MARGUERITE FLEXOR

Images directes en cohomologie cohérente

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 36 (1989)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1989_2_36__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France , n° 36
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 117, 1989, fascicule 1

IMAGES DIRECTES EN COHOMOLOGIE COHÉRENTE

Marguerite FLEXOR

Soient S un schéma affine noethérien, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$–module cohérent plat sur S et $Rf_*\mathcal{F}$ le complexe "*image directe*" associé à ces données. A. Grothendieck a montré que ce dernier est un complexe parfait, i.e. représenté par un complexe fini de $\mathcal{O}_S$–modules localement libres de type fini.

Soit p un entier ≥ 0 et remplaçons l'hypothèse f propre par l'hypothèse plus faible : les $\mathcal{O}_S$–modules $R^i f_*\mathcal{F}$ sont de type fini pour $i \leq p$. Peut–on trouver un complexe parfait L de $\mathcal{O}_S$–modules, un morphisme $L \longrightarrow Rf_*\mathcal{F}$ qui induit un isomorphisme sur la cohomologie en degrés $\leq p$. On montre, dans ce mémoire qu'il en est ainsi lorsque X est un ouvert assez gros d'un espace projectif et lorsque $\mathcal{F}$ vérifie de bonnes conditions de profondeur.

La construction de L est obtenue en montrant que $Rf_*\mathcal{F}$ est limite inductive d'une famille de complexes parfaits dont les complexes tronqués en degrés $\leq p$ forment une famille essentiellement constante. Pour cela, nous sommes amenés à considérer la catégorie des ind–objets "$\varinjlim$"L_α et par dualité celle des pro–objets "$\varprojlim$"K_α .

Let S be a affine scheme, $f : X \longrightarrow S$ be a proper map, $\mathcal{F}$ a coherent $\mathcal{O}_X$–module flat over S. By a theorem of A. Grothendieck, the complex $Rf_*\mathcal{F}$ is perfect, i.e. can be represented by a finite complex of locally free $\mathcal{O}_S$–modules of finite type. Let $p \geq 0$ and replace the hypothesis f proper by the weaker hypothesis : the $\mathcal{O}_S$–modules $R^i f_*\mathcal{F}$ are coherent for $i \leq p$. Then we show that there exists a perfect complex L , a morphism $L \xrightarrow{u} Rf_*\mathcal{F}$ such that $H^i(u)$ is an isomorphism for $i \leq p$, when X is a big open set of a projective space and $\mathcal{F}$ verifies good properties on depth. The construction of L is obtained from $Rf_*\mathcal{F}$ by consideration of ind–objects and by duality of pro–objects.

Texte reçu le 22 octobre 1986, révisé le 8 décembre 1988.
M.FLEXOR, Université Paris XI, Mathématiques, Bât.425, 91405 Orsay.

Table des matières

Introduction

Les théorèmes classiques de semi-continuité des fonctions du type

$$s \longrightarrow \dim_{k(s)} H^i(X \otimes k(s), F \otimes k(s))$$

où s est un point d'un schéma affine noethérien $S = \operatorname{Spec} A$; X est un S-schéma propre, F un $\mathcal{O}_X$-module de type fini plat sur A, sont conséquences de l'existence d'un complexe parfait qui représente la cohomologie relative de F au-dessus de S. Une manière de construire L est la suivante : on sait que, pour tout i, $H^i(X,F)$ est un A-module de type fini et est le i-ème groupe de cohomologie d'un complexe borné C de A-modules plats. En général C n'est pas un complexe parfait (on peut prendre pour C un complexe de cochaines de Cech associé à un recouvrement ouvert affine de X). On construit L en procédant "de la droite vers la gauche", i.e., si C est à cohomologie dans $[0,p]$, on construit d'abord L^p, puis $L^{p-1}, \ldots$ de manière que L soit un complexe parfait quasi-isomorphe à C.

Lorsque $X \longrightarrow S$ est de type fini mais non nécessairement propre, il se peut que $H^0(X,F)$ soit un A-module de type fini et le reste après tout changement de base et dans ce cas, on aimerait bien avoir un théorème de semi-continuité du type précédent.

Faute d'informations sur les groupes $H^i(X,F)$, pour $i > 0$, cette manière d'opérer "de la droite vers la gauche" ne fonctionne plus.

Par contre une extension d'un théorème de D. Lazard donne une première indication : le complexe C, qui réalise la cohomologie de F au-dessus de S, est limite d'une famille inductive filtrante de complexes parfaits (L_λ). Dans ces conditions, pour tout A-module M, $H^i(X, F \otimes_A M) = \varinjlim_\lambda H^i(L_\lambda \otimes_A M)$ et on peut se demander, lorsque p est un entier ≥ 0 et lorsque $H^i(X, F \otimes_A M)$ est un A-module de type fini pour tout $i \leq p$ et tout A-module de type fini M, si un complexe L_λ (quitte à modifier la famille (L_λ)) fournit déjà la cohomologie en degré $\leq p$ de $C \otimes_A M$, pour tout A-module M.

Indiquons comment l'on procède pour obtenir ce complexe parfait L qui représente éventuellement la cohomologie de $R\Gamma(X, F \otimes .)$ en degré $\leq p$: soit (L_λ) la famille inductive de complexes parfaits, telle que $C = \varinjlim_\lambda L_\lambda$, la famille duale

($L^*_\lambda = \mathrm{Hom}^\cdot(L_\lambda, A)$) définit un pro-objet dont il s'agit de voir que la cohomologie en degré dans l'intervalle $[-p,0]$ est essentiellement constante. On peut cette fois procéder "de la droite vers la gauche".

Il y a deux parties bien distinctes dans ce travail.

Première partie : elle est "cohomologique" et consacrée aux :

1) pro-objets de la catégorie dérivée de la catégorie des A-modules. On donne des critères pour qu'un système projectif de complexes bornés soit essentiellement constant, par exemple si :

- sa cohomologie est essentiellement constante (théorème 1)
- il existe une bonne stratification de $S = \mathrm{Spec}\, A$ telle que sa cohomologie soit essentiellement constante sur chaque déformation infinitésimale de chaque strate (cf. théorèmes 3 et 4)

2) ind-objets, dualité entre pro-objets et ind-objets. On obtient le théorème (nommé théorème 7) sur lequel s'appuie la deuxième partie : la cohomologie en degré $\leq p$ de $C \otimes_A \cdot$ est donnée par la cohomologie en degré $\leq p$ de $L \otimes_A \cdot$, où L est un complexe parfait, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

α) la cohomologie de $C \otimes_S \cdot$ en degré $\leq p$ commute aux limites adiques

β) pour tout fermé irréductible S' de $\mathrm{Spec}\, A$, il existe un ouvert affine non vide $U = \mathrm{Spec}\, B$ de S' sur lequel la cohomologie de $(C \otimes_A B) \otimes_B \cdot$ est donnée par la cohomologie en degré $\leq p$ d'un complexe $L^B \otimes_B \cdot$, où L^B est un complexe parfait sur B .

Deuxième partie : elle est de nature géométrique. On revient au complexe $R\Gamma(X,F)$, i.e. à la théorie des faisceaux algébriques cohérents et on montre en particulier que, lorsque X est quasi-projectif et lorsque F vérifie des conditions de profondeur appropriées, alors un tel complexe L existe, en vérifiant que les conditions α) et β) citées ci-dessus sont satisfaites.

Les objets et techniques employés dans cette deuxième partie étant de nature distincte de ceux de la première partie une introduction spécifique est faite au début de cette deuxième partie. De plus, les résultats de la première partie utilisés étant essentiellement les théorèmes 6 et 7, elle peut être lue directement.

Je tiens à remercier Michel Raynaud et Lucien Szpiro pour l'aide, les idées et les techniques qu'ils m'ont apportés dans l'élaboration de ce travail sinon dans la vie mathématicienne.

Je tiens encore à remercier vivement Mme Bonnardel qui a bien voulu se charger de la frappe de ce manuscrit.

Première partie

I - Pro-objets

Soit A une catégorie. Nous aurons à considérer la catégorie Pro(A) dont :

- les objets sont les systèmes projectifs $(M_\alpha)_{i\in I}$ d'objets de A, si I est un ensemble d'indices préordonné filtrant variable. On note $\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"} M_\alpha$ l'objet de Pro(A) correspondant

- si $\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"} M_\alpha$ et $\text{"}\varprojlim_{j\in J}\text{"} N_j$ sont deux objets de Pro(A) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(A)}(\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"} M_\alpha , \text{"}\varprojlim_{j\in J}\text{"} N_j) = \varprojlim_{j\in J} \varinjlim_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}_A(M_\alpha, N_j) .$$

Le foncteur $i : A \longrightarrow \mathrm{Pro}(A)$ qui à un objet M de A associe le pro-objet $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$, I réduit à un élément α et $M_\alpha = M$, est pleinement fidèle.

De plus, si les limites projectives existent dans A, on dispose aussi du foncteur :

$$\varprojlim : \mathrm{Pro}(A) \longrightarrow A$$

défini par $\varprojlim(\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"} M_i) = \varprojlim_{\alpha\in I} M_\alpha$ et d'une flèche naturelle dans Pro(A) :

$$i(\varprojlim_{\alpha\in I} (\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"} (M_\alpha)) \longrightarrow \text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"} M_\alpha .$$

Soit $\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"} M_\alpha \in \mathrm{Pro}(A)$. On dit que $\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"} M_\alpha$ est essentiellement nul si pour tout α, il existe $\alpha' \geq \alpha$ tel que le morphisme de transition $M_{\alpha'} \longrightarrow M_\alpha$ soit nul.

Si $F : A \longrightarrow A'$ est un foncteur covariant, il se prolonge de manière évidente en un foncteur que l'on note encore $F : \mathrm{Pro}(A) \longrightarrow \mathrm{Pro}(A')$.

Définition. $\tilde{A}$ = sous-catégorie pleine de Pro(A) des objets isomorphes aux objets du type $i(M)$, pour $M \in A$.

La proposition qui suit donne une caractérisation de $\tilde{A}$, lorsque A est une catégorie abélienne.

Proposition 1. Soient A une catégorie abélienne, $M \in A$, $\text{"}\varprojlim_{\lambda}\text{"} M_\lambda \in \mathrm{Pro}(A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\text{"}\varprojlim_\lambda\text{"}\, M_\lambda \simeq i(M)$.

2) Il existe $\psi = (\psi_\lambda) \in \varprojlim_\lambda \mathrm{Hom}(M,M_\lambda)$, ψ_λ monomorphisme pour $\lambda \gg 0$ tel que $\text{"}\varprojlim\text{"}\, \mathrm{Coker}\, \psi_\lambda$ soit essentiellement nul.

2') Comme en 2), de plus M est facteur direct de M_λ (par ψ_λ) pour $\lambda \gg 0$.

3) Il existe $\varphi = (\varphi_\lambda)_{\lambda\gg 0} \in \varinjlim \mathrm{Hom}(M_\lambda,M)$, φ_λ épimorphisme pour $\lambda \gg 0$ et tel que $\text{"}\varprojlim_{\lambda\gg 0}\text{"}\, \mathrm{Ker}\, \varphi_\lambda$ soit essentiellement nul.

3') Comme en 3), de plus M est quotient direct (par φ_λ) de M_λ pour $\lambda \gg 0$.

4) Les deux foncteurs sur A , $h_M = \mathrm{Hom}_A(M,.)$ et $h_{\text{"}\varprojlim_\lambda\text{"}M_\lambda} = \varinjlim \mathrm{Hom}_A(M_\lambda,.)$ sont isomorphes.

De plus s'il en est ainsi, $\varprojlim_\lambda M_\lambda$ existe dans A et on a :

$$i(\varprojlim_\lambda M_\lambda) \simeq \text{"}\varprojlim_\lambda\text{"}\, M_\lambda \quad \text{dans} \quad \mathrm{Pro}(A)\ .$$

Remarque. Selon [5], l'assertion 4) signifie que le foncteur pro-représentable $h_{\text{"}\varprojlim_\lambda\text{"}M_\lambda}$ est effectivement représentable.

Démonstration :

La donnée d'un morphisme $\varphi : \text{"}\varprojlim_\lambda\text{"}\, M_\lambda \longrightarrow i(M)$ dans $\mathrm{Pro}(A)$ est équivalente à la donnée d'un système de flèches $(\varphi_\lambda)_{\lambda\gg 0}$

$$\varphi_\lambda : M_\lambda \longrightarrow M$$

compatibles aux morphismes de transition, i.e. $\beta \geq \lambda$, si $\pi_{\beta\lambda}$ est le morphisme de transition :

$$\varphi_\beta : M_\beta \xrightarrow{\pi_{\beta\lambda}} M_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} M\ .$$

La donnée d'une flèche φ^{-1} inverse de φ dans $\mathrm{Pro}(A)$ est équivalente à la donnée d'un système de flèches $(\psi_\lambda)_\lambda$, $\psi_\lambda : M \longrightarrow M_\lambda$, compatibles aux morphismes de transition, i.e. pour $\beta \geq \lambda$, $\psi_\lambda = \pi_{\beta\lambda}\circ\psi_\beta$ et vérifiant de plus

a) $\varphi\circ\varphi^{-1} = 1d_{\,i(M)} = 1d_M$ (car i est pleinement fidèle), i.e. pour $\lambda \gg 0$ $1d_M = \varphi_\lambda\circ\psi_\lambda$

b) $\varphi^{-1}\circ\varphi = 1d_{\text{"}\varprojlim_\lambda\text{"}M_\lambda}$, i.e. pour $\lambda \gg 0$ et $\beta \geq \lambda$, $\psi_\lambda\circ\varphi_\beta = \pi_{\beta\lambda}$.

On vérifie aisément que 1) $\Longleftrightarrow$ 2') $\Longleftrightarrow$ 3'). Si l'une de ces conditions est vérifiée, ψ_λ est injective pour $\lambda \gg 0$ et on a

$$\mathrm{Id}_{\varprojlim M_\lambda} = \varprojlim \mathrm{Id}_{M_\lambda} : \varprojlim M_\lambda \xrightarrow{\varprojlim \varphi_\lambda} M \xrightarrow{\varprojlim \psi_\lambda} \varprojlim M_\lambda$$

et $\varprojlim M_\lambda \simeq M$. D'autre part avec 2) ou 3), on a aussi

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}_A(M_\lambda,N)$$

pour tout objet N de A . Par suite $i(M) \simeq$ "$\varprojlim$"M_λ et on a 1) $\Longleftrightarrow$ 2) $\Longleftrightarrow$ 3) $\Longleftrightarrow$ 4).

Corollaire 1. Soient A un anneau, $S = \mathrm{Spec}\, A$, $\mathcal{A}$ la catégorie des $\mathcal{O}_S$-modules, $\mathcal{A}_{qc}$ la sous-catégorie de $\mathcal{A}$ des A-modules quasi-cohérents, "$\varprojlim$" K_α un objet de $\mathrm{Pro}(\mathcal{A}_{qc})$, K sa limite projective dans $\mathcal{A}$.

1) Si "$\varprojlim$" $K_\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}$ alors

a) K est quasi-cohérent, "$\varprojlim$" $K_\alpha \simeq K$ dans $\mathrm{Pro}(\mathcal{A}_{qc})$, i.e. "$\varprojlim$" $K_\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}_{qc}}$.

b) Pour tout A-module M , $K \otimes_A M = \varprojlim K_\alpha \otimes_A M \simeq$ "$\varprojlim$" $K_\alpha \otimes_A M$ dans $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$.

c) Si U est un ouvert de $S = \mathrm{Spec}\, A$, si $\varprojlim K_{\alpha|U}$ désigne la limite projective de "$\varprojlim$" $K_{\alpha|U}$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_U$-modules, on a $K_{|U} = \varprojlim K_{\alpha|U}$.

2) Si S est réunion finie d'ouverts affines U_i , $i \in I$, d'anneau A_i , si $\mathcal{A}_i$ désigne la catégorie des A_i-modules, alors "$\varprojlim$" $K_\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}$ si et seulement si "$\varprojlim$" $K_{\alpha|U_i} \in \tilde{\mathcal{A}}_i$ pour tout $i \in I$.

Démonstration :

1) Si "$\varprojlim$" $K_\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}$, $K \simeq$ "$\varprojlim$" K_α , i.e. il existe α_0 tel que pour $\alpha \geq \alpha_0$, K soit un facteur direct de K_α et "$\varprojlim\limits_{\alpha \geq \alpha_0}$" K_α/K soit essentiellement nul. Ceci reste encore vrai sur tout ouvert U de S , ou après tensorisation par un A-module M . Par suite $K_{|U} \simeq$ "$\varprojlim$" $K_{\alpha|U}$ dans $\mathrm{Pro}(\mathcal{O}_U)$ et $K \otimes M \simeq$ "$\varprojlim$" $K_\alpha \otimes M$ dans $\mathrm{Pro}(A)$. Les assertions a), b), c) s'en déduisent aisément.

2) Grâce à 1), il suffit de voir que si "$\varprojlim$" $K_{\alpha|U_i} \in \tilde{\mathcal{A}}_i$ pour tout $i \in I$, alors "$\varprojlim$" $K_\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}$. Posons $K_i = \varprojlim K_{\alpha|U_i}$ pour tout i . D'après 1), K_i est quasi-cohérent, il existe un isomorphisme $u_i : K_i \xrightarrow{\sim}$ "$\varprojlim$" $K_{\alpha|U_i}$ et pour $j \in I$, on a $K_{i|U_i \cap U_j} = K_{j|U_i \cap U_j}$. Si K' est le A-module défini par les $(K_i)_{i \in I}$, K' est quasi-cohérent. Si $u = (u_\alpha) : K' \longrightarrow$ "$\varprojlim$" K_α est la flèche définie par les isomorphismes $(u_i)_{i \in I}$, $u_\alpha : K' \longrightarrow K_\alpha$ est injectif pour $\alpha \gg 0$ (c'est vrai sur chaque ouvert U_i) et "$\varprojlim$" K_α/K' est essentiellement nul (c'est encore vrai sur

chaque U_i). Par suite, $K' \simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha$ et $K \simeq K'$.

