_j U_j \# T_j^*.$$

On a $U^* \# U = \sum_j \sum_{\ell} T_{\ell} \# U_{\ell}^* \# U_j \# T_j^*$. Or $U_{\ell}^* \# U_j = \delta_{\ell j}$ d'où

$$(3.2.11) \quad U^* \# U = \sum_j T_j \# T_j^* = \text{Id}_h.$$

Par conséquent U est unitaire. On constate maintenant que

$$U^* \# A \# U = \sum_j \sum_{\ell} T_{\ell} \# U_{\ell}^* \# A \# U_j \# T_j^*.$$

De nouveau on remarque que $U_{\ell}^* \# A \# U_j = 0$ si $\ell \neq j$ (grâce à 3.2.8). D'où

$$U^* \# A \# U = \sum_j T_j \# (U_j^* \# A \# U_j) \# T_j^*.$$

On a bien ainsi réalisé la décomposition par bloc avec :

$$\tilde{A}^{jj} = (U_j^* \# A \# U_j), \quad j=1,2.$$

Cette démonstration est encore valable dans le cas C^∞ (en prenant Ω réel) et fournit donc une nouvelle démonstration de la proposition 3.1.1.

Bien entendu, on a tout fait ici avec le formalisme classique mais par transport de structure, compte-tenu du fait que les symboles principaux sont les mêmes dans les 2 théories, on a un formalisme analogue dans le cadre de Weyl.

3.3. Etude modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$. Cas de la bande simple.

On se place dans le cadre des hypothèses des lemmes 2.3.1. ou 2.3.3 et on cherche à étudier le spectre de l'opérateur $\tilde{M}_E^W(x, hD)$ dans un intervalle I_0 (pour lesquelles les surfaces d'énergie sont compactes connexes).

Plus généralement, on étudie un système pseudodifférentiel $k \times k$: $\tilde{M}^W(x, hD)$ pour lequel il existe une racine simple $\tilde{\mu}(x, \xi)$ isolée du reste du spectre de $\tilde{M}(x, \xi)$ uniformément dans \mathbb{R}^{2n} (ce qui est le cas dans le cadre des lemmes 2.3.1. ou 2.3.3. par construction).

Dans tous ces cas, il résulte des techniques du §.2 et des §.3.1 qu'il existe un opérateur pseudodifférentiel unitaire $U(x, hD_x, h)$ t.q.

$$(3.3.1) \quad U(x, hD_x, h)^* \tilde{M}^W(x, hD) U(x, hD_x, h) = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}^W(x, hD_x, h) & 0 \\ 0 & A^W(x, hD_x, h) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^\infty)$$

dans $\mathfrak{L}(L^2 \otimes \mathbb{C}^k)$.

De plus, pour nos applications, les hypothèses suivantes sont vérifiées pour les symboles principaux $\tilde{\mu}_0$ et A_0 de $\tilde{\mu}^W(x, hD_x, h)$ et $A^W(x, hD_x, h)$:

$$(3.3.2)' \quad \text{Pour } \varepsilon > 0 \text{ assez petit, on a (avec } I_\varepsilon = I_0 + [-\varepsilon, \varepsilon]) :$$

$$I_\varepsilon \subset \text{Im } \tilde{\mu}_0; \forall \lambda \in I_\varepsilon, \tilde{\mu}_0^{-1}(\lambda) \text{ est connexe, compact}$$

$$\text{non vide et } \nabla_{x, \xi} \tilde{\mu}(x, \xi) \neq 0 \text{ sur } \tilde{\mu}_0^{-1}(I_\varepsilon)$$

(situation qui correspond à des états excités)

ou, pour un $\eta = \pm 1$:

$$(3.3.2)'' \quad \tilde{\mu}_0 \text{ admet dans } \tilde{\mu}_0^{-1}(I_\varepsilon^\eta) \text{ avec } I_\varepsilon^\eta = I_0 + \eta[0, \varepsilon], \text{ un}$$

$$\text{unique point critique en un point } (0, 0) \text{ où l'on a}$$

$$\text{l'hypothèse de non dégénérescence : } \eta \cdot \text{Hess } \tilde{\mu}_0(0, 0) \text{ défini positif.}$$

$$\text{De plus, } \forall \lambda \in I_\varepsilon^\eta, \tilde{\mu}_0^{-1}(\lambda) \text{ est connexe, compact, non}$$

$$\text{vide.}$$

(Situation qui correspond pour $\eta = +1$ à une situation fond de puits, et pour $\eta = -1$ à une situation sommet de bosse).

$$(3.3.3) \quad \text{Sp } A_0(x, \xi) \cap I_\varepsilon = \emptyset.$$

Modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$, le spectre dans $I_\varepsilon/2$ (ou plus précisément dans le deuxième cas dans $I_{\varepsilon/2}^\eta + [-Ch, Ch]$) est donc déterminé par celui de l'opérateur pseudodifférentiel : $\tilde{\mu}^W(x, hD, h)$ qu'on va noter $p^W(x, hD, h)$ et dont l'étude relève des techniques de [HeRo2,3] à

une petite différence due au fait que le symbole sous-principal $p_1(x, \xi)$ n'est pas nécessairement constant, ce qui va modifier les règles de quantification.

Il est démontré dans cet article qu'il existe une fonction appartenant à $C^\infty(\mathbb{R} \times [0, h_0])$

$$(3.3.4) \quad f(E, h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} f_j(E) h^j$$

affine en dehors de $I_E/2$ telle que

$$(3.3.5) \quad f(h, p^W(x, h, D, h)) \text{ a comme spectre dans l'intervalle } f_0(I_0) \text{ la suite des valeurs propres simples } (n + \frac{1}{2})h \ (n \in \mathbb{Z}), \ (n + \frac{1}{2})h \in f_0(I_0).$$

De plus $E \rightarrow f_0(E)$ étant bijective de I_0 sur $f_0(I_0)$ il existe une fonction : $g(F, h)$ t.q. le spectre dans I_0 de $p^W(x, h, D_X, h)$ est décrit par :

$$(3.3.6) \quad \mu_n(h) = g((n + \frac{1}{2})h, h), \text{ avec } g(F, h) \sim g_0(F) + \sum_{j \geq 1} g_j(F) h^j.$$

Si on s'intéresse à un nombre fini de valeurs propres près de l'extremum on peut écrire modulo $\mathcal{O}(h^2)$: $\mu_n(h) = g_0((n + \frac{1}{2} + \gamma)h) + \mathcal{O}(h^2)$. De plus g_0 et g_1 (ou γ) sont explicitement calculables à partir des quantités

$$\int_{\alpha < \eta p_0(x, \xi) < \eta E} dx d\xi \quad (\text{avec } \alpha = \min(\eta I_0)$$

$$\text{et } \int_{p_0(x, \xi) = E} p_1 d\sigma$$

(où $d\sigma$ est la mesure de Leray $dx d\xi / dp_0$) (cf. §.6.2).

Il ne s'agit bien entendu que d'une version précisée des traditionnelles règles de Bohr-Sommerfeld.

Les racines $\mu_n(h)$ étant simples, on a donc en particulier, démontré pour notre problème la :

Proposition 3.3.1. (cf. Proposition 3.2 dans [HeSj5]).

Sous les hypothèses du lemme 2.3.1 ou 2.3.3 ou de la remarque 2.3.2, on a (pour C assez grand) :

$$\text{Sp } \tilde{M}_C \cap I_{Ch} = \bigcup_{j=0, \dots, N(h)} \{\mu_j(h)\},$$

où les $\mu_j(h)$ sont des valeurs propres simples satisfaisant à :

$$\mu_j(h) - \mu_{j+1}(h) \sim h$$

et de plus

$$\begin{cases} |(\mu_0(h) - \gamma_\ell)| \sim h & \text{(dans le cas du lemme 2.3.1) (a) } \\ \mu_j(h) < \mu_{j+1}(h) & \text{(dans le cas du lemme 2.3.1 (a) ou 2.3.3 (a))} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\mu_0(h) - \delta_\ell| \sim h & \text{(dans le cas du lemme 2.3.1 (b))} \\ \mu_{j+1}(h) < \mu_j(h) & \text{(dans le cas du lemme 2.3.1 (b) ou 2.3.3 (b)).} \end{cases}$$

3.4. Forme normale pour un o.p.d. à un puits non dégénéré dans le cas de la dimension 1 (le cas modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$).

Comme on l'a rappelé au §.3.3, le comportement spectral de l'opérateur $P^W(x, hD, h)$ près du minimum de son symbole principal est calqué sur celui de l'oscillateur harmonique : $h^2 D_x^2 + x^2$. On va préciser cette information dans le cas de la dimension 1 en démontrant :

Proposition 3.4.1. Soit $\gamma < \delta$.

Soit $P^W(x, hD_x, x)$ un o.p.d. h -admissible de symbole principal p_0 vérifiant :

$$(3.4.1) \quad \min p_0(x, \xi) = \gamma = p_0(0, 0) .$$

$$(3.4.2) \quad \{p_0(x, \xi) < \delta\} \text{ est compact, connexe .}$$

$$(3.4.3) \quad \begin{aligned} p_0(x, \xi) > \gamma & \text{ pour } (x, \xi) \neq (0, 0) \\ \nabla_{x, \xi} p_0 \neq 0 & \text{ pour } \gamma < p_0(x, \xi) < \delta . \end{aligned}$$

$$(3.4.4) \quad \text{Hess } p_0(0, 0) \text{ est défini positif.}$$

Alors quitte à restreindre $\delta > \gamma$ il existe un symbole

$$f(E, h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} f_j(E) h^j \text{ et un opérateur Fourier intégral } U \text{ unitaire}^*$$

associé à une transformation canonique χ t.q.

$$(3.4.5) \quad U^* f(P, h) U \equiv q(y, h D_y, h) \text{ (modulo } \mathcal{O}(h^\infty) \text{ dans } \mathcal{X}(L^2))$$

où

$$(3.4.6) \quad \begin{aligned} q(y, \eta, h) &\sim \frac{1}{2} (\eta^2 + y^2) - \frac{1}{2} h \\ &\text{pour } (|\eta|^2 + |y|^2)/2 < f_0(\delta) - f_0(\gamma). \end{aligned}$$

Démonstration. Dans [HeRo3], on a construit un symbole $f[E, h]$ t.q. pour une fonction de troncature convenable χ t.q. $\chi=1$ sur $[\gamma, \delta]$ on ait :

$$(3.4.7) \quad \chi(P) e^{i2\pi/h} f(P, h) = \chi(P) .$$

χ avait comme fonction de localiser en énergie la fonction introduite en (3.3.4). On prend comme nouveau P , $f(P, h)$ et on travaille microlocalement dans la zone d'énergie $[f_0(\gamma), f_0(\delta)] = [0, \tilde{\delta}]$. Le nouveau P a comme propriétés, outre (3.4.1) à (3.4.4) :

$$(3.4.8) \quad \begin{aligned} \text{Le flot de } H_{p_0} &\text{ est } 2\pi\text{-périodique par } (x, \xi) \neq (0, 0) \text{ et} \\ p_0(x, \xi) &\in [\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}] \text{ (qui résulte de (3.4.7)).} \end{aligned}$$

(*) χ n'étant défini que localement, on doit prolonger U et l'unitarité n'est vraie que dans la zone définie en (3.4.6).

et son spectre est dans la zone d'énergie considérée celui de l'oscillateur harmonique.

L'objet de la proposition est donc de préciser cette isospectralité en explicitant la forme de l'équivalence unitaire.

Une première étape est obtenue par le :

Lemme 3.4.2. Il existe une transformation canonique κ définie au voisinage de $(0,0)$ t.q.

$$(3.4.9) \quad p_0 \circ \kappa(y, \eta) = \frac{1}{2}(y^2 + \eta^2) \text{ pour } y^2 + \eta^2 \text{ assez petit.}$$

Ce lemme est démontré dans [CDU].

Considérant un F.I.O. unitaire U_0 associé à κ et conjugant par U_0 , on peut remplacer (3.4.1) à (3.4.4) et (3.4.7) à (3.4.8) par (3.4.7) et :

$$(3.4.10) \quad p_0(y, \eta) = \frac{1}{2}(y^2 + \eta^2) \text{ pour } (y^2 + \eta^2)/2 < \delta.$$

On a ainsi "ajusté" les symboles principaux.

Une deuxième étape est alors de démontrer le :

Lemme 3.4.3. Soit $q(y, hD_y, h)$ de symbole principal $q_0(y, \eta) = \frac{1}{2}(y^2 + \eta^2)$ et vérifiant (3.4.7).

Alors il existe un o.p.d. formel unitaire U et $k \in \mathbb{Z}$ t.q.

$$(U^* \#_h q(y, \eta, h) \#_h U)(y, \eta) = \left(\frac{\eta^2 + y^2}{2} - \left(\frac{2k+1}{2} \right) h \right) \text{ pour un } k \in \mathbb{Z} \\ \text{pour } (\eta^2 + y^2)/2 < \delta.$$

Le symbole sous-principal est alors donné par :

$$q_1 - (1/2i)(\partial^2 q_0 / \partial y \partial \eta) = q_1.$$

Il résulte de (3.4.7) et du calcul des Fourier intégraux que :

$$\int_0^{2\pi} q_1(x(t,y,\eta), \xi(t,y,\eta)) dt = (2k+1)\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

où $((x(t,y,\eta), \xi(t,y,\eta)))$ est la solution de :

$$\frac{dx}{dt} = \xi, \quad \frac{d\xi}{dt} = -x$$

$$x(0,y,\eta) = y, \quad \xi(0,y,\eta) = \eta.$$

On a donc $q_1 = r + (k + \frac{1}{2})$ avec $\int_0^{2\pi} r(x(t,y,\eta), \xi(t,y,\eta)) dt = 0$.

Cherchons maintenant R_0 elliptique d'ordre 0 t.q.

$$Q_0 \#_h R_0 = R_0 \#_h Q \text{ mod } \mathcal{O}(h^2).$$

On voit que l'on doit vérifier la condition

$$H_{Q_0} r_0 + i r r_0 = 0.$$

Soit $(d/dt) r_0(\varphi_t(x, \xi)) = -i r(\varphi_t) r_0(\varphi_t)$

qui est résoluble car $\int_0^{2\pi} r(\varphi_t(y, \eta)) dt = 0$ (qu'on peut relever

modulo $\mathcal{O}(h)$ en un opérateur unitaire \tilde{R}_0).

Après conjugaison par R_0 , on est donc ramené à la situation où

$$Q(y, \eta, h) = \frac{y^2 + \eta^2}{2} - \frac{(2k+1)}{2} h + \mathcal{O}(h^2)$$

i.e. $Q - Q_0 \in S^{-2}, e^{2i\pi Q/h} = e^{2i\pi Q_0/h} = I.$

On raisonne par récurrence en supposant qu'on a un $Q^{(k)}$ t.q.

$$Q^{(k)} - Q_0 \in S^{-k} \text{ avec } e^{2i\pi Q^{(k)}/h} = e^{2i\pi Q_0/h} = I \quad (k \geq 2)$$

et on va conjuguer par un o.p.d. unitaire qu'on va chercher sous la forme

$$U^k = I + ih^{k-1} R_k + \mathcal{O}(h^{k+1}) \text{ avec } R_k(x, \xi) \in \mathbb{R}$$

$$Q_0 \#_h U^k = U^k \#_h Q^{(k)} + \mathcal{O}(h^{k+1}).$$

Il suffit alors de résoudre :

$$\{r_k, q_0\} = q_k$$

qu'on peut résoudre sous la condition $\int q_k(\varphi_t(y, \eta)) dt = 0$.

Soit $\psi(t)$ l'opérateur pseudodifférentiel $(d/dt)(e^{it Q^{(k)}/h} e^{-it Q_0/h})$.

$$\text{On a : } \int_0^{2\pi} \psi(t) dt = 0$$

et son symbole principal est $h^k q_k(\varphi_t(x, \xi))$.

On a donc bien :

$$\int_0^{2\pi} q_k(\varphi_t(x, \xi)) dt = 0.$$

Par récurrence, on obtient le lemme 3.4.3.

Remarque 3.4.4. Le lemme 3.4.2 admet une version analytique qui sera développée dans [HeSj6]. La version C^1 a été obtenue dans [CDU-Ve].

3.5. Etude modulo $\mathcal{O}(\exp(-\varepsilon_0/h))$. Cas de la bande simple.

L'objet de ce paragraphe est de préciser le comportement du spectre du problème à un puits dans le cas où on ajoute des

hypothèses d'analyticité pour les (x, ξ) dans $\tilde{\mu}_0^{-1}(I_\varepsilon)$ (cf. §.3.5).

Compte tenu des résultats du §.3.2, il suffit d'étudier le cas scalaire et comme on a dans l'idée d'utiliser les constructions ci-dessus pour construire des quasimodes, on travaillera avec des o.p.d. analytiques formels et des Fourier intégraux analytiques formels définis dans un voisinage complexe de $\tilde{\mu}_0^{-1}(I_\varepsilon)$. Certaines justifications techniques seront données dans [HeSj6].

On remplace comme au paragraphe précédent $\tilde{\mu}_0$ par p_0 et I_ε par $[\gamma, \delta + \varepsilon]$.

Tout dans la suite est microlocalisé dans un voisinage complexe Ω de $p_0^{-1}(I_\varepsilon)$ (ou dans son image après transformation canonique). Même, si nous conservons des notations "opérateurs" il s'agit toujours de relations au sens des symboles analytiques formels ou au sens de la composition d'un F.I.O. formel et d'un o.p.d. formel.

Compte tenu de la remarque 3.4.4, des résultats de [HeRo3] et observant que $E \rightarrow \int_{p_0(x, \xi) \leq E} dx d\xi$ est analytique par rapport à E ,

on peut trouver une fonction analytique réelle $f(t)$ définie au voisinage de γ avec $f'(\gamma) > 0$ et un F.I.O unitaire analytique t.q.

$$U^{-1} f(P) U$$

a comme symbole principal $\frac{1}{2}(\eta^2 + y^2)$.

Ici $f(P)_{(x, \xi)} = \int_{\Gamma} (P - z)_{(x, \xi)}^{-1} f(z) dz$ où Γ est le bord d'un disque de \mathbb{C} de rayon assez petit centré en γ et le symbole de $U^{-1} f(P) U$ est calculé comme le résultat d'un théorème de phase stationnaire analytique pour les $(y, \eta) \in X(\Omega)$ où X est la transformation canonique de la remarque 3.4. On est donc ramené à considérer un o.p.d. analytique formel auto-adjoint défini pour la boule $B(0, \delta)$ dans \mathbb{C}^2 de symbole principal $\frac{1}{2}(\xi^2 + x^2)$. Ce qui suit est calqué sur le cas C^∞ . Les relations formelles sont donc satisfaites mais ce que nous avons à vérifier est que les o.p.d. ou F.I.O qui apparaissent sont analytiques.

On construit alors formellement pour $|t|$ petit le F.I.O analytique $e^{itP/h}$ de noyau

$$h^{-n} \int e^{(i/h)(\varphi(t,x,\xi)-y \cdot \xi)} a(t,x,\xi,h) d\xi$$

où

$$\varphi(t,x,\xi) = -\frac{x^2 + \xi^2}{2} \operatorname{tgt} + \frac{x\xi}{\cos t}$$

et $a(t,x,\xi,h)$ est un symbole analytique formel (cf. [Sj2] §.9, [HeRo3]) sont définis pour $|t| < \pi/2$.

On définit alors $e^{2i\pi(P/h)}$ comme le F.I.O $(e^{i(\pi/4)P/h})^8$ et comme dans la théorie C^∞ , on constate que compte-tenu du fait que le flot hamiltonien associé à $\frac{1}{2}(\xi^2 + x^2)$ est 2π -périodique que $e^{2i\pi(P/h)}$ est un o.p.d analytique formel R d'ordre 0 défini dans Ω , formellement unitaire et commutant avec P dans l'algèbre $S^0, a, f(\Omega)$ muni de la loi $\#_h$. Dans le cas C^∞ , on avait montré (cf. [HeRo3]) que $R = F(P, h)$ où $F(t, h) \sim \sum F_j(t) h^j$ $F_j(t) \in C^\infty(-\delta, \delta)$. Montrons que si R est un o.p.d analytique d'ordre 0, alors F est un symbole analytique d'ordre 0. On remarque que près d'un point $(x_0, i\xi_0)$ dans $p_0^{-1}(0)$ voisin de $(0, 0)$ mais $\neq 0$, P est de type principal et donc unitairement équivalent à \tilde{D}_X (cf. [Sj2]) (par conjugaison par un F.I.O analytique V). On voit alors que $\tilde{R} = V^{-1}RV = F(\tilde{D}_X, h)$ de sorte que $F(t, h)$ est un symbole analytique formel. Comme R et $F(P, h)$ sont deux o.p.d analytiques formels coïncidant au voisinage de $(x_0, i\xi_0)$, ils coïncident dans tout un voisinage de $(0, 0)$ dans \mathbb{C}^2 . On trouve alors un symbole analytique $G(E, h)$ t.q. :

$$e^{2(i\pi/h)(P+hG(P,h))} = I$$

au sens des o.p.d analytiques formels dans Ω_δ avec $\delta > 0$ assez petit.

On est ainsi ramené (comme au §.3.4) à savoir si l'on peut relier par conjugaison par un o.p.d analytique formel, 2 o.p.d Q et Q_0 ayant même symbole principal et sous-principal et vérifiant donc :

$$(3.5.1)_a \quad e^{2i\pi(Q/h)} = e^{2i\pi(Q_0/h)} = I$$

au sens des o.p.d analytiques formels

et

$$(3.5.1)_b \quad Q - Q_0 \in S^{-2, af}(\Omega) .$$

On cherche donc un symbole analytique $R \in S^{-1, af}(\Omega)$ t.q.

$$(3.5.2) \quad Q_0(I+R) = (I+R)Q$$

qu'on réécrit sous la forme :

$$(3.5.3) \quad \mathfrak{L} \cdot R = Q - Q_0 \quad \text{où} \quad \mathfrak{L}R = Q_0R - RQ .$$

Considérons l'opérateur $e^{-it(\mathfrak{L}/h)}$ qui agit sur les o.p.d analytiques formels par :

$$(3.5.4) \quad e^{-it(\mathfrak{L}/h)} B = e^{-it(Q_0/h)} B e^{it(Q/h)} .$$

On sait que :

$$(3.5.5) \quad e^{2i\pi(\mathfrak{L}/h)} = I \quad \text{dans} \quad \mathfrak{L}(S^{0, af}(\Omega), S^{0, af}(\Omega)) .$$

Observons maintenant que si B est un o.p.d analytique d'ordre $-k$, alors :

$$(3.5.6) \quad A = (i/h) \int_0^{2\pi} (1 - (t/2\pi)) e^{-it(\mathfrak{L}/h)} B dt$$

est un pseudodifférentiel analytique d'ordre $(-k+1)$ et qu'on a :

$$(3.5.7) \quad \mathfrak{L} \cdot A = B - (1/2\pi) \int_0^{2\pi} e^{-it(\mathfrak{L}/h)} B dt .$$

$$\begin{aligned}
 (\text{En effet } \mathfrak{L} A &= (i/h) \int_0^{2\pi} (1 - (t/2\pi)) \mathfrak{L} e^{-it(\mathfrak{L}/h)} B dt \\
 &= - \int_0^{2\pi} (1 - (t/2\pi)) [(d/dt) e^{-it\mathfrak{L}/h} B] dt \\
 &= B - 1/2\pi \int_0^{2\pi} e^{-it(\mathfrak{L}/h)} B dt).
 \end{aligned}$$

On pourra donc résoudre $\mathfrak{L} A = B$ si :

$$\int_0^{2\pi} e^{-it(\mathfrak{L}/h)} B dt = 0 .$$

Vérifions cette condition pour $B = Q - Q_0$.

On a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} e^{-it(\mathfrak{L}/h)} [Q - Q_0] dt &= \int_0^{2\pi} e^{-it(Q_0/h)} (Q - Q_0) e^{it(Q/h)} dt \\
 &= h \int_0^{2\pi} d/dt [e^{-it(Q_0/h)} \cdot e^{it(Q/h)}] dt \\
 &= 0 \quad \text{grâce à (3.5.1).}
 \end{aligned}$$

On peut donc trouver R solution de (3.5.3) dans S^{-1} . Il reste à montrer que l'on peut choisir R de telle sorte que $U = (I + R)$ soit unitaire.

On a $Q_0 U = U Q$. Comme Q et Q_0 sont auto-adjoints, on a aussi :

$$U^* Q_0 = Q \cdot U^* ,$$

dont on déduit :

$$(3.5.8) \quad Q(U^*U) = (U^*U)Q$$

avec $U^*U = I + T$ ($T \in S^{-1}$).

On n'a pas de problème pour définir les o.p.d analytiques $(U^*U)^{\pm \frac{1}{2}}$ par la formule :

$$(U^*U)^{\pm \frac{1}{2}} = 1/2\pi i \int_{\gamma} (z - U^*U)^{-1} z^{\pm \frac{1}{2}} dz$$

où γ est un contour dans \mathbb{C} entourant 1.

Observons maintenant que :

$$V = U(U^*U)^{-\frac{1}{2}}$$

satisfait à :

$$(3.5.10) \quad V^*V = (U^*U)^{-\frac{1}{2}} U^* \cdot U (U^*U)^{-\frac{1}{2}} = I$$

et

$$Q_0 V = Q_0 U (U^*U)^{-\frac{1}{2}} = U Q (U^*U)^{-\frac{1}{2}}$$

et que $(U^*U)^{-\frac{1}{2}}$ commute avec Q compte-tenu de (3.5.8) et (3.5.9), soit :

$$(3.5.11) \quad Q_0 V = V Q.$$

V est bien de la forme $I + R$ avec R dans S^{-1} et on a donc résolu (3.5.2). ■

Pour récapituler, on a donc bien démontré la :

Remarque 3.5.1. Si $p(x, hD, h)$ est un o.p.d analytique formel satisfaisant (3.4.1) à (3.4.4), les conclusions de la proposition 3.4.1 sont satisfaites dans le cadre analytique.

Application 3.5.2. (3.3.6) peut être précisé sous la forme : il existe un symbole analytique $g(E, h)$ t.q. dans I_{Ch} avec

$I_0 = [\gamma_\ell, \gamma'_\ell]$ assez petit, le spectre de $\mu_\varepsilon^W(x, hD_x, h)$ est donné par $\mu_n^\ell(h) = g((n + \frac{1}{2})h, h)$ (modulo $\mathcal{O}(\exp - \varepsilon_0/h)$), $n \in \mathbb{Z}$.

3.6. Étude du cas de 2 bandes qui se touchent.

Les paragraphes 3.3 et 3.4 nous ont permis de localiser (modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$) le spectre du système "à un puits" dans des intervalles I satisfaisant aux hypothèses des lemmes 2.3.1 et 2.3.3. On se place maintenant dans le cadre du lemme 2.3.5 et l'on va étudier le spectre de l'opérateur $\tilde{M}_\varepsilon(x, hD)$ obtenu dans ce lemme. Utilisant la décomposition par bloc réalisée au §.3.1, on est ramené (modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$) à l'étude d'un système 2×2 , $A^{II}(x, hD_x, h)$ et, compte-tenu du lemme 2.2.8, après changement de variable, conjugaison et utilisation du calcul fonctionnel pour les systèmes (cf. [HeRo2,3]), on se ramène à l'étude d'un système de la forme :

$$(3.6.1) \quad A^W(x, hD, h) = \begin{pmatrix} 0 & b^W(x, hD) \\ b^W(x, hD) & 0 \end{pmatrix} + h A_1^W(x, hD, h)$$

où

$$(3.6.2) \quad b(x, \xi) = \xi + ix + \mathcal{O}((x, \xi)^2)$$

et où le symbole principal admet 2 valeurs propres $\lambda_1(x, \xi), \lambda_2(x, \xi)$ vérifiant :

$$(3.6.3) \quad \begin{aligned} \lambda_1(x, \xi) &= -\lambda_2(x, \xi) \\ \lambda_1(x, \xi) &= \sqrt{x^2 + \xi^2} + \mathcal{O}((|x| + |\xi|)^2). \end{aligned}$$

On se propose de montrer l'analogue de la proposition 3.3.1 :

Proposition 3.6.1. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $A^W(x, hD_x, h)$ admet dans l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ des valeurs propres de multiplicité 1 $\lambda_n(h)$ de la forme :

$$(3.6.4) \quad \lambda_n(h) = \nu_0(\text{sign } n) \sqrt{|n|h} + \mathcal{O}(h), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, il existe $C_0 \geq 0$ t.q.

$$(3.6.5) \quad |\lambda_{n+1}(h) - \lambda_n(h)| \geq C_0 h \text{ si } \lambda_n(h) \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Démonstration. Pour montrer (3.6.4), il suffit d'étudier le spectre de

$$A_0^W(x, hD, h) = \begin{pmatrix} 0 & b^W(x, hD) \\ \bar{b}^W(x, hD) & 0 \end{pmatrix}$$

qui se présente comme un système du type Dirac, dont le modèle "en fond

de puits" est $\begin{pmatrix} 0 & hD_x + ix \\ hD_x - ix & 0 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont explicitement connues : $(\lambda_n^0(h) = \text{sign } n \sqrt{|2n|h})$ et sont de multiplicité 1.

(3.6.6) Pour de tels systèmes, on observe que le spectre est invariant par l'application $\lambda \rightarrow -\lambda$.

On calcule $A_0^2 = \begin{pmatrix} b^W \cdot b^{W*} & 0 \\ 0 & \bar{b}^W \cdot \bar{b}^{W*} \end{pmatrix}$ dont on peut étudier le spectre par les techniques des paragraphes précédents.

On note alors que nécessairement A_0^2 a une valeur propre nulle de multiplicité 1 et que les autres valeurs propres sont équivalentes à $nh + \mathcal{O}(h^{3/2})$ pour $n > 0$ avec comme multiplicité 2. (3.6.1) implique alors (3.6.4).

Remarquons finalement que si $\sqrt{nh} < \varepsilon$, alors l'écart entre 2 valeurs propres est minoré par $h/2\varepsilon$ et que si $\varepsilon > 0$ est assez petit, une perturbation de $\mathcal{O}(h)$ (indépendante de ε) ne modifie par la situation et qu'on a donc (3.6.5).

Remarquons aussi que en dehors de $[-\varepsilon, \varepsilon]$, la propriété (3.6.5) est également vérifiée car on est sous le régime où le symbole principal a des racines simples. ■

On va maintenant préciser la proposition 3.6.1, en essayant de trouver une forme canonique pour le système via le calcul fonctionnel et des transformations unitaires comme dans 3.5.

On présente le résultat dans le cadre analytique (la version C^∞ ne pose pas de problème nouveau). On considère donc un système 2×2 d'o.p.d analytiques formels d'ordre 0, auto-adjoint, $A^W(x, hD, h)$ pour lequel on suppose qu'il existe une fonction analytique t.q :

$$(3.6.7) \quad f_0(A_0) = p_0 \cdot I \text{ au voisinage de } (0,0) \\ \text{où } p_0 \text{ vérifie (3.4.1) à (3.4.4).}$$

(3.6.7) est vérifiée pour le système qui nous intéresse, compte-tenu du lemme 2.2.9.

De nouveau, après changement de fonction f_0 et conjugaison par un F.I.O unitaire, on peut supposer que :

$$(3.6.8) \quad f_0(A_0) = \frac{1}{2}(\xi^2 + x^2) I \text{ pour } |\xi|^2 + |x|^2 < \delta.$$

L'o.p.d correspondant satisfait alors à :

$$(3.6.9) \quad P = f_0(A^W(x, hD, h)) = \frac{1}{2}(h^2 D_x^2 + x^2) I + h S \\ \text{où } S \text{ est un o.p.d analytique d'ordre 0.}$$

Dans [HeRo3] ou aux §.3.4-3.5, on cherchait alors à se ramener par le calcul fonctionnel ou la conjugaison unitaire à un modèle simple : $\frac{1}{2}(h^2 D_x^2 + x^2)$. Notre ambition est ici plus modeste. On va chercher un opérateur qui commute avec P et qui permettra de se ramener à un modèle simple. On a :

$$(3.6.10) \quad e^{-i2\pi(P/h)} = R(x, \tilde{D}, h) \\ \text{avec } R \text{ unitaire (o.p.d analytique d'ordre 0).}$$

Il est clair que $[P, R] = 0$ (et également $[A, R] = 0$), mais on ne peut pas en déduire que R est une fonction de P . On cherche à trouver T auto-adjoint t.q. $R = e^{iT}$ et $[T, Q] = 0$.

Formellement, le candidat est $T = (1/i) \text{Log } R$ qui se définit bien quand R est proche de l'identité.

Quand R n'est pas proche de l'identité, on considère $R_0(0,0)$ qu'on peut écrire sous la forme $e^{i\theta_0} \tilde{R}_0(0,0)$ où $\tilde{R}_0(0,0)$ a 2 valeurs propres conjuguées ρ_0, ρ_1 . On définit alors T par :

$$(3.6.11) \quad T = \theta_0 + (1/i) \int_{\gamma} (e^{-i\theta_0} R - z)^{-1} \text{Log } z \, dz$$

où γ est un contour simple, contenant ρ_0, ρ_1 évitant 0 et t.q. $\gamma = \bar{\gamma}$.

On a donc trouvé un o.p.d analytique T (défini près de $(0,0)$) t.q.

$$(3.6.12) \quad e^{iT} = R ; T = T^* ; [T, A] = 0 \text{ et } [T, P] = 0 .$$

On a donc trouvé T avec $[T, A] = 0$, $[T, P] = 0$ t.q. pour $Q = P + h(T/2\pi)$, on ait :

$$(3.6.13) \quad e^{-i 2\pi (Q/h)} = I$$

par ailleurs $Q_0 = (\frac{1}{2} (h^2 D_x^2 + x^2) - h/2) I$ vérifie également :

$$(3.6.14) \quad e^{-i 2\pi (Q_0/h)} = I .$$

On déduit maintenant de (3.6.13), après éventuellement, conjugaison par une matrice unitaire dans $U(2)$ que le symbole sous-principal de Q en $(0,0)$ est donné par $Q_1(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_j \in \mathbb{Z}$.

On va montrer que Q est unitairement équivalent par conjugaison par o.p.d analytique elliptique U à :

$$(3.6.15) \quad Q^1 = (\frac{1}{2} (h^2 D_x^2 + x^2) - h/2) I + h \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

La démonstration est alors très voisine de celle donnée aux paragraphes précédents.

Posons, $\mathfrak{A} = Q^1 A - A Q$ pour A o.p.d analytique 2×2 .
On introduit :

$$e^{-it \mathfrak{A}/h} B = e^{-it Q^1/h} B e^{it Q/h}$$

qui est un o.p.d analytique, comme dans le cas scalaire.

On a :

$$e^{-2i\pi \mathfrak{A}/h} = \text{Id.}$$

On pose :

$$U_0 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} e^{-it \mathfrak{A}/h} dt \cdot I.$$

U_0 est proche de l'identité et $\mathfrak{A} U_0 = 0$, soit $Q^1 U_0 - U_0 Q = 0$.

On construit alors $U = U_0 (U_0^* U_0)^{-\frac{1}{2}}$ qui vérifie :

$$Q^1 U - U Q = 0 \text{ et } U^* U = I.$$

On obtient ainsi la :

Proposition 3.6.2. Soit $A^W(x, hD, h)$ un système 2×2 pseudodifférentiel analytique formel t.q. (3.6.7) soit satisfaite.

1) Alors on peut trouver un système 2×2 T_0 t.q. $[T_0, A^W] = 0$ avec T_0 auto-adjoint t.q.

$$e^{-2i\pi/h [f_0(A^W(x, hD, h)) + h T_0]} = I$$

au sens des o.p.d analytiques formels dans un voisinage de $(0, 0)$.

2) Un O.I.F unitaire analytique formel U .

3) Des entiers $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ t.q.

$$u^{-1}[f_0(A^W(x, h D_x, h)) + h T_0] u = Q_0 + h \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

où $Q_0 = (\frac{1}{2} [|h D_x|^2 + x^2] - h/2) I$.

Application. Si on veut déterminer les basses valeurs propres de A^W , on observe que l'on connaît celles de $f_0(A^W(x, h D_x, h)) + h T_0$, qui sont données par :

$$\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$$

et, si on connaît u , on connaît aussi les espaces propres correspondants : $E_{\mu_0}, E_{\mu_1}, \dots, E_{\mu_k}, \dots$ avec $\dim E_{\mu_k} \leq 2$.

Comme A^W commute avec $f_0(A^W(x, h D_x, h)) + h T_0$, $A^W(x, h D_x, h)$ respecte chaque E_{μ_ν} . On obtient alors les valeurs propres de $A^W(x, h D, h)$ en étudiant A^W/E_{μ_ν} . Dans toute cette discussion, on travaille avec des quasimodes et des quasi valeurs propres (modulo $\mathcal{O}(\exp - \varepsilon_0/h)$).

Si on s'intéresse aux développements formels des valeurs propres, on part de $\varphi_1^{\mu_\nu}, \varphi_2^{\mu_2}$ les 2 fonctions propres d'énergie μ_ν (on suppose $\dim E_{\mu_\nu} = 2$), du système d'oscillateur harmonique et le spectre asymptotique est décrit par la matrice 2×2 :

$$(3.6.16) \quad A_{jk}^{\mu_\nu} = \langle A^W u \varphi_j | u \varphi_k \rangle_{L^2} = \langle (u^{-1} A^W u) \varphi_j | \varphi_k \rangle$$

(où des puissances de $h^{\frac{1}{2}}$ peuvent apparaître).

Il est clair (ν étant fixé) que en utilisant un théorème de phase stationnaire $A_{jk}^{\mu_\nu}$ est une matrice à coefficients symboles analytiques en h et les valeurs propres sont donc les solutions d'un polynôme de degré 2 à coefficients symboles analytiques qu'on pourra analyser plus explicitement dans notre cas particulier.

Le cas où E_{μ_ν} est de dimension 1 est plus simple et on obtient que la valeur propre correspondante est un symbole analytique en

puissances de $h^{\frac{1}{2}}$ donné par

$$(3.6.17) \quad \langle (U^{-1} A^W U) \varphi | \varphi \rangle .$$

On peut également obtenir des expressions B.K.W fonds de puits pour les fonctions propres de A^W puisque c'est une combinaison linéaire à coefficients symboles analytiques de $U\varphi_j$ et $U\varphi_k$.

Etude dans notre cas particulier. Dans notre réduction de $M^W(x, hD_x)$ près de l'énergie $\delta_{\ell-1} = \gamma_{\ell}$, on a vu que l'on pouvait se ramener à l'étude d'un système

$$A^W(x, hD, h) = A_0^W(x, hD) + h A_1^W(x, hD) + \mathcal{O}(h^2)$$

où

$$(3.6.18) \quad A_0(x, \xi) = \begin{pmatrix} c(x, \xi) & b(\xi, x) \\ \bar{b}(\xi, x) & c(x, \xi) \end{pmatrix}$$

$$(3.6.19) \quad \begin{aligned} c(x, \xi) &= \mathcal{O}(|x|^2 + |\xi|^2) \\ b(\xi, x) &= B_0(\xi + ix) + \mathcal{O}(|x|^2 + |\xi|^2), \quad B_0 > 0 \end{aligned}$$

et on a montré l'existence d'une fonction f_0 avec :

$$(3.6.20) \quad f_0(E) = c_0 E^2 + \mathcal{O}(E^3)$$

t.q. (3.6.8) soit vérifiée. On est donc bien dans les conditions d'application de la proposition 3.6.2. On va suivre les différentes étapes pour préciser le théorème dans ce cas.

Remarquons tout d'abord que, pour le terme sous-principal de $f_0(A^W(x, hD, h))$, on a compte tenu de (3.6.20), (3.6.18) et (3.6.19) :

$$\sigma_1(f_0(A^W))(0,0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

Quand on calcule $e^{2i\pi/h f_0(A^W(x, hD_x))}$, on en déduit que le symbole principal de R en $(0,0)$ est l'identité de sorte que

l'opérateur T_0 construit a un symbole principal nul en $(0,0)$.

On peut donc prendre alors $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$. Le spectre de $Q_0 + h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est alors donné par une valeur propre nulle simple correspondant au vecteur propre : $e^{-x^2/2h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et des valeurs propres de multiplicité 2 de la forme nh ($n \in \mathbb{N}^*$) de vecteurs propres normalisés : $h_n(x/\sqrt{h}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $h_{n-1}(x/\sqrt{h}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $h_k(x)$ correspond à la $(k+1)^{\text{ème}}$ valeur propre de l'oscillateur harmonique $\frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2)$.

Cas de la valeur propre simple. La forme de $A^W(x, hD_x, h)$ n'est pas modifiée par conjugaison unitaire et on a donc pour le niveau fondamental à calculer un développement asymptotique de la forme :

$$\langle e^{-x^2/2h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} | \tilde{A}^W(x, hD_x, h) (e^{-x^2/2h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \rangle_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2} =$$

$$\langle e^{-x^2/2h} | (\tilde{A}_{11}^W(x, hD_x) e^{-x^2/2h}) \rangle .$$

Or $\sigma((\tilde{A}_{11}^W(x, hD_x))) = \tilde{c}(x, \xi) + h a_{11}^{(1)}(x, \xi) + \dots$ avec \tilde{c} vérifiant (3.6.19).

Cette valeur propre est donc un symbole analytique dont le développement se calcule par le théorème de la phase stationnaire analytique (cf. [Sj2]) et on obtient :

$$(3.6.21) \quad \lambda_0(h) \sim \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}/2 \\ j \geq 1}} \nu_j \cdot h^j \text{ avec } |\nu_j| \leq C j^{+1} j!$$

(ce qui est cohérent avec (3.6.4)).

Cas de l'espace propre double. Soit donc à calculer la matrice $A_{jk}^{\mu, n}$ définie en (3.6.16).

On fait d'abord un calcul modulo $\mathcal{O}(h)$ en regardant le modèle :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \gamma_0(hD_X + ix) \\ \hline \gamma_0(hD_X - ix) & 0 \end{array} \right)$$

et par lequel on a la matrice 2×2 : $\begin{pmatrix} 0 & \alpha_n \\ \bar{\alpha}_n & 0 \end{pmatrix}$ avec

$$\alpha_n(h) = \gamma_0 \langle (hD_X - ix) h_n(x/\sqrt{h}) | h_{n-1}(x/\sqrt{h}) \rangle$$

$$\alpha_n(h) = \gamma_0 \sqrt{h} \langle (D_X - ix) h_n | h_{n-1} \rangle_{L^2}.$$

On a clairement $\alpha_n = i \gamma_0 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{h}$ pour une normalisation convenable des h_n .

On peut maintenant décrire la forme générale pour la matrice

$$A_{i,j}^n \quad (n \in \mathbb{N}^* \text{ fixé ; } i, j = 1, 2)$$

$$A_{ii}^n = \bar{A}_{ii}^n = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}/2 \\ j \geq 1}} a_{ii}^j h^j, \quad i=1, 2$$

$$A_{12}^n = \bar{A}_{21}^n = i \gamma_0 \sqrt{n} \cdot \sqrt{h} + \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}/2 \\ j \geq 1}} a_{12}^j h^j.$$

On en déduit alors l'existence de 2 valeurs propres :

$$(3.6.22) \quad \lambda_n^\pm(h) \sim \pm \gamma_0 \sqrt{n h} + \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}/2 \\ j \geq 1}} a_n^{\pm j} h^j$$

où λ_n^\pm est la réalisation d'un symbole analytique formel.

Dans la base : $u \cdot h_n(x/\sqrt{h}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u \cdot h_{n-1}(x/\sqrt{h}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, les vecteurs propres correspondants s'écrivent $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$ et sont à coefficients symboles analytiques (pour le voir,

remarquons que $((1/\sqrt{\hbar})A_{ij}^n)$ est un système dont le coefficient de \hbar^0 est une matrice 2×2 à racines simples).

On peut donc bien construire des solutions B.K.W analytiques fond de puits, qu'on pourrait préciser dans l'esprit du §.8 de [HeSj5].

3.7. Cas de la bande centrale (une autre approche).

On a vu au §.9 de [HeSj5] que dans le cas où q est pair, on a

$$(3.7.1) \quad \delta_{q/2} = \gamma_{((q/2)+1)} = 0$$

(résultat de BELLISSARD-SIMON [BeSi]).