Corollaire 2. Soient $f : A \longrightarrow A'$ un homomorphisme fidèlement plat d'anneaux, A_{qc} (resp. A'_{qc}) la catégorie des A-(resp. A'-)modules quasi-cohérents, $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \mathrm{Pro}(A_{qc})$. Alors $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \widetilde{A}_{qc}$ si et seulement si $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \otimes A' \in \widetilde{A}'_{qc}$.

Démonstration :

Si K est un A-module tel que $K \simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha$, K est quasi-cohérent, K est facteur direct de K_α pour $\alpha >> 0$ et $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha/K$ est essentiellement nul. Ces propriétés sont conservées lorsqu'on effectue le changement d'anneau $A \longrightarrow A'$, et il est clair que

$$K \otimes A' \simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \otimes A' .$$

Inversement, si $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \otimes A' \in \widetilde{A}'$, soit (K', u'), où K' est un A'-module quasi-cohérent, $u' = (u'_\alpha)_{\alpha >> 0} : \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \otimes A' \longrightarrow K'$ un isomorphisme dans Pro(A'). Par descente fidèlement plate des A'-modules quasi-cohérents, il existe un A-module quasi-cohérent K tel que $K \otimes A' = K'$. Soit α_0 tel que la flèche $u'_{\alpha_0} : K_{\alpha_0} \otimes A' \longrightarrow K'$ soit définie, toujours par descente fidèlement plate, u'_{α_0} est de la forme $u_{\alpha_0} \otimes 1_{A'}$, avec $u_{\alpha_0} : K_{\alpha_0} \longrightarrow K$. Si $\pi_{\beta\alpha_0} : K_\beta \longrightarrow K_{\alpha_0}$ est pour $\beta \geq \alpha_0$ la flèche de transition du système (K_α), $u_\beta = u_{\alpha_0} \circ \pi_{\beta\alpha_0}$ et on a la flèche

$$u = (u_\beta)_{\beta \geq \alpha_0} : \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\beta \longrightarrow K$$

tel que $u \otimes 1_{A'} = u'$. Pour $\beta >> 0$, u'_β est surjectif et il en est de même de u_β . De même $\text{"}\varprojlim\text{"}\, \mathrm{Ker}\, u'_\beta$ est essentiellement nul et il en est de même de $\text{"}\varprojlim\text{"}\, \mathrm{Ker}\, u_\beta$. Par suite

$$u : \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\beta \longrightarrow K$$

est un isomorphisme.

Définitions. Si U est un ouvert d'un schéma affine $S = \mathrm{Spec}\, A$ et si $\varphi = (\varphi_\alpha)_\alpha : K \longrightarrow \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\, K$ est une flèche dans Pro(A) (A = catégorie des $\mathcal{O}_S$-modules), avec $K \in A$, on dit que φ est un isomorphisme sur U si :

i) φ_α est injectif sur U , pour $\alpha >> 0$.

ii) Pour tout α , il existe $\beta \geq \alpha$ tel que la flèche de transition coker $\varphi_\beta \longrightarrow$ coker φ_α soit nulle sur U .

Autrement dit, $\text{"}\varprojlim_{\alpha}\text{"} K_{\alpha|U}$ est essentiellement constant.

De même si $\psi = (\psi_\alpha)_{\alpha>>0} : \text{"}\varprojlim\text{"} K_\alpha \longrightarrow K$ est une flèche dans $\mathrm{Pro}(A)$, avec $K \in A$, on dit que ψ <u>est un isomorphisme sur</u> U si

j) ψ_α est surjective sur U pour $\alpha >> 0$.

jj) Pour tout α, il existe $\beta \geq \alpha$ tel que la flèche de transition $\mathrm{Ker}\, \varphi_\beta \longrightarrow \mathrm{Ker}\, \varphi_\alpha$ soit nulle sur U.

Si U est un ouvert d'un schéma quasi-compact S réunion finie d'ouverts affines $(U_i)_{i\in I}$ et si $\varphi : K \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"} K_\alpha$ (resp. $\psi : \text{"}\varprojlim\text{"} K_\alpha \longrightarrow K$) est une est une flèche dans Pro(catégorie des $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérents) et K est un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent, φ (resp. ψ) est un isomorphisme sur U si et seulement si $\varphi_{|U_i}$ (resp. $\psi_{|U_i}$) est un isomorphisme sur $U \cap U_i$ pour tout i.

Donnons pour terminer ce paragraphe sur les pro-objets un cas particulièrement simple.

<u>Proposition</u> 2. <u>Soient</u> A <u>un anneau local artinien</u>, k <u>son corps résiduel</u>, $\mathcal{A}$ <u>la catégorie des</u> A-<u>modules</u>, $\text{"}\varprojlim\text{"} M_\alpha \in \mathrm{Pro}(\mathcal{A})$, <u>où</u> M_α <u>est un</u> A-<u>module</u> <u>de type fini</u> <u>pour</u> $\alpha >> 0$. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1) $\text{"}\varprojlim\text{"} M_\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}$

2) $\text{"}\varprojlim\text{"} M_\alpha \otimes k \in \widetilde{\mathrm{Mod}(k)}$ $\quad$ ($\mathrm{Mod}(k)$ = catégorie des k-modules)

3) $\dim_k(\varinjlim \mathrm{Hom}(M_\alpha, k)) < +\infty$.

<u>Démonstration</u> :

Il est clair, par la proposition 1 et son corollaire, que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3). Montrons que 3) $\Longrightarrow$ 1) : pour $\beta \geq \alpha$, soit $M_{\beta\alpha} = \mathrm{Im}(M_\beta \longrightarrow M_\alpha)$. Comme M_α est artinien, le système $(M_{\beta\alpha})_\beta$ est stationnaire de valeur $\widetilde{M}_\alpha$. Il est clair que $\text{"}\varprojlim\text{"} \widetilde{M}_\alpha \xrightarrow{\sim} \text{"}\varprojlim\text{"} M_\alpha$, de sorte que l'on peut supposer les flèches de transition $M_\beta \longrightarrow M_\alpha$ surjectives et on a

$$\mathrm{Hom}(M_\alpha, k) \hookrightarrow \varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}(M_\alpha, k) .$$

Comme $\dim_k(\varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}(M_\alpha, k)) < +\infty$, il existe α_0 tel que $\mathrm{Hom}(M_{\alpha_0}, k) = \mathrm{Hom}(M_\alpha, k) = \varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}(M_\alpha, k)$ pour $\alpha \geq \alpha_0$. En particulier, $M_\alpha \otimes k = M_{\alpha_0} \otimes k$ pour $\alpha \geq \alpha_0$ et la longueur des A-modules M_α est bornée. Les flèches surjectives de transition $M_\beta \longrightarrow M_\alpha$ sont des isomorphismes pour $\alpha >> 0$.

II - La catégorie Pro $D(A)$ et les bi-foncteurs $\mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathrm{Pro}(D(A))}$

2.1. Dans tout ce qui suit, A désigne la catégorie des modules sur un anneau commutatif noethérien A, D(A) la catégorie dérivée de A. On désigne par :

- $D^+(A)$, $D^-(A)$ les sous-catégories pleines de $D(A)$ des complexes K pour lesquels il existe un entier n tel que $H^i(K)=0$ pour $i\leq n$ (resp. $i\geq n$), $D^b(A) = D^+(A)\cap D^-(A)$.

- $D_{coh}(A)$ celle des complexes dont les modules de cohomologie sont des A-modules de type fini, $D^+_{coh}(A) = D_{coh}(A)\cap D^+(A)$, $D^-_{coh}(A) = D_{coh}(A)\cap D^-(A)$, $D^b_{coh}(A) = D^b(A)\cap D_{coh}(A)$.

- $D^+_{parf}(A)$ (resp. $D^-_{parf}(A)$, $D_{parf}(A)$) celles des complexes de $D^+(A)$ (resp. $D^-_{parf}(A)$, $D^b(A)$) dont les composantes sont des A-modules libres de type fini.

- Pro $D^b(A)$ la sous-catégorie pleine de Pro $D(A)$ formée des $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha$ pour lesquels il existe un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{Z}$ tel que $H^j(K_\alpha)=0$ pour tout α si $j\notin[a,b]$, par Pro $D^-(A)$ (resp. Pro $D^+(A)$) celle des $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha$ pour lesquels il existe un entier p tel que $H^j(K_\alpha)=0$ pour tout α , si $j>p$ (resp. si $j<p$).

On définit de même $D(\mathcal{O}_S)$, $D^b(\mathcal{O}_S)$, Pro $D^b(\mathcal{O}_S)$ etc... si $\mathcal{O}_S$ est le faisceau des fonctions d'un schéma noethérien S .

Pour $D_{parf}(\mathcal{O}_S)$, $D^+_{parf}(\mathcal{O}_S)$ etc..., les composantes considérées sont localement libres de type fini.

Comme en I, on définit $\widetilde{D(A)}$ (resp. $\widetilde{D^b(A)}$,...) la sous-catégorie pleine de Pro $D(A)$ (resp. Pro $D^b(A)$,...) des objets isomorphes aux objets de $D(A)$ (resp. $D^b(A)$,...) considérée comme sous-catégorie pleine de Pro $D(A)$ (resp. Pro $D^b(A)$,...).

Remarque. La catégorie $D(A)$ (resp. $D^b(A)$,...) n'étant pas abélienne, la proposition 1 de I ne s'applique pas à Pro $D(A)$ (resp. Pro $D^b(A)$,...). Pour Pro $D^b(A)$, elle s'applique néanmoins indirectement, en ce sens que, comme nous le verrons par la suite, un objet $\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\, K_\alpha$ de Pro $D^b(A)$ est isomorphe à un objet de $D^b(A)$ si et seulement si, pour tout p , $\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^p(K_\alpha)$ est isomorphe à un A-module, autrement dit si la cohomologie de $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha$ est essentiellement constante (cf. théorème 1 ci-dessous du paragraphe 2.5).

Les paragraphes 2.2, 2.3, 2.4, qui suivent, décrivent des prolongements de propriétés bien connues sur $D(A)$ à la catégorie $\mathrm{Pro}\ D(A)$.

2.2. Les foncteurs $\tau_{\leq p}$, $\tau^{\geq p}$.

Pour $p \in \mathbb{Z}$, on définit les foncteurs $\tau_{\leq p}, \tau^{\geq p} : D(A) \to D(A)$ par :

si $L \in D(A)$ $\quad \tau_{\leq p}(L) : \dashrightarrow L^{p-2} \to L^{p-1} \to \mathrm{Ker}(L^p \to L^{p+1}) \to 0$

$$\tau^{\geq p}(L) : 0 \to L^p/\mathrm{Im}(L^{p-1} \to L^p) \to L^{p+1} \to L^{p+2} \to \cdots$$

qui se prolongent naturellement à $\mathrm{Pro}\ D(A)$. De même les foncteurs naturels : $L \xrightarrow{\text{can}} \tau^{\geq p}(L)$, $\tau_{\leq p}(L) \xrightarrow{\text{can}} L$ se prolongent à $\mathrm{Pro}\ D(A)$ en :

$$\tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha) = \text{"}\varprojlim\text{"}\tau^{\geq p}(K_\alpha)$$

$$\tau_{\leq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha) = \text{"}\varprojlim\text{"}\tau_{\leq p}(K_\alpha) .$$

Lemme 1. Si $\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha \in \mathrm{Pro}\ D^-_{coh}(A)$, il existe $\text{"}\varprojlim\text{"}\ L_\alpha \in \mathrm{Pro}\ D^-_{parf}(A)$ et un isomorphisme $u = (u_\alpha) : \text{"}\varprojlim\text{"}\ L_\alpha \xrightarrow{\sim} \text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha$ tel que u_α soit un isomorphisme pour tout α.

Démonstration :

Soient $\pi_{\beta\alpha} : K_\beta \to K_\alpha$, pour $\beta \geq \alpha$, les flèches de transition de $\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\beta$. Pour tout α, il existe (L_α, u_α), où $L_\alpha \in D^-_{parf}(A)$, $u_\alpha : L_\alpha \to K_\alpha$ est un quasi-isomorphisme. Pour $\beta \geq \alpha$, soit $q_{\beta\alpha}$ la flèche de $D(A)$ définie par le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} L_\beta \arrow[r, "u_\beta"] \arrow[d, "q_{\beta\alpha}"'] & K_\beta \arrow[d, "\pi_{\beta\alpha}"] \\ L_\alpha \arrow[r, "u_\alpha"] & K_\alpha \end{tikzcd} .$$

Le système projectif $(L_\alpha, q_{\beta\alpha})$ définit un objet $\text{"}\varprojlim\text{"}\ L_\alpha$ de $\mathrm{Pro}\ D^-_{parf}(A)$ isomorphe à $\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha$.

Lemme 2. Si $A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux et si $\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha \in \mathrm{Pro}\ D^-_{coh}(A)$, on a dans $\mathrm{Pro}\ D^b(B)$:

$$\tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha \overset{L}{\otimes} B) = \tau^{\geq p}(\tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha) \overset{L}{\otimes} B)$$

et si $\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha \in \mathrm{Pro}\ D^-_{parf}(A)$,

$$\tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha \otimes B) = \tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha) \otimes B .$$

Démonstration :

Si $L \in D^-_{parf}(A)$, on a $L \overset{L}{\otimes} B = L \otimes B$ et

$$\begin{aligned}
\tau^{\geq p}(L \otimes B) &= (0 \to L^p \otimes B/\mathrm{Im}(L^{p-1} \otimes B \to L^p \otimes B) \to L^{p+1} \otimes B \to \cdots) \\
&= (0 \to L^p/\mathrm{Im}(L^{p-1} \to L^p) \otimes B \to L^{p+1} \otimes B \to \cdots) \\
&= \tau^{\geq p}(L) \otimes B \\
&= \tau^{\geq p}(L) \overset{L}{\otimes} B = \tau^{\geq p}(\tau^{\geq p}(L) \overset{L}{\otimes} B) .
\end{aligned}$$

et la dernière assertion est claire. Montrons la première.

Soit $\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha \in D^-_{parf}(A)$, $(u_\alpha) : \text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha \simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha$ tel u_α soit un isomorphisme pour tout α . Pour tout α , on a

$$\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{L}{\otimes} B) = \tau^{\geq p}(L_\alpha \otimes B)$$

et $\tau^{\geq p}(\tau^{\geq p}(K_\alpha) \overset{L}{\otimes} B) = \tau^{\geq p}(\tau^{\geq p}(L_\alpha) \overset{L}{\otimes} B) = \tau^{\geq p}(\tau^{\geq p}(L_\alpha \otimes B)) = \tau^{\geq p}(L_\alpha \otimes B)$.

Par suite $\tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \overset{L}{\otimes} B) = \tau^{\geq p}(\tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha) \overset{L}{\otimes} B)$.

<u>Lemme</u> 3. <u>Si</u> $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \mathrm{Pro}\ D^b_{coh}(A)$, <u>il existe</u> $\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha \in \mathrm{Pro}\ D^-_{parf}(A)$ <u>et un entier</u> p <u>tel que l'on ait un carré commutatif d'isomorphismes</u>

$$\begin{array}{ccc}
\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha & \xrightarrow{\sim} & \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \\
{\scriptstyle \mathrm{can}}\ \downarrow \wr & & \wr \downarrow\ {\scriptstyle \mathrm{can}} \\
\tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha) & \xrightarrow{\sim} & \tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha)
\end{array} .$$

Démonstration :

Si $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \mathrm{Pro}\ D^b(A)$, il existe un intervalle $[p,q]$ de $\mathbb{Z}$ tel que $H^j(K_\alpha) = 0$ pour tout α si $j \notin [p,q]$. En particulier les morphismes canoniques

$$u : \tau_{\leq q}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha) \to \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha$$

$$u' : \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \to \tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha)$$

sont des isomorphismes.

Comme $\tau_{\leq q}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha) \in \mathrm{Pro}_{coh}D^-(A)$, il existe $\text{"}\varprojlim\text{"}\ L_\alpha \in \mathrm{Pro}\ D^-_{parf}(A)$ et un isomorphisme :

$$v : \text{"}\varprojlim\text{"}\ L_\alpha \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq q}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha) \ .$$

Le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{"}\varprojlim\text{"}\ L_\alpha & \xrightarrow{u\circ v} & \text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha \\ {\scriptstyle can}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} \\ \tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ L_\alpha) & \longrightarrow & \tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha) \end{array}$$

est un carré dont toutes les flèches sont des isomorphismes.

2.3. Si M est un complexe, on pose $H^*(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(M)$ et si $\text{"}\varprojlim\text{"}\ M_\alpha$ est dans Pro D(A), on pose

$$H^*(\text{"}\varprojlim\text{"}\ M_\alpha) = \text{"}\varprojlim\text{"}\ H^*(M_\alpha) \ .$$

Si $M \in D(A)$, si $n \in \mathbb{Z}$, par définition $M[n]$ est le complexe dont la p-ième composante est M^{p+n}. Si $\text{"}\varprojlim\text{"}\ M_\alpha \in \mathrm{Pro}\ D(A)$, si $n \in \mathbb{Z}$, par définition $(\text{"}\varprojlim\text{"}\ M_\alpha)[n] = \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ M_\alpha[n]$.