La situation décrite au paragraphe précédent se produit donc réellement et compte tenu de la Remarque 0.3 c'est le seul cas qui apparaît dans l'étude de Harper. Dans ce cas, on peut procéder différemment compte-tenu des symétries du problème.

On a en effet observé au §.9 de [HeSj5] (formules 9.3.26 et suivantes) l'existence d'un opérateur *unitaire*

$$(3.7.2) \quad \mathcal{U} = J^{pq/2} \cdot K^{q/2}$$

t.q.

$$(3.7.3) \quad M \mathcal{U} = - \mathcal{U} M$$

et

$$(3.7.4) \quad \mathcal{U}^2 = (-1)^{q/2}.$$

On est alors dans une situation du type "supersymétrique" (cf. par exemple la présentation dans le chapitre 6 de [C-F-K-S]).

Dans le cas $q \equiv 2 \pmod{4}$. On avait $\mathcal{U}^2 = -I$ et on introduisait deux espaces orthogonaux Σ_{\pm} par :

$$\Sigma_{\pm} = \{u \in \mathbb{C}^q \text{ t.q. } Uu = \pm iu\}$$

s'échangeant par l'opération $u \rightarrow \bar{u}$.

Dans la décomposition de $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}^q = (L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \Sigma_+) \oplus (L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \Sigma_-)$ l'opérateur $M^W(x, hD_X)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & A^W(x, hD_X) \\ A^{W*}(x, hD_X) & 0 \end{pmatrix}$$

et on ramène alors l'étude du spectre à l'étude du carré :

$$\begin{pmatrix} A^W(x, hD) A^{W*}(x, hD) & 0 \\ 0 & A^W(x, hD)^* A^W(x, hD) \end{pmatrix}$$

L'étude semi-classique des systèmes $A^W(x, hD_X) A^W(x, hD)^*$ et $A^W(x, hD)^* A^W(x, hD)$ relève alors du cas de la bande simple lorsqu'on travaille près de 0.

Par exemple, dans le cas $q=2$, le système $\begin{pmatrix} \cosh D & \cos x \\ \cos x & -\cosh D \end{pmatrix}$ se ramène à l'étude du système :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cosh D_X + i \cos x \\ \cosh D_X - i \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

soit encore en prenant le carré, à l'étude de 2 opérateurs scalaires

$$(\cosh D + i \cos x)(\cosh D_X - i \cos x)$$

et

$$(\cosh D_X - i \cos x)(\cosh D_X + i \cos x)$$

de symbole principal $(\cos \xi)^2 + (\cos x)^2 = \frac{1}{2} [\cos 2\xi + \cos 2x + 2]$.

Le cas où $q \equiv 0$ modulo 4 se traite de la même manière. Observons ici que la 1^{ère} valeur propre semi-classique de

$(M^W(x, hD_x))^2$ est $\mathcal{O}(h^\infty)$ car on sait que 0 appartient au spectre de l'équation de Harper correspondante. Le fait que le spectre est invariant par $\lambda \rightarrow -\lambda$ montre également qu'il suffit d'étudier le carré pour lequel les valeurs propres semi-classiques seront doubles (sauf la 1^{ère}).

4. DECROISSANCE EXPONENTIELLE.

On va dans ce paragraphe étendre tous les résultats démontrés au §.3 de [HeSj5] au cas des systèmes qui nous intéressent.

Nous avons déjà démontré (Propositions 3.3.1 et 3.6.1) l'équivalent de la proposition 3.2 de [HeSj5] à savoir la :

Proposition 4.1. Soit I_0 un intervalle fermé dans $B_{\mathbb{R}} \setminus \{\zeta_{\mathbb{R}}\}$. Alors pour C convenable et $|h| \leq h_0$, le spectre des systèmes $\tilde{M}_{\mathcal{E}}^W(x, h D_X)$ dans $I_0 + [-Ch, Ch]$ (avec $\tilde{M}_{\mathcal{E}}(x, \xi) = M(x, \xi)$ dans $\Sigma_{(0,0)}(I_{\mathcal{E}})$) est constitué d'une suite monotone de valeurs propres simples $\mu_j(h)$ $j=0, \dots, N_1(h)$ t.q.

$$(4.1) \quad |\mu_{j+1}(h) - \mu_j(h)| \geq C_I |h|$$

(la suite est choisie croissante si $I_0 \subset [\gamma_{\mathbb{R}}, \zeta_{\mathbb{R}}[$, décroissante si $I_0 \subset]\zeta_{\mathbb{R}}, \delta_{\mathbb{R}}]$).

Il est également démontré dans [HeSj5] que si l'on change en dehors de $\Sigma_{(0,0)}(I_{\mathcal{E}})$ le problème de référence à un puits en conservant les propriétés de $\tilde{M}_{\mathcal{E}}(x, \xi)$, on ne modifie pas le spectre modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$. Pour des raisons techniques et surtout pour garder plus d'informations sur $M(x, \xi)$ en dehors de $\Sigma_{(0,0)}(I_{\mathcal{E}})$, on ne souhaite modifier $M(x, \xi)$ qu'au voisinage des $\Sigma_{\alpha}(I_{\mathcal{E}})$ avec $\alpha \neq (0,0)$ (au moins dans le cas où I_0 est assez petit).

Rappelons très brièvement la démarche suivie au §3 de [HeSj5]. Pour étudier l'opérateur : $P(h) = (1 - \cosh D_X) + \lambda(1 - \cos x)$ près d'une valeur propre $\nu(h)$, il fallait contrôler sur un cercle $\gamma_{\nu(h)}$ centré en $\nu(h)$ et de rayon $a(h) = (1/C_1)h$ (avec C_1 assez grand pour que dans le cercle $\gamma_{\nu(h)}$ il n'y ait que $\nu(h)$ comme valeur propre et que les autres soient à l'extérieur et à distance supérieure à $(1/C_1)h$) la norme de la résolvante $(P(h) - z)^{-1}$ dans des espaces à poids L^2_{Φ} (où $\Phi \in C^{1,1}$ vérifiait :

$$(4.2) \quad |\Phi''| \leq C_0, \quad (\lambda(1 - \cos x) - \nu(h) - \epsilon)_+ - 2(\text{sh}(\Phi'/2))^2 \geq 0$$

pour un $\varepsilon > 0$ donné) avec une majoration par $C_\varepsilon/a(h)$.

(4.1) permettrait de montrer le résultat avec $\Phi = 0$, mais pour obtenir ces estimations, la clef dans [HeSj5] était dans l'introduction des opérateurs de référence :

$$(4.3) \quad \tilde{P} = P + \sum \theta_j ; \quad P_k = \tilde{P} - \theta_k$$

où $\theta_j \in C_0^\infty$, $\theta_j \geq 0$ a comme fonction de boucher tous les puits au dessus de $\Pi_x(V_\alpha) = V_j = \{x; \lambda(1 - \cos x) - \nu(h) \leq 0, |x - 2\pi j| < \pi\}$ (avec $\alpha = (j, k)$),
 $V_\alpha = \{(x, \xi), \lambda(1 - \cos x) + (1 - \cos \xi) = \nu(h), |x - 2\pi j| < \pi, |\xi - 2\pi k| < \pi\}$.
 Π_x désigne la projection sur les x . On prenait pour cela le support de θ_j petit autour du puits V_j avec $\theta_j > 0$ sur V_j .

Tout revient alors à bien contrôler la résolvante de \tilde{P} sur le contour $\gamma_{\nu(h)}$:

$$(4.4) \quad \|(\tilde{P} - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2_{\frac{1}{2}}, L^2_{\frac{1}{2}})} \leq C_\varepsilon, \quad z \in \gamma_{\nu(h)}, \quad \Phi \text{ vérifiant (4.2)}.$$

Ces estimations utilisaient (au §3 de [HeSj5]) explicitement la forme de l'opérateur \tilde{P} à savoir : $(1 - \cosh D) + W(x)$ pour lequel on démontrait des inégalités à la Agmon.

Toutefois au §7 de [HeSj5](7e), on a besoin d'une démonstration plus générale qui s'appuie sur l'ellipticité, au sens des opérateurs h -admissibles, du symbole principal de l'opérateur pseudodifférentiel

$$e^{\Phi/h} \tilde{P} W(x, hD) e^{-\Phi/h}$$

pour des $\Phi \in C^\infty$ t.q. $|\Phi'| \leq t|\varphi'|$, $0 < t < 1$, $|\Phi(s)| \leq C_s$, $\forall s \in \mathbb{N}$, où φ est solution de :

$$\{(\lambda(1 - \cos x) - \nu(h) - \varepsilon)_+\} = 2(\operatorname{sh}(\varphi'/2))^2 \text{ avec } \varepsilon > 0.$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi' \geq 0.$$

Une raison d'être très optimiste pour l'obtention d'inégalités dans les espaces à poids est de remarquer qu'en considérant la

matrice $N_z(x, \xi)$ des cofacteurs de $(M(x, \xi) - z)$, on a :

$$(4.5) \quad N_z(x, \xi) \cdot (M(x, \xi) - z) = (f(z) + 2(\cos q \xi + \cos q x)(-1)^{q+1}) I$$

de sorte que :

$$(4.6) \quad N_z^W(x, hD) \cdot (M^W(x, hD) - z) = [f(z) + (-1)^{q+1} \cdot 2(\cos q hD + \cos q x)] I + hR_h$$

où R_h est un o.p.d borné dans $\mathfrak{L}(L_{\Phi}^2)$ de même que $N_z^W(x, hD)$.

On n'a pas de problème pour obtenir l'analogue de la proposition 3.1 (dans [HeSj5]) pour l'opérateur $M^W(x, hD)$ mais cet argument semble insuffisant pour analyser Π_F (le projecteur orthogonal sur $[\mu_j(h) - \varepsilon_1 h, \mu_j(h) + \varepsilon_1 h]$ avec $\varepsilon_1 > 0$ assez petit) dans les espaces $\mathfrak{L}(L_{\Phi_1, \Phi_2}^2)$ et l'on devra donc reprendre toute la démonstration. Il s'agit en particulier de définir l'analogue des opérateurs \tilde{P} et P_k dont la définition est rappelée en (4.2) et (4.3) et donc de définir un procédé convenable de "bouchage des puits". Rappelons que la technique de bouchage de puits a pour objectif de comparer le problème de départ à une infinité de puits à la somme directe de problèmes à un puits. C'est une variante microlocale des techniques utilisées pour l'équation de Schrödinger pour les problèmes à plusieurs puits.

La technique varie selon qu'on est dans le cas de la bande simple ou dans le cas de deux bandes qui se touchent.

Technique de bouchage de puits.

Soit (a) $I_0 = [\gamma_\ell, \gamma'_\ell]$ avec $\gamma'_\ell < \zeta_\ell$
ou (b) $I_0 = [\delta'_\ell, \delta_\ell]$ avec $\delta'_\ell > \zeta_\ell$.

On va montrer qu'on peut toujours modifier $M(x, \xi)$ dans $\Sigma(I_\varepsilon)$ de sorte que $(M(x, \xi) - \mu)$ soit inversible pour $\mu \in I_\varepsilon/2$.

On traite le cas (a) avec d'abord l'hypothèse (a)₁ $\delta_{\ell-1} < \gamma_{\ell}$. On a vu que pour une famille unitaire $U(x, \xi)$ définie pour $(x, \xi) \in \Sigma(I_{\varepsilon})$ on a :

$$U(x, \xi)^{-1} M(x, \xi) U(x, \xi) = \left(\begin{array}{c|c} \mu_{\ell}(x, \xi) & 0 \\ \hline 0 & A^{22}(x, \xi) \end{array} \right).$$

Posons : $\mu'_{\ell}(x, \xi) = \chi_{\varepsilon}(\mu_{\ell}(x, \xi))$ avec

$$\begin{aligned} \chi_{\varepsilon}(t) &= \gamma'_{\ell} + (3\varepsilon/4) \quad \text{si } t \in [\gamma_{\ell}, \gamma'_{\ell} + (3\varepsilon/4)] \\ \chi_{\varepsilon}(t) &= t \quad \text{si } t \geq \gamma'_{\ell} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors on définit une perturbation de $M(x, \xi)$ $\tilde{M}(x, \xi)$ par

$$\tilde{M}(x, \xi) = U(x, \xi) \left(\begin{array}{c|c} \mu'_{\ell}(x, \xi) & 0 \\ \hline 0 & A^{22}(x, \xi) \end{array} \right) U^{-1}(x, \xi)$$

pour $(x, \xi) \in \Sigma(I_{\varepsilon})$ et $\tilde{M}(x, \xi) = M(x, \xi)$ pour $(x, \xi) \notin \Sigma(I_{\varepsilon})$.

On a ainsi "bouché" tous les puits.

Le cas (b)₁ (i.e. (b) + l'hypothèse : $\delta_{\ell} < \gamma_{\ell+1}$) se traite de la même manière.

Traisons maintenant le cas

(a)₂ $I_0 = [\gamma_{\ell}, \gamma'_{\ell}]$ avec $\gamma'_{\ell} < \zeta_{\ell}$ et $\delta_{\ell-1} = \gamma_{\ell}$.

On a vu qu'on a une famille unitaire $U(x, \xi)$ définie dans $\Sigma(I_{\varepsilon})$ t.q.

$$U^{-1}(x, \xi) M(x, \xi) U(x, \xi) = \left(\begin{array}{c|c} A^{11}(x, \xi) & 0 \\ \hline 0 & A^{22}(x, \xi) \end{array} \right)$$

avec $A^{11}(x, \xi)$ ayant comme valeur propre $\mu_{\ell-1}(x, \xi)$ et $\mu_{\ell}(x, \xi)$.

Le problème est que $\mu_{\ell-1}(x^{\alpha}_{\ell}, \xi^{\alpha}_{\ell}) = \mu_{\ell}(x^{\alpha}_{\ell}, \xi^{\alpha}_{\ell})$.

Au voisinage de ces puits, on peut après une nouvelle transformation

unitaire supposer que $\tilde{A}^{11}(x, \xi) = \begin{pmatrix} c(x, \xi) & b(x, \xi) \\ \bar{b}(x, \xi) & c(x, \xi) \end{pmatrix}$ et on a

déjà vu que dans ce cas une perturbation par une fonction χ positive

à support petit voisin de chacun des $(x_{\ell}^{\alpha}, \xi_{\ell}^{\alpha})$ du type $\begin{pmatrix} c-\chi & b \\ b & c+\chi \end{pmatrix}$ permettait d'écarter $\mu_{\ell-1}$ et μ_{ℓ} (cf. lemme 2.3).

On est alors de nouveau ramené à une solution à racines simples pour laquelle la technique du cas \textcircled{a}_1 peut être utilisée.

Le cas \textcircled{b}_2 ($\zeta_{\ell} < \delta'_{\ell} < \delta_{\ell} = \gamma_{\ell+1}$) se traite de la même manière. On a donc dans **tous les cas** construit, étant donné un intervalle I_0 dans $B_{\ell} \setminus \{\zeta_{\ell}\}$, construit un symbole $\tilde{M}(x, \xi)$ coïncidant avec $M(x, \xi)$ en dehors de $\Sigma(I_{\mathcal{E}})$ et t.q.

$$(4.7) \quad \det(\tilde{M}(x, \xi) - \mu)$$

est uniformément elliptique pour $\mu \in I_{\mathcal{E}}/2$ dans \mathbb{R}^{2n} .

On peut écrire :

$$(4.8) \quad \tilde{M}(x, \xi) := M(x, \xi) + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} N_{\alpha}(x, \xi) \text{ avec } \text{supp } N_{\alpha} \subset \Sigma_{\alpha}(I_{\mathcal{E}})$$

(N_{α} correspond à la modification de M que nous avons effectué dans $\Sigma_{\alpha}(I_{\mathcal{E}})$).

On définit également :

$$(4.9) \quad \tilde{M}_{\alpha}(x, \xi) := M(x, \xi) + \sum_{\beta \neq \alpha} N_{\beta}(x, \xi)$$

(correspondant à un problème à un puits)

et

$$(4.10) \quad \tilde{M}_j(x, \xi) := M(x, \xi) + \sum_{k \neq j} \sum_{\ell} N_{(k, \ell)}(x, \xi)$$

(correspondant à une rangée de puits).

Quantification. On s'intéressera à des inégalités à poids pour $(\tilde{M}(x, \xi) - \mu(h))$ où $\mu(h)$ sera une quasi valeur propre qu'on

supposera dans un intervalle $[\mu_0 - \varepsilon_0, \mu_0 + \varepsilon_0]$ (avec $\varepsilon_0 < \varepsilon/2$ par rapport à la construction précédente où on prend $I_0 = [\gamma_\ell, \mu_0]$ (ou $[\mu_0, \delta_\ell]$)).

On se place pour fixer les idées dans le cas (a) et on suppose $(-1)^q f_{p,q}(\gamma_\ell) = 4$. Les espaces à poids seront modélisés sur des poids Φ satisfaisant à (avec $\varepsilon_1 > \varepsilon$) :

$$(4.11) \quad |\Phi^{(s)}| \leq C_s, \quad |\Phi'| \leq t|\varphi'|, \quad 0 < t < 1$$

où φ vérifie :

$$(4.12) \quad ((-1)^q f_{p,q}(\mu_0 + \varepsilon_1) - 2(\cos qx + 1))_+ = 2(\operatorname{Ch} q\varphi' - 1)$$

où $\varphi(x)$ représente la "distance d'Agmon" aux puits $\pi_x(\Sigma_{(0,0)}([\gamma_\ell, \mu_0 + \varepsilon_1]))$ et est constant sur chaque composante connexe de $\pi_x(\Sigma([\gamma_\ell, \mu_0 + \varepsilon_1]))$.

Comme $\tilde{M}(x, \xi)$ est analytique en ξ pour x en dehors de $\pi_x(\Sigma(I_{\varepsilon_1}))$, il n'y aurait pas de problème pour faire opérer $\tilde{M}^W(x, hD)$, $M_1^W(x, hD)$ ou $M_\alpha^W(x, hD)$ dans les espaces L^2_Φ (cf. §7 dans [HeSj5]).

Il est toutefois préférable pour mieux contrôler les supports d'introduire une famille $C^\infty \theta_j$ t.q. : $\operatorname{supp} \theta_j \subset \pi_x(\Sigma_{j,k}(I_\varepsilon))$ et :

$$\theta_j(x)^2 N_{jk}(x, \xi) = N_{j,k}(x, \xi).$$

On quantifie alors par :

$$\tilde{M}^{W1}(x, hD) = M^W(x, hD) + \sum_j \theta_j(x) \left(\sum_k N_{j,k}^W(x, hD) \right) \theta_j(x)$$

(correspond à tous les puits bouchés)

$$\tilde{M}_\alpha^{W1}(x, hD) = M_\alpha^W(x, hD) + \sum_{(j,k) \neq \alpha} \theta_j(x) \left(\sum_k N_{j,k}^W(x, hD) \right) \theta_j(x)$$

(correspond à un problème à un puits)

$$\tilde{M}_{\ell}^{W_1}(x, hD) = M^W(x, hD) + \sum_{j \neq \ell} \theta_j \left(\sum_k N_{j,k}^W(x, hD) \right) \theta_j.$$

(correspond à un problème à une rangée de puits).

Notons que le symbole principal est toujours le même et que $\tilde{M}_{\alpha}^{W_1}(x, hD)$ vérifie :

(4.13) Il existe une bijection $\lambda \rightarrow b(\lambda)$ entre $\text{Sp } \tilde{M}_{\varepsilon}^W(x, hD)$ (introduit au §3) et $\text{Sp } \tilde{M}_{\alpha}^{W_1}(x, hD)$ dans I_0 t.q.
 $b(\lambda) - \lambda = \mathcal{O}(h^{\infty})$ (à condition de modifier légèrement les bornes de I_0).

Pour montrer les inégalités a priori voulues dans l'esprit du §7 de [HesJ5], on calcule l'expression

$$(4.14) \quad \det(\tilde{M}(x, \xi + i\Phi') - \mu_0)$$

où Φ satisfait à (4.11) et (4.12).

On distingue 2 zones.

1) Dans $C \cup \pi_x(\Sigma_{\alpha}([\gamma_{\ell}, \mu_0 + \varepsilon]))$, on a $N_{\alpha}(x, \xi) = 0$ et

$$\det(\tilde{M}(x, \xi + i\Phi') - \mu_0) = f_{p,q}(\mu_0) + 2(-1)^{q+1} [\cos qx + \cos q(\xi + i\Phi')]$$

et on vérifie l'ellipticité comme dans le cas scalaire.

2) Dans $\pi_x(\Sigma_{\alpha}([\gamma_{\ell}, \mu_0 + \varepsilon_0]))$, on a $\Phi' = 0$ et on utilise l'ellipticité de $\tilde{M}(x, \xi) - \mu_0$.

(4.14) reste vrai avec μ_0 remplacé par $\mu(h)$ dans $[\mu_0 - \varepsilon_0, \mu_0 + \varepsilon_0]$.

On obtient ainsi que :

$$(4.15) \quad \|(\tilde{M} - z)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_{\frac{1}{2}}^2, L_{\frac{1}{2}}^2)} \leq C_{\varepsilon}$$

pour les Φ vérifiant (4.11), (4.12) et pour les $z \in \gamma_{\mu}(h)$ où $\gamma_{\mu}(h)$ est un cercle de rayon ρh (avec $\rho > 0$ ad hoc) centré en une valeur propre de $\tilde{M}_{(0,0)}^{W_1} \mu(h)$ et à distance h du reste du spectre ($\mu(h) \in [\mu_0 - \varepsilon_0, \mu_0 + \varepsilon_0]$).

On en déduit comme dans la démonstration du théorème 3.3 de [HeSj5] que :

$$(4.16) \quad \|(M-z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_{\Phi}^2, L_{\Phi}^2)} \leq C_{\varepsilon_1}/h$$

(pour les couples (Φ, z) comme dans (4.15))

et que

$$(4.17) \quad \|\Pi_F\|_{\mathcal{L}(L_{\Phi_1}^2, L_{\Phi_1}^2)} \leq C(\varepsilon_1)$$

pour h assez petit pour tout triplet (Φ_1, Φ_2, z) satisfaisant à (4.10), (4.11) et vérifiant $\Phi_1 = \Phi_2$ sur $\bigcup_{\alpha} \Pi_X(\Sigma_{\alpha}(I_{\varepsilon_1}))$.