Proposition 3. Pro $D^b(A)$ est une catégorie triangulée.

Démonstration :

Soit $\varphi : \text{"}\varprojlim_{\alpha\in\Lambda}\text{"}\ K_\alpha \longrightarrow \text{"}\varprojlim_{\beta\in B}\text{"}\ L_\beta$ une flèche dans Pro $D^b(A)$. Dans $\Lambda\times B$ ordonné par la relation : $(\alpha,\beta) \leq (\alpha',\beta')$ si $\alpha\leq\alpha'$ et $\beta\leq\beta'$, considérons le sous-ensemble Γ des éléments (α,β) pour lesquels la flèche $\varphi_{\alpha\beta} : K_\alpha \longrightarrow L_\beta$, induite par φ, est définie. Pour tout β, il existe α tel que $\varphi_{\alpha\beta}$ soit définie et par suite Γ est filtrant. On note $(\alpha \longrightarrow \beta)$ les éléments de Γ. Pour un élément $(\alpha \longrightarrow \beta)$ de Γ, on note $M_{\alpha\to\beta}$ le mapping cone de $\varphi_{\alpha\beta}$ et $M(\varphi)$ le pro-objet $\text{"}\varprojlim_{(\alpha\to\beta)}\text{"}\ M_{\alpha\to\beta}$ qui est encore dans Pro $D^b(A)$. On a une flèche évidente :

$$\text{"}\varprojlim_\beta\text{"}\ L_\beta \longrightarrow \text{"}\varprojlim_{\alpha\to\beta}\text{"}\ M_{\alpha\to\beta}$$

et une autre

$$\text{"}\varprojlim_{\alpha\to\beta}\text{"} M_{\alpha\to\beta} \longrightarrow \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ K_\alpha[1]$$

définie de la manière suivante : pour tout α et tout β , il existe α_0 et une flèche $\varphi_{\alpha_0\beta} : K_{\alpha_0} \longrightarrow L_\beta$, avec $\alpha_0 \geq \alpha$. Si $\alpha' \geq \alpha_0$, $\varphi_{\alpha'\beta} : K_{\alpha'} \longrightarrow L_\beta$ est définie, i.e. $(\alpha' \longrightarrow \beta) \in \Gamma$, et il en est de même de la flèche composée :

$$\psi_{\alpha'\to\beta,\alpha} : M_{\alpha'\to\beta} \longrightarrow K_{\alpha'}[1] \longrightarrow K_\alpha[1] .$$

On vérifie que les $\psi_{\alpha'\to\beta,\alpha}$ forment un système de flèches compatibles aux morphismes de transition.

Ceci montre que toute flèche $\varphi : \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\, K_\alpha \longrightarrow \text{"}\varprojlim_\beta\text{"}\, L_\beta$ peut être insérée dans un triangle. On vérifie encore que les axiomes des triangles sont satisfaits. Le foncteur de translation est défini de manière évidente. Un triangle est distingué s'il est isomorphe à un triangle du type, où $M(\varphi)$ est le mapping cone de φ:

$$\begin{tikzcd} & M(\varphi) \arrow[dl] & \\ \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \arrow[rr, "\varphi"] & & \text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\beta \arrow[ul] \end{tikzcd} .$$

2.4. Pour $M,N \in D(A)$, $n \in \mathbb{Z}$, par définition

$$\mathrm{Ext}^n_{D(A)}(M,N) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(M[-n],N) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(M,N[n]) .$$

Pour $\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\lambda \in \mathrm{Pro}\ D^b(A)$ et $N \in D(A)$, on définit

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\lambda, N) &= \varinjlim_\lambda \mathrm{Ext}^n_{D(A)}(M_\lambda,N) \\ &= \varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}_{D(A)}(M_\lambda[-n],N) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim_\lambda\text{"}\, M_\lambda[-n],N) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim_\lambda\text{"}\, M_\lambda,N[n]) . \end{aligned}$$

Pour $M,N \in D^b(A)$, on a une suite spectrale convergente :

$$(*)\ E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{D(A)}(H^q(M),N) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{D(A)}(M,N) .$$

Si $\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\lambda \in \mathrm{Pro}\ D^b(A)$, $N \in D(A)$, il existe un intervalle fini I de $\mathbb{Z}$ tel que $H^q(M_\lambda) = 0$ pour tout λ si $q \notin I$ et la suite spectrale définie par

$$\tilde{E}_2^{p,q} = \varinjlim_\lambda \mathrm{Ext}^p(H^q(M_\lambda),N) = \mathrm{Ext}^p_{\mathrm{pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^q(M_\lambda),N)$$

est encore convergente et converge vers $\mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathrm{pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\lambda,N)$ (on utilise le fait que $\varinjlim$ est un foncteur exact sur A). Autrement dit, la suite spectrale $(*)$

définie et convergente pour $M\in D^b(A)$ se prolonge pour $M\in \mathrm{Pro}\, D^b(A)$.

Si $\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\lambda$ et $\text{"}\varprojlim\text{"}\, N_\alpha$ sont dans $\mathrm{Pro}\, D^b(A)$, par définition, pour $n\in\mathbb{Z}$

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\lambda,\ \text{"}\varprojlim\text{"} N_\alpha) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\lambda[-n],\text{"}\varprojlim\text{"}\, N_\alpha)$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\lambda,\text{"}\varprojlim\text{"}\, N_\alpha[n]) = \varprojlim_\alpha \varinjlim_\lambda \mathrm{Ext}^n_{D(a)}(M_\lambda,N_\alpha)\ .$$

<u>Remarque</u>. Soient $\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\lambda \in D^b(A)$, $M\in D^b(A)$, tels que $M \xrightarrow[\sim]{\varphi} \text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\lambda$ et soient $\text{"}\varprojlim\text{"}\, N_\alpha \in \mathrm{Pro}\, D^b(A)$, $N\in D^b(A)$, tels que $N \xrightarrow[\sim]{\psi} \text{"}\varprojlim\text{"}\, N_\alpha$, on a :

$$\mathrm{Ext}^n_{D(A)}(M,N) = \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Pro}\ D(A)}(M,N) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\lambda,\text{"}\varprojlim\text{"}\, N_\alpha)$$

le dernier isomorphisme étant défini à partir de φ et ψ .

<u>Proposition</u> 4 (Deligne [4] prop. 3). <u>Si</u> $u: \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\, L_j$ <u>est une flèche de</u> $\mathrm{Pro}\, D^b(A)$ <u>et si</u> $H^*(u): H^*(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i) \longrightarrow H^*(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_j)$ <u>est inversible, il en est de même de</u> u .

<u>Démonstration</u> :

Nous allons en fait montrer que pour tout $\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\alpha \in \mathrm{Pro}\, D^b(A)$, la flèche définie par u :

$$p_{\text{"}\varprojlim\text{"}M_\alpha} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_j,\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i,\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\alpha)$$

est un isomorphisme. Comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_j,\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\alpha) = \varprojlim_\alpha \mathrm{Hom}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_j,M_\alpha)$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i,\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\alpha) = \varprojlim_\alpha \mathrm{Hom}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i,M_\alpha)$$

il suffit de montrer que p_M est un isomorphisme, pour tout objet constant $M\in D^b(A)$. Utilisons les deux suites spectrales définies précédemment.

$$E_2^{pq}(K) = \mathrm{Ext}^p_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^q(K_i),M) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i[-p-q],M)$$

$$E_2^{pq}(L) = \mathrm{Ext}^p_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^q(L_j),M) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_j[-p-q],M)\ .$$

Par hypothèse, les flèches induites par u sur les termes $E_2^{pq}(K)$ et $E_2^{pq}(L)$ sont des isomorphismes et il en est de même de leurs aboutissements. D'où la proposition.

2.5. Critère pour qu'un élément de Pro $D^b(A)$ soit isomorphe à un élément de $D^b(A)$.

Pour illustrer le problème, examinons le cas des complexes de longueur 1 :

Si $K : 0 \to K^0 \to K^1 \to 0$ est un complexe de longueur 1, dans $D^b(A)$, K correspond bijectivement à un élément

$$\xi \in \mathrm{Ext}^2(H^1(K), H^0(K)) .$$

Le prolongement naturel à $D^b(A)$ de ceci, s'il existe, doit donc être :

Si $``\varprojlim" K_\alpha \in \mathrm{Pro}\, D^b(A)$, $K_\alpha$ de la forme $0 \to K_\alpha^0 \to K_\alpha^1 \to 0$ pour tout $\alpha$, $``\varprojlim" K_\alpha$ correspond bijectivement à un élément

$$\xi \in \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Pro}}(``\varprojlim" H^1(K_\alpha), ``\varprojlim" H^0(K_\alpha)) .$$

La donnée du pro-objet $``\varprojlim" K_\alpha$ détermine bien la donnée des pro-objets de cohomologie $``\varprojlim" H^1(K_\alpha)$ et $``\varprojlim" H^0(K_\alpha)$. Par contre, les foncteurs $\mathrm{Ext}^2(.,H^0(K_\alpha))$ étant contravariants, il n'est pas clair que l'on puisse obtenir un tel élément. C'est néanmoins le cas (prop. 6 ci-dessous). Il s'ensuit aisément (théorème 1) que $``\varprojlim" K_\alpha$ est isomorphe à un objet de $D^b(A)$ si et seulement si $``\varprojlim" H^1(K_\alpha)$ et $``\varprojlim" H^0(K_\alpha)$ sont essentiellement constants. C'est encore vrai pour $``\varprojlim" K_\alpha \in \mathrm{Pro}\, D^b(A)$, à savoir $``\varprojlim" K_\alpha \overset{\sim}{\in} D^b(A)$ si et seulement $``\varprojlim" H^*(K_\alpha)$ est essentiellement constant.

Les deux lemmes qui suivent permettent de dévisser les complexes de longueur donnée en complexes de longueur plus petite et par conséquent amènent à raisonner par récurrence sur la longueur des complexes considérés.

Lemme 1. Soient $K \in D^b(A)$, $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi : \tau_{\leq a}(K) \to K$ le morphisme naturel. Le complexe $\tau^{\geq a+1}(K)$ s'identifie naturellement à $M(\varphi)$ = mapping cone de φ, i.e. le triangle

$$\begin{tikzcd}
 & \tau^{\geq a+1}(K) \arrow[dl, "{[1]}"'] \\
\tau_{\leq a}(K) \arrow[r, "\varphi"] & K \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est distingué. De plus si $\xi : \tau^{\geq a+1}(K) \to \tau_{\leq a}(K)[1]$ est la flèche définie par le côté gauche de ce triangle

$$M(\xi) = \text{mapping cone de } \xi \simeq K[1]$$

(cf. aussi [2] prop. 13.3 page 29).

Démonstration :

Si $d^r : K^r \longrightarrow K^{r+1}$ désigne la différentielle en degré r du complexe K, $Z^a = \mathrm{Ker}(K^a \longrightarrow K^{a+1})$, $i : Z^a \hookrightarrow K^a$, $M(\varphi)$ est le complexe

$$\cdots \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d^{a-2} & 0 \\ -id & d^{a-3} \end{pmatrix}} K^{a-1} \oplus K^{a-2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d^{a-1} & 0 \\ -id & d^{a-2} \end{pmatrix}} Z^a \oplus K^{a-1} \xrightarrow{(-d^a,0)+(-i,d^{a-1})} K^a \xrightarrow{d^a} K^{a+1} \longrightarrow \cdots$$

et $M(\varphi) \xrightarrow[\sim]{can} \tau^{\geq a+1}(M(\varphi)) = \tau^{\geq a+1}(K)$.

La dernière assertion est une conséquence de la première.

Lemme 2. *Soient* $a \in \mathbb{Z}$, $D, L \in D^b(A)$, D *concentré en degré* $\leq a$, L *concentré en degré* $\geq a+1$ *et*

$E = \{$*classes d'isomorphismes dans* $D^b(A)$ *d'objets* K *tels que* $\tau_{\leq a}(K) \simeq D$, $\tau^{\geq a+1}(K) \simeq L\}$.

La flèche $\Gamma : \mathrm{Hom}_{D(A)}(L, D[1]) \longrightarrow E$, *définie par* :

si $\xi \in \mathrm{Hom}_{D(A)}(L, D[1])$, $\Gamma(\xi)$ = *classe d'isomorphismes de* $M(\xi)[-1]$ *est une bijection.*

Démonstration :

Décrivons la flèche inverse Δ de Γ : soit $(K,u,v) \in E$ où $K \in D^b(A)$, $\tau_{\leq a}(K) \overset{u}{\simeq} D$ et $\tau^{\geq a+1}(K) \overset{v}{\simeq} L$. Appliquons le lemme 1. Soit la flèche de $D^b(A)$

$$\xi' : \tau^{\geq a+1}(K) \longrightarrow \tau_{\leq a}(K)[1]$$

attachée au complexe K telle que $M(\xi') \simeq K[1]$. Si $[K]$ désigne la classe de K dans E, on pose

$$\Delta([K]) = u[1] \circ \xi' \circ v^{-1} \in \mathrm{Hom}_{D(A)}(L, D[1]).$$

Par construction, si $\xi = \Delta([K])$, $M(\xi) \simeq M(\xi') \simeq K[1]$ et il est clair que Γ et Δ sont inverses l'une de l'autre.

Généralisons ces deux lemmes à $\mathrm{Pro}\ D^b(A)$.

Proposition 5. *Soient* $\text{"}\varprojlim_{\alpha}\text{"}\, K_\alpha \in \mathrm{Pro}\ D^b(A)$, $a \in \mathbb{Z}$, φ *le morphisme naturel*

$$\varphi : \tau_{\leq a}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha) \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha .$$

Le pro-objet $\tau^{\geq a+1}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha)$ *s'identifie naturellement à* $M(\varphi)$ = *mapping cone de* φ , *i.e. le triangle* :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \tau^{\geq a+1}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \tau_{\leq a}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha) \arrow[rr, "\varphi"] & & \text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

est un triangle distingué. De plus si

$$\xi : \tau^{\geq a+1}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha) \longrightarrow \tau_{\leq a}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha[1])$$

est la flèche définie par le côté gauche de ce triangle :

$$M(\xi) = \text{mapping cone de } \ \xi \xrightarrow{\sim} \text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha[1] \ .$$

Démonstration :

Pour tout α , on a un morphisme naturel de complexes $\varphi_\alpha : \tau_{\leq a}(K_\alpha) \longrightarrow K_\alpha$ de sorte que $M(\varphi) = \text{"}\varprojlim\limits_{\substack{(\beta,\alpha)\\ \beta\geq\alpha}}\text{"}\ M(\varphi_{\beta\alpha})$, où $\varphi_{\beta\alpha}$ est la flèche composée

$$\varphi_{\beta\alpha} : \tau_{\leq a}(K_\beta) \longrightarrow \tau_{\leq a}(K_\alpha) \longrightarrow K_\alpha$$

et $M(\varphi_{\beta\alpha})$ est le mapping cone de $\varphi_{\beta\alpha}$.

Pour $\beta' \geq \beta \geq \alpha$, on a les morphismes de transition du système $(M(\varphi_{\beta\alpha}))_{\beta\geq\alpha}$

$$M(\varphi_{\beta'\beta}) \longrightarrow M(\varphi_{\beta\beta}) \longrightarrow M(\varphi_{\beta\alpha}) \longrightarrow M(\varphi_{\alpha\alpha}) \ .$$

Appliquons le lemme 1 : $M(\varphi_{\alpha\alpha}) = M(\varphi_\alpha) \overset{\text{can}}{\simeq} \tau^{\geq a+1}(M(\varphi_\alpha)) = \tau^{\geq a+1}(K_\alpha)$. De même $M(\varphi_{\beta\beta}) \overset{\text{can}}{\simeq} \tau^{\geq a+1}(K_\beta)$. De sorte que l'on a une suite de morphismes

$$\tau^{\geq a+1}(M(\varphi_{\beta'\beta})) \longrightarrow \tau^{\geq a+1}(K_\beta) \longrightarrow \tau^{\geq a+1}(M(\varphi_{\beta\alpha})) \longrightarrow \tau^{\geq a+1}(K_\alpha)$$

dont les composés deux à deux sont les morphismes de transition des systèmes $\tau^{\geq a+1}(M(\varphi_{\beta\alpha}))$ et $\tau^{\geq a+1}(K_\alpha)$ respectivement. Ceci montre que :

$$\text{"}\varprojlim\limits_{\beta\geq\alpha}\text{"}\ M(\varphi_{\beta\alpha}) \simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\ \tau^{\geq a+1}(K_\alpha) \ .$$

La dernière assertion est encore une conséquence de la première.

Proposition 6. *Soient* $a \in \mathbb{Z}$, $\text{"}\varprojlim\text{"}\ D_\alpha \in D^b(A)$, $\text{"}\varprojlim\text{"}\ L_\alpha \in D^b(A)$, D_α *concentré en degré* $\leq a$, L_α *concentré en degré* $\geq a+1$ *pour tout* α *et*

E = {classes d'isomorphismes dans Pro $D^b(A)$ d'objets $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha$ tels que $\tau_{\leq a}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha) \simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\, D_\alpha$ et $\tau^{\geq a+1}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha) \simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha\}$.

La flèche $\Gamma : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha, \text{"}\varprojlim\text{"}\, D_\alpha[1]) \longrightarrow E$, qui à un élément $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha, \text{"}\varprojlim\text{"}\, D_\alpha[1])$ associe la classe d'isomorphisme de $M(\xi)[-1]$, est bien définie et est une bijection (où $M(\xi)$ = mapping cone de ξ).

Démonstration :

Soit $\xi : \text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\, D_\alpha[1]$. Vérifions que $M(\xi)[-1]$ est bien dans E:

$$M(\xi) = \text{"}\varprojlim_{(\beta,\alpha)\in\Lambda'}\text{"}\; M(\xi_{\beta\alpha})$$

avec $\Lambda' = \{(\beta,\alpha)$ tel que $\xi_{\beta\alpha} : L_\beta \longrightarrow D_\alpha[1]$ soit défini$\}$, Λ' est ordonné par la relation

$$(\beta,\alpha) \leq (\beta',\alpha') \text{ si et seulement si } \beta \leq \beta' ,\ \alpha \leq \alpha' .$$

On a :

$$\begin{cases} \tau^{\geq a+1}(M(\xi_{\beta\alpha})[-1]) \simeq L_\beta \\ \tau_{\leq a}(M(\xi_{\beta\alpha})[-1]) \simeq D_\alpha \end{cases}$$

et on vérifie facilement que

$$\begin{cases} \tau^{\geq a+1}(M(\xi)[-1]) \simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\beta \\ \tau_{\leq a}(M(\xi)[-1]) \simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\, D_\alpha . \end{cases}$$

Compte tenu de la proposition 5, on procède comme pour le lemme 2 pour montrer que Γ est une bijection.

Remarque. La proposition 5 peut encore s'énoncer sous la forme suivante : Pro $D^b(A)$ est une catégorie t-triangulée (pour la définition d'une catégorie t-triangulée, cf. [2]).

Théorème 1. Soit $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \mathrm{Pro}\, D^b(A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \widetilde{D^b(A)}$

2) $\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^*(K_\alpha) \in \widetilde{A}$.

De plus, s'il en est ainsi, $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \widetilde{D^b_{coh}}(A)$ si et seulement si $\varprojlim_\alpha H^*(K_\alpha)$ est un A-module de type fini.

Démonstration :

1) $\Longrightarrow$ 2) : S'il existe $L \in D^b(A)$ tel que $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \xrightarrow{\sim} L$ dans $\mathrm{Pro}\, D^b(A)$, alors $\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^*(K_\alpha) \simeq H^*(L)$ dans $\mathrm{Pro}(A)$ et $H^*(L) \simeq \varprojlim H^*(K_\alpha)$.

De plus, si $\varprojlim H^*(K_\alpha)$ est un A-module de type fini, il existe $L' \in D^b_{coh}(A)$ tel que $L' \xrightarrow{\sim} L \xleftarrow{\sim} \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha$ et $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \widetilde{D^b_{coh}(A)}$.

2) $\Longrightarrow$ 1) : On peut supposer et on suppose que les complexes K sont concentrés en degrés situés dans l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{Z}$. Nous allons raisonner par récurrence sur l'entier $n = b-a$.

Si $n = 0$, $H^*(K_\alpha) = K_\alpha$ pour tout α et c'est clair dans ce cas.

Si $n \geq 1$, grâce à l'hypothèse de récurrence, il existe :

- un complexe $L \in D^b(A)$ concentré en degré $\geq a+1$ et un isomorphisme

$$u : \tau^{\geq a+1}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha) \xrightarrow{\sim} L$$

- un complexe H concentré en degré a et un isomorphisme

$$v : \tau_{\leq a}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha) \longrightarrow H\ .$$

Soit $\xi : \tau^{\geq a+1}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha) \longrightarrow \tau_{\leq a}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha)[1]$ la flèche associée à $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha$ (cf. proposition 5) et η celle définie par le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\tau^{\geq a+1}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha) & \xrightarrow[\sim]{u} & L \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \xi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \eta} \\
\tau_{\leq a}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha)[1] & \xrightarrow[\sim]{v[1]} & H[1]\ .
\end{array}$$

On a, en utilisant la proposition 6

$$\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \simeq M(\xi)[-1] \simeq M(\eta)[-1]$$

et $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \widetilde{D^b(A)}$.

2.6. Soient A' une A-algèbre, $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \mathrm{Pro}\, D^b(A)$. Les flèches de transition $K_\beta \longrightarrow K_\alpha$, pour $\beta \geq \alpha$, se prolongent dans $D(A')$, en des flèches

$$K_\beta \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A' \longrightarrow K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A'$$

et permettent de définir dans $\mathrm{Pro}(D^-(A'))$:

$$(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}A' = \underset{\alpha}{\text{"}\varprojlim\text{"}}(K_\alpha\overset{\mathbb{L}}{\otimes}A') .$$

Corollaire. Soient $f : A \longrightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux, $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \mathrm{Pro}\, D^b(A)$, n un entier :

a) si $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \widetilde{D^b(A)}$, alors $\text{"}\varprojlim\text{"}\, \tau^{\geq n}(K_\alpha\overset{\mathbb{L}}{\otimes}A') \in \widetilde{D^b(A')}$

b) si f est fidèlement plat, $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha\overset{\mathbb{L}}{\otimes}A' \in \widetilde{D^b(A')}$ si et seulement si $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \widetilde{D^b(A)}$.

Démonstration :

a) Soient $L \in D^b(A)$ et $u : L \longrightarrow \underset{\alpha}{\text{"}\varprojlim\text{"}}\, K_\alpha$ un isomorphisme dans $\mathrm{Pro}\, D^b(A)$.

Pour tout α, on a une suite spectrale convergente :

$$E_{2,\alpha}^{p,q} = \mathrm{Tor}_{-p}(H^q(K_\alpha),A') \Longrightarrow H^{p+q}(K_\alpha\overset{\mathbb{L}}{\otimes}A') .$$

Dans $\mathrm{Pro}(A)$, on a deux suites spectrales convergentes :

$$E_2^{pq} = \mathrm{Tor}_{-p}(H^q(L),A') \Longrightarrow H^{p+q}(L\overset{\mathbb{L}}{\otimes}A')$$

$$\text{"}\varprojlim\text{"}\, E_{2,\alpha}^{pq} = \mathrm{Tor}_{-p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^q(K_\alpha),A') \Longrightarrow H^{p+q}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha\overset{\mathbb{L}}{\otimes}A') .$$

La flèche u se prolonge en un isomorphisme des termes

$$E_2^{pq} \xrightarrow{\sim} \underset{\alpha}{\text{"}\varprojlim\text{"}}\, E_{2,\alpha}^{pq}$$

et donc des aboutissements

$$H^{p+q}(L\overset{\mathbb{L}}{\otimes}A') \xrightarrow{\sim} \text{"}\varprojlim\text{"}\, H^{p+q}(K_\alpha\overset{\mathbb{L}}{\otimes}A') .$$

On conclut grâce au théorème 1.

b) Si f est fidèlement plat, $H^*(K_\alpha\overset{\mathbb{L}}{\otimes}A') = H^*(K_\alpha)\otimes A'$ et dans ce cas $\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^*(K_\alpha) \in \widetilde{A}$ si et seulement si $\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^*(K_\alpha\otimes A') \in \widetilde{A}'$, si A' est la catégorie des A'-modules (cf. corollaire 2 de la proposition 1), ou encore si et seulement si $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha\otimes A' \in \widetilde{D^b(A')}$.

La proposition qui suit est une généralisation de la proposition 2 du paragraphe I.

Proposition 7. Si A est un anneau local artinien de corps résiduel k et si $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \mathrm{Pro}\, D^b_{coh}(A)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha \in \widetilde{D^b_{coh}}(A)$

b) <u>si</u> p <u>est un entier tel que</u> $H^j(K_\alpha) = 0$ <u>pour tout</u> α <u>et</u> $j < p$,

$$\tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ K_\alpha \overset{L}{\otimes} k) \in \widetilde{D^b_{coh}}(k)$$

c) $\dim_k \varinjlim_\alpha \operatorname{Hom}(H^*(K_\alpha),k) < +\infty$.

<u>Démonstration</u> :

Par le corollaire du théorème 1, il est clair que a) $\Longrightarrow$ b). Par la proposition 2 du paragraphe I et le théorème 1, il est clair que c) $\Longrightarrow$ a). Montrons que b) $\Longrightarrow$ c). On peut supposer $H^*(K_\alpha)$ concentrés en degrés dans l'intervalle $[p,0]$, $p \leq 0$, pour tout α et supposer aussi que $\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha \in \operatorname{Pro} D^-_{parf}(A)$. Posons $\bar{K}_\alpha = K_\alpha \otimes k$. Comme $\tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ \bar{K}_\alpha) \in \widetilde{D^b_{coh}}(k)$, on a, en considérant k comme un complexe concentré en degré 0 :

(*) $\dim H^i(\operatorname{Hom}_k(\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ \bar{K}_\alpha,k)) < +\infty$ pour $0 \leq i \leq -p$.

La suite spectrale convergente :

(**) $\varinjlim_\alpha \operatorname{Ext}^q_A(H^r(K_\alpha),k) \Longrightarrow \varinjlim_\alpha H^{q+r}(\operatorname{Hom}_k(K_\alpha,k))$

montre que :

1) $\varinjlim_\alpha \operatorname{Hom}(H^0(K_\alpha),k) = \varinjlim_\alpha H^0(\operatorname{Hom}_k(\bar{K}_\alpha,k))$,

$\dim_k \varinjlim_\alpha \operatorname{Hom}(H^0(K_\alpha),k) < +\infty$ et $\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ H^0(K_\alpha)$ est isomorphe à un A-module de longueur finie.

2) Par récurrence sur l'entier $-r \in [0,-p]$, que $\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ H^r(K_\alpha)$ est isomorphe à un A-module de longueur finie.

En effet, si $\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ H^j(K_\alpha)$ est isomorphe à un A-module de longueur finie, pour $0 \leq j < -r$:

$$\dim_k \underset{\overrightarrow{\alpha}}{\dim} \operatorname{Ext}^q(H^j(K_\alpha),k) < +\infty \quad \text{pour } q \geq 0 ,\ 0 \leq j < -r .$$

Par la suite spectrale (**) et la relation (*), on voit encore que:

$$\dim_k \varinjlim_\alpha \operatorname{Hom}_k(H^r(K_\alpha),k) < +\infty$$

et $\text{"}\varprojlim\text{"}\ H^r(K_\alpha)$ est isomorphe à un A-module de longueur finie. Par suite, $\text{"}\varprojlim\text{"}\ H^*(K_\alpha) \in \widetilde{A}$ et par le théorème 1, $\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha \in \widetilde{D^b_{coh}}(A)$.

III - Approximation des pro-objets sur un anneau complet

Dans ce paragraphe, A est un anneau noethérien complet pour une topologie définie par un idéal I. Pour $n>0$, on note $A_n = A/I^n$. Nous aurons souvent à considérer dans ce paragraphe des objets $"\varprojlim" L_n$ de $\mathrm{Pro}\, D^b(A)$, dont chaque composante L_n est un complexe de A-modules annulés par I^n, i.e. L_n est aussi un complexe de A_n-modules, pour tout $n>0$.

Proposition 8. Soient $"\varprojlim\limits_{n>0}" L_n \in \mathrm{Pro}\, D^b(A)$ et p un entier tels que pour $n>0$:

a) $\tau^{\geq p}(L_n) \in D^b_{coh}(A_n)$.

b) $\tau^{\geq p}(L_{n+1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_n) \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq p}(L_n)$ dans $D(A_n)$.

Il existe $L \in D^b_{coh}(A)$ et une flèche $\varphi : L \longrightarrow "\varprojlim\limits_{n>0}" \tau^{\geq p}(L_n)$ dans $\mathrm{Pro}\, D^b(A)$ tels que pour tout $n>0$, la flèche induite par φ dans $D(A_n)$

$$\tau^{\geq p}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_n) \longrightarrow \tau^{\geq p}(L_n)$$

soit un isomorphisme.

Démonstration :

On peut supposer que $L_n \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq p}(L_n)$ et est de la forme

$$0 \longrightarrow L_n^p \longrightarrow L_n^{p+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_n^q \longrightarrow 0$$

avec q indépendant de n, L_n^i libre de type fini sur A_n pour $i>p$, L_n^p de type fini sur A_n (cf. 2.2 du paragraphe II).

Soit $\psi_n : \tau^{\geq p}(L_{n+1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_n) = L_{n+1} \otimes A_n \longrightarrow L_n$ un isomorphisme dont l'existence est assurée par b). On va procéder de la manière suivante :

par récurrence sur n, on construit :

1) un système projectif $(L'_n)_{n>0}$, où $L'_n \in D^b_{coh}(A_n)$ est de la forme :

$$0 \longrightarrow L'^p_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow L'^q_n \longrightarrow 0$$

L'^i_n est un A_n-module libre de type fini pour $i>p$, L'^p_n de type fini sur A_n. De plus, le morphisme de transition $\pi_n : L'_{n+1} \longrightarrow L'_n$ s'identifie au morphisme naturel de complexes : $L'_{n+1} \longrightarrow L'_{n+1} \otimes A_n$, i.e. il existe un isomorphisme de complexes $\tilde{\pi}_n : L'_{n+1} \otimes A_n \simeq L'_n$.

2) Un système de flèches $\varphi'_n : L'_n \longrightarrow L_n$, isomorphismes dans $D(A_n)$, tel que l'on ait, pour tout $n > 0$, un carré commutatif :

$$(\ast) \qquad \begin{array}{ccc} L'_{n+1}\otimes A_n & \xrightarrow{\varphi'_{n+1}\otimes 1_{A_n}} & L_{n+1}\otimes A_n \\ {\scriptstyle\tilde{\pi}_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi_n} \\ L'_n & \xrightarrow{\varphi'_n} & L_n \end{array}$$

Soit $\varphi' = (\varphi'_n)_{n>0} : \text{"}\varprojlim\text{"}\, L'_n \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\, L_n$.

On prend pour L le complexe $\varprojlim_{n>0} L'_n$ et pour φ la flèche composée : $L \xrightarrow{\text{can}} \text{"}\varprojlim\text{"}\, L'_n \xrightarrow{\varphi'} \text{"}\varprojlim\text{"}\, L_n$.

$L \in D^b_{coh}(A)$ est encore de la forme

$$0 \longrightarrow L^p \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^q \longrightarrow 0$$

avec L^i libre de type fini pour $p < i \leq q$, L^p de type fini. De plus, $L\otimes A_n \simeq L'_n$ (isomorphisme de complexes) pour tout $n > 0$.

L'existence de $\text{"}\varprojlim\text{"}\, L'_n$ et $\varphi' = (\varphi'_n)_{n>0}$ comme en 1) et 2) est assurée par récurrence sur n par le lemme suivant :

Lemme 1. Soient R un anneau noethérien, I un idéal nilpotent, p un entier,

$$P' : 0 \longrightarrow P'^p \longrightarrow P'^{p+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P'^q \longrightarrow 0$$

un complexe de R/I-modules, où P'^i est un R/I-module projectif (resp. libre) pour $p < i \leq q$, P'^p est un R/I-module de type fini. Soient $\tilde{P} \in D^-(R)$ et $\varphi : \tilde{P}\overset{\mathbf{L}}{\otimes} R/I \longrightarrow P'$ un morphisme dans $D^-(R/I)$ tel que $\tau_{\geq p}(\varphi)$ soit un isomorphisme. Alors il existe :

a) un complexe de R-modules $P : 0 \longrightarrow P^p \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^q \longrightarrow 0$, où P^i est projectif (resp. libre) de type fini pour $p < i \leq q$, P^p de type fini

b) un isomorphisme ψ dans $D^-(R)$, $\psi : \tilde{P} \longrightarrow P$

c) un isomorphisme de complexes $h : P\otimes_R R/I \longrightarrow P'$ tel que dans $D(R/I)$ le diagramme d'isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\geq p}(\tilde{P}\overset{\mathbf{L}}{\otimes} R/I) & \xrightarrow{\tau_{\geq p}(\psi\overset{\mathbf{L}}{\otimes} 1_{R/I})} & P\otimes R/I \\ & {\scriptstyle\tau_{\geq p}(\varphi)}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle h} & \\ & P' & \end{array}$$

soit commutatif.

Avant de démontrer ce lemme, montrons comment il s'applique à la situation ci-dessus.

Supposons construit (L'_i, φ'_i) pour $i = 1,\dots,n$ et appliquons le lemme 1 à : $R = A_{n+1}$, $I = m^n/m^{n+1}$, $P' = L'_n$, $\widetilde{P} = L_{n+1}$, $\varphi : L_{n+1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_n \longrightarrow L'_n$, $\varphi = \varphi_n'^{-1} \circ \psi_n$. Il existe $(L'_{n+1}, \varphi'_{n+1})$, avec $L'_{n+1} : 0 \longrightarrow L'^p_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L'^q_{n+1} \longrightarrow 0$ dans $D(A_{n+1})$, L'^i_{n+1} libre de type fini pour $p < i \leq q$, L'^p_{n+1} de type fini, $\varphi'_{n+1} : L'_{n+1} \longrightarrow L_{n+1}$ tel que le système $(L'_i, \varphi'_i)_{i=1,\dots,n+1}$ vérifie les conditions 1) et 2).