5. MATRICE D'INTERACTION.

On se propose dans ce paragraphe d'étendre les résultats des §4 et 5 de [HeSj5] au cas de nos systèmes.

5.1. Problèmes de références : conservation des propriétés d'invariance.

Etant donné un intervalle I , on a construit par différentes méthodes aux §2 et 4 des problèmes de références \tilde{M}_α attachés aux différentes composantes connexes $\Sigma_\alpha(I)$ des surfaces d'énergie $\Sigma(I)$. On n'a pas fait attention jusqu'à présent à préserver les symétries de $M(x, \xi)$ pour les différents \tilde{M}_α (bien qu'une certaine uniformité soit nécessaire pour appliquer les résultats des §2 et 3 de [HeSj5]). C'est l'objet de ce paragraphe d'explicitier un choix très invariant des \tilde{M}_α , qui permet en particulier d'obtenir l'isospectralité des différents \tilde{M}_α .

Dans le cas de l'opérateur de Harper de symbole $\cos \xi + \cos x$, les invariances utilisées étaient :

$$(x, \xi) \longrightarrow (x + 2\pi, \xi)$$

$$(x, \xi) \longrightarrow (x, \xi + 2\pi)$$

et au paragraphe 7

$$(x, \xi) \xrightarrow{K} (\xi, -x)$$

qui étaient quantifiées respectivement par les opérateurs τ, τ^* et \mathfrak{F}_h la transformée de Fourier :

$$\tau = \tau_{2\pi} \quad \text{où} \quad (\tau u)(x) = u(x - 2\pi)$$

$$\tau^* = \tau_{2\pi}^* \quad \text{i.e. :} \quad \tau^* u = e^{2\pi i x/h} u$$

$$\text{et :} \quad (\mathfrak{F}_h u)(\xi) = (2\pi h)^{-n/2} \int e^{-ix\xi/h} u(x) dx .$$

Ici, on observe que le polynôme caractéristique de $M(x, \xi)$:

$$2(-1)^{q+1} (\cos qx + \cos q\xi) + f_{p,q}(\lambda)$$

est invariant par :

$$\begin{aligned} (x, \xi) &\rightarrow (x + (2\pi/q), \xi) \\ (x, \xi) &\rightarrow (x, \xi + (2\pi/q)) \\ (x, \xi) &\xrightarrow{K} (\xi, -x) \end{aligned}$$

mais on n'a plus l'invariance correspondante pour $M(x, \xi)$ car on a seulement l'invariance par translation de $2\pi\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}^2$. On a toutefois présenté au §9 de [HeSj5] et au §1 de cet article le matériel nécessaire pour retrouver les propriétés d'invariance correspondantes pour $M(x, \xi)$ que l'on rappelle brièvement ici.

Rappelons que :

$$(5.1.1) \quad M_{p,q}(x, \xi) = e^{i\xi} J^p + e^{-i\xi} (J^p)^* + e^{ix} K + e^{-ix} K^*$$

avec

$$(5.1.2) \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \omega & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \omega^{q-1} & \end{pmatrix} \text{ avec } \omega = e^{2\pi i/q}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et qu'on a les propriétés :

$$(5.1.3) \quad JK = \omega KJ, \quad J^* = J^{-1}, \quad K^* = {}^t K = K^{-1}$$

$$(5.1.4) \quad J^q = I, \quad K^q = I.$$

On obtient alors :

$$(5.1.5) \quad J M_{x, \xi} J^{-1} = M_{x + (2\pi/q), \xi}$$

$$(5.1.6) \quad K M_{x, \xi} K^{-1} = M_{x, \xi - (2\pi p/q)}.$$

Remarquons maintenant que comme p et q sont premiers entre eux il existe $\ell(p) \in \mathbb{Z}$ t.q. avec $\tilde{K}_p = K^{\ell(p)}$ on ait :

$$(5.1.7) \quad \tilde{K}_p M_{x,\xi} \tilde{K}_p^{-1} = M_{x,\xi+(2\pi/q)}.$$

Dans le cas où $p=1$, on prend $\ell(p)=-1$, dans le cas général $\ell(p)$ vérifie :

$$(-2\pi p/q)\ell(p) = 2\pi/q \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$$

soit :

$$(5.1.8) \quad +p \ell(p) + n(p)q = -1 \text{ pour un } n(p) \in \mathbb{Z}$$

($\ell(p)$ est défini modulo $(q\mathbb{Z})$ mais \tilde{K}_p est indépendant de ce choix !).

On aura besoin également de la matrice unitaire U_p (transformée de Fourier finie)

$$(5.1.9) \quad (U_p)_{jk} = 1/\sqrt{q} \omega^{p(j-1)(k-1)} \quad \begin{matrix} j=1,\dots,q \\ k=1,\dots,q \end{matrix}$$

qui a les propriétés suivantes :

$$(5.1.10) \quad U_p^* = U_p^{-1}, \quad {}^t U_p = U_p$$

$$(5.1.11) \quad U_p^* M_{p,q}(x,\xi) U_p = M_{p,q}(\xi, -x)$$

$$(5.1.12) \quad \begin{aligned} U_p^* J^p U_p &= K \quad ; \quad U_p^* K U_p = (J^p)^* = J^{-p} \\ U_p^* (J^p)^* U_p &= K^* \quad ; \quad U_p^* J^* U_p = J^p. \end{aligned}$$

Armés de cette batterie de formules, nous sommes en mesure de définir l'analogue des opérateurs T_α introduits dans [HeSj5]. On introduit :

$$(5.1.13) \quad T = \tau_{2\pi/q} J \quad ; \quad T^* = \tau_{2\pi/q}^* \tilde{K} \quad ; \quad T_\alpha = T^{\alpha_1} T^{*\alpha_2}.$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Notons maintenant que :

$$(5.1.14) \quad T T^* = \exp(-i \tilde{h}) T^* T$$

avec

$$(5.1.15) \quad \tilde{h} \equiv (2\pi/q)^2 1/h - 2\pi(\ell(p)/q) \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \\ \tilde{h} \in]-\pi, \pi].$$

En effet, on a :

$$T T^* = \tau_{2\pi/q} \tau_{2\pi/q}^* J \tilde{K} \\ = \exp-(2\pi/q)^2 i/h \omega^{\ell(p)} \tilde{K} J = \exp-i \tilde{h} T^* T.$$

On en déduit alors (cf. 1.10 dans [HeSj5]) :

$$(5.1.16) \quad \begin{aligned} T_\alpha T_\beta &= \exp(i \alpha_2 \beta_1 \tilde{h}) T_{\alpha+\beta}; \\ T_\alpha T_\beta &= \exp(i \sigma(\alpha, \beta) \tilde{h}) T_\beta T_\alpha \end{aligned} \quad \text{avec } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2)$$

où σ désigne la forme symplectique standard.

Partant d'un problème de référence attaché à un puits $\Sigma_{(0,0)}(I)$ $M_{(0,0)}^W(x, hD)$, on définit alors $M_\alpha^W(x, hD)$ par :

$$(5.1.17) \quad M_\alpha^W(x, hD) = T_\alpha \cdot M_{(0,0)}^W(T_\alpha^{-1})$$

et M_α est bien attaché aux puits translaté $\Sigma_\alpha(I)$.

Etudions maintenant les propriétés d'invariance par Fourier (examinées au §6 de [HeSj5] (Remarque 6.1) et qui sont utiles pour l'étude de la renormalisation) (cf. §1).

On introduit comme "transformée de Fourier" l'opérateur \mathcal{G}_h défini par :

$$(5.1.18) \quad \mathcal{G}_h = U_p^{-1} \mathcal{F}_h \text{ qui est clairement unitaire.}$$

On vérifie grâce à (5.1.12) que :

$$(5.1.19) \quad \mathfrak{g}_h^* M^W \mathfrak{g}_h = M^W .$$

On a ainsi bien quantifié "l'invariance par Fourier".

Pour pouvoir suivre mot à mot la démarche de **[HeSj5]** au §6, on aura besoin des propriétés suivantes :

$$(5.1.20) \quad \mathfrak{g}_h^4 = \text{Id}$$

(il suffit de le vérifier pour U_p , car c'est vrai pour \mathfrak{F}_h , et nous la laissons au lecteur) et

$$(5.1.21) \quad \mathfrak{g}_h \cdot T_\alpha = \exp(-i \hbar \alpha_1 \cdot \alpha_2) T_{K(\alpha)} \cdot \mathfrak{g}_h .$$

Vérification de (5.1.21).

$$\mathfrak{g}_h \cdot T_\alpha = (U_p^{-1} (J^{\alpha_1} \tilde{K}^{\alpha_2}) U_p) \cdot \mathfrak{F}_h(\tau_{2\pi/q}^{\alpha_1} \tau_{2\pi/q}^{*\alpha_2}) \mathfrak{F}_h^{-1} \cdot \mathfrak{g}_h .$$

Compte-tenu des calculs effectués (formule (6.14) de **[HeSj5]**), il s'agit de montrer que :

$$(5.1.22) \quad U_p^{-1} J^{\alpha_1} \tilde{K}^{\alpha_2} U_p = \omega^{\alpha_1 \alpha_2 (\ell(p)/q)} J^{\alpha_2} \cdot \tilde{K}^{-\alpha_1} .$$

Partons de $U_p^* K U_p = J^{-p}$ (cf. (5.1.12)). On a :

$$U_p^* K^{\ell(p)} U_p = J^{-p \ell(p)} = J^{(1+n(p)q)} = J .$$

D'où :

$$\begin{aligned} U_p^* \tilde{K}^{\alpha_2} U_p &= J^{\alpha_2} \\ U_p^* J^{\alpha_1} U_p &= \tilde{K}^{-\alpha_1} . \end{aligned}$$

(5.1.22) et donc (5.1.21) s'en déduisent alors aisément. ■

(5.1.19) à (5.1.21) constituent les trois points à utiliser pour que la remarque 6.1 de **[HeSj5]** s'appliquent dans notre situation.

5.2. Matrice d'interaction : étude générale.

On a défini au §.5.1 la famille de problèmes de référence M_α isospectraux, en partant de la définition d'un problème à un puits $M_{(0,0)}$. On se donne une valeur propre $\mu(h)$ (nécessairement simple) de ce problème séparée du reste du spectre de $a(h)$ (avec $a(h) \geq (1/C)|h|$). Ici on ne veut pas traiter uniquement le cas $h > 0$ mais aussi $h < 0$ (cf. des remarques au §.7 de [HeSj5]). On ne fera dans la suite la démonstration que dans le cas $h > 0$, l'autre cas ne posant pas de problèmes particuliers. On notera φ_0 un vecteur propre correspondant à $\mu(h)$. Le seul point à vérifier (cf. [HeSj5]) est de montrer l'existence de $g_0 \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}^q) \cap L^2$ t.q.

$$(5.2.1) \quad \langle g_0 | \varphi_0 \rangle_{L^2} = 1$$

$$(5.2.2) \quad \|g_0\| = \mathcal{O}(h^{-N_0})$$

$$(5.2.3) \quad \|X g_0\| = \mathcal{O}(h^N d[\text{supp } X, u_0]^{-N}), \quad \forall N$$

uniformément pour $X \in$ borné $C^0_{0,0}$,

$d(\text{supp } X, V_0) \geq \varepsilon_0 > 0$ où on a noté

$$V_0 = \pi_X(\Sigma_{0,0}(\mu(h) + [-Ch, Ch])).$$

On suppose que $\mu(h) \in I + [-Ch, Ch]$ avec $I \subset B_\varrho \setminus \{\zeta_\varrho\}$.

(5.2.4) Si $(x_0(h), \xi_0(h)) \in \Sigma_{(0,0)}(\mu(h) + [-Ch, Ch])$, $b > 0$. On va montrer l'existence de

$$(x_1(h), \xi_1(h)) \text{ t.q. } |(x_1(h), \xi_1(h)) - (x_0(h), \xi_0(h))| \rightarrow 0 \text{ et}$$

$$\text{de } C(h) \in \mathbb{C}^q \text{ t.q. } \|C(h)\|, \|C(h)\|^{-1} = \mathcal{O}(h^{-N_0}) \text{ et t.q.}$$

$$g_0(x, h) = C(h) \exp(1/h) (i(x - x_1(h)) \cdot \xi_1(h) - (b/2)(x - x_1(h))^2)$$

vérifie les hypothèses (5.2.1) à (5.2.3).

C'est bien entendu l'analogue du lemme 4.1 de [HeSj5].

Voyons les points qui diffèrent. Le point délicat est (5.2.1). On raisonne par l'absurde en obtenant une contradiction entre (non 5.2.4) et le fait que φ_0 a son énergie concentrée dans

un voisinage de $\Sigma_{0,0}(\mu(h) + [-Ch, Ch])$. Si (5.2.4) n'est pas vérifiée, on a, en notant :

$$(5.2.5) \quad (T\varphi_0)(x, \xi) = \langle \varphi_0 | v_0(x, \xi) \rangle_{L^2 \otimes \mathbb{C}^q, L^2} \in \mathbb{C}^q$$

avec $v_0(x, \xi)(y) = e^{i((x-y) \cdot \xi + ib(y-x)^2/2)/h}$, pour tout N_0 , l'existence de ε_1 t.q.

$$(5.2.6) \quad \|(T\varphi_0)(x, \xi)\|_{\mathbb{C}^q} \leq h^{N_0} \text{ pour } |(x, \xi) - (x_0(h), \xi_0(h))| \leq \varepsilon_1$$

pour une suite de h .

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $\mu(h) \rightarrow \mu_0 \in I$ et que $(x_0(h), \xi_0(h)) \rightarrow (x_0, \xi_0)$. On peut alors remplacer $(x_0(h), \xi_0(h))$ par (x_0, ξ_0) et ε_1 par $\varepsilon_1/2$ et supposer que (5.2.6) est vérifiée avec $(x_0, \xi_0) \in \Sigma_{(0,0)}(\mu_0)$. On veut en déduire que :

$$(5.2.7) \quad \|(T\varphi_0)(x, \xi)\| \leq h^{N_0 - N_1}$$

(où N_1 est universel) dans une boule $\Sigma_{0,0}(\mu_0) + B(0, \varepsilon_2)$ ce qui contredira pour N_0 assez grand la propriété que φ_0 a son énergie concentrée dans $\Sigma_{0,0}(\mu_0)$.

Si $(x, \xi) \in \Sigma_{0,0}(\mu_0) + B(0, \varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_2 > 0$ assez petit, il existe $\tilde{t} = t(x, \xi) \in [-C_0, C_0]$ avec C_0 fixé assez grand et t.q. $\exp \tilde{t} H_{p_\mu}(x, \xi) = (x(\tilde{t}), \xi(\tilde{t}))$ arrive dans $B((x_0, \xi_0), \varepsilon_1)$ où :

$$(5.2.8) \quad p_\mu(x, \xi) = \det(M(x, \xi) - \mu) = f(\mu) + 2(-1)^{q+1}(\cos q\xi + \cos qx).$$

Pour éviter l'étude du système, on remarque que, d'après (4.6), il existe un opérateur \mathcal{P}^W t.q.

$$(5.2.9) \quad \mathcal{P}_\mu^W = P_\mu^W(x, hD) \cdot I + hR_\mu$$

avec

$$(5.2.10) \quad \mathfrak{P}_{\mu}^W \varphi_0 = \mathcal{O}(h^{\infty}) .$$

On peut construire d'autre part une matrice $q \times q$, $W_t(x, \xi)(y)$ avec :

$$(5.2.11) \quad \begin{aligned} W_t(x, \xi)(y) &= A(t, y, x, \xi, h) \exp i \varphi(t, y, x, \xi) / h \text{ avec :} \\ A(0, y, x, \xi, h) &= I \\ \varphi(0, y, x, \xi) &= \langle x - y | \xi \rangle + i b(y - x)^2 / 2 \\ \det A(t, y, x, \xi, h) &\neq 0 \\ \operatorname{Im} \varphi(t, y, x, \xi) &\geq 0 \text{ avec égalité pour } y = x(t) = x_t \\ \operatorname{Im} \varphi_y'' y > 0, \varphi_y'(t, x_t, x, \xi) &= \xi_t \end{aligned}$$

et vérifiant

$$(5.2.12) \quad (hD_t + \mathfrak{P}_{\mu}^W(y, hD_y)) W_t(x, \xi)(y) = \mathcal{O}(h^{\infty})$$

pour y dans un voisinage de $\pi_x \Sigma_{0,0}(\mu_0) = V_0(\mu_0)$.

Compte tenu du symbole principal diagonal, la construction n'est pas très différente du cas scalaire. (5.2.6) nous dit que :

$$\left| \int W_{\tilde{t}}(x, \xi)(y) \varphi_0(y) dy \right| = \mathcal{O}(h^{N_0 - N_1}) .$$

(On utilise une formule d'inversion de la transformée de F.B.I., cf. [Sj2] ou [HeSj5]).

On observe que

$$\begin{aligned} (hD_t) \left(\int W_t(x, \xi) \varphi_0(y) dy \right) \\ \equiv - \int \mathfrak{P}_y^{\mu}(y, hD_y) W_t(x, \xi)(y) \varphi_0(y) dy \\ \equiv 0 \text{ modulo } \mathcal{O}(h^{\infty}) \end{aligned}$$

d'où $\int W_0(x, \xi)(y) \varphi_0(y) dy = \mathcal{O}(h^{N_0 - N_1})$ pour une suite de h et pour tout (x, ξ) dans $\Sigma_{0,0} + B(0, \varepsilon_2)$ qui implique (5.2.7).

On obtient ainsi une contradiction.

Remarque 5.2.1. Au §.6 de [HeSj5], on a besoin d'avoir la propriété :

$$(5.2.13) \quad \mathcal{G}_h g_0 = \omega_0 g_0 \text{ avec } |\omega_0| = 1.$$

La démonstration est la même que dans cet article (compte-tenu de (5.1.20)). ■

Compte tenu des remarques précédentes, on laisse le lecteur adapter les résultats obtenus au §.4 de [HeSj5]. On obtient ainsi la :

Proposition 5.2.2. (Cf. Prop. 4.6 de [HeSj5]).

Soit $\mu(h)$ une v.p de $M_{(0,0)}(x, hD)$ t.q. $\mu(h) \in I + [-Ch, Ch]$ et $I \subset B_{\mathbb{R}} \setminus \{\zeta_{\mathbb{R}}\}$. Dans une base convenable (l'orthonormalisée de $(\pi_F T_{\alpha} g_0)$) u_{α} , la matrice de $M^W(x, hD)/F$ est donnée par $\mu(h)I + W$, avec

$$(5.2.14) \quad W_{\alpha, \beta} = \exp(i \tilde{h} \gamma_2 (\beta_1 - \alpha_1)) W_{\alpha + \gamma, \beta + \gamma}$$

$$(5.2.15) \quad W_{\alpha, 0} = \hat{\mathcal{O}}(1) e^{-(S_1 + \varepsilon_0)/h} \text{ si } |\alpha|_{\infty} \geq 2 \text{ avec } \varepsilon_0 > 0$$

pour un S_1 correspondant à l'action horizontale entre 2 puits consécutifs $\Sigma_{1,0}(\mu + [-Ch, Ch])$, $\Sigma_{0,0}(\mu + [-Ch, Ch])$

$$(5.2.16) \quad W_{\alpha, 0} = -\langle u_0 | [M, \chi] u_{\alpha} \rangle + \hat{\mathcal{O}}(1) e^{-(S_1 + \varepsilon_0)/h}$$

avec $\chi = 1_{]-\infty, x_{\mathbb{R}}^0 + \pi/q[}$, $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ avec $\alpha_1 = 1$

$$(5.2.17) \quad W_{\alpha, \beta} = e^{i \tilde{h} (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2)} W_{K(\alpha), K(\beta)}.$$

Notons également que :

$$(5.2.18) \quad u_{\alpha} = T_{\alpha} u_0 ; \mathcal{G}_h u_{\alpha} = \omega_0 \cdot \exp(-i \tilde{h} \alpha_1 \alpha_2) u_{K(\alpha)}.$$

On va étudier au paragraphe suivant, la matrice $W_{\alpha,0}$ pour $\|\alpha\|_{\infty}=1$.

5.3. Etude de $W_{\alpha,0}$ pour $\|\alpha\|_{\infty}=1$.

On suit étroitement le §.5 de [HeSj5] et on ne détaille que les points nouveaux. On a montré comment construire à partir de g_0 , un quasimode essentiellement concentré dans $\Sigma_{0,0}(\mu(h)+[-Ch, Ch])$. Nous avons été conduit à écrire $\Sigma_{0,0}(\mu(h)+[-Ch, Ch])$ au lieu de $\Sigma_{0,0}(\mu(h))$, pour traiter simultanément des valeurs propres proches de γ_L ou δ_L mais qui pourraient être inférieures à γ_L (resp. supérieures à δ_L) mais restent supérieures à $\gamma_L - Ch$ (resp. inférieures à $\delta_L + Ch$). Dans la suite, on écrira toujours $\Sigma_{0,0}(\mu(h))$ en convenant que si $\mu(h)$ est $< \gamma_L$ ou $> \delta_L$, il faut travailler pour le nombre fini de valeurs propres dans ce cas avec $\mu(h) \pm Ch$ (ce qui revient à remplacer $M^W(x, hD)$ par $M^W(x, hD) \pm Ch$) et donc de remplacer $\Sigma_{0,0}(\mu(h))$ par $\Sigma_{0,0}(\mu(h) \pm Ch)$. Ce quasimode qu'on note u_0 satisfait à :

$$(5.3.1) \quad (M^W - \mu(h))u_0 = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0/h}) \text{ dans } L^2.$$

(On utilisera également un contrôle plus fin dans des espaces L^2 à poids, cf (5.1) dans [HeSj5]).

Soit $\Phi_q(x)$ la fonction croissante continue t.q.

$$(5.3.2) \text{ (a) } \Phi_q / \wedge \Sigma_{0,0}(\mu) = 0$$

$$\text{(b) } \Phi_q \text{ est constante sur chaque } V_j = \pi_x(\Sigma_{j,k}(\mu))$$

$$\text{et (c) } f_{p,q}(\mu) + 2(-1)^{q+1} (ch \ q \ \Phi'_q(x) + \cos qx) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \setminus \bigcup_k V_k.$$

Après éventuellement une translation de π/q et conjugaison par $e^{i(\pi x/q)}$, on peut supposer que $\Sigma_{0,0}(\mu(h))$ entoure $(0,0)$ et que

$$V_0(\mu(h)) = [-\mu_0, \mu_0].$$

On note

$$(5.3.3) \quad D_q(x, y) = |\Phi_q(x) - \Phi_q(y)|.$$

Alors $D_q(0, x)$ vérifie dans $]\mu_0, -\mu_0 + (2\pi/q)[$ (ou dans $]- (2\pi/q) + \mu_0, -\mu_0[$) l'équation eiconale (5.3.2) (c) et on peut étendre $D_q(0, x)$ en une fonction holomorphe définie dans un voisinage complexe de cet intervalle.