Démonstration du lemme :

En fait, on va reprendre la démonstration de [3] (page 474 jusqu'à la fin).

a) On peut supposer que $\widetilde{P} \in D^-_{\mathrm{parf}}(R)$ et par suite que φ est un morphisme de complexes. De plus, on a $\tau^{\geq p}(\widetilde{P} \otimes R/I) = \tau^{\geq p}(\widetilde{P}) \otimes R/I$ (cf. lemmes 1 et 2 de II).

b) Soient $Q : \cdots\longrightarrow Q^p \longrightarrow P'^{p+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P' \longrightarrow 0$ un complexe de R/I-modules projectifs (resp. libres) tel que $Q \xrightarrow{\text{can}} \tau^{\geq p}(Q) = P'$, $\varphi' : \widetilde{P} \otimes R/I \longrightarrow Q$ un morphisme de complexes prolongeant φ, $\tau^{\geq p}(\varphi') = \tau^{\geq p}(\varphi)$. On peut supposer que φ' est surjectif : pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2. *Soient* R *un anneau*, I *un idéal*, $\bar{R} = R/I$.

i) *Soient* P, Q *deux* R-*modules*, $\bar{f} : P/IP \longrightarrow Q/IQ$ *un* $\bar{R}$-*homomorphisme. Si* P *est projectif, il existe* $f : P \longrightarrow Q$ *tel que* $f \otimes 1_{\bar{R}} = \bar{f}$.

ii) *Si* I *est nilpotent et si* $\bar{P}$ *est un* $\bar{R}$-*module projectif, il existe un* R-*module projectif* P *tel que* $P/IP = \bar{P}$.

iii) *Si* I *est nilpotent et si* $\bar{M} : \cdots\longrightarrow \bar{M}^{q-1} \longrightarrow \bar{M}^q \longrightarrow 0$ *est un complexe acyclique de* $\bar{R}$-*modules projectifs (resp. libres), il existe un complexe acyclique* $M : \cdots\longrightarrow M^{q-1} \longrightarrow M^q \longrightarrow 0$ *de* R-*modules projectifs (resp. libres) tel que* $M \otimes 1_{\bar{R}} = \bar{M}$.

Démonstration du lemme :

i) Soit $g : P \overset{\text{can}}{\twoheadrightarrow} P/IQ \xrightarrow{\bar{f}} Q/IQ$ Comme P est projectif, g se factorise de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & Q/IQ \\ & Q \arrow[u, "\text{can}"'] \end{tikzcd}$$

Par construction, $f \otimes 1_{\bar{R}} = \bar{f}$.

ii) On peut supposer I de carré nul. L'assertion est claire si $\bar{P}$ est libre (sans hypothèse d'ailleurs sur I). De toute façon, $\bar{P}$ est facteur direct d'un $\bar{R}$-module libre $\bar{E}$. Soit E un A-module libre tel que $E/IE = \bar{E}$. Le module $\bar{P}$ s'identifie à l'image d'un projecteur $\bar{e} : \bar{E} \to \bar{E}$. Il s'agit de voir que $\bar{e}$ se relève en un projecteur de E. Soit $e : E \to E$ tel que $e \otimes 1_{\bar{R}} = \bar{e}$, $\beta = e^2 - e \in \mathrm{Hom}_R(E, IE)$, β commute avec e et vérifie $\beta^2 = 0$. Montrons qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(E, IE)$, qui commute avec e, tel que

$$(e+\alpha)^2 = e+\alpha$$

ou encore puisque $\alpha^2 = 0$, $e^2 + 2\alpha e = e+\alpha$, i.e. $\beta = (1-2e)\alpha$. Comme $(1-2e)^2 = 1+4(e^2-e) = 1+4\beta$, $(1-2e)^2$ est inversible (d'inverse $(1-4\beta)$) et il en est de même de $(1-2e)$ (d'inverse $(1-2e)(1-4\beta)$), commutant avec e) et $\alpha = (1-2e)(1-4\beta)\beta$.

iii) Si $\bar{M} : \dashrightarrow \bar{M}^{q-1} \to \bar{M}^q \to 0$ est un complexe acyclique de $\bar{R}$-modules projectifs (resp. libres), $\bar{M}$ se décompose en suites exactes courtes scindées de $\bar{R}$-modules projectifs et en utilisant i) et ii), il est facile de construire un complexe acyclique $M : \dashrightarrow M^{q-1} \to M^q \to 0$ de R-modules projectifs (resp. libres) tel que $M \otimes 1_{\bar{R}} = \bar{M}$.

Appliquons le lemme 2 au mapping cone M' de $Q \xrightarrow{id} Q$.
Il existe un complexe M acyclique dont les composantes sont des R-modules projectifs (resp. libres) nuls en degré $> q$ tel que $M \otimes R/I = M'$. On remplace alors $\tilde{P}$ par $\tilde{P} \otimes M \in D^-_{parf}(R)$, φ par le morphisme surjectif de complexes $(\tilde{P} \otimes R/I) \otimes M' \to P'$ défini par φ sur le premier facteur et la projection canonique $M' \to Q \xrightarrow{can} \tau^{\geq p}(Q) = P'$ sur le second.

3) Soit $N' = \mathrm{Ker}(\varphi')$, N' est un complexe dont les composantes sont des R/I-modules projectifs nuls en degré $> q$. Comme $\tau^{\geq p}(\varphi')$ est un quasi-isomorphisme, la suite exacte longue :

$$\dashrightarrow 0 = H^{p-1}(Q) \to H^p(N') \to H^p(\tilde{P} \otimes R/I) \xrightarrow{\sim} H^p(Q) \dashrightarrow$$

montre que $\tau^{\geq p}(N')$ est un complexe borné acyclique dont les composantes non nulles sont des R/I-modules projectifs.

Par suite, il existe un complexe acyclique N de R-modules projectifs tel que $N \otimes R/I = \tau^{\geq p}(N')$. Le morphisme naturel

$$f_0 : N \otimes R/I \to \tau^{\geq p}(\tilde{P} \otimes R/I)$$

se relève en un morphisme injectif de complexes

$$g_o = (g_o^i)_{i\in\mathbb{Z}} : N\otimes R/I \longrightarrow \tilde{P}\otimes R/I$$

en prenant $g_o^i = f_o^i$ si $i > p$, $g_o^i = 0$ si $i < p$ et g_o^p la flèche composée $N^p\otimes R/I \xrightarrow{s} N'^p \hookrightarrow \tilde{P}^p\otimes R/I$, où s est une section de $N'^p \longrightarrow N'^p/\mathrm{Im}(N'^{p-1} \longrightarrow N'^p) = N^p\otimes R/I$. Le morphisme g_o est homotope à zéro, i.e. il existe $h_o = (h_o^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, avec $h_o^i : N^i\otimes R/I \longrightarrow \tilde{P}^{i-1}\otimes R/I$ tel que :

$$g_o = d_{\tilde{P}\otimes R/I}\circ h_o + h_o\circ d_{N\otimes R/I} \; .$$

Comme N^i est projectif, h_o^i se relève en $h^i : N^i \longrightarrow \tilde{P}^{i-1}$ et si $h = (h^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $g = d_{\tilde{P}}\circ h + h\circ d_N : N \longrightarrow \tilde{P}$ est un morphisme de complexes tel que $g\otimes 1_{R/I} = g_o$. Par suite g est injectif et $\mathrm{coker}\, g$ est un complexe dont les composantes sont des R-modules projectifs nuls en degré $> q$. Posons $P = \tau^{\geq p}(\mathrm{coker}\, g)$. Par construction, la suite

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{g} \tilde{P} \xrightarrow{\psi} \mathrm{coker}\, g \longrightarrow 0$$

est exacte et comme N est acyclique, ψ est un quasi-isomorphisme. Posons $\psi_o = \psi\otimes 1_{R/I}$, $P\otimes R/I = \tau^{\geq p}(\mathrm{coker}\, g_o)$ et la suite

$$0 \longrightarrow N\otimes R/I \xrightarrow{g_o} \tau^{\geq p}(\tilde{P}\otimes R/I) \xrightarrow{\tau^{\geq p}(\psi_o)} P\otimes R/I \longrightarrow 0$$

est exacte, $P\otimes R/I$ s'identifie à P', $\tau^{\geq p}(\psi_o)$ à $\tau^{\geq p}(\varphi')$. De plus, les composantes de P , en degré $> p$, sont libres si celles de P' le sont.

Théorème 2. *Soient* "$\varprojlim$" $K_\lambda \in \mathrm{Pro}\, D^b_{coh}(A)$ *et* p *un entier tel que*

a) "$\varprojlim$" $K_\alpha \xrightarrow[\sim]{can} \tau^{\geq p}($"$\varprojlim$" $K_\alpha)$

b) *pour tout* $n > 0$, "$\varprojlim$" $\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbf{L}}{\otimes} A_n) \in \widetilde{D^b_{coh}(A_n)}$.

Il existe $L \in D^b_{coh}(A)$ *et une flèche* $u = (u_\alpha)$ *dans* $\mathrm{Pro}\, D(A)$:

$$L \xrightarrow{u} \text{"}\varprojlim_{\alpha}\text{"}\; K_\alpha$$

tels que la flèche u_n , *induite par* u *pour* $n > 0$:

$$\tau^{\geq p}(L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} A_n) \xrightarrow{u_n} \text{"}\varprojlim\text{"}\; \tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbf{L}}{\otimes} A_n)$$

soit un isomorphisme. *De plus* $H^*(L) \xrightarrow{\varprojlim u_\alpha} \varprojlim_{\alpha} H^*(K_\alpha)$ *est un isomorphisme*.

<u>Démonstration</u> :

On peut supposer que les complexes K_α sont de la forme :

$$0 \longrightarrow K_\alpha^p \longrightarrow K_\alpha^{p+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_\alpha^b \longrightarrow 0$$

avec b indépendant de α, K_α^i libre de type fini pour $i > p$ K^p de type fini. De sorte que $\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{L}{\otimes} A_n) = K_\alpha \otimes A_n$.

Les morphismes canoniques de $\mathrm{Pro}\ D^b(A)$:

$$K_\alpha \longrightarrow \text{"}\varprojlim_n\text{"}\ K_\alpha \otimes A_n$$

définissent dans $\mathrm{Pro}(\mathrm{Pro}\ D^b(A))$ le morphisme tout aussi canonique :

$$\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ K_\alpha \longrightarrow \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ \text{"}\varprojlim_n\text{"}\ K_\alpha \otimes A_n = \text{"}\varprojlim_n\text{"}\ \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ K_\alpha \otimes A_n\ .$$

Comme $\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ K_\alpha \otimes A_n \in D^b_{coh}(A_n)$ pour $n > 0$, il existe $L_n \in D^b_{coh}(A_n)$ tel que $L_n = \tau^{\geq p}(L_n)$ et un isomorphisme dans $\mathrm{Pro}\ D^b(A_n)$

$$\varphi_n : L_n \xrightarrow{\sim} \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ K_\alpha \otimes A_n\ .$$

Soit ψ_n l'isomorphisme de $D^b(A_n)$ défini par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\geq p}(L_{n+1} \overset{L}{\otimes} A_n) \arrow[r, "\tau^{\geq p}(\varphi_{n+1} \overset{L}{\otimes} 1_{A_n})"] \arrow[d, "\psi_n"'] & \tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ (K_\alpha \otimes A_{n+1}) \overset{L}{\otimes} A_n) \arrow[d, equal] \\
L^n \arrow[r, "\varphi_n"] & \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ K_\alpha \otimes A_n\ .
\end{tikzcd}$$

Les couples (L_n, ψ_n) définissent un élément $\text{"}\varprojlim\text{"}\ L_n$ de $\mathrm{Pro}\ D^b(A)^-$ qui vérifient les conditions a) et b) de la proposition 1. Il existe donc $L \in D^b_{coh}(A)$ que l'on peut prendre de la forme :

$$0 \longrightarrow L^p \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^b \longrightarrow 0$$

avec L^i libre de type fini si $i > p$ et L^p de type fini, une flèche $v : L \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\ L_n$ dans $\mathrm{Pro}\ D^b(A)$ tels que pour $n > 0$, la flèche $v_n : L \otimes A_n \longrightarrow L_n$ induite par v dans $D(A_n)$ soit un isomorphisme. On construit $u = (u_\alpha) : L \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha$ de la manière suivante :

pour $n > 0$ et α , regardons la flèche composée dans $D^-(A_n)$:

$$u_{\alpha,n} : L \otimes A_n \xrightarrow{v_n} L_n \xrightarrow{\varphi_n} \text{"}\varprojlim_\beta\text{"}\ K_\beta \otimes A_n \xrightarrow{\mathrm{can}} K_\alpha \otimes A_n\ .$$

Par construction, le système $(u_{\alpha,n})_{n>0}$ vérifie :

$$u_{\alpha,n+1}\otimes 1_{A_n} = u_{\alpha,n} .$$

Lemme 1. Soient R un anneau, I un idéal nilpotent, $\bar{R} = R/I$, $L \in D^-_{parf}(R)$, $K \in D^-(R)$, $\bar{u} : \bar{L} = L\otimes\bar{R} \longrightarrow \bar{K} = K\otimes\bar{R}$ un morphisme de complexes, $\tilde{u} : L \longrightarrow K$ une flèche dans $D^-(R)$ telle que $\tilde{u}\otimes 1_{\bar{R}} = \bar{u}$ dans $D^-(\bar{R})$. Il existe un morphisme de complexes $u : L \longrightarrow K$ tel que $u = \tilde{u}$ dans $D^-(R)$ et $u\otimes 1_{\bar{R}} = \bar{u}$ (comme morphismes de complexes).

Démonstration :

Comme $L \in D^-_{parf}(R)$, on peut supposer que $\tilde{u}$ est un morphisme de complexes et que de plus $\bar{u}-\tilde{u}\otimes 1_{\bar{R}} = \bar{\gamma}$ est une homotopie de $\bar{L}$ dans $\bar{K}$ (en effet si $\bar{s}$ est un quasi-isomorphisme dans $D^-_{parf}(R)$, il existe des quasi-isomorphismes $\bar{t},\bar{u}$ tels que $\bar{s}.\bar{t}$ et $\bar{u}.\bar{s}$ soient homotopes à l'identité).

Comme $L \in D^-_{parf}(R)$, l'homotopie $\bar{\gamma} : \bar{L} \longrightarrow \bar{K}$ se relève en une homotopie $\gamma : L \longrightarrow K$ telle que $\gamma\otimes 1_{\bar{R}} = \bar{\gamma}$ et $\tilde{u}+\gamma$ relève $\bar{u}$.

Appliquons ce lemme de la manière suivante :
si $P \in D^-_{parf}(A)$ vérifie $P \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq p}(P) = L$, $P\otimes A_n \simeq L\otimes A_n$ pour tout $n > 0$ et si $\widetilde{u_{\alpha,n}} : P\otimes A_n \simeq L\otimes A_n \xrightarrow{u_{\alpha,n}} K_{\alpha,n}$ est la flèche naturelle composée, le système $(\widetilde{u_{\alpha,n}})_n$ vérifie :

$$\widetilde{u_{\alpha,n+1}}\otimes 1_{A_n} = \widetilde{u_{\alpha,n}} \quad \text{dans} \quad D^-(A_n) .$$

Grâce au lemme 1, on construit de proche en proche un système projectif de morphismes de complexes

$$v_{\alpha,n} : P\otimes A_n \longrightarrow K_\alpha\otimes A_n$$

tel que $\widetilde{u_{\alpha,n}} = v_{\alpha,n}$ dans $D^-(A_n)$ et $v_{\alpha,n+1}\otimes 1_{A_n} = v_{\alpha,n}$ comme morphismes de complexes.

En passant à la limite projective, on définit un morphisme de complexes :

$$v_\alpha = \varprojlim_n v_{\alpha,n} : P \longrightarrow K_\alpha$$

qui induit un morphisme de complexes $u_\alpha = \tau^{\geq p}(v_\alpha) : L \longrightarrow K_\alpha$. De plus, pour tout $n > 0$, on a dans $D(A_n)$, $v_\alpha \otimes 1_{A_n} = v_{\alpha,n} = \widetilde{u_{\alpha,n}}$ et $u_\alpha \otimes 1_{A_n} = u_{\alpha,n}$.

<u>Lemme</u> 2. <u>Soient</u> $w : L \longrightarrow K$ <u>un morphisme de complexes de longueur finie de A-modules de type fini. Si pour tout</u> $n > 0$, $w \otimes 1_{A_n}$ <u>est une homotopie</u>, w <u>est une homotopie</u>.

<u>Démonstration</u> :

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{Z}$ telles que les composantes non nulles de L et K soient en degré dans $[a,b]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) w est une homotopie ;

ii) il existe des flèches $\varphi^p : L^p \longrightarrow K^{p-1}$ pour $p \in [a,b]$ telles que

$$w^p = \varphi^{p+1} \circ d_L + d_K \circ \varphi^p$$

iii) $w = (w^p)_{p\in[a,b]}$ est dans l'image de l'application canonique

$$\prod_{p=a}^{b} \mathrm{Hom}(L^p,K^{p-1}) \xrightarrow{\Delta} \prod_{p=a}^{b} \mathrm{Hom}(L^p,K^p) \text{ définie par } \Delta((\varphi^p)_p) = (d_K\varphi^p + d_L\varphi^{p+1})_p .$$

iv) Pour tout $n > 0$, $w^p \otimes 1_{A_n} \in \mathrm{Im}\, \Delta_n$, où Δ_n est l'application

$$\prod_{p=a}^{b} \mathrm{Hom}(L^p \otimes A_n, K^{p-1} \otimes A_n) \longrightarrow \prod_{p=a}^{b} (\mathrm{Hom}(L^p \otimes A_n, K^p \otimes A_n)$$

définie comme en iii), en effet $w = \varprojlim (w^p \otimes 1_{A_n})$ et

$$\varprojlim \mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathrm{Im}(\Delta) .$$

D'où le lemme.

Ce lemme montre que le morphisme $u_\alpha : L \longrightarrow K_\alpha$ construit ci-dessus est unique à homotopie près. Par suite si $\beta \geq \alpha$, $\pi_{\beta\alpha} \circ u_\alpha = u_\beta$ (modulo homotopie) et le système (u_α) définit une flèche

$$u : L \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha$$

telle que $u \otimes 1_{A_n}$ soit un isomorphisme dans $\mathrm{Pro}\, D^b(A_n)$. De plus, par Artin-Rees, on a les isomorphismes suivants :

$$\begin{tikzcd}
H^*(L) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \varprojlim_n H^*(L \otimes A_n) \arrow[r, "\sim"] & \varprojlim_n \varprojlim_\alpha H^*(K_\alpha \otimes A_n) \arrow[d, equal] \\
\varprojlim_\alpha H^*(K_\alpha) \arrow[rr, "="] & & \varprojlim_\alpha \varprojlim_n H^*(K_\alpha \otimes A_n) .
\end{tikzcd}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

IV - Applications

Soient A un anneau noethérien, I un idéal de A, $S = \mathrm{Spec}\, A$, $U = S - V(I)$, $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie I-adique et comme précédemment $A_n = A/I^n$, pour $n > 0$.

Théorème 3. On suppose que $A = \hat{A}$. *Soient* $\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\, K_\alpha \in \mathrm{Pro}\, D^b_{coh}(A)$, $H^* = \varprojlim_\alpha H^*(K_\alpha)$ *et* p *un entier tel que* $\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\, K_\alpha \xrightarrow[\sim]{can} \tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\, K_\alpha)$. *On suppose de plus que :*

1) *pour tout* $n > 0$, $\text{"}\varprojlim\text{"}\, \tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{L}{\otimes} A_n) \in \widetilde{D^b_{coh}(A_n)}$

2) *la flèche naturelle dans* $\mathrm{Pro}(A) : H^* \longrightarrow \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\, H^*(K_\alpha)$ *est un isomorphisme sur* U.

Alors $\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha \in \widetilde{D^b_{coh}(A)}$.

Démonstration :

On construit un couple (L,u) avec $L \in D^b_{coh}(A)$, $u = (u_\alpha) : L \xrightarrow{\sim} \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\, K_\alpha$ dans $\mathrm{Pro}\, D^b(A)$ en procédant comme suit :

a) L'hypothèse 1 et le théorème 2 assurent l'existence d'un couple (L,u) avec $L \in D^b_{coh}(A)$, $u : L \longrightarrow \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\, K_\alpha$ tels que pour $n > 0$:

$$u_n = \tau^{\geq p}(u \overset{L}{\otimes} 1_{A_n}) : \tau^{\geq p}(L \overset{L}{\otimes} A_n) \xrightarrow{\sim} \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\, \tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{L}{\otimes} A_n) .$$

De plus $H^*(L) \xrightarrow{\varprojlim u_\alpha} H^*$ est un isomorphisme. En particulier, $L \simeq \tau^{\geq p}(L)$.

b) La flèche $H^*(u) : H^*(L) \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\, H^*(K_\alpha)$, induite par u, est un isomorphisme sur U (on utilise a) et l'hypothèse 2)).

c) Si $MC(\alpha)$ désigne le mapping cone de u_α, $H^i(MC(\alpha)) = 0$ pour $i \leq p-2$ et $\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\, MC(\alpha) \in \mathrm{Pro}\, D^b_{coh}(A)$. De plus les assertions suivantes sont équivalentes :

c.1) $u : L \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_\alpha$ est un isomorphisme (resp. induit un isomorphisme $H^*(u) : H^*(L) \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\, H^*(K_\alpha)$ sur U).

c.2) $\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^*(MC(\alpha))$ est essentiellement nul (resp. est essentiellement nul sur U).

En effet, u est un isomorphisme si et seulement si $H^*(u)$ l'est, ou encore si $\text{"}\varprojlim\text{"}\, \mathcal{H}^*(MC(\alpha))$ est essentiellement nul. De même, si l'on se restreint à U.

d) Il nous suffit donc de montrer que $\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^i(MC(\alpha))$ est essentiellement nul pour tout $i \geq p-1$. Soit i un entier, $i \geq p-1$.

d.1) On sait déjà que $\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^i(MC(\alpha))$ est essentiellement nul sur U (appliquer c) et b)).

d.2) Soit α, montrons qu'il existe $\beta \geq \alpha$ tel que la flèche de transition : $H^i(MC(\beta)) \xrightarrow{\pi^i_{\beta\alpha}} H^i(MC(\alpha))$ soit nulle, ou encore si $T_\beta = \mathrm{Im}\, \pi^i_{\beta\alpha}$, que $T_\beta = 0$. Par d.1), il existe $\beta_0 \geq \alpha$ tel que T_{β_0} soit nul sur U, i.e. il existe $r_0 > 0$ tel que $I^{r_0} T_\beta \subset I^{r_0} T_{\beta_0} = 0$ pour $\beta \geq \beta_0$.

d.3) Pour $n > 0$, posons $R_n = \mathrm{Ker}[H^i(MC(\alpha)) \longrightarrow H^i(MC(\alpha) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_n)]$. Comme $MC(\alpha) \in D^b_{coh}(A)$, R_n définit une filtration I-bonne de $H^i(MC(\alpha))$. Il existe donc $n_0 > 0$ tel que $R_{n_0+r} = I^r R_{n_0}$ pour $r \geq 0$. De plus, par Artin-Rees, il existe $r_1 \geq r_0$ tel que, pour $\beta \geq \beta_0$, on ait si $s = n_0 + r_1$:

$$R_s \cap T_\beta \subset R_s \cap T_{\beta_0} = I^{r_1} R_{n_0} \cap T_{\beta_0} \subset I^{r_0} T_{\beta_0} = 0$$

i.e. $T_\beta \subset H^i(MC(\alpha))/R_s \hookrightarrow H^i(MC(\alpha) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_s)$ pour $\beta \geq \beta_0$.

D'autre part, par construction, on a aussi, pour $\beta \geq \beta_0$

$$T_\beta \subset \mathrm{Im}(H^i(MC(\beta) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_s) \longrightarrow H^i(MC(\alpha) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_s)) .$$

Si $i \geq p$, par a), $\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^i(MC(\lambda) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_s)$ est essentiellement nul et $T_\beta = 0$ pour $\beta >> 0$.

Si $i = p-1$, $H^{p-1}(MC(\alpha)) = \mathrm{Ker}(H^p(L) \longrightarrow H^p(K_\alpha))$ et par suite pour $\beta \geq \alpha$, $H^{p-1}(MC(\beta)) \subset H^{p-1}(MC(\alpha))$. Posons $N_\beta = H^{p-1}(MC(\beta))$, pour $\beta \geq \alpha$. Il existe $\beta_1 \geq \alpha$ tel que $N_{\beta|U} = 0$ pour $\beta \geq \beta_1$ et il existe un entier n_1 tel que $I^{n_1} N_{\beta_1} = 0$, par suite $I^{n_1}N_\beta = 0$ pour $\beta \geq \beta_1$. Si $S_n = \mathrm{Ker}\ H^p(L) \longrightarrow H^p(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_n)$, on voit comme précédemment qu'il existe $s \geq n_1$ tel que

$$S_s \cap N_\beta \subset S_s \cap N_{\beta_1} \subseteq I^{n_1} N_{\beta_1} = 0$$

et $N_\beta \subset H^p(L)|S_s \hookrightarrow H^p(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_s)$ pour $\beta \geq \beta_1$. Par construction, on a aussi $N_\beta \subset \mathrm{Ker}[H^p(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_s) \longrightarrow H^p(K_\beta \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_s)$ et $N_\beta = 0$ pour $\beta >> 0$.

<u>Théorème</u> 4. <u>Soient</u> $\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ K_\alpha \in \mathrm{Pro}\ D^b_{coh}(A)$, p <u>un entier tel que</u> $\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha \simeq \tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha)$, $\rho : S' \longrightarrow S$ <u>un morphisme propre tel que</u> ρ <u>soit un isomorphisme sur</u> U , I <u>un idéal définissant le fermé</u> S-U, <u>vérifiant</u> :

1) <u>pour tout</u> $n > 0$, $\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ \tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_n) \in \widetilde{D^b_{coh}(A_n)}$

2) <u>si</u> A' <u>est la catégorie des</u> $\mathcal{O}_{S'}$-<u>modules</u>, $H^*(\tau^{\geq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'})) \in \widetilde{A}'$.

<u>Alors</u> $\text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ K_\alpha \in D^b_{coh}(A)$.

<u>Remarque</u>. La condition 2 signifie encore que, pour tout ouvert affine Spec B de S', $\text{"}\varprojlim\text{"}\ \tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} B) \in \widetilde{D^b_{coh}(B)}$ (cf. corollaire 1 de la proposition 1 de I et théorème 1).

<u>Démonstration</u> :

Supposons tout d'abord que $A = \hat{A}$ et montrons le théorème dans ce cas :

a) L'hypothèse 1 et le théorème 2 assurent l'existence d'un couple (L,u), $L \in D^b_{coh}(A)$, $u : L \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\ K_\alpha$ tels que pour tout $n > 0$, la flèche induite par u :

$$\tau^{\geq p}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_n) \xrightarrow{u_n} \text{"}\varprojlim\text{"}\ \tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} A_n)$$

soit un isomorphisme. De plus si $u = (u_\alpha)$, le morphisme

$$H^*(L) \xrightarrow{\varprojlim u_\alpha} \varprojlim_\alpha H^*(K_\alpha)$$

est un isomorphisme. Le théorème 3 montre que, dans ces conditions, il suffit de vérifier que la flèche dans Pro(A) :

$$H^*(u) : H^*(L) \longrightarrow \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ H^*(K_\alpha)$$

est un isomorphisme sur U .

b) Si $S'_n = S' \times V(I^n)$, pour $n > 0$, $\tau^{\geq p}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'_n}) \simeq \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ \tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'_n})$ et $H^*(\tau^{\geq p}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'_n})) = \varprojlim_\alpha H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'_n}))$.

c) Si $\hat{S}'$ est le complété formel de S' le long de $V(I\mathcal{O}_{S'})$, on a :

$$\begin{aligned} H^*(\tau^{\geq p}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{\hat{S}'})) &= \varprojlim_n H^*(\tau^{\geq p}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'_n})) \\ &\simeq \varprojlim_n \varprojlim_\alpha H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'_n})) \qquad \text{par b)} \\ &\simeq \varprojlim_\alpha \varprojlim_n H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'_n})) \\ &\simeq \varprojlim_\alpha H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{\hat{S}'})) . \end{aligned}$$

d) L'hypothèse 2) entraîne que :

$$\varprojlim_\alpha H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'})) \xrightarrow{\sim} \text{"}\varprojlim\text{"}\ H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'}))$$

$$\varprojlim_\alpha H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{\hat{S}'})) \xrightarrow{\sim} \text{"}\varprojlim\text{"}\ H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{\hat{S}'}))$$

et que $\varprojlim_\alpha H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'}))$ est un $\mathcal{O}_{S'}$-module de type fini.

e) On a : $\widehat{H^*(\tau^{\geq p}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'}))} = H^*(\tau^{\geq p}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{\hat{S}'}))$ où le premier module désigne le complété de $H^*(\tau^{\geq p}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'}))$ pour la topologie $I\mathcal{O}_{S'}$-adique. Comme ρ est propre et A est complet, on a :

$$\begin{aligned} \rho_*(H^*(\tau^{\geq p}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'}))) &= \hat{\rho}_*(H^*(\tau^{\geq p}(L \otimes \mathcal{O}_{\hat{S}'}))) \\ &\simeq \hat{\rho}_*(\varprojlim_\alpha H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{\hat{S}'}))) \\ &\simeq \rho_*(\varprojlim_\alpha H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'}))) \\ &\simeq \rho_*(\text{"}\varprojlim\text{"}\ H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'}))) \qquad \text{par d)} \end{aligned}$$

f) Comme ρ est un isomorphisme sur U,

$$H^*(L) \longrightarrow \text{"}\varprojlim_\alpha\text{"}\ H^*(K_\alpha)$$

est un isomorphisme sur U. Ce qui termine la démonstration du théorème lorsque $A = \hat{A}$.

Dans le cas général, remarquons tout d'abord que les hypothèses 1) et 2) sont conservées lorsqu'on effectue le changement de base $\operatorname{Spec} \hat{A} \longrightarrow S$ (corollaire du théorème 1) et par conséquent

$$(*) \quad \underset{\substack{\longleftarrow \\ \alpha}}{\text{"lim"}} \, (K_\alpha \otimes \hat{A}) \in \widetilde{D^b_{coh}(\hat{A})} .$$

D'autre part, si on pose $H' = \varprojlim H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'}))$, H' est un $\mathcal{O}_{S'}$-module cohérent (théorème 1), et $H' \xrightarrow[\sim]{can} \underset{\longleftarrow}{\text{"lim"}} \, H^*(\tau^{\geq p}(K_\alpha \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'}))$. En particulier :

$$(**) \quad H'_{|U} \xrightarrow{\sim} \underset{\longleftarrow}{\text{"lim"}} \, H^*(K_\alpha)_{|U} .$$

Les relations $(*)$ et $(**)$, la proposition qui suit montrent que $\underset{\longleftarrow}{\text{"lim"}} \, H^*(K_\alpha) \in \widetilde{A}$, i.e. $\underset{\longleftarrow}{\text{"lim"}} \, K_\alpha \in \widetilde{D^b_{coh}(A)}$.

<u>Proposition 1. Soient</u> $\underset{\longleftarrow}{\text{"lim"}} \, M_\alpha \in \operatorname{Pro}(A)$, <u>où</u> M_α <u>est un</u> A-<u>module de type fini pour</u> $\alpha \gg 0$, <u>tel que</u> :

1) $\underset{\longleftarrow}{\text{"lim"}} \, M_\alpha \otimes \hat{A}$ <u>est isomorphe à un</u> $\hat{A}$-<u>module</u>

2) <u>il existe un</u> $\mathcal{O}_U$-<u>module</u> M <u>et un isomorphisme</u> $\pi : M \xrightarrow{\sim} \underset{\longleftarrow}{\text{"lim"}} \, M_{\alpha|U}$.

<u>Alors</u> $\underset{\longleftarrow}{\text{"lim"}} \, M_\alpha \in \widetilde{A}$.

<u>Démonstration</u> :

Soient $\pi_{\beta\alpha} : M_\beta \longrightarrow M_\alpha$, pour $\beta \geq \alpha$, les flèches de transition de $\underset{\longleftarrow}{\text{"lim"}} \, M_\alpha$. Soient $\mathcal{M}$ un $\hat{A}$-module (nécessairement de type fini) et $q = (q_\alpha)_{\alpha \gg 0}$ un isomorphisme

$$q : \underset{\longleftarrow}{\text{"lim"}} \, M_\alpha \otimes_A \hat{A} \longrightarrow \mathcal{M} .$$

Il existe $\alpha_0, q_{\alpha_0} : M_{\alpha_0} \otimes_A \hat{A} \longrightarrow \mathcal{M}$ tel que $q_\alpha = q_{\alpha_0} \circ (\pi_{\alpha\alpha_0} \otimes 1_{\hat{A}})$, pour $\alpha \geq \alpha_0$. Dans un voisinage ouvert V' de $V(I)$, il existe un $\mathcal{O}_{V'}$-module de type fini M', tel que $M' \otimes \hat{A} \simeq \mathcal{M}$ et un homomorphisme

$$p_{\alpha_0} : M_{\alpha_0|V'} \longrightarrow M'$$

tel que $q_{\alpha_0} = p_{\alpha_0} \otimes 1_{\hat{A}}$. Posons $p_\alpha = p_{\alpha_0} \circ \pi_{\alpha\alpha_0}$, pour $\alpha \geq \alpha_0$, $p = (p_\alpha)_{\alpha \geq 0}$: $\underset{\longleftarrow}{\text{"lim"}} \, M_{\alpha|V'} \longrightarrow M'$ et φ la flèche composée définie sur $U \cap V'$:

$$\varphi : M_{|V' \cap U} \xrightarrow{\pi} \underset{\longleftarrow}{\text{"lim"}} \, M_{\alpha|V' \cap U} \xrightarrow{p} M'_{|U \cap V'} .$$

Comme π est un isomorphisme sur U, $M \hookrightarrow M_{\alpha|U}$ pour $\alpha \gg 0$ et M est localement de type fini.

Si x est un point de U, générisation d'un point de $V(I)$, φ est un isomorphisme au point x (en effet par le corollaire 1 du théorème 1, p est un isomorphisme en tout point de $V(I)$ et a fortiori en x) et φ est un isomorphisme sur un ouvert W de $U \cap V'$ contenant toutes les générisations des points de $V(I)$. Si $F = U - W$, F est fermé dans S. Posons $V = (S-F) \cap V'$, c'est un ouvert de S contenant $V(I)$ tel que $U \cap V \subseteq W$.

Sur U, par hypothèse, $M \xrightarrow[\sim]{\pi} \text{"}\varprojlim\text{"}\, M_{\alpha|U}$.

Sur V, $\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_{\alpha|V} \xrightarrow[\sim]{p|V} M'_{|V}$: en effet, $p_\alpha : M_{\alpha|V} \longrightarrow M'_{|V}$ est surjectif pour $\alpha >> 0$ (c'est vrai sur $V(I)$, car $\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\alpha \otimes \hat{A} \overset{g}{\simeq} M \otimes_A \hat{A}$ et c'est vrai sur $U \cap V$ car $p_{|U\cap V} : \text{"}\varprojlim\text{"}\, M_{\alpha|U\cap V} \xrightarrow[\sim]{\pi^{-1}} M_{|U\cap V} \xrightarrow[\sim]{\varphi} M'_{|U\cap V}$). Un argument identique montre que le système $(\mathrm{Ker}(M_{\alpha|V}) \longrightarrow M'_{|V})_\alpha$ est essentiellement nul.