La première étape est de démontrer la :

Proposition 5.3.1. (cf. Prop. 5.1 dans [HeSj5]).

Il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que :

$$(5.3.4) \quad \|u_0(x, h)\| \leq C_\varepsilon e^{-(\operatorname{Re} D_q(0, x) - \varepsilon)/h}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in D(\mu_0 + \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{C} ; |x - \mu_0 - \varepsilon_1| < \varepsilon_2\}$.

Démonstration. Elle suit étroitement celle de la proposition 5.1 de [HeSj5]. Notons d'abord qu'on a de bonnes estimations sur u_0 et $\partial_h u_0$ qui assurent l'holomorphicité.

On note (cf. (5.2.9) pour la définition de \mathcal{P}_μ^W) que :

$$(5.3.5) \quad \mathcal{P}_\mu^W u_0 \text{ est exponentiellement petit}$$

de sorte qu'après transformation de F.B.I. T définie par :

$$(5.3.6) \quad T u(x, h) = a h^{-3/4} \int e^{-(x-y)^2/2h} u(y) dy$$

on est amené à étudier les propriétés de :

$$(5.3.7) \quad v_0 = T u_0$$

solution de :

$$(5.3.8) \quad \tilde{\mathcal{P}}_\mu v_0 = [(2(-1)^{q+1} q(qx, qh D_x) + f_{p,q}(\mu)) I_q + h \tilde{\mathcal{R}}] v_0 = 0$$

dans $H_{\Phi_0}^{\text{loc}}$

(où $q(x, hD_x)$ est l'opérateur scalaire introduit au §.5 de [HeSj5], $\tilde{\mathbf{q}}$ est un opérateur matriciel) et u_0 est récupéré, via la formule

$$(5.3.9) \quad u_0(y, h) = b h^{-1/4} \int_{\Gamma(y)} e^{(x-y)^2/2h} v_0(x, h) dx$$

où $\Gamma(h)$ est le contour $\{x, \operatorname{Re} x = y\}$.

Toute la discussion faite dans la démonstration de la proposition 5.1 de [HeSj5] passe alors sans changement compte-tenu qu'on a affaire à un système à symbole principal diagonal (et que ce symbole est celui étudié dans la proposition 5.1 de [HeSj5] !).

Dans le cas, où on est proche du fond de puits, on utilise une autre transformée de F.B.I. et on applique le principe des déformations non caractéristiques (cf. [Sj2]) à un système dont le symbole principal est $[ia(x, \xi)x \cdot \xi + f(\mu)]I_q$. ■

Minoration de $\|u_0\|_{C^q}$.

Cas de la bande simple.

Dans le cas de la bande simple, les réductions faites au §.3.2 qui sont valables dans le complexe et respectent des expressions B.K.W réduisent essentiellement au cas scalaire. On obtient alors de manière analogue à [HeSj5] une expression pour $u_0(x, h)$ de la forme

$$(5.3.10) \quad u_0(x, h) = b(h) \vec{a}(x, h) e^{-D_q(0, x)/h}$$

où \vec{a} est une réalisation d'un symbole analytique d'ordre 0 à valeurs dans \mathbb{C}^q au voisinage de y_0 (avec $y_0 > \mu_0$ assez proche de μ_0) t.q. $\|\vec{a}(y_0, h)\| = 1$, et où $|b(h)| + 1/|b(h)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h}$, $\forall \varepsilon > 0$ (tout étant uniforme par rapport à μ).

La réduction par bloc dans le complexe près des points (x, ξ) avec $\xi = iD'_q(0, x)$, x voisin de $[y_0, (\pi/q)]$ ($D'_q(0, x) = d/dx(D_q(0, x))$) ramène les constructions B.K.W. analytiques pour notre système au cas scalaire. (On reviendra sur

les constructions explicites pour le symbole principal de l'amplitude au paragraphe suivant).

On peut alors étendre $\vec{a}(x, h)$ comme symbole analytique dans un voisinage complexe de $[y_0, \pi/q]$ t.q si

$$(5.3.11) \quad u'_0(x, h) = b(h) \vec{a}'(x, h) e^{-D_q(0, x)/h}$$

où \vec{a}' est une telle réalisation, alors :

$$(5.3.12) \quad e^{D_q(0, x)/h} (M^W(x, hD) - \mu(h)) u'_0(x, h) = \mathcal{O}(1) \exp(-\varepsilon_0/h)$$

pour un $\varepsilon_0 > 0$.

Il se pourrait que la réduction par bloc ne soit pas globale le long de $(x, \pm iD'_q(0, x))$, $x \in [y_0, (\pi/q) + \varepsilon_1]$. Ceci ne gêne pas cependant la construction des solutions B.K.W. pour laquelle il suffit de savoir qu'on peut localement diagonaliser le système par blocs.

On a aussi $u_0 - u'_0 = \mathcal{O}(1) \exp(-(Re D_q(0, x) + \varepsilon_0)/h)$ dans un voisinage de y_0 .

Observons alors que :

$$(5.3.13) \quad e^{D_q(0, x)/h} (M^W(x, hD) - \mu(h)) u_0(x, h) = \mathcal{O}(1) \exp(-\varepsilon_0/h)$$

(même démonstration que dans [HeSj5]).

On déduit de (5.3.12) et (5.3.13), compte tenu des propriétés des o.p.d analytiques, que :

$$(5.3.14) \quad \mathcal{P}_\mu^W(u_0 - u'_0) = \mathcal{O}(1) \exp(-(Re D_q(0, x) + \varepsilon_0)/h).$$

Compte-tenu du fait que \mathcal{P}_μ^W a son symbole principal égal à $(2(-1)^q(\cos qx + \cos q\xi) + f_{p,q}(\mu))I$, les arguments du cas scalaire s'adaptent et l'on obtient :

$$(5.3.15) \quad \|(u_0 - u'_0) \exp(D_q(0, x)/h)\|_{L^2([y_0 - \varepsilon_0, (\pi/q) + \varepsilon_0], \mathbb{C}^q)} \leq C_0 e^{\varepsilon_0/h} \quad \text{pour un } \varepsilon_0 > 0$$

et on a une description analogue pour u_0 dans $[-(\pi/q)-\varepsilon_0, -y_0+\varepsilon_0]$ ainsi que pour $\mathcal{G}_h u_0$.

Cas de la bande double .

Le cas où on est proche de γ_ℓ (lorsque $\delta_{\ell-1}=\gamma_\ell$) est plus délicat. On suppose que $\mu(h)\in[\gamma_\ell, \gamma_\ell+\delta]$ et on utilise la même transformation de F.B.I. que dans [HeSj5]. La seule difficulté nouvelle est de montrer (5.3.10) car, ensuite, en travaillant directement avec l'opérateur \mathcal{P}_μ^W , la construction est inchangée.

Démonstration de (5.3.10). Elle relève de la même idée. On part de (5.3.8) et on va démontrer (5.3.10) transporté par la transformation de F.B.I., T associée à une transformation canonique K , soit :

$$(5.3.16) \quad v_0(x, h) \equiv b(h) \tilde{a}(x, h) e^{if(x)/h}$$

dans $\Omega_\delta = \text{voisinage de } 0 \cap \mathbb{C} \Pi_x(K[\Sigma_{0,0}(\gamma_\ell+\delta)])$ et f est une solution holomorphe de

$$2(-1)^{q+1} q(qx, qf'(x)) + f_{p,q}(\mu) = 0.$$

(On retrouve (5.3.10) à partir de (5.3.16) grâce à (5.3.9)).

On peut construire dans Ω_δ un symbole analytique matriciel $(q \times q)$ $\tilde{M}(x, h)$ (invertible) t.q

$$(5.3.17) \quad e^{-if(x)/h} \tilde{\mathcal{P}}_\mu(\tilde{M}(x, h) e^{if(x)/h}) \sim 0 \text{ dans } H_0^{\text{loc}}.$$

(La construction est une perturbation de celle du cas scalaire ; Notons que $\tilde{M}(x, h)$ et f sont multivalués !).

On remarque alors que pour montrer que toute solution v dans $H_\Phi^{\text{loc}} \otimes \mathbb{C}^q$ de $\tilde{\mathcal{P}}_\mu v \sim 0$ dans H_Φ a la structure (5.3.16), il suffit de voir que l'opérateur $\vec{u} \rightarrow e^{-if/h} \tilde{\mathcal{P}}_\mu(\tilde{M} \vec{u}) e^{if/h}$ est de la forme $B \tilde{D}$ où B est un o.p.d. d'ordre 0 dont le déterminant du symbole

principal est non nul près de Λ_0 . On en déduit $\tilde{M}(x, h)^{-1} v e^{-if/h} \sim \vec{C}$ vecteur constant. Notons qu'a priori \tilde{M} et f sont multivalués mais que $(\tilde{M}(x, h) \vec{C}) e^{if/h}$ est univalué (si v l'est !).

On a donc bien (5.3.16) dans le cas où l'on prend $v = v_0$ en prenant $b(h) \tilde{a}(x, h) = \tilde{M}(x, h) \vec{C}_0$. ■

Etude de $W_{0, \alpha}$ pour $\alpha_1 = 1$.

Le point de départ est la formule (5.2.16). (On suppose dans la suite que $x_k^0 = 0$) et on doit donc étudier :

$$(5.3.18) \quad \begin{cases} \text{a) } W_{\alpha, 0} \equiv -\langle u_0 | [M, X_t] u_{\alpha} \rangle \text{ (modulo } \hat{\mathcal{O}}(1) e^{-(S_1 + \varepsilon_0)/h}) \\ \text{avec } X_t = 1] - \infty, t] \text{ pour } \alpha = (1, k), t = \pi/q \text{ et pour :} \\ \text{b) } S_1(h) = D_q(0, -\mu_0 + (2\pi/q)) \text{ (cf. (5.3.3)).} \end{cases}$$

On utilise les formules :

$$(5.3.19) \quad \begin{cases} [\tau_h, X_t] = 1[t, t+h] \tau_h \\ [\tau_{-h}, X_t] = -1[t-h, t] \tau_{-h} \end{cases} \quad \text{pour } h > 0$$

Posons :

$$(5.3.20) \quad I_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} -\langle u_{0,0} | [M, X_t] u_{1,k} \rangle = -\int_t^{t+h} \Phi_k(x, h) dx.$$

On a :

$$[M, X_t] = (J^P)^* 1[t, t+h] \tau_h - J^P 1[t-h, t] \tau_{-h}$$

et on obtient :

$$(5.3.21) \quad \begin{aligned} \Phi_k(x, h) &= \langle u_{0,0} | (J^P)^* \tau_h u_{1,k} \rangle_{\mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q} \\ &\quad - \langle (J^P)^* \tau_h u_{0,0} | u_{1,k} \rangle_{\mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q}. \end{aligned}$$

Comme dans ([Hesj5] (5.26) à (5.27)), on démontre que : $\Phi_k(x+h, h) \equiv \Phi_k(x, h)$ et que $I_k(t)$ est essentiellement constant.

On va montrer la :

Proposition 5.3.2. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que :

$$(5.3.22) \quad |I_k(t)| \leq C e^{-(S_1 + \varepsilon_0)/h} \text{ pour } k \neq 0.$$

La démonstration diffère légèrement de celle de la proposition 5.5 de [HeSj5] car on n'a pas une relation aussi simple entre Φ_k et Φ_0 (cf. formule (5.30) de [HeSj5]) lorsque k n'est pas un multiple de q . On a : $u_{1,k} = T \cdot (T^*)^k u_{0,0} = \exp(-ik\tilde{h}) (T^*)^k u_{1,0}(x)$ (grâce à (5.1.14)). D'où :

$$(5.3.23) \quad \exp(-ik\tilde{h}) \cdot \Phi_k(x, h) = \langle u_{0,0} | (J^P)^* \tau_h (T^*)^k u_{1,0} \rangle - \langle (J^P)^* \tau_h u_{0,0} | (T^*)^k u_{1,0} \rangle.$$

On utilise la formule (5.3.15) et la formule (5.3.10) qui permettent modulo une erreur de l'ordre de l'estimation souhaitée dans (5.3.22) de remplacer $u_{0,0}$ par $u'_{0,0}$ et $u_{0,1}$ par $(T u'_{0,1})$ (on omet les ' dans la suite). On obtient pour $x \in](\pi/q) - \alpha, (\pi/q) + \alpha[$ ($\alpha > 0$) une expression de la forme :

$$\exp(-ik\tilde{h}) \cdot \Phi_k(x, h) = \exp(-2i\pi kx/hq) c(h) d^k(x, h) e^{-S_1/h}$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} |c(h)| + |1/c(h)| = \mathcal{O}_\varepsilon(e^{\varepsilon/h}) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ d^k(x, h) \text{ est un symbole analytique.} \end{cases}$$

Si on exprime que $\Phi_k(x+h, h) \equiv \Phi_k(x, h)$, on obtient

$$\exp[-2i\pi(k/q)] d^k(x+h, h) - d^k(x, h) = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0/2h}).$$

Développant en puissances de h (comme dans [HeSj5]), on obtient

Si $k \neq sq$ ($s \in \mathbb{Z}$), $d^k(x, h) \equiv 0$ au sens des symboles analytiques formels

Si $k = sq$ ($s \in \mathbb{Z}$), $d^k(x, h) \equiv d^k((\pi/q), h)$.

On obtient aussi :

$$(5.3.24) \quad \Phi_k(x) = \mathcal{O}(\exp(-(S_1 + \varepsilon_0)/h)) \text{ si } k \neq sq \text{ (} s \in \mathbb{Z} \text{)}$$

$$\begin{aligned} \text{et } (\exp -ik \tilde{h}) \cdot \Phi_k(x) &= \exp(-2i\pi kx/hq) c(h) \\ d^k((\pi/q), h) \exp(-S_1/h) &\text{ si } k = s q \text{ (} s \in \mathbb{Z} \text{)} \\ (\text{modulo } \mathcal{O}(\exp(-(S_1 + \varepsilon_0)/h))). \end{aligned}$$

Si $k = sq$, on peut expliciter (5.3.23) comme dans [HeSj5]. On observe en effet que $(T^*)^{qs} = \tau_*^{qs}$.

On obtient alors, pour $k = qs$:

$$(5.3.25) \quad \exp(-ik \tilde{h}) \Phi_k(x, h) \equiv \exp(-2i\pi s x/h) \Phi_0(x, h)$$

et

$$\begin{aligned} (5.3.26) \quad \exp(-ik \tilde{h}) \Phi_k(x, h) \\ \equiv \exp(-2i\pi s x/h) \cdot c(h) d^0((\pi/q), h) \exp(-S_1/h) \\ (\text{modulo } \mathcal{O}(\exp(-(S_1 + \varepsilon_0)/h))). \end{aligned}$$

La démonstration de la proposition 5.3.2 résulte alors facilement de (5.3.24) et (5.3.26). ■

Le dernier objectif de ce paragraphe est de démontrer la :

Proposition 5.3.3. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ t.q. :

- (i) $W_{\alpha,0} = \mathcal{O}(e^{-(S_1 + \varepsilon_0)/h})$ si $|\alpha_1| + |\alpha_2| \geq 2$
- (ii) $C_\varepsilon^{-1} e^{-(S_1 + \varepsilon)/h} \leq |W_{(\pm 1, 0), 0}| \leq C_\varepsilon \exp(-(S_1 - \varepsilon)/h)$, $\forall \varepsilon$
- (iii) $C_\varepsilon^{-1} e^{-(S_1 + \varepsilon)/h} \leq |W_{(0, \pm 1), 0}| \leq C_\varepsilon \exp(-(S_1 - \varepsilon)/h)$, $\forall \varepsilon$

où $S_1(\mu(h))$ est défini en (5.3.18)(b).

Démonstration. Compte tenu des remarques antérieures et du fait que $I_0(\pi/q) = -h \Phi_0((\pi/q, h))$, le seul point à montrer est que

$$(5.3.27) \quad |d^0((\pi/q), h)| \geq c h^\nu \text{ pour un } \nu \text{ réel.}$$

(iii) se déduit de (ii) en utilisant l'invariance par Fourier.

On part des expressions B.K.W. pour $u_{0,0}$ et $u_{1,0}$:

$$u_{0,0} \equiv b(h) a(x,h) e^{-(D_q(x,0))/h}$$

$$u_{1,0} = \tilde{b}(h) \tilde{a}(x,h) e^{-(D_q(x,2\pi/q))/h}$$

où $a(x,h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)h^j$ avec $\vec{a}_0(x_1) \neq 0$. L'équation de transport

satisfaite par \vec{a}_0 (cf. §6 pour des calculs explicites) assure que cette propriété reste vraie jusqu'à π/q :

$$\vec{a}_0(\pi/q) \neq 0$$

et de même

$$\tilde{a}_0(\pi/q) \neq 0.$$

On obtient alors (aux erreurs autorisées près)

$$\begin{aligned} \Phi_0(x,h) \equiv & b(h) \tilde{b}(h) [e^{-(D(0,x)+D(x-h,2\pi/q))/h} \langle a(x,h) | (JP)^* \tilde{a}(x-h,h) \rangle \\ & - e^{-(D(0,x-h)+D(x,2\pi/q))/h} \langle (JP)^* a(x-h) | \tilde{a}(x,h) \rangle]. \end{aligned}$$

En prenant $c(h) = b(h) \tilde{b}(h)$, on trouve :

$$d^0((\pi/q), h) = \langle a_0(\pi/q) | (\exp(-D')(JP)^* - \exp(D')(JP)) \tilde{a}_0(\pi/q) \rangle + \mathcal{O}(h)$$

et donc finalement :

$$\begin{aligned} (5.3.28) \quad & |d_0((\pi/q), h)| \\ & = |\langle a_0(\pi/q) | (1/i)(\partial M / \partial \xi)(-iD'((\pi/q)) \tilde{a}_0(\pi/q)) \rangle| + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer :

$$(5.3.29) \quad \langle a_0(\pi/q) | (1/i)(\partial M / \partial \xi)(-iD'(\pi/q)) \tilde{a}_0(\pi/q) \rangle \neq 0.$$

Cette propriété nécessite une étude plus fine des constructions B.K.W. qui sera détaillée au §6. Admettant (5.3.29), on a bien obtenu la proposition 5.3.3.

5.4. Renormalisation et démonstration du théorème.

Compte-tenu du travail effectué au §1, le §6 de [HesJ5] s'adapte entièrement à notre situation. On obtient la :

Proposition 5.4.1. Pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe $h_0 > 0$, $C > 0$, et $C_0 > 0$ t.q. pour $|h| < h_0$, on ait une suite d'intervalles $I_{\ell,j}(h)$ avec $j \in [-N_{1,\ell}(h), N_{2,\ell}(h)]$, $(N_{1,\ell}(h) \in \mathbb{N}, N_{2,\ell}(h) \in \mathbb{N})$, $\ell = 1, \dots, q$:

$I_{\ell,j}$ est à gauche de $I_{\ell,j+1}$

$I_{\ell-1, N_{2,\ell}(h)}$ est à gauche de $I_{\ell, -N_{1,\ell}(h)}$

$I_{\ell,j} \subset [\alpha_{\ell} - C|h|, \delta_{\ell} + C|h|]$

$I_{\ell,0} = [\zeta_{\ell} - \varepsilon_0, \zeta_{\ell} + \varepsilon_0]$

$I_{\ell,j}$ est de taille $\mathcal{O}(\exp(-C_0/|h|))$ pour $j \neq 0$

$\partial I_{\ell,j} \in \text{Sp} M^W(x, hD)$ pour $j \neq 0$.

De plus dans $I_{\ell,j}$ ($j \neq 0$), le spectre de $M^W(x, hD)$ est celui d'un opérateur pseudodifférentiel \tilde{h} -admissible de la forme :

$$(5.4.1) \quad \begin{aligned} P^{\ell,j}(x, \tilde{h}D_x, \tilde{h}, h) \\ = \mu^{\ell,j}(h) + \rho^{\ell,j}(h) [\cos \tilde{h}D_x + \cos x + R^W(x, \tilde{h}D_x, \tilde{h}, h)] \end{aligned}$$

avec $\rho^{\ell,j}(h)$ vérifiant :

$$(5.4.2) \quad \begin{aligned} &\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \exists C_{\varepsilon} > 0 \text{ t.q.} \\ &C_{\varepsilon} e^{-(S_1^{j\ell}/h) - \varepsilon/h} \leq \rho^{\ell,j}(h) \leq C_{\varepsilon} e^{-(S_1^{j\ell}/h) + \varepsilon/h} \end{aligned}$$

où $S_1^{j\ell} = S_1(\mu^{\ell,j}(h))$ est défini en (5.3.18) (b).

$$(5.4.3) \quad \begin{aligned} &R(x, \xi, \tilde{h}, h) \text{ est un symbole admettant un prolongement} \\ &\text{holomorphe dans } |\text{Im}(x, \xi)| \leq \varepsilon_0/h \text{ et } y \text{ vérifiant} \\ &|R(x, \xi, \tilde{h}, h)| \leq C e^{-\varepsilon_0/h}. \end{aligned}$$

$$(5.4.4) \quad \tilde{h} \equiv (2\pi/q)^2 (1/h) - 2\pi(\ell(p)/q).$$

\tilde{h} est donné en (5.1.15). On est alors en mesure d'appliquer les résultats de [HeSj5], § 7 à l'opérateur $P^{\ell,j}(x, \tilde{h}D_x, \tilde{h}, h)$.

Si \tilde{h} est assez petit (le cas où \tilde{h} est proche d'un nouveau rationnel nécessiterait du travail supplémentaire) en fonction du développement en fraction continue de $\tilde{h}/2\pi$.

Discussion sur \tilde{h} .

Rappelons (formule (5.1.15)) que :

$$\tilde{h} \equiv (2\pi/q)^2 (1/h) - 2\pi \ell(p)/q \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$$

où $\ell(p)$ satisfait à :

$$p \cdot \ell(p) + q n(p) = -1, \quad \ell(p) \in]-q, 0].$$

(Dans le cas $p=1$, $\ell(p)=-1$, $n(p)=0$).

La proposition 5.4.1, jointe aux résultats du §1, va nous permettre d'étudier le spectre de l'équation de Harper $\cos a D_x + \cos x$ (ou de la famille H_θ introduite en (0.1)) pour a proche de p/q . L'objet de [HeSj5] était de l'étudier pour $p=0$.

Comprenons tout d'abord le cas où $\tilde{h}(a)=0$. On a alors :

$$(2\pi/q)^2 (1/h) - 2\pi \ell(p)/q = 2\pi N, \quad N \in \mathbb{Z}$$

$$\text{soit } a = 2\pi \frac{p - n(p)/N}{q + \ell(p)/N}.$$

Plus généralement, si on écrit que :

$$(2\pi/q)^2 (1/h) - 2\pi \ell(p)/q = 2\pi [N + \tilde{h}],$$

avec $\tilde{h} = 1/(s_1 + 1/(s_2 + \dots))$, $s_j \in \mathbb{Z}$ (développement en fraction continue de $\tilde{h} = \tilde{h}/2\pi$).

Le résultat que nous obtenons est ici d'étudier le spectre pour h vérifiant :

$$(2\pi/q)^2 (1/h) - 2\pi \ell(p)/q = 2\pi [s_0 + 1/(s_1 + 1/(s_2 + \dots))]$$

où tous les s_j vérifient $s_j \in \mathbb{Z}$, $|s_j| \geq C$ c'est-à-dire :

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{q^2} = \frac{\ell(p)}{q} + s_0 + \tilde{h}$$

$$1/h = \ell(p)q + (s_0 + \tilde{h})q^2$$

$$h = \frac{1}{q} \left[\frac{1}{\ell(p) + (s_0 + \tilde{h})q} \right]$$

$$(a/2\pi) = h + \frac{p}{q} = \frac{1}{q} \left[\frac{1 + p \ell(p) + p(s_0 + \tilde{h})q}{\ell(p) + (s_0 + \tilde{h})q} \right] = \frac{-n(p) + p(s_0 + \tilde{h})}{\ell(p) + (s_0 + \tilde{h})q}.$$

Les a considérés sont donc :

$$(5.4.5) \quad a = 2\pi \frac{p - (n(p)/(s_0 + 1/(s_1 + 1/\dots)))}{q + (\ell(p)/(s_0 + 1/(s_1 + 1/\dots)))}.$$

Dans le cas où $p=1$, on a déjà vu que $n(p)=0$, $\ell(p)=-1$ et on traite donc les cas où

$$a = 2\pi \frac{1}{q - (1/(s_0 + 1/(s_1 + 1/\dots)))}.$$

Regardons maintenant le cas général.

On va utiliser quelques résultats classiques sur les fractions continues **[Kh]** qui permettent d'expliciter $\ell(p)$ et $n(p)$ en fonction du développement en fraction continue de p/q . (Notons que l'écriture de a ci-dessus n'est pas unique).

Soit $p/q = q_0 + 1/(q_1 + 1/(q_2 + \dots)) = [q_0, q_1, \dots, q_\ell]$ un développement en fraction continue de p/q (non unique si on s'autorise des $q_j \in \mathbb{Z}$). On écrit pour $k=0, \dots, \ell$: $[q_0, \dots, q_k] = p^{(k)}/q^{(k)}$ avec $p^{(k)}$ premier avec $q^{(k)}$ en particulier $p^{(\ell)}=p$, $q^{(\ell)}=q$.

Les relations suivantes (Théorèmes 2, 3 dans [Kh]) sont classiques :

$$(5.4.6) \quad q^{(k)} p^{(k-1)} - p^{(k)} q^{(k-1)} = (-1)^k, \quad \forall k \geq 0 \\ (\text{avec la convention } p^{(-1)} = 1, q^{(-1)} = 0).$$

On peut alors faire le choix suivant pour $(\ell(p, q), n(p, q))$:

$$(5.4.7) \quad \begin{aligned} \ell(p, q) &= (-1)^\ell q^{(\ell-1)} \\ n(p, q) &= (-1)^{\ell-1} p^{(\ell-1)}. \end{aligned}$$

On trouve alors pour (5.4.5) :

$$(5.4.8) \quad \frac{p^{(\ell)} + (-1)^\ell p^{(\ell-1)} / (s_0 + \tilde{h})}{q^{(\ell)} + (-1)^\ell q^{(\ell-1)} / (s_0 + \tilde{h})}.$$

On va maintenant montrer qu'on obtient ainsi le développement en fraction continue de $a/2\pi$.

Récrivons (5.4.8) sous la forme :

$$(5.4.9) \quad \frac{a}{2\pi} = \frac{p^{(\ell-1)} + (-1)^\ell (s_0 + \tilde{h}) p^{(\ell)}}{q^{(\ell-1)} + (-1)^\ell (s_0 + \tilde{h}) q^{(\ell)}}.$$

Le théorème 5 de [Kh] nous dit alors que $a/2\pi$ admet comme développement en fraction continue :

$$a/2\pi = [q_0, q_1, \dots, q_\ell; (-1)^\ell s_0; (-1)^\ell s_1; (-1)^\ell s_2; \dots]$$

où $[s_0, s_1, \dots, s_n, \dots]$ est le développement en fraction continue de $s_0 + \tilde{h} = (1/q^2) \cdot (1/\ell) - (\ell(p)/q)$ (pour le choix de $\ell(p)$ fait en (5.4.7)).

Conclusion.

$C_0 \geq 2$ étant donné, on a ainsi montré l'existence de $C(C_0)$ telle que pour tout $a = [q_0, \dots, q_\ell, s_0, s_1, \dots]$ avec $\ell \leq C_0$,

$$|q_j| \leq C_0 \quad \text{pour } j \leq \ell$$

$$|s_j| > C(C_0) \quad \text{pour } j \geq 0$$

le spectre de H_θ se décrit comme dans [HeSj5]. L'énoncé précis est donné au théorème 0.1.

L'article précédent traitait le cas $\ell=1$. Il semble raisonnable d'espérer étudier plus généralement les a t.q.

$$a/2\pi = \{q_0, q_1, \dots\}$$

où les q_j sont séparés en 2 paquets $I_1 \cup I_2$ t.q.

$$\begin{aligned} j \in I_1 &\Rightarrow |q_j| < C_0 \\ j \in I_2 &\Rightarrow |q_j| > C(C_0) \end{aligned}$$

et où I_1 ne contient pas plus de C_0 termes consécutifs.

Remarque 5.4.2. Pour $q=2$, $p=1$, $s_0=N$, i.e $a/2\pi=[0,2,-N]=N/2N-1$ on décrit presque complètement le spectre correspondant ; ceci correspond au deuxième cas envisagé chez Hofstadter [Ho] (cf. figure 1).

6. CONSTRUCTION B.K.W "EXPLICITES" ET ETUDE DE L'HOLONOMIE.

Dans l'esprit du §8 de [HeSj5], on va développer dans ce paragraphe des constructions plus explicites des développements B.K.W. (dont on a montré l'existence au §5). Dans un premier temps, on terminera la démonstration de la proposition 5.3.3, dans un deuxième temps, on explicitera certains "détails" du dessin de HOFSTADTER [Ho] liés à des phénomènes d'holonomie discutés par WILKINSON [Wi2] et que J. BELLISSARD appelle dans un exposé récent [Be2] : la formule de Wilkinson-Rammal. Certains résultats annoncés dans [Be2] (Théorèmes 8, 9, 10) interfèrent avec quelques résultats présentés ici ou complètent ceux-ci.

6.1. Constructions B.K.W. dans la zone classiquement interdite pour estimer l'interaction.

Cas de la bande simple.

On se place dans un intervalle $I \subset B_\ell = [\gamma_\ell, \delta_\ell]$ et on suppose que :

$$(6.1.1) \quad \zeta_\ell \notin I$$

$$(6.1.2) \quad \begin{array}{l} \text{Si} \quad \gamma_\ell \in I, \delta_{\ell-1} < \gamma_\ell \\ \delta_\ell \in I, \delta_\ell < \gamma_{\ell+1}. \end{array}$$

Dans ce cas, on a déjà vu que l'on peut décomposer par bloc et que l'étude du spectre dans $I + [-Ch, Ch]$ se ramène à l'étude d'un opérateur scalaire :

$$(6.1.3) \quad \mu_\ell^W(x, hD, h) \text{ pour } h \neq 0$$

dont le symbole principal est $\mu_\ell(x, \xi)$ solution dans I de

$$(6.1.4) \quad 2(-1)^{q+1} f_{p,q}(\mu_\ell(x, \xi)) + (\cos qx + \cos q\xi) = 0.$$

Après translation éventuelle $x \rightarrow x - x_\ell^0$, $\xi \rightarrow \xi - \xi_\ell^0$, on supposera que

$$(6.1.5) \quad \mu_{\mathcal{L}}(0,0) = \gamma_{\mathcal{L}}.$$

En remplaçant éventuellement $\mu_{\mathcal{L}}^W(x, hD, h)$ par $\mu_{\mathcal{L}}^W(x, hD, h) \pm Ch$, on supposera que le spectre de $\mu_{\mathcal{L}}^W(x, hD, h)$ est dans I .

La solution B.K.W. correspondant à l'énergie $\mu(h)$ pour $M^W(x, hD)$ (ou éventuellement $M^W(x, hD) \pm Ch$) se déduit alors aisément de la construction B.K.W. pour $\mu_{\mathcal{L}}^W(x, hD, h)$ car la décomposition par bloc est encore possible dans le complexe quitte à changer de diagonalisation près des points (x, ξ) avec $\xi = \pm iD'_q(x)$ où D_q est solution de :

$$(6.1.6) \quad 2(-1)^{q+1}(\cos x + \cos(iD'_q)) + f_{p,q}(\mu(h)) = 0$$

et x en dehors de $\Pi_x(\Sigma_{0,0}(\mu(h))) = [-\mu_0, \mu_0]$

(6.1.6) s'écrit encore :

$$(6.1.7) \quad \det(M(x, iD'_q(x)) - \mu(h)) = 0 \text{ pour } x \in [\mu_0 + \varepsilon_1, (2\pi/q) - \mu_0 - \varepsilon_1]$$

(on a éventuellement décalé $\mu(h)$ de $\pm Ch$ si $\mu(h) \notin B_{\mathcal{L}}$).

Démonstration de (5.3.29). Soit donc à calculer :

$$(6.1.8) \quad \langle a_0(\pi/q) | (1/i)(\partial M / \partial \xi)(-iD'(\pi/q)) \tilde{a}_0(\pi/q) \rangle_{\mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q}$$

a_0 est solution de :

$$(6.1.9) \quad \partial M / \partial \xi(iD') \cdot D_x a_0 + D_x(\partial M / \partial \xi(iD')) a_0 + (M - \mu) a_1 = 0$$

(éventuellement, on ajoute $\pm Ch \cdot a_0$ si on a dû décaler $\mu(h)$).

\tilde{a}_0 est solution de :

$$(6.1.10) \quad \partial M / \partial \xi(-iD') D_x \tilde{a}_0 + D_x(\partial M / \partial \xi(-iD')) \tilde{a}_0 + (M - \mu) \tilde{a}_1 = 0$$

(éventuellement on ajoute $\pm \text{Ch } \tilde{a}_0$ si on a dû décaler $\mu(h)$).

Comme on l'a déjà vu au §5, on vérifie que :

$$(6.1.11) \quad d/dx [\langle a_0(x) | (1/i)(\partial M/\partial \xi)(-iD'(x)) \tilde{a}_0(x) \rangle] = 0$$

(cela résulte des équations (6.1.9) et (6.1.10)).

Considérons l'effet de la transformation $U(x, \xi)$ introduite au §2 (Remarque 2.2.3). (On ne s'occupe que des symboles principaux) t.q.

$$U(x, \xi)^{-1} M(x, \xi) U(x, \xi) = \begin{pmatrix} A^{11}(x, \xi) & 0 \\ 0 & A^{22}(x, \xi) \end{pmatrix} = M(x, \xi)$$

avec $A^{11}(x, \xi) = \mu^L(x, \xi)$, $U(x, \xi)^* = U(\bar{x}, \bar{\xi})^{-1}$ définies près des points (x, ξ) avec $x \in [\mu_0 + \varepsilon_1, (2\pi/q) - \mu_0 - \varepsilon_1]$, $\xi = \pm iD'(x)$ et notons que $(A^{22}(x, \xi) - \mu(h))$ est inversible en ces points.

Voyons comment se modifie l'expression (6.1.8). Si on pose : $a_0(x) = U(x, iD') c_0(x)$, $\tilde{a}_0(x) = U(x, -iD') \tilde{c}_0(x)$, on a :

$$\begin{aligned} & \langle a_0(x) | (1/i)(\partial M/\partial \xi)(-iD') \tilde{a}_0(x) \rangle \\ &= \langle c_0(x) | (U(x, iD'))^* (1/i)(\partial M/\partial \xi)(-x, -iD') U(x, -iD') \tilde{c}_0(x) \rangle \\ &= \langle c_0(x) | (U(x, -iD')^{-1} (1/i)(\partial M/\partial \xi)(-iD') U(x, -iD') \tilde{c}_0(x) \rangle. \end{aligned}$$

Notons maintenant que :

$$\begin{aligned} \partial N/\partial \xi(x, \xi) &= U(x, \xi)^{-1} (\partial M/\partial \xi)(x, \xi) U(x, \xi) \\ &+ (\partial/\partial \xi)(U(x, \xi)^{-1})(M - \mu)U(x, \xi) + U(x, \xi)^{-1}(M - \mu)(\partial_\xi U(x, \xi)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \langle c_0(x) | (U(x, -iD')^{-1} (1/i)(\partial M/\partial \xi)(-iD') U(x, -iD') \tilde{c}_0(x) \rangle \\ &= \langle c_0(x) | (1/i)(\partial N/\partial \xi)(x, -iD') \tilde{c}_0(x) \rangle \end{aligned}$$

compte tenu des équations satisfaites par a_0 et \tilde{a}_0 :

$$(6.1.12) \quad \begin{aligned} (M(x, iD') - \mu(h))a_0(x) &= 0 \\ (M(x, -iD') - \mu(h))\tilde{a}_0(x) &= 0 \end{aligned}$$

qui donnent :

$$(6.1.13) \quad \begin{aligned} (N(x, iD') - \mu(h))c_0(x) &= 0 \\ (N(x, -iD') - \mu(h))\tilde{c}_0(x) &= 0 . \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$(6.1.14) \quad \begin{aligned} \langle a_0(x) \mid (1/i)(\partial M/\partial \xi)(-iD') \tilde{a}_0(x) \rangle \\ = \langle c_0(x) \mid (1/i)(\partial N/\partial \xi)(x, -iD') \tilde{c}_0(x) \rangle . \end{aligned}$$

Si on note : $c_0(x) = (b_0(x), b'_0(x))$, $\tilde{c}_0(x) = (\tilde{b}_0(x), \tilde{b}'_0(x))$ correspondant à la décomposition par bloc, on obtient :

$$(6.1.15) \quad \begin{aligned} \langle a_0(x) \mid (1/i)(\partial M/\partial \xi)(-iD') \tilde{a}_0(x) \rangle \\ = \langle b_0(x) \mid (1/i)(\partial A^{11}/\partial \xi)(x, -iD') \tilde{b}_0(x) \rangle \end{aligned}$$

(car $b'_0(x) = 0$, $\tilde{b}'_0(x) = 0$, compte tenu de l'inversibilité de $(A^{22}(x, \xi) - \mu(h))$, soit, dans le cas de la racine simple où on s'est placé :

$$(6.1.16) \quad \begin{aligned} \langle a_0(x) \mid (1/i)(\partial M/\partial \xi)(-iD') \tilde{a}_0(x) \rangle \\ = \langle b_0(x) \mid (1/i)(\partial \mu_\varrho/\partial \xi)(x, -iD') \tilde{b}_0(x) \rangle_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} . \end{aligned}$$

Remarquant que $(1/i)(\partial \mu_\varrho/\partial \xi)(x, -iD') \neq 0$ qui se déduit de

$$(6.1.17) \quad \begin{aligned} 2(-1)^{q+1}(\cos x + \cos \xi) + f^{p,q}(\mu_\varrho(x, \xi)) &= 0 \\ \text{et de } f'_{p,q}(E) &\neq 0 \text{ pour } E \in I . \end{aligned}$$

On en déduit (5.3.29).

Cas de la bande double.

On suppose maintenant que :

(6.1.18) $I = [\gamma_\ell - \varepsilon_0, \gamma_\ell + \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ à choisir assez petit.

(6.1.19) $\delta_{\ell-1} = \gamma_\ell$

et soit $\mu(h)$ une valeur propre dans I .

On va utiliser la formule (6.1.15). Mais pour calculer l'interaction (6.1.8), on va, en tenant compte de (6.1.11), faire le calcul en un point x_0 assez proche de 0 pour utiliser la forme normale de $A^{11}(x, \xi)$ au voisinage de $(0, 0)$ mais relativement loin de la surface d'énergie μ .

Concrètement, on prend $x_0 \in [\eta, 2\eta]$ et on choisit ε_0 vérifiant :

(6.1.20) $\varepsilon_0 < \eta^4 \ll 1$.

A un facteur multiplicatif que l'on oublie, on a (cf. §2) :

$$(6.1.21) \quad A^{11}(x, \xi) - \mu = \begin{pmatrix} c(x, \xi) - \mu & b(x, \xi) \\ \bar{b}(x, \xi) & c(x, \xi) - \mu \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} b(x, \xi) &= \xi + ix + \mathcal{O}(|x|^2 + |\xi|^2) \\ c(x, \xi) &= \mathcal{O}(|x|^2 + |\xi|^2). \end{aligned}$$

La phase $D(x)$ vérifie dans $[\eta, 2\eta]$

$$(c(x, iD') - \mu)^2 = b(x, iD') \bar{b}(x, iD')$$

soit $D'(x) = x + \mathcal{O}(\eta^2)$ pour $x \in [\eta, 2\eta]$.

On a alors :

$$(6.1.22) \quad \begin{aligned} A^{11}(x, iD') - \mu &= 2ix \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\eta^2) \\ A^{11}(x, -iD') - \mu &= -2ix \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\eta^2) \end{aligned} \quad \text{pour } x \in [\eta, 2\eta]$$

et

$$(6.1.23) \quad 1/i (\partial_{\xi} A^{11})(x, \pm iD') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\eta)$$

$$b_0'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b_0(x)}{\|b_0(x)\|} \text{ vérifie :}$$

$$(6.1.24) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b_0'(x) = \mathcal{O}(\eta)$$

et

$$\tilde{b}_0'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{b}_0(x)}{\|\tilde{b}_0(x)\|} \text{ vérifie :}$$

$$(6.1.25) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{b}_0'(x) = \mathcal{O}(\eta)$$

$$\text{soit} \quad b_0'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(x) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\eta) \text{ avec } |\gamma(x)| = 1$$

$$\tilde{b}_0'(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\eta) \text{ avec } |\tilde{\gamma}(x)| = 1$$

on en déduit que :

$$\langle b_0(x) / (1/i) \partial_{\xi} A^{11}(x, -iD') \tilde{b}_0(x) \rangle = \|b_0(x)\| \|\tilde{b}_0(x)\| (\gamma \tilde{\gamma} + \mathcal{O}(\eta))$$

soit :

$$(6.1.26) \quad \left| \langle b_0(x) / (1/i) \partial_{\xi} A^{11}(x, -iD') / b_0(x) \rangle \right| \\ = \|a_0(x)\| \|\tilde{a}_0(x)\| (1 + \mathcal{O}(\eta)) \text{ pour } x \in [\eta, 2\eta].$$

On obtient donc bien (5.3.29) dans ce cas en prenant $x = 3\eta/2$ et $\eta > 0$ assez petit. C.Q.F.D.

6.2. Calcul du sous-principal.

Nous n'avons jusqu'ici utilisé que des constructions B.K.W. loin de la surface d'énergie même si après transformation de F.B.I., on pouvait s'approcher de la surface d'énergie $\mu(h)$ lorsque

$\mu(h)$ restait dans un intervalle I évitait $\gamma_\ell, \zeta_\ell, \delta_\ell$ i.e. la situation loin du fond de puits.

Cas de la bande simple.

On a vu que les constructions B.K.W. se ramenaient dans ce cas à l'étude d'un opérateur scalaire $\mu_\ell^W(x, hD, h)$. On va présenter maintenant un calcul du coefficient sous-principal de $\mu_\ell^W(x, hD, h)$. Il est plus pratique ici de calculer en formalisme d'o.p.d. classique et on va simplement détailler les constructions du § 3.

On a montré dans ce paragraphe l'existence d'un o.p.d analytique unitaire

$$(6.2.1) \quad U(x, hD, h) \sim U^0(x, hD) + hU^1(x, hD) + \dots$$

tel que :

$$(6.2.2) \quad U^{-1}(x, hD, h) M[x, hD] U(x, hD, h) = \begin{pmatrix} A^{11}(x, hD, h) & 0 \\ 0 & A^{22}(x, hD, h) \end{pmatrix}$$

où

$$A^{11}(x, hD, h) = \mu_0^\ell(x, hD, h) + h\mu_1^\ell(x, hD) + \dots$$

(On omet désormais la référence à ℓ).

Il s'agit donc de donner une expression aussi intrinsèque que possible de $\mu_1^\ell(x, \xi)$. Celle-ci permettra en particulier d'expliciter l'équation vérifiée par le symbole principal de l'amplitude pour une construction B.K.W. ou plus simplement d'expliciter les règles de quantification à la Bohr-Sommerfeld des valeurs propres $\mu(h)$ dans l'intervalle I .

La 1^{ère} colonne de $U^0(x, \xi)$ est constituée par un vecteur $e_0(x, \xi)$ dépendant holomorphiquement de (x, ξ) dans un voisinage convenable qui vérifie :

$$(6.2.3) \quad (M(x, \xi) - \mu^L(x, \xi)) e_0(x, \xi) = 0$$

$$(6.2.4) \quad \sum_i e_0^i(x, \xi) \cdot \overline{e_0^i(\bar{x}, \bar{\xi})} = 1.$$

Ces 2 conditions ne déterminent pas $e_0(x, \xi)$. Par multiplication par un facteur de phase $e^{i\varphi(x, \xi)}$ avec φ holomorphe (réel pour (x, ξ) réel), on peut obtenir un nouveau $e_0(x, \xi)$.