Le corollaire 1 de la proposition 1 du paragraphe 1 montre que $\text{"}\varprojlim\text{"}\, M_\alpha \in \tilde{A}$.

V - Dualité entre pro-objets et Ind-objets

(1) La catégorie Ind(A).

Soit A une catégorie. La catégorie $\mathrm{Ind}(A)$ est définie de la façon suivante:

- les objets sont les systèmes inductifs $(M_i)_{i\in I}$ d'objets de A , où I est un ensemble d'indices préordonné filtrant variable. On note $\text{"}\varprojlim_{i\in I}\text{"}\, M_i$ l'objet de $\mathrm{Ind}(A)$ correspondant.

- Si $\text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"}\, A_i$ et $\text{"}\varinjlim_{j\in J}\text{"}\, B_j$ sont deux objets de $\mathrm{Ind}(A)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(A)}(\text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"}\, A_i, \text{"}\varinjlim_{j\in J}\text{"}\, B_j) = \varprojlim_{i}\, \varinjlim_{j}\, \mathrm{Hom}(A_i,B_j) \ .$$

On a un foncteur pleinement fidèle $A \longrightarrow \mathrm{Ind}(A)$ qui à un objet M de A associe le Ind-objet constant $(M_i)_{i\in I}$, I réduit à un élément i , $M_i = M$. Ceci permet d'identifier A à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}(A)$. Si les limites inductives existent dans A , on a de plus un foncteur naturel

$$\varinjlim : \mathrm{Ind}(A) \longrightarrow A \ .$$

défini par $\varinjlim(\text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"}\, A_i) = \varinjlim_{i\in I} A_i$. De plus, si $\text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"}\, A_i \in \mathrm{Ind}(A)$ et si $A = \varinjlim A_i$, on a une flèche naturelle dans $\mathrm{Ind}(A)$:

$$\text{"}\varinjlim\text{"}\, A_i \longrightarrow A \ .$$

Soit $\text{"}\varinjlim\text{"}\, A_i \in \mathrm{Ind}\, A$, on dit que $\text{"}\varinjlim\text{"}\, A_i$ est essentiellement nul si pour tout i il existe $i' \geq i$ tel que la flèche de transition $A_i \longrightarrow A_{i'}$ soit nulle.

Comme pour les pro-objets, on a le critère suivant :

<u>Proposition</u> 10. <u>Soit</u> A <u>une catégorie abélienne</u>. <u>Soient</u> $\text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"}\, M_i \in \mathrm{Ind}(A)$ <u>et</u> $M \in A$. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1) $M \simeq \text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"}\, M_i$

2) <u>il existe</u> $\psi = (\psi_i) : \text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"}\, M_i \longrightarrow M$ <u>tel que</u> M <u>soit quotient direct par</u> ψ_i <u>de</u> M_i <u>et</u> $\text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"}\, \mathrm{Ker}\, \psi_i$ <u>est essentiellement nul</u>

3) <u>il existe</u> $\varphi = (\varphi_i) : M \longrightarrow "\varinjlim_{i\in I}" M_i$ <u>tel que</u> M <u>soit facteur direct par</u> φ_i <u>de</u> M_i, <u>pour</u> $i \gg 0$, <u>et</u> $"\varinjlim_{i\in I, i\gg 0}" \operatorname{Coker} \varphi_i$ <u>est essentiellement nul</u>. <u>De plus s'il en est ainsi,</u> $\varinjlim_{i\in I} M_i$ <u>existe dans</u> A <u>et</u> $M \simeq \varinjlim_{i\in I} M_i$.

(2) <u>Dualité</u>.

Revenons au cas où A est la catégorie des modules sur un anneau noethérien A et $D(A)$ sa catégorie dérivée.

Si $L \in D(A)$, on note $L^* = \operatorname{Hom}^{\bullet}_{D(A)}(L,A)$ en considérant A comme un complexe concentré en degré 0.

Si $"\varprojlim_{\alpha\in\Lambda}" K_\alpha \in \operatorname{Pro} D(A)$, $(K^*_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ définit un ind-objet $"\varinjlim_{\alpha\in\Lambda}" K^*_\alpha$ que nous appellerons encore le "dual" de $"\varprojlim_{\alpha\in\Lambda}" K_\alpha$. De même si $"\varinjlim_{i\in I}" L_i \in \operatorname{Ind} D(A)$, $(L^*_i)_{i\in I}$ définit un pro-objet $"\varprojlim_{i\in I}" L^*_i$ aussi dénommé "dual" de $"\varinjlim" L_i$.

Si $"\varprojlim_{\alpha}" K_\alpha \in \operatorname{Pro} D^-_{parf}(A)$, $"\varinjlim_{\alpha}" K^*_\alpha$ Ind $D^+_{parf}(A)$ et le dual de $"\varinjlim_{\alpha}" K^*_\alpha$ s'identifie à $"\varprojlim_{\alpha}" K_\alpha$ et etc...

<u>Proposition</u> 11. <u>Soient</u> $"\varinjlim_{i\in I}" L_i \in \operatorname{Ind} D^+_{parf}(A)$ <u>et</u> $"\varprojlim_{i\in I}" L^*_i$ <u>son dual dans</u> $\operatorname{Pro} D^-_{parf}(A)$. <u>Pour tout</u> A-<u>module</u> M (<u>considéré comme un complexe concentré en degré</u> 0) <u>et tout entier</u> p , <u>on a</u> :

$$\operatorname{Hom}^{\bullet}(\tau^{\geq p}("\varprojlim" L^*_i),M) = \tau_{\leq p}("\varinjlim_{i\in I}" L_i \otimes M) .$$

<u>Démonstration</u> :

On a tout d'abord

$$\operatorname{Hom}^{\bullet}(\tau^{\geq p}("\varprojlim_{i\in I}" L^*_i),M) = \operatorname{Hom}^{\bullet}("\varprojlim_{i\in I}" \tau^{\geq p}(L^*_i),M) = "\varinjlim_{i\in I}" \operatorname{Hom}^{\bullet}(\tau^{\geq p}(L^*_i),M)$$

et il suffit de démontrer le lemme pour un objet constant $L \in D^+_{parf}(A)$. Si L est de la forme : $0 \longrightarrow L^a \xrightarrow{\delta^a} L^{a+1} \longrightarrow\!\!--\!\!\longrightarrow L^p \xrightarrow{\delta^p} L^{p+1} \longrightarrow ---$ posons $L^{-i} = \operatorname{Hom}_A(L^i,A)$ pour tout i et L^* est de la forme :

$$--\!\!\longrightarrow L^{-p-1} \xrightarrow{d^{-p-1}} L^{-p} \longrightarrow\!\!--\!\!\longrightarrow L^{-a-1} \xrightarrow{d^{-a-1}} L^{-a} \longrightarrow 0 .$$

Pour tout A-module M , on a :

$$\mathrm{Hom}^{\cdot}(\tau^{\geq p}(L^*),M) = (0 \to L^a \otimes M \to L^{a+1}\otimes M \to \cdots \to L^{p-1}\otimes M \to \mathrm{Hom}(\mathrm{coker}\ d^{-p-1},M) \to 0)$$

$$\tau_{\leq p}(L\otimes M) = (0 \to L^a\otimes M \to L^{a+1}\otimes M \to \cdots \to L^{p-1}\otimes M \to \mathrm{Ker}(\delta^p\otimes 1_M) \to 0).$$

Comme la suite : $L^{-p-1} \to L^{-p} \to \mathrm{coker}\ d^{-p-1} \to 0$ est exacte, il en est de même de la suite :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{coker}\ d^{-p-1},M) \to L^p\otimes M \xrightarrow{\delta^p\otimes 1_M} L^{p+1}\otimes M$$

et $\mathrm{Hom}(\mathrm{coker}\ d^{-p-1},M) = \mathrm{Ker}(\delta^p\otimes 1_M)$. D'où le lemme.

On a en vue le résultat suivant :

<u>Théorème</u> 5. <u>Soient</u> $\text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"}\ L_i \in \mathrm{Ind}\ D^+_{\mathrm{parf}}(A)$, $\text{"}\varprojlim_{i\in I}\text{"}\ L^*_i$ <u>son "dual" dans</u> $\mathrm{Pro}\ D^-_{\mathrm{parf}}(A)$ <u>et</u> p <u>un entier</u>. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1) <u>il existe</u> $L \in D^+_{\mathrm{parf}}(A)$ <u>et une flèche</u> $u : L \to \text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"}\ L_i$ <u>qui pour tout</u> A-<u>module</u> N <u>induit un isomorphisme dans</u> $\mathrm{Ind}\ D^+(A)$

$$\tau_{\leq p}(L\otimes_A N) \to \tau_{\leq p}(\text{"}\varinjlim_{i\in I}\text{"}\ L_i\otimes N)$$

2) $\text{"}\varprojlim_{i\in I}\text{"}\ \tau^{\geq -p}(L^*_i) \in \widetilde{D^b_{\mathrm{coh}}(A)}$.

<u>Démonstration</u> :

2) $\Longrightarrow$ 1) : Posons $K_i = \tau^{\geq -p}(L^*_i)$. Comme $\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_i \in \widetilde{D^b_{\mathrm{coh}}(A)}$, il existe $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(A)$ et un isomorphisme $\varphi : \text{"}\varprojlim\text{"}\ K_i \simeq E$. Soit $L \in D^+_{\mathrm{parf}}(A)$ tel que si $L^* = \mathrm{Hom}^{\cdot}(L,A)$, $L^* \simeq \tau^{\geq -p}(L^*)$ et $L^* \simeq E$. Si π^*_{ji} (resp. π_{ji}) désigne le morphisme de transition $L^*_j \to L^*_i$ (resp. $K_j \to K_i$) de $\text{"}\varprojlim\text{"}\ L^*_i$ (resp. $\text{"}\varprojlim\text{"}\ K_i$), par définition des flèches dans $\mathrm{Pro}\ D^-(A)$, il existe $i \in I$, $\varphi_i : K_i \to E$ tels que $\varphi = (\varphi_i\circ\pi_{ji})_{j\geq i}$. Comme $H^q(L^*) = 0$ pour $q < -p$ et que les composantes de L^* sont des A-modules libres de type fini, la flèche φ_i se prolonge en une flèche $\psi_i : L^*_i \to L^*$ et φ se prolonge en $\psi = (\psi_i\circ\pi^*_{ji})_{j\geq i}$ tel que le carré suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{"}\varprojlim\text{"}\, L_i^* & \xrightarrow[\sim]{\text{can}} & \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i = \tau^{\geq -p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_i^*) \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ L^* & \xrightarrow{\sim} & E \end{array} .$$

Posons $u = \psi^* : L \to \text{"}\varinjlim\text{"}\, L_i$. Si N est un A-module considéré comme un complexe concentré en degré 0, le diagramme suivant est commutatif :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}^\bullet(\tau^{\geq -p}(L^*),N) & = & \tau_{\leq p}(L\otimes N) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u\otimes 1_N} \\ \mathrm{Hom}^\bullet(\text{"}\varprojlim\text{"}\, \tau^{\geq -p}(L_i^*),N) & = & \tau_{\leq p}(\text{"}\varinjlim\text{"}\, L_i\otimes_A N) \end{array}$$

et la flèche verticale de droite est un isomorphisme.

1) $\Longrightarrow$ 2) : Soient $L \in D^+_{\mathrm{parf}}(A)$, $u : L \to \text{"}\varinjlim\text{"}\, L_i$ induisant pour tout A-module N un isomorphisme :

$$\tau_{\leq p}(L\otimes N) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_i\otimes N) .$$

Si on note encore $E = \tau^{\geq -p}(L^*)$, pour $L^* = \mathrm{Hom}^\bullet(L,A)$, $K_i = \tau^{\geq -p}(L_i^*)$, le diagramme (*) ci-dessus montre que u induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}^\bullet(E,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\bullet(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i,N)$$

pour tout A-module N . Si $I^\bullet$ est une résolution injective de N on a :

$$\begin{array}{l} \mathrm{Hom}_{D(A)}(E,N[n]) = H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(E,I^\bullet)) = H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i,I^\bullet)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{Hom}_{D(A)}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i,N[n]) \end{array}$$

pour tout n , ou encore, pour tout complexe M concentré en un seul degré,

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(E,M) \simeq \mathrm{Hom}_{D(A)}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i,M)$$

et par récurrence sur la longueur des complexes et par dévissage,

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(E,M') \simeq \mathrm{Hom}_{D(A)}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i,M')$$

pour tout $M' \in D^b(A)$, et par prolongement pour $M' \in \mathrm{Pro}\ D^b(A)$, i.e.

$$E \simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\, K_i \quad \text{dans} \quad \mathrm{Pro}\ D^b(A) .$$

Corollaire 1. *Les hypothèses et notations sont celles du théorème* 5. *On suppose de plus que* A *est un anneau complet pour une topologie définie par un idéal* I . *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

1) *il existe* $L \in D^+_{parf}(A)$ *et une flèche* $u : L \longrightarrow \text{"}\varinjlim_{i \in I}\text{"}\, L_i$ *qui pour tout* A-*module* N *annulé par une puissance de* I *induit un isomorphisme* :

$u \otimes 1_N : \tau_{\leq p}(L \otimes N) \longrightarrow \text{"}\varinjlim_{i \in I}\text{"}\, \tau_{\leq p}(L_i \otimes N)$

2) *pour tout* $n > 0$, $\text{"}\varprojlim\text{"}\, \tau^{\geq -p}(L_i^* \otimes A/I^n) \in \widetilde{D^b_{coh}(A/I^n)}$.

Démonstration : on applique les théorèmes 2 et 5.

Corollaire 2. *Les hypothèses et notations sont toujours celles du théorème* 5. *On suppose en outre que* A *est local et complet pour la topologie définie par son idéal maximal* m. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

1) *il existe* $L \in D^+_{parf}(A)$ *et une flèche* $u : L \longrightarrow \text{"}\varinjlim_{i \in I}\text{"}\, L_i$ *tels que pour tout* A-*module de longueur finie* N :

$$u \otimes 1_N : \tau_{\leq p}(L \otimes N) \xrightarrow{\sim} \text{"}\varinjlim\text{"}\, \tau_{\leq p}(L_i \otimes N)$$

2) $\text{"}\varprojlim\text{"}\, \tau^{\geq -p}(L_i^* \otimes k) \in D^b_{coh}(k)$, *si* $k = A/m$

3) *il existe* $\bar{L} \in D^+_{parf}(k)$ *et une flèche* $\bar{u} : \bar{L} \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} L_i \otimes k$ *tels que* $\tau_{\leq p}(\bar{L}) \simeq \text{"}\varinjlim\text{"}\, \tau_{\leq p}(L_i \otimes k)$.

Démonstration :

On applique le théorème 5 pour montrer que 2) $\Longleftrightarrow$ 3). Ce même théorème 5 montre que l'assertion 1) est équivalente à l'assertion

$$\text{pour tout } n > 0 \text{ , } \text{"}\varprojlim\text{"}\, \tau^{\geq -p}(L_i^* \otimes A/m^n) \in \widetilde{D^b_{coh}(A_n)}$$

qui par la proposition 7 est équivalente à l'assertion 2).

VI - Application aux complexes bornés de A-modules plats

Dans ce qui suit dans ce paragraphe, C désigne un complexe borné de A-modules plats que, par commodité dans les notations, on suppose concentré en degré ≥ 0 :

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d} C^1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d} C^r \longrightarrow 0 .$$

<u>Proposition 12.</u> <u>Il existe</u> $\text{"}\varinjlim\text{"}\, L_\lambda \in \operatorname{Ind} D_{\mathrm{parf}}(A)$ <u>et une flèche</u> $u = (u_\lambda)$: $\text{"}\varinjlim\text{"}\, L_\lambda \longrightarrow C$ <u>tel que</u> $\varinjlim u_\lambda$ <u>soit un isomorphisme</u>.

<u>Démonstration</u> :

Pour $r = 0$, i.e. C est un A-module plat, c'est le théorème de D. Lazard ([1] théor. 1, §1, n° 6).

Pour $r > 0$, désignons par A' la A-algèbre graduée $A[d]$ définie par $d^2 = 0$, A en degré 0 et d en degré 1, $C' = \bigoplus_{i=1}^{r} C^i$ est un A'-module gradué plat sur A . On peut encore décrire C' de la manière suivante :

$C' = \varinjlim_{\lambda} C'_\lambda$, C'_λ sous A'-module gradué de type fini de C' dont chaque composante C^i_λ est contenue dans C^i .