La première ligne de $(U^0)^{-1}(x, \xi)$ est alors donnée par les coordonnées en ligne de $\overline{e_0(\bar{x}, \bar{\xi})} : (e_0^1(\bar{x}, \bar{\xi}), \dots, e_0^q(\bar{x}, \bar{\xi}))$.

Notons

$$V(x, hD) = U(x, hD, h)^{-1} = U^*(x, hD, h) = V^0(x, hD) + hV^1(x, hD) + \mathcal{O}(h^2)$$

et calculons $\mu_1(x, \xi)$ à partir de (6.2.2) en utilisant la loi de composition des symboles $\#_h$.

$$\sigma_0(V(x, \xi, h) \#_h M(x, \xi))_{1,k} = \sum_l V_{1l}^0 \cdot M_{lk}(x, \xi)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{-1}(V(x, \xi) \#_h M(x, \xi))_{1,k} &= \sum_l (1/i)(\partial V_{1l}^0 / \partial \xi) \cdot (\partial M / \partial x)(x, \xi)_{lk} \\ &\quad + \sum_l V_{1l}^1 \cdot M_{lk}(x, \xi). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\sigma_{-1}(V(x, \xi, h) \#_h M(x, \xi) \#_h U(x, \xi, h))_{11} \\ &= (1/i) \sum_{l,k} \partial_\xi [V_{1l}^0 \cdot M_{lk}] \cdot \partial_x U_{k1}^0 + \sum_{l,k} V_{1l}^1 M_{lk} \cdot U_{k1}^0 \\ &\quad + (1/i) \sum_{l,k} (\partial V_{1l}^0 / \partial \xi) \cdot (\partial M_{lk} / \partial x) \cdot U_{k1}^0 + \sum_l V_{1l}^0 \cdot M_{lk} \cdot U_{k1}^1 \\ &= (1/i) \sum_{l,k} [\partial_\xi V_{1l}^0 \cdot M_{lk} \partial_x U_{k1}^0 + V_{1l}^0 \cdot \partial_\xi M_{lk} \cdot \partial_x U_{k1}^0 \\ &\quad + \partial_\xi V_{1l}^0 \cdot \partial_x M_{lk} \cdot U_{k1}^0] + \sum_{l,k} [V_{1l}^1 M_{lk} \cdot U_{k1}^0 + V_{1l}^0 M_{lk} U_{k1}^1] \\ &= (1/i) [\langle M \cdot \partial_x e_0 / \partial_\xi e_0(\bar{x}, \bar{\xi}) \rangle_{\mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q} + \langle \partial_\xi M \cdot \partial_x e_0 / e_0(\bar{x}, \bar{\xi}) \rangle_{\mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q} \\ &\quad + \langle \partial_x M \cdot e_0 / \partial_\xi e_0(\bar{x}, \bar{\xi}) \rangle] + \sum_l \mu(x, \xi) [V_{1l}^1 e_0^l(x, \xi) \\ &\quad + \overline{e_0^l(\bar{x}, \bar{\xi})} \cdot U_{l1}^1] \end{aligned}$$

$$(\text{car } \overline{\mu(x, \xi)} = \bar{\mu}(\bar{x}, \bar{\xi}))$$

et en exprimant que $\forall h \neq 0, \int h^2 u = 1$, on obtient alors :

$$(6.2.6)' \quad \begin{aligned} \mu_1(x, \xi) = (1/i) [& \langle (M - \mu) \partial_x e_0 / \partial_\xi e_0(\bar{x}, \bar{\xi}) \rangle_{\mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q} \\ & + \langle \partial_\xi M \cdot \partial_x e_0 / e_0(\bar{x}, \bar{\xi}) \rangle_{\mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q} \\ & + \langle \partial_x M \cdot e_0 / \partial_\xi e_0(\bar{x}, \bar{\xi}) \rangle_{\mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q}]. \end{aligned}$$

Calcul du sous-principal.

Il est donné par l'expression $\mu_1(x, \xi) - (1/2i)(\partial^2 \mu_0 / \partial x \partial \xi)$ (c'est le coefficient de h dans la quantification de Weyl).

Ecrivons quelques formules se déduisant de (6.2.3) par dérivation :

$$(6.2.7) \quad \begin{aligned} (1) \quad & (\partial_\xi M - \partial_\xi \mu_0) e_0 = -(M - \mu) \partial_\xi e_0 \\ (2) \quad & (\partial_x M - \partial_x \mu_0) e_0 = -(M - \mu) \partial_x e_0 \\ (3) \quad & \partial_x \partial_\xi \mu_0 \cdot e_0 = (\partial_\xi M - \partial_\xi \mu_0) \partial_x e_0 + (\partial_x M - \partial_x \mu) \partial_\xi e_0 \\ & \quad \quad \quad + (M - \mu) \partial_\xi \partial_x e_0 \end{aligned}$$

dont on déduit :

$$(6.2.8) \quad \begin{aligned} (\partial_x \partial_\xi \mu_0)(x, \xi) = & \langle (\partial_\xi M - \partial_\xi \mu_0) \partial_x e_0 | e_0(\bar{x}, \bar{\xi}) \rangle \\ & + \langle (\partial_x M - \partial_x \mu) \partial_\xi e_0 | e_0(\bar{x}, \bar{\xi}) \rangle \end{aligned}$$

et finalement (en utilisant (6.2.7) (2) et (6.2.7) (3) et $\langle \partial_\xi e / e(\bar{x}, \bar{\xi}) \rangle + \langle e / \partial_\xi e(\bar{x}, \bar{\xi}) \rangle = 0$)

$$(6.2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_1^W[\mu[x, hD, h]] = & \mu_1(x, \xi) - (1/2i)(\partial^2 \mu_0 / \partial x \partial \xi) \\ = & (1/2i) [\langle (\frac{\partial M}{\partial \xi} \frac{\partial e_0}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial e_0}{\partial \xi})(x, \xi) | e_0(\bar{x}, \bar{\xi}) \rangle \\ & + \langle \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial e_0}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial e_0}{\partial \xi} | e_0(\bar{x}, \bar{\xi}) \rangle]. \end{aligned}$$

On peut légitimement se demander si ce sous-principal dépend réellement de $e_0(x, \xi)$. Soit $e_0(x, \xi) = e^{i\varphi(x, \xi)} \tilde{e}_0(x, \xi)$ et réécrivons la formule (6.2.11) en faisant apparaître $\tilde{e}_0(x, \xi)$.

Dans la suite, on note $\mu_1^W(x, \xi) = \mu_1(x, \xi) - (1/2i)(\partial^2 \mu_0 / \partial x \partial \xi)$ et $\tilde{\mu}_1^W(x, \xi)$ le sous-principal obtenu en faisant la construction avec $\tilde{e}(x, \xi)$. On obtient :

$$(6.2.10) \quad \mu_1^W(x, \xi) = \tilde{\mu}_1^W(x, \xi) + (H_\mu \varphi)(x, \xi).$$

On pourrait y voir un problème, mais dans les règles de quantification (cf. après le lemme 3.4.3) déduites de (3.3.4), (3.3.5), la condition de quantification s'écrit (dans le cas où $I = [\gamma_L, \gamma'_L]$)

$$(6.2.11) \quad f_0(\lambda_n(h)) + h f_1(\lambda_n(h)) = (n + \frac{1}{2})h + O(h^2) \quad (\text{pour } h > 0)$$

ou encore (cf. [HeRo3] Cor. 3.7, [Pe-Ro])

$$(6.2.12) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mu^L(x, \xi) + h\mu_1^W(x, \xi) \leq \lambda_n(h)} dx d\xi = (n + \frac{1}{2})h + O(h^2)$$

Ici

$$(6.2.13) \quad f_0(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_L \leq \mu^L(x, \xi) < E} dx d\xi$$

$$(6.2.14) \quad f_1(E) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mu^L(x, \xi) = E} \mu_1^W(x, \xi) (dx d\xi / d\mu^L)$$

où $dx \cdot d\xi / d\mu^L$ est la mesure de Leray.

Si Φ_t est le flot associé à H_μ (le champ hamiltonien associé à μ), on peut encore écrire (6.2.14) sous la forme :

$$(6.2.15) \quad f_1(E) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{T(E)} \mu_1^W(\Phi_t(x, \xi)) dt$$

pour un point (x, ξ) sur $\mu(x, \xi) = E$ où $T(E)$ est la période minimale du flot H_μ

ou encore :

$$(6.2.16) \quad f_1(E) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{ds} \left(\int_{\mu(x, \xi) \leq s} \mu_1^W(x, \xi) dx d\xi \right) / s = E.$$

On remarque donc que compte tenu de (6.2.10) et (6.2.15), $f_1(E)$ ne dépend pas du choix de $e_0(x, \xi)$ (pourvu qu'il soit défini au voisinage de $\mu(x, \xi) = E$ et vérifie $\langle e_0(x, \xi) | e_0(x, \xi) \rangle = 1$) ce qui était clair *a priori*.

Remarquons aussi que si f_1 dépend de e , on a pour $f_0(E)$ l'expression suivante :

$$(6.2.17) \quad f_0(E) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{0,0}(\gamma_E, E)} dx d\xi.$$

qui ne fait pas intervenir explicitement γ_E (cf. (2.1.2)).

Une formule plus intrinsèque pour $f_1(E)$: $-(1/2\pi)\delta(E)$.

On veut trouver une expression ne faisant plus apparaître explicitement le choix de $e_0(x, \xi)$ pour :

$$(6.2.18) \quad \delta(E) = \int_0^{T(E)} \mu_1^W(\Phi_t(x, \xi)) dt$$

(pour un point (x, ξ) t.q. $\mu^L(x, \xi) = E$).

On s'inspire ici de calculs de **AYRON-SEILER [Av-Se]** concernant différentes écritures de la formule de Kubo relative à l'effet Hall quantique (cf. également **[Be2]**).

On travaille pour (x, ξ) réels et on repart de la formule (6.2.9) que l'on écrit :

$$\begin{aligned}
 (6.2.19) \quad \mu_1^w(x, \xi) &= \frac{1}{2i} \left[\left\langle \left(-\frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \right) \frac{\partial e}{\partial x} \mid e \right\rangle \right. \\
 &\quad \left. - \left[\left\langle \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \frac{\partial e}{\partial \xi} \mid e \right\rangle \right] + \frac{1}{i} \left\langle \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial e}{\partial \xi} \mid e \right\rangle \right] \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} \mu'_1(x, \xi) + \mu''_1(x, \xi) .
 \end{aligned}$$

Notons que $\mu'_1(x, \xi)$ est indépendant du choix de e , compte tenu de (6.2.7) alors que $\mu''_1(x, \xi)$ en dépend.

Etude de $\mu'_1(x, \xi)$.

Soit donc à étudier :

$$\begin{aligned}
 (6.2.20) \quad \mu'_1(x, \xi) &= \frac{1}{2i} \left[\left\langle \left(-\frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \right) \frac{\partial e}{\partial x} \mid e \right\rangle \right. \\
 &\quad \left. - \left\langle \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \frac{\partial e}{\partial \xi} \mid e \right\rangle \right] .
 \end{aligned}$$

Compte tenu de (6.2.7), on obtient :

$$\mu'_1(x, \xi) = \frac{1}{2i} \left[- \left\langle (M - \mu) \frac{\partial e}{\partial x} \mid \frac{\partial e}{\partial \xi} \right\rangle + \left\langle (M - \mu) \frac{\partial e}{\partial \xi} \mid \frac{\partial e}{\partial x} \right\rangle \right] .$$

On désigne par $\pi_{x, \xi}$ le projecteur sur l'espace propre associé à $\mu^L(x, \xi)$:

$$\pi_{x, \xi} v = \langle v \mid e \rangle e$$

alors on a la formule :

$$(6.2.21) \quad \mu'_1(x, \xi) d\xi \wedge dx = (1/2i) \text{Trace}(\pi d\pi (M - \mu) d\pi \pi)(x, \xi)$$

où $d\pi_{x, \xi}$ est une 1 forme à valeur dans les matrices $M^q(\mathbb{C})$:

$$d\pi_{x,\xi} \cdot v = \langle v | de \rangle e + \langle v | e \rangle de = \langle v | (\partial e / \partial \xi) \rangle e d\xi \\ + \langle v | (\partial e / \partial \xi) \rangle e dx + \langle v | e \rangle (\partial e / \partial \xi) d\xi + \langle v | e \rangle (\partial e / \partial x) \cdot dx .$$

L'expression (6.2.21) ne fait apparaître que le projecteur π et est donc bien intrinsèque.

Démonstration de (6.2.21).

$\pi \cdot d\pi \cdot (M - \mu) \cdot d\pi \cdot \pi$ est une 1 forme à valeur opérateur de rang 1. Pour calculer la trace, il suffit de calculer le coefficient de e de $(\pi \cdot d\pi \cdot (M - \mu) \cdot d\pi \cdot \pi e)$. On a :

$$\begin{aligned} \pi e &= e \\ d\pi \cdot \pi e &= (e/de)e + de \\ (M - \mu)d\pi \cdot \pi e &= (M - \mu)de \\ d\pi(M - \mu)d\pi \cdot \pi e &= \langle (M - \mu)de | de \rangle e + \langle (M - \mu)de | e \rangle de \\ &= \langle (M - \mu)de | de \rangle e \\ \pi \cdot d\pi(M - \mu)d\pi \cdot \pi e &= \langle (M - \mu)de | de \rangle e \\ &= \langle (M - \mu)(\partial e / \partial \xi) | \partial e / \partial x \rangle e \cdot d\xi \wedge dx \\ &\quad - \langle (M - \mu)(\partial e / \partial x) | (\partial e / \partial \xi) \rangle e dx \wedge d\xi . \end{aligned}$$

Remarquons que $\pi^2 = \pi$ et donc $d\pi \cdot \pi + \pi \cdot d\pi = d\pi$ d'où finalement :

$$(6.2.22) \quad \mu'_1(x, \xi) \cdot d\xi \wedge dx = (1/2i) \text{Trace} (d\pi \cdot (M - \mu) d\pi) .$$

On obtient finalement :

$$(6.2.23) \quad \delta'(E) = \int_0^{T(E)} \mu'_1(\Phi_t(x, \xi)) dt \\ = (1/2i)(d/dt) \left(\int_{\mu^L(x, \xi) < t} \text{Tr}(d\pi \cdot (M - \mu) \cdot d\pi) \right) / t = E .$$

Etude de $\mu''_1(x, \xi)$.

Soit

$$(6.2.24) \quad \delta''(E) = \int_0^{T(E)} \mu''_1(\Phi_t(x, \xi)) dt .$$

On réécrit (6.2.24), compte-tenu de la définition de $\mu''_1(x, \xi)$:

$$(6.2.25) \quad \mu''_1(x, \xi) = \frac{1}{i} \left\langle \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial e}{\partial \xi} \middle| e \right\rangle$$

$$(6.2.26) \quad \delta''(E) = (1/i) \int_{\gamma_E} \omega_1$$

où

$$(6.2.27) \quad \omega_1 = \langle de | e \rangle = \langle (\partial e / \partial \xi) | e \rangle d\xi + \langle (\partial e / \partial x) | e \rangle dx$$

et γ_E est le cycle paramétré par le temps t et décrit par $(x(t), \xi(t))$ où $(x(t), \xi(t))$ est la courbe intégrale de H_μ , solution donc de :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mu}{\partial \xi} ; \quad \frac{d\xi}{dt} = - \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

ω_1 dépend du choix de e , mais si $\tilde{\omega}_1$ est associé à \tilde{e} , on a

$$\omega_1 - \tilde{\omega}_1 = d\mu$$

de sorte que $\omega_2 = d\omega_1 = \langle de | de \rangle$ n'en dépend pas.

Appliquant le théorème de Stokes, on a donc (dans le cas où $\delta_{\mathcal{L}-1} < \gamma_{\mathcal{L}} \leq E$)

$$(6.2.28) \quad \delta''(E) = (1/i) \iint_{\mu^{-1}(x, \xi) \leq E} \omega_2 .$$

Remarquons maintenant que :

$$\omega_2 = \langle de | de \rangle = \text{Trace}(\Pi \cdot d\Pi \cdot d\Pi \cdot \Pi)(x, \xi)$$

et on a donc une expression intrinsèque pour $\delta''(E)$:

$$(6.2.29) \quad \delta''(E) = (1/i) \iint_{\mu^{-1}(x, \xi) \leq E} \text{Trace}(\Pi \cdot d\Pi \cdot d\Pi \cdot \Pi) .$$

ω_2 correspond à la courbure sur le fibré en droite d'une connection

canonique (cf. WELLS [We], formule 2.9, chapitre III).

On a donc finalement démontré la formule intrinsèque pour $f_1(E)$

(6.2.30)

$$f_1(E) = -\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{dt} \left(\int_{\mu^{-1} \langle x, \xi \rangle \leq t} \text{Trace}(d\Pi \cdot (M - \mu) \cdot d\Pi) \right)_{t=E} \\ - (1/i\pi) \iint_{\mu^{-1} \langle x, \xi \rangle \leq E} \text{Trace}(\Pi \cdot d\Pi \cdot d\Pi \cdot \Pi)$$

Remarque 6.2.1. Lorsque $E \rightarrow \gamma_\ell$ ou δ_ℓ , on retrouve la formule de "Rammal-Wilkinson" citée par J. BELLISSARD [Be2] Théorème 10 (l'énoncé dans [Be2] est à modifier).

On ne reviendra pas sur les construction B.K.W. pour $\mu(x, hD_x, h)$ qui relèvent des techniques classiques (rappelées dans le §8 de [HeSj5]).

6.3. Etude de l'holonomie.

On étudie la situation où $I = [\gamma_\ell, \gamma'_\ell]$ avec $\gamma'_\ell < \zeta_\ell$, $\delta_{\ell-1} < \gamma_\ell$ (ou bien $I = [\delta'_\ell, \delta_\ell]$ avec $\delta'_\ell > \zeta_\ell$, $\delta_\ell < \gamma_{\ell+1}$) de sorte que les calculs effectués au §.6.2 peuvent être poussés jusqu'au fond du puits.

On va s'intéresser au comportement d'un nombre fini de valeurs propres dans l'intervalle $[\gamma_\ell - Ch, \gamma_\ell + Ch]$ et on suppose que $\mu^\ell(x, \xi)$ atteint son minimum en $(0, 0)$ (pour fixer les idées).

La théorie générale (approximation par un oscillateur harmonique (cf. [HeSj1]) nous dit que les valeurs propres sont décrites par :

$$(6.3.1) \quad \gamma_\ell + \mu_1 h + \mu_2 [n + \frac{1}{2}] |h| + O(h^2)$$

(cf. formule (6.9) dans [Wi2]).

L'oscillateur fond de puits est en effet donné par :

$$(6.3.2) \quad \gamma_{\ell} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mu_0^{\ell}(0,0)}{\partial x^2} y^2 + 2 \frac{\partial^2 \mu_0^{\ell}}{\partial x \partial \xi} y(h D_y) \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \mu_0^{\ell}(0,0)}{\partial \xi^2} (h D_y)^2 \right] + h \mu_1(0,0) .$$

On va calculer μ_1 et μ_2 .

Rappelons que $\mu_0^{\ell}(x, \xi)$ vérifie :

$$(6.3.3) \quad f_{p,q}(\mu_0^{\ell}(x, \xi)) + 2(-1)^{q+1} [\cos qx + \cos q\xi] = 0$$

et que

$$(6.3.4) \quad f'_{p,q}(\gamma_{\ell}) \neq 0 ;$$

Comme on a supposé que le minimum de $\mu_0^{\ell}(x, \xi)$ est atteint en $(0,0)$, ceci implique :

$$(6.3.5) \quad f_{p,q}(\gamma_{\ell}) = (-1)^q .$$

Dérivant (6.3.3) par rapport à x, ξ (cf. les calculs du §.2.1), on obtient :

$$f'_{p,q}(\mu_0^{\ell}) (\partial \mu_0^{\ell} / \partial \xi) + (-1)^q 2q \sin q\xi = 0$$

$$f'_{p,q}(\mu_0^{\ell}) (\partial \mu_0^{\ell} / \partial x) + (-1)^q 2q \sin qx = 0$$

$$f'_{p,q}(\mu_0^{\ell}) (\partial^2 \mu_0^{\ell} / \partial \xi^2) + f''_{p,q}(\mu_0^{\ell}) (\partial \mu_0^{\ell} / \partial \xi)^2 + (-1)^q 2 \cdot q^2 \cos q\xi = 0$$

$$f'_{p,q}(\mu_0^{\ell}) (\partial^2 \mu_0^{\ell} / \partial x \partial \xi) + f''_{p,q}(\mu_0^{\ell}) (\partial \mu_0^{\ell} / \partial x) (\partial \mu_0^{\ell} / \partial \xi) = 0$$

$$f'_{p,q}(\mu_0^\ell)(\partial^2 \mu_0^\ell / \partial x^2) + f''_{p,q}(\mu_0^\ell)(\partial \mu_0^\ell / \partial x)^2 + (-1)^q 2 \cdot q^2 \cos q x = 0$$

d'où l'on tire :

$$(6.3.6) \quad \frac{\partial \mu_0^\ell}{\partial \xi}(0,0) = \frac{\partial \mu_0^\ell}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 \mu_0^\ell}{\partial x \partial \xi}(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mu_0^\ell}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 \mu_0^\ell}{\partial \xi^2}(0,0) = \frac{(-1)^{q+1} 2 q^2}{f'_{p,q}(\gamma_\ell)}.$$

On en déduit que :

$$(6.3.7) \quad \mu_2 = \frac{(-1)^{q+1} 2 q^2}{f'_{p,q}(\gamma_\ell)}$$

et que

$$\mu_1 = \mu_1(0,0) = \sigma^w[\mu^\ell(x, hD, h)]_1(0,0).$$

Le terme d'ordre h ne dépend pas de la quantification (en $(0,0)$) car $(\partial^2 \mu_0^\ell / \partial x \partial \xi)(0,0) = 0$.

On va maintenant s'efforcer de donner une formule "pratique" pour calculer μ_1 et on donnera ensuite un exemple d'application.

De (6.2.7)₍₃₎, (6.2.9) et (6.3.6), on déduit la formule :

$$\mu_1 = (1/i) \langle (\partial M / \partial \xi) \cdot (\partial e_0 / \partial x) | e_0 \rangle(0,0).$$

Modulo un élément dans le noyau de $\text{Ker}(M(0,0) - \gamma_\ell)$, $(\partial e_0 / \partial x)$ est défini par (6.2.7)₍₂₎.

En $(0,0)$, on a $U^{-1}(M(0,0) - \gamma)U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ (pour U unitaire).

On définit Q par : $U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (A^{22})^{-1} \end{pmatrix} U^{-1}$. Q est donc dans $\text{Ker}(M-\gamma)^\perp$ l'inverse de $(M-\gamma)/\text{Ker}(M-\gamma)^\perp$.

On déduit alors de (6.2.7)₍₂₎ :

$$(\partial_x e)(0,0) = -Q(\partial_x M)e_0 + \lambda e_0$$

d'où (en utilisant (6.2.7)₍₁₎) :

$$(6.3.8) \quad \mu_1 = -(1/i) \langle (\partial M / \partial \xi) \cdot Q(\partial M / \partial x) e_0 | e_0 \rangle (0,0)$$

Appliquons ces formules dans les cas $q=2$, $q=3$.

Cas $q=2$.

$$M(x, \xi) = \begin{pmatrix} 2 \cos \xi & 2 \cos x \\ 2 \cos x & -2 \cos \xi \end{pmatrix}$$

$$f_{1,2}(\lambda) = \lambda^2 - 4.$$

On a :

$$\gamma_1 = -2\sqrt{2}, \gamma_2 = \delta_1 = 0, \delta_2 = 2\sqrt{2}$$

$$\mu^1(x, \xi) = -2\sqrt{(\cos \xi)^2 + (\cos x)^2}; \mu^2(x, \xi) = -\mu^1(x, \xi).$$

On s'intéresse au point $(0,0)$. On a :

$$\mu_2 = -(2 \times 4) / (2 \times (-2\sqrt{2})) = \sqrt{2}.$$

Calculons μ_1 . On a :

$$(M(0,0) + 2\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2[1+\sqrt{2}] & 2 \\ 2 & -2[1-\sqrt{2}] \end{pmatrix}$$

$$(\partial \pi / \partial x)(0,0) = 0, (\partial \pi / \partial \xi)(0,0) = 0.$$

La formule (6.3.7) montre alors qu'il n'y a pas d'holonomie :

$$\mu_1 = 0.$$

Le comportement est donné par :

$$\lambda_n(h) = -2\sqrt{2} + \sqrt{2}(n + \frac{1}{2})|h| + \mathcal{O}(h^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

On a la symétrie $\lambda_n(h) = \lambda_n(-h) + \mathcal{O}(h^2)$. En fait, on peut montrer ici que $\lambda_n(h) = \lambda_n(-h)$. Ceci correspond au dessin de Hofstadter (cf. Figure 1)

Cas $q=3$.

Ce cas est plus intéressant car on va "voir" l'holonomie.

On prend $p=1, q=3$ (l'autre cas se déduit par symétrie)

$$M_{1,3}(x, \xi) = \begin{pmatrix} 2 \cos \xi & e^{-ix} & e^{ix} \\ e^{ix} & 2 \cos(\xi + (2\pi/3)) & e^{-ix} \\ e^{-ix} & e^{ix} & 2 \cos(\xi + (4\pi/3)) \end{pmatrix}$$

On a vu dans [HeSj5] qu'on trouve 3 bandes $[\gamma_\ell, \delta_\ell]$ ($\ell=1,2,3$) avec :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -(1+\sqrt{3}) & \delta_1 &= -2 \\ \gamma_2 &= 1-\sqrt{3} & \delta_2 &= \sqrt{3}-1 \\ \gamma_3 &= 2 & \delta_3 &= 1+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

On travaille aux points $(0,0)$ correspondant aux valeurs propres de

$$M(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3} \text{ (soit } \delta_1, \gamma_2, \delta_3).$$

Compte tenu des symétries, on traite tous les cas.

Enfin, on a :

$$f_{1,3}(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda, \quad f'_{1,3}(\lambda) = -3\lambda^2 + 6.$$

Calculons tout en $\delta_1 = -2$.

$$\mu_2 = \frac{2q^2}{f'_{p,q}(-2)} = -3.$$

Calculons μ_1 . On a :

$$(M(0,0)+2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \xi}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial M}{\partial x}(0,0) = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ +1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_0(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial M}{\partial \xi} e_0(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} e_0(0,0) = i \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ +1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$Q \cdot \frac{\partial M}{\partial \xi} e_0(0,0) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mu_1 = \sqrt{3}$$

d'où

$$\lambda_n(h) = -2 - (3/2) |h| [2n+1] + \sqrt{3} h + \mathcal{O}(h^2).$$

L'influence de l'holonomie est ici très visible (cf. Figure 2).

Calculons maintenant en $\gamma_2 = 1 - \sqrt{3}$.

On a :

$$\mu_2 = \frac{2 \times 9}{3[2 - (\sqrt{3} - 1)^2]} = \frac{6}{[2 - 1 - 3 + 2\sqrt{3}]} = \frac{3}{(\sqrt{3} - 1)} \quad (\sim 4,1)$$

Calculons μ_1 . On a :

$$(M(0,0) - (1 - \sqrt{3})) = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3}-2 & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{3}-2 \end{pmatrix};$$

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} f_0 \text{ avec } f_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial M}{\partial \xi}(0,0) f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{i} \frac{\partial M}{\partial x}(0,0) f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$Q \frac{\partial M}{\partial x} f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/(\sqrt{3}-1) \\ +1/(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$\mu_1 = - \left(\frac{1}{6-2\sqrt{3}} \right) \left(\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \right) = \frac{+\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{(\sqrt{3}-1)^2}$$

d'où

$$\lambda_n(h) = 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}-1} |h| \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(\sqrt{3}-1)^2} h + \mathcal{O}(h^2)$$

Calculons enfin en $\delta_3 = 1 + \sqrt{3}$.

On a :

$$\mu_2 = - \frac{2 \times 9}{3[(1+\sqrt{3})^2 - 2]} = \frac{-3}{(1+\sqrt{3})^2}$$

et des calculs analogues aux précédents donnent :

$$\mu_1 = - \frac{1}{(\sqrt{3}+1)^2}$$

d'où

$$\lambda_n(h) = 1 + \sqrt{3} - \frac{3}{1+\sqrt{3}} |h|(n+\frac{1}{2}) - \frac{1}{(\sqrt{3}+1)^2} h + \mathcal{O}(h^2) .$$

Comparaison avec les résultats de M. Wilkinson.

Dans [Wi2] WILKINSON fournit les résultats suivants pour $\lambda_0(h)$ (qu'il calcule par la méthode de Hofstadter) et qu'il compare avec sa règle de quantification.

On note $\lambda_n^{\text{Hof}}(h)$, $\lambda_n^{\text{Wilk}}(h)$ et $\lambda_n^{\text{HeSj}}(h)$ les valeurs propres données respectivement par un calcul numérique à la Hofstadter, par le calcul de Wilkinson et par notre formule approchée :

$$\lambda_n^{\text{HeSj}}(h) = (1 + \sqrt{3}) - 3/(1 + \sqrt{3}) |h|(n + \frac{1}{2}) - 1/(\sqrt{3} + 1)^2 h.$$

Le lien entre le $\Delta\beta$ de Hofstadter et notre h est $h = 2\pi\Delta\beta$.

Résultats dans le cas $q=3$ près de $\delta_3 = 1 + \sqrt{3}$.

$\Delta\beta$	h	$\lambda_0^{\text{Wilk}}(h)$	λ_0^{HeSj}	λ_0^{Hof}	h^2	$(\lambda_0^{\text{Hof}} - \lambda_0^{\text{HeSj}})/h^2$
1/100	6.28318×10^{-2}	2.68295	2.68914	2.69043	$\sim 4 \cdot 10^{-3}$	0.327
1/200	3.14159×10^{-2}	2.70954	2.71058	2.71090	$\sim 10^{-3}$	0.324
1/400	1.57079×10^{-2}	2.72120	2.72132	2.72140	$\sim 2 \cdot 10^{-4}$	0.324
1/800	0.78540×10^{-2}	2.72671	2.72669	2.72671	$\sim 6 \cdot 10^{-5}$	0.324

Le coefficient de h ($h > 0$) est :

$$\gamma_0 = \frac{3}{2[1 + \sqrt{3}]} + \frac{1}{(\sqrt{3} + 1)^2} = \frac{3(\sqrt{3} + 1) + 2}{2(\sqrt{3} + 1)^2} = \frac{5.09808}{7.46410} = 0.683013$$

et on a :

$$\begin{aligned} \gamma_0 h &= 0.04291 \\ &= 0.02146 \\ &= 0.01073 \\ &= 0.00536 \end{aligned}$$

Les résultats sont bien cohérents.

Résultats pour $n=4$.

$\Delta\beta$	h	λ_4^{Wilk}	λ_4^{HeSj}	λ_4^{Hof}	h^2
1/200	3.14159×10^{-2}	2.58201	2.57261	2.58442	$\sim 1.10^{-3}$
1/400	1.57079×10^{-2}	2.65491	2.65233	2.65514	$\sim 2.10^{-4}$
1/800	0.78540×10^{-2}	2.69286	2.69219	2.69288	$\sim 6.10^{-5}$

Le *Décalage* entre deux valeurs propres consécutives est :

$$\lambda_n^{\text{HeSj}} - \lambda_{n-1}^{\text{HeSj}} = -(3/(1+\sqrt{3})) |h|$$

d'où

$$\lambda_4^{\text{HeSj}}(h) = \lambda_0^{\text{HeSj}}(h) - (12/(1+\sqrt{3})) |h|.$$

La précision dans le cas $n=4$ est moins bonne.

Conclusion. La formule théorique de Wilkinson semble plus précise, surtout dès que le niveau d'énergie est plus loin de l'extrémité de la bande. On a ainsi une vérification expérimentale du fait que :

$$\lambda_n(h) = \lambda_n^{\text{HeSj}}(h) + \mathcal{O}_n(h^2).$$

Par contre, il est difficile de s'y retrouver dans l'article de Wilkinson avec les puissances de h , ce qui rend difficile la comparaison entre "sa" phase de Berry et la nôtre.

Notons que le terme suivant (coefficient de h^2) est en principe théoriquement calculable. Notre première étude numérique suggère que :

$$\lambda_0(h) = (1+\sqrt{3}) - (3/(1+\sqrt{3}))(|h|/2) - (1/(\sqrt{3}+1)^2) h + C_0 h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

avec $C_0 \sim 3.2.10^{-1}$.

APPENDICE.

Réduction de l'étude du spectre de l'équation de Harper à un système pseudo-différentiel.

On présente ici une variante de la démonstration faite au §.1. On veut donc étudier la réunion sur $\theta \in [0, 2\pi]$ des spectres des opérateurs

$$(A.1) \quad (H_\theta u)_k := \frac{1}{2} (u_{k+1} + u_{k-1}) + \cos(ak + \theta) u_k$$

sous l'hypothèse :

$$(A.2) \quad a = 2\pi(p/q) + h.$$

Si on pense à l'étude faite dans le cas rationnel où, lorsque $a = 2\pi(p/q)$, on se ramenait à un système $q \times q$, la procédure qui va suivre est assez naturelle et trouve son inspiration dans certains calculs de SOKOLOFF [So] ou WILKINSON [Wi].

On introduit :

$$(A.3) \quad U_j = \begin{pmatrix} u_{jq} \\ u_{jq+1} \\ \vdots \\ u_{jq+(q-1)} \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

et on réécrit $(H_\theta - E)u = 0$ sous la forme :

$$(A.4) \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix} U_{j+1} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix} U_{j-1} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} U_j + \text{diag}_{v=0, \dots, q-1} (\cos(2\pi(p/q)v + \nu h + jqh + \theta)) U_j = E U_j.$$

Pour harmoniser les notations, on remplace θ par $q\theta$ dans (A.4), ce qui ne porte pas à conséquence puisqu'on regarde $\bigcup_{\theta} \text{Sp } H_\theta$.

Dans ces nouvelles notations, le système (A.4) prend la forme :

$$(A.5) \quad (\mathcal{H}_\theta U)_j := \frac{1}{2} (S U_{j+1} + S^* U_{j-1}) + A(jh + \theta, h) U_j = E U_j$$

avec

$$(A.6) \quad S = \begin{pmatrix} & O \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad A(\xi, h) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & & \ddots & \\ & \ddots & & 1 \\ 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix} \\ + \operatorname{diag}_{\nu=0, \dots, q-1} (\cos(q\xi + 2\pi(p/q)\nu + \nu h))$$

et on s'intéresse à $\bigcup_{\theta} \operatorname{Sp} \mathcal{H}_\theta$.

En considérant les U_j comme les coefficients de Fourier d'une fonction V dans $L^2(S^1) \otimes \mathbb{C}^q$ (où S^1 est le cercle de rayon 2π), on peut réécrire le système (A.4) sous la forme :

$$(A.7)_\theta \quad \left[\frac{1}{2} [e^{-ix} S + e^{ix} S^*] + A(hD_x + \theta, h) \right] V = E \cdot V \\ V(x + 2\pi) = V(x).$$

D'après la théorie de Floquet, l'étude de la réunion des spectres des problèmes $(A.7)_\theta$ se ramène à l'étude du spectre du système pseudo-différentiel suivant défini sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q$:

$$(A.8) \quad \frac{1}{2} [e^{-ix} S + e^{ix} S^*] + A(hD_x, h).$$

On va maintenant faire une transformation unitaire dans $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q$ de manière à retrouver le lien avec les matrices $q \times q$ apparaissant dans l'étude du cas rationnel dans [HeSj5]. Il suffit pour cela de faire une conjugaison unitaire par la matrice

$\begin{pmatrix} 1 & e^{-ix/q} & \dots & e^{-i(q-1)x/q} \end{pmatrix}$ puis de faire le changement de variable : $y = x/q$, on obtient alors la :

Proposition A.1. Soit $a = 2\pi(p/q) + h$, $h \neq 0$ alors l'ensemble $\bigcup_{\theta} \operatorname{Sp} \mathcal{H}_\theta$ est égal au spectre du système pseudo-différentiel $q \times q$: $\frac{1}{2} M_{p,q}(x, hD_x)$ où $M_{p,q}(x, \xi)$ est la matrice :

$$(A.9) \quad M_{p,q}(x, \zeta) = e^{i\zeta J^p} + e^{-i\zeta(J^p)^*} + e^{ixK} + e^{-ixK^*}$$

$$\text{avec } K = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ e^{2i\pi/q} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{i\pi(q-1)/q} \end{pmatrix}$$

On a ainsi retrouvé les résultats du §.1.

REFERENCES.

- [An.Au] G. ANDRÉ et S. AUBRY : Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices, Ann. Israel Phys. Soc. 3(1980), 133.
- [Av.Se] J. AYRON-R. SEILER : Quantization of the Hall conductance for General Multiparticle Schrödinger Hamiltonians, Physical Review Letters, Vol.54, n°4, Janvier 1985, 259-262.
- [Az] YA AZBEL : Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field, Soviet Physics JETP, vol.19, n°3, Sept. 1964.
- [Be] J. BELLISSARD :
- [1] Schrödinger operators with almost periodic potentials, Springer lecture notes in Physics 153.
 - [2] C^* Algebras in solid state Physics (2D electrons in a uniform magnetic field),
Talk given at the Warwick Conference on operators algebras (July 1987).
- [Be-Si] J. BELLISSARD-B. SIMON : Cantor spectrum for the almost Mathieu equation, Journal of Functional Analysis, vol.48, n°3, Oct. 1982.
- [Bu-Br] BUTLER-BROWN : Phys. Review 166, 630 (1968).
- [Ca-No] B. CANDELPERGER-J.C. NOSMAS : Propriétés spectrales d'opérateurs différentiels asymptotiques autoadjoints, Comm. in P.D.E., 9(1984), n°2, 137-167.
- [Ca] U. CARLSSON : Travail en préparation.
- [C-E-Y] M.D. CHOI, G.A. ELLIOTT, N. YUI : Gauss polynomials and the rotation algebra, (Preprint Fév. 88).

- [CFKS]** H.L. CYCON, R.G. FROESE, W. KIRSCH, B. SIMON : Schrödinger operators with applications to quantum mechanics and global geometry, Texts and monographs in Physics, Springer Verlag.
- [Ch]** W.G. CHAMBERS : Phys. Review, A 140 (1965), p.135-143 (Appendice).
- [Cdu]** Y. COLIN DE VERDIERE : Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent, II le cas intégrable, Math. Z. 171, 51-73, (1980), (appendice).
- [Cdu-Ve]** Y. COLIN DE VERDIERE, J. VEY : Le lemme de Morse Isochore, Topology 18, 283-293, (1979).
- [He-Ro]** B. HELFFER, D. ROBERT :
- [1] Asymptotique des niveaux d'énergie pour des hamiltoniens à un degré de liberté, Duke Math. Journal, (1982), Vol. 49, n°4.
 - [2] Calcul fonctionnel par la transformée de Mellin et applications, Journal of Functional Analysis, Vol.53, n°3, Oct. 1983.
 - [3] Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique, Annales de l'IHP (Section Physique Théorique), Vol.41, n°3, (1984), p.291-331.
- [He-Sj]** B. HELFFER, J. SJÖSTRAND :
- [1] Multiple wells in the semi-classical limit I, Comm. in PDE, 9(4), p.337-408, (1984), (annoncé aux actes du colloque de Saint Jean-de-Monts en Juin 1983).
 - [2] Puits multiples en limite semi-classique II - Interaction moléculaire - Symétries - Perturbations, Annales de l'IHP (Section Physique Théorique), Vol.42, n°2, (1985), p.127-212.
 - [3] Effet tunnel pour l'équation de Schrödinger avec champ magnétique, Annales de l'ENS de Pise. (A paraître 1988).
 - [4] Résonances en limite semi-classique, Bulletin de la SMF, (1986), Tome 114, Fasc.3, (mémoire n°24-25).

- [5] Analyse semi-classique pour l'équation de Harper (avec application à l'étude de l'équation de Schrödinger avec champ magnétique), Preprint (Octobre 1987), à paraître dans Mémoires de la SMF (1988).
- [6] Semi-classical analysis for Harper's equation III, Cantor structure of the spectrum, A paraître dans Mémoires de la SMF (1989).
- [7] En préparation. Annoncé au Colloque d'Holzgau, Mars 1988.

- [Ho] D. HOFSTADTER : Energy Levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, Phys. Rev.B 14 (1976), 2239-2249.

- [Kh] A. YA KHINCHIN : Continued fractions, Phoenix Science Series (1964).

- [La-Li] LANDAU-LIFSHITZ : Mécanique quantique, Théorie non-relativiste.

- [Le] J. LERAY :
 - [1] Analyse Lagrangienne en mécanique semi-classique, Cours au Collège de France (1976-1977).
 - [2] Solutions asymptotiques de l'équation de Dirac.

- [Ma] V.P. MASLOV : Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Dunod.

- [Me-Sj] A. MELIN-J. SJÖSTRAND :
 - [1] Fourier integral operators with complex valued phase functions, Springer L.N. in Maths, n°459, 120-223.

- [Ne] G. NENCIU : Bloch electrons in a magnetic field : rigorous justification of the Peierls-Onsager approximation, Preprint 1988.

- [Nos] J.C. NOSMAS : Approximation semi-classique du spectre de systèmes différentiels asymptotiques, CRAS 295 (1982), n°3.

- [Nov]** S.P. NOVIKOV : Two dimensional operators in periodic fields, Journal of Soviet Mathematics, Vol.28, n°1, Janvier 1985.
- [Pe-Ro]** V. PETKOV-D. ROBERT : Asymptotique semi-classique du spectre d'hamiltoniens quantiques et trajectoires classiques périodiques, Comm. in PDE, 10(4), P. 365-390, (1985).
- [Re-Si]** M. REED-B. SIMON : Methods of modern Mathematical Physics, Academic Press.
- [Ro]** D. ROBERT : Autour de l'approximation semi-classique, Progress in Mathematics, Vol.68, Birkhauser.
- [Sj]** J. SJÖSTRAND :
- [1] Analytic singularities of solutions of boundary value problems, Proceedings of the Nato Advanced Study Institute (1980), Reidel Publishing company.
 - [2] Singularités analytiques microlocales, Astérisque n°95, (1982).
- [So]** J.B. SOKOLOFF : Unusual band structure, Wave functions and electrical conductance in crystals with incommensurate periodic potentials, Physics reports (Review Section of Physics Letters), 126, n°4, (1985), p.189-244.
- [Ta]** M. TAYLOR : Reflexion of singularities of solutions to systems of differential equations, CPAM, Vol.28, p.457-478, (1975).
- [T-K-N-N]** D.J.THOULESS, M.KOHMOTO, M.P.NIGHTINGALE, M.DEN NIJS : Quantized hall conductance in a two dimensional periodic potential, Physical Review Letters, Vol.49, n°6, Août 1982.
- [UM]** P. VAN MOUCHE : The coexistence problem for the discrete Mathieu operator, à paraître dans Comm. in Math. Phys. 88.

- [WPR]** W. WANG, B. PANNETIER, R. RAMMAL : Quasiclassical approximations for the almost Mathieu Equations, to appear in J. de Physique (1987).
- [We]** R.O. WELLS : Differential analysis on complex manifolds, Graduate texts in Mathematics, Springer Verlag.
- [Wi]** M. WILKINSON :
- [1] Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems, Proc. R. Soc. London A 391, p. 305-350, (1984).
 - [2] An example of phase holonomy in WKB theory, J. Phys. A. Math. Gen. 17 (1984), p. 3459-3476.
 - [3] Von Neumann lattices of Wannier functions for Bloch electrons in a magnetic field, Proc. R. Soc. Lond. A 403, p. 135-166, (1986).
 - [4] An exact effective Hamiltonian for a perturbed Landau level, Journal of Physics A, Vol.20, n°7, 11 May 1987, p. 1761.
 - [5] An exact renormalization Group for Bloch electrons in a magnetic fields, A paraître au Journal of Physics A.