Comme C^0 est plat sur A , pour λ fixé, l'injection $C^0_\lambda \hookrightarrow C^0$ se factorise à travers un A-module libre de type fini :

$$C^0_\lambda \xrightarrow{u^0} A^{r_0} \xrightarrow{v^0} C^0$$

(cf. [1] theor. 1 §1 n° 6). Par récurrence supposons construit un diagramme commutatif de complexes où les flèches composées verticales sont les inclusions naturelles

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^0_\lambda \arrow[r, "d"] \arrow[d, "u^0"'] & C^1_\lambda \arrow[r, dashed] \arrow[d, "u^1"'] & C^i_\lambda \arrow[r, "d"] \arrow[d, "u^i"'] & C^{i+1}_\lambda \\
0 \arrow[r] & A^{r_0} \arrow[r, "M^0"] \arrow[d, "v^0"'] & A^{r_1} \arrow[r, dashed, "M^{i-1}"] \arrow[d, "v^1"'] & A^{r_i} \arrow[d, "v^i"'] & \\
0 \arrow[r] & C^0 \arrow[r] & C^1 \arrow[r, dashed] & C^i \arrow[r] & C^{i+1}
\end{tikzcd} .$$

Soient m_j^i les images par v^i de la base standard de A^{r_i}. Pour $m \in C_\lambda^i$, on a : $m = \sum_{j=1}^{r_i} u_j^i(m) m_j^i$ (u_j^i composantes de u^i). Comme C^{i+1} est plat sur A, l'inclusion $C_\lambda^{i+1} + \sum_{j=1}^{r_i} A\, d(m_j^i) \hookrightarrow C^{i+1}$ se factorise à travers un A-module libre de type fini

$$C^{i+1} + \sum_{j=1}^{r_i} A\, d(m_j^i) \xrightarrow{u^{i+1}} A^{r_{i+1}} \xrightarrow{v^{i+1}} C^{i+1} .$$

Soit l'application linéaire $M^i : A^{r_i} \longrightarrow A^{r_{i+1}}$ définie par la matrice $(M_{e,j}^i = u_e^{i+1}(d(m_j^i)))_{\substack{e=1,\dots,r_{i+1}\\ j=1,\dots,r_i}}$.

Vérifions que le carré :

$$\begin{tikzcd} C_\lambda^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "u^i"'] & C_\lambda^{i+1} \arrow[d, "u^{i+1}"] \\ A^{r_i} \arrow[r, "M^i"] & A^{r_{i+1}} \end{tikzcd}$$

est commutatif : si $m \in C_\lambda^i$, $u^{i+1} \circ d(m) = (u_e^{i+1}(d(m)))_e = (u_e^{i+1}(d(\sum_{j=1}^{r_i} u_j^i(m) m_j^i)))_e$ $= M^i((u_j^i(m))_j = M^i \circ u^i(m)$.

De même le carré

$$\begin{tikzcd} A^{r_i} \arrow[r, "M^i"] \arrow[d, "v^i"'] & A^{r_i+1} \arrow[d, "v^{i+1}"] \\ C^i \arrow[r, "d"] & C^{i+1} \end{tikzcd}$$

est commutatif : si $a = (a_1,\dots,a_r) \in A^{r_i}$, $dv^i(a) = \sum_{j=1}^{r_i} a_j d(m_j^i) =$ $\sum_{j=1}^{r_i} a_j v^{i+1} \circ u^{i+1}(d(m_j^i)) = v^{i+1} \circ M^i(a)$.

Enfin, il reste à assurer que : $0 \longrightarrow A^{r_0} \dashrightarrow A^{r_{i-1}} \xrightarrow{M^{i-1}} A^{r_i} \xrightarrow{M^i} A^{r_{i+1}}$ forme un complexe. Soit $T = \mathrm{Im}(M^i \circ M^{i-1})$, son image dans C^{i+1} est nulle. Comme C^{i+1} est plat, il existe un A-module libre A^s tel que :

a) v^{i+1} se factorise en $A^{r_{i+1}} \xrightarrow{\widetilde{M}} A^s \xrightarrow{\widetilde{v^{i+1}}} C^{i+1}$

b) l'image de T dans A^s est nulle.

On remplace $A^{r_{i+1}}$ par A^s , u^{i+1} par $\widetilde{M}\circ u^{i+1}$, v^{i+1} par $\widetilde{v^{i+1}}$, M^i par $\widetilde{M}\circ M^i$. Finalement, on peut factoriser l'inclusion $C'_\lambda \longrightarrow C'$ de A'-modules gradués en :

$$C'_\lambda \xrightarrow{u_\lambda} L'_\lambda \xrightarrow{v_\lambda} C'$$

où $L'_\lambda = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} A^{r_i}$ est un A'-module gradué, libre de type fini sur A et u_λ, v_λ sont des flèches graduées. Pour $\beta >> \lambda$, $\mathrm{Im}(v_\lambda) \subset C'_\beta$, d'où une flèche $v_{\beta\lambda} : L'_\lambda \xrightarrow{v_\lambda} C'_\beta \xrightarrow{u_\beta} L'_\beta$. Les flèches $(v_{\beta\lambda})_{\beta>>\lambda} : L'_\lambda \longrightarrow L'_\beta$ forment un système inductif et définissent un ind-objet "$\varinjlim$" L'_λ et une flèche $v = (v_\lambda) : "\varinjlim" L'_\lambda \longrightarrow C'$. De plus, par construction "$\varinjlim$" $C'_\lambda \xrightarrow[\sim]{u=(u_\lambda)}$ "$\varinjlim$" L'_λ et

$$\varinjlim v_\lambda : \varinjlim L'_\lambda \longrightarrow C'$$

est un isomorphisme. D'où la proposition.

Théorème 6. Soit C un complexe borné de A-modules plats et p un entier :

① Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) il existe $L \in D_{parf}(A)$ et une flèche $L \xrightarrow{u} C$ dans D(A) telle que pour tout A-module M , $\tau_{\leq p}(L \otimes M) \xrightarrow{u\otimes 1_M} \tau_{\leq p}(C \otimes M)$ est un isomorphisme .

b) si "$\varinjlim$" $L_\lambda \in \mathrm{Ind}\, D_{parf}(A)$ vérifie $\varinjlim("\varinjlim" L_\lambda) \simeq C$, alors "$\varprojlim$" $\tau^{\leq -p}(L^*_\lambda) \in \widetilde{D^b_{coh}}(A)$ (où L^*_λ désigne $\mathrm{Hom}^\cdot(L_\lambda, A)$).

② Si A est local complet pour la topologie définie par son idéal maximal m, $k = A/m$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\dim_k H^j(C \otimes k) < +\infty$ pour $j \leq p$.

b) il existe $L \in D_{parf}(A)$ et une flèche $L \xrightarrow{u} C$ dans D(A) telle que pour tout A-module N de longueur finie :

$$\tau_{\leq p}(L \otimes N) \xrightarrow{u\otimes 1_N} \tau_{\leq p}(C \otimes N)$$

soit un isomorphisme.

③ Si A est un anneau local d'idéal maximal m , $k = A/m$ et si $\dim_k H^j(C \otimes k) < +\infty$, pour $j \leq p$; les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\widehat{H^j(C\otimes M)} \simeq \varprojlim_n H^j(C\otimes M/m^n M)$ pour tout A-module M de type fini et tout $j \leq p$ (où $\widehat{H^j(C\otimes_A M)}$ est le complété de $H^j(C\otimes_A M)$ pour la topologie m-adique).

b) il existe (L,u) comme en ① a).

De plus, si A est complet on peut prendre L tel que L^j soit un facteur direct de C^j (par u) pour $j \leq p$.

Démonstration :

① Soit $"\varinjlim" L_\lambda$ tel que $\varinjlim("\varinjlim" L_\lambda) \simeq C$.

b) $\Longrightarrow$ a) : Si $"\varinjlim" \tau^{\geq -p}(L^*_\lambda) \in D^b_{coh}(A)$, par le théorème 5 il existe $L \in D_{parf}(A)$ et une flèche $u : L \longrightarrow "\varinjlim" L_\lambda$ tel que $\tau_{\leq p}(u\otimes 1_M) : \tau_{\leq p}(L\otimes M) \longrightarrow \tau_{\leq p}("\varinjlim" L_\lambda \otimes M)$ soit un isomorphisme. Il en est de même de la flèche
$\tau_{\leq p}(L\otimes M) \longrightarrow \varinjlim(\tau_{\leq p}("\varinjlim" L_\lambda \otimes M)) = \tau_{\leq p}(C\otimes M)$.

a) $\Longrightarrow$ b) : Soit (L,u) comme en a). Pour tout A-module M , on dispose de deux suites spectrales convergentes (si $L^* = \mathrm{Hom}^\bullet(L,A)$) :

$$\varinjlim_\lambda \mathrm{Ext}^r(H^q(L^*_\lambda),M) \Longrightarrow \varinjlim_\lambda H^{r-q}(L_\lambda \otimes M)$$
$$\mathrm{Ext}^r(H^q(L^*),M) \Longrightarrow H^{r-q}(L\otimes M)$$

dont les aboutissements sont isomorphes pour $r-q \leq p$. Si M est injectif, on a donc :

(*) $\varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}(H^q(L^*_\lambda),M) \simeq \mathrm{Hom}(H^q(L^*),M)$, pour $-q \leq p$.

Sinon M admet une résolution injective et l'exactitude à gauche des foncteurs $\varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}(H^q(L^*_\lambda),.)$ et $\mathrm{Hom}(H^q(L^*),.)$ montre que (*) est vrai pour tout A-module M , i.e :

$$H^q(L^*) \simeq "\varprojlim" H^q(L^*_\lambda) \qquad \text{pour } q \geq -p .$$

On termine la démonstration de a) $\Longrightarrow$ b) en utilisant le théorème 1.

② Si $\dim_k H^j(C\otimes k) < +\infty$ pour $j \leq p$, $"\varinjlim_\lambda" H^j(L_\lambda \otimes k) \simeq H^j(C\otimes k)$ pour $j \leq p$ et $"\varprojlim_\lambda" H^{-j}(L^*_\lambda \otimes k) \in \widetilde{A}$ pour $j \leq p$, ou encore

$$"\varprojlim_\lambda" \tau^{\geq -p}(L^*_\lambda \otimes k) \in \widehat{D^b_{coh}(k)}$$

et 2.a) $\Longrightarrow$ 2.b) est une conséquence du corollaire 2 du théorème 5. La réciproque est claire.

③ D'après ② , si $\hat{A}$ est le complété de A pour la topologie m-adique, il existe $L \in D_{parf}(\hat{A})$ et une flèche $L \xrightarrow{u} C \otimes \hat{A}$ dans $D(\hat{A})$ telle que, pour tout A-module N de longueur finie, $\tau_{\leq p}(u \otimes 1_N) : \tau_{\leq p}(L \otimes_A N) \longrightarrow \tau_{\leq p}(C \otimes_A N)$ est un isomorphisme. En particulier, pour tout $\hat{A}$-module de type fini M et pour $j \leq p$, $n > 0$, $H^j(L \otimes M/m^n M) \xrightarrow{\sim} H^j(C \otimes M/m^n M)$ et l'équivalence de a) et b) est claire si $A = \hat{A}$. Si A n'est pas complet, par ①, si $C \simeq "\varinjlim" L_\lambda$, où $"\varinjlim" L_\lambda \in \mathrm{Ind}\, D_{parf}(A)$, on a : $"\varprojlim" \tau^{\geq -p}(L_\lambda^* \otimes \hat{A}) \in D^b_{coh}(\hat{A})$ avec 3.a) ou 3.b) et par descente fidèlement plate, $"\varprojlim" \tau^{\geq -p}(L_\lambda^*) \in D^b_{coh}(A)$ avec 3.a) ou 3.b).

Et 3.a) et 3.b) sont encore équivalents lorsque A n'est pas complet.

Montrons encore que si A est complet et si 3.a) ou 3.b) est vérifié, on peut prendre L tel que L^j soit facteur direct de C^j pour $j \leq p$. Comme $L \in D_{parf}(A)$, on peut supposer que u est un morphisme de complexes. Nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

<u>Lemme</u> 1. <u>Si</u> A <u>est un anneau local d'idéal maximal</u> m , <u>de corps résiduel</u> k , <u>si</u> (P,d) <u>est un complexe borné de</u> A-<u>modules</u> <u>plats</u>, <u>il existe un quasi-isomorphisme</u> $(P,d) \xrightarrow{v} (P',d')$ <u>surjectif</u>, <u>où</u> P' <u>est un complexe borné de</u> A-<u>modules</u> <u>plats et</u> $d' \otimes 1_k = 0$.

<u>Démonstration</u> :

Soit $P^{i-1} \longrightarrow P^i \longrightarrow P^{i+1}$ une suite extraite de P . Si E est un A-module libre tel que $E \otimes k = \mathrm{Im}(P^{i-1} \otimes k \longrightarrow P^i \otimes k)$, il existe un A-homomorphisme $E \xrightarrow{\pi} P^{i-1}$ tel que l'homomorphisme composé

$$E \otimes k \xrightarrow{\pi \otimes 1_k} P^{i-1} \otimes k \xrightarrow{d \otimes 1_k} \mathrm{Im}(P^{i-1} \otimes k \longrightarrow P^i \otimes k)$$

soit l'identité. En particulier π est injectif et le quotient P^{i-1}/E est plat (cf. [7] 4.2.2). De plus, $E \otimes k \xrightarrow{(d \circ \pi) \otimes 1_k} P^i \otimes k$ est injectif, $d \circ \pi$ est injectif et P^i/E est aussi plat. Le complexe :

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{i-2} \longrightarrow P^{i-1}/E \longrightarrow P^i/E \longrightarrow P^{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0$$

est quasi-isomorphe à P , et sa différentielle δ en degré i vérifie : $\delta \otimes 1_k = 0$. On continue l'argument pour tout i .

Lemme 2. *Soient* A *un anneau local complet d'idéal maximal* m, *de corps résiduel* k, (P,d) *un complexe borné de* A-*modules plats*, (P',d') *le complexe défini dans le lemme* 1 *et* p *un entier. Si* $\dim_k H^j(P\otimes k) < +\infty$ *pour* $j \leq p$, $\widehat{P'^j} = \varprojlim_n P'^j/m^n P'^j$ *est un* A-*module libre de type fini facteur direct de* P^j *pour* $j \leq p$.

En particulier, si $P \in D_{parf}(A)$, P' *et* $\mathrm{Ker}(v : P \longrightarrow P')$ *sont dans* $D_{parf}(A)$, $P = \mathrm{Ker}(v) \oplus P'$, *et* $\mathrm{Ker}(v)$ *est acyclique*.

Démonstration :

Pour $j \leq p$, soient E^j un A-module libre de type fini tel que $E^j \otimes k = P'^j \otimes k$, $\pi : E^j \longrightarrow P^j$ tel que le composé

$$E^j \otimes k \xrightarrow{\pi \otimes 1_k} P^j \otimes k \longrightarrow P'^j \otimes k$$

soit l'identité. Ceci montre déjà que $\pi : E^j \longrightarrow P^j$ est injectif. De plus, comme E^j et P'^j sont plats, par récurrence sur n, on voit que : $E^j \otimes A/m^n \simeq P'^j \otimes A/m^n$ pour tout $n > 0$.

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} E^j \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\wr"'] & P^j \arrow[d] \\ \varprojlim_n E^j \otimes A/m^n \arrow[r, "\sim"] & \varprojlim_n P'^j \otimes A/m^n \end{tikzcd} .$$

Ce qui démontre la première assertion. La seconde se voit aisément en remarquant que, si $P \in D_{parf}(A)$, $\dim_k H^j(P \otimes k) < +\infty$ pour tout j. Par suite, $P'^j = \varprojlim P'^j/m^n P'^j$ est libre pour tout j, v est un quasi-isomorphisme surjectif.

Appliquons ces deux lemmes aux complexes L et C : d'où un diagramme

$$\begin{tikzcd} (L,\delta) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "s"'] & (C,d) \arrow[d, "v"] \\ (L',\delta') & (C',d') \end{tikzcd}$$

où s,v sont des quasi-isomorphismes surjectifs et $\delta' \otimes 1_k = d' \otimes 1_k = 0$. De plus, $L = \mathrm{Ker}(s) \oplus L'$. Si t est une section de s, $t : L' \longrightarrow L$, posons $\omega = u \circ t$. Pour tout $j \leq p$, on a $L'^j \otimes k = H^j(L \otimes k) \xrightarrow{u \otimes 1_k} H^j(C \otimes k) = C'^j \otimes k$ et pour tout $n > 0$:

$$L'^j \otimes A/m^n \simeq C'^j \otimes A/m^n .$$

Par suite L'^j est facteur direct de C^j pour $j \leq p$. Il suffit de remplacer le couple (L,u) par (L',ω).

Pour terminer cette première partie, donnons deux résultats qui mettent en évidence l'importance des limites adiques dans les complexes de A-modules plats.

Proposition 13. Soient A un anneau noethérien complet pour une topologie adique définie par un idéal I , $\text{"}\varinjlim_{\alpha}\text{"}\, L_\alpha \in \operatorname{Ind} D_{parf}(A)$, $C = \varinjlim_{\alpha} L_\alpha$ et p un entier. Supposons que :

a) pour tout $n > 0$, il existe (L_n,u_n), $L_n \in D_{parf}(A/I^n)$, $u_n : L_n \longrightarrow \text{"}\varinjlim_{\alpha}\text{"}\, L_\alpha \otimes A/I^n$ tels que, pour tout A/I^n-module N , $\tau_{\leq p}(u_n \otimes 1_N)$ soit un isomorphisme

b) pour tout A-module de type fini M , pour tout $j \leq p$, $H^j(C \otimes_A M)$ est un A-module de type fini et $H^j(C \otimes_A M) = \varprojlim_{n} H^j(C \otimes_A M/I^nM)$.

Alors il existe (L,u), $L \in D_{parf}(A)$, $u : L \longrightarrow \text{"}\varinjlim_{\alpha}\text{"}\, L_\alpha$ tel que, pour tout A-module M , $\tau_{\leq p}(u \otimes 1_M)$ soit un isomorphisme.

Démonstration :

Soit $K_\alpha = \operatorname{Hom}^\bullet(L_\alpha,A)$, pour tout α. En vertu du théorème 5, il s'agit de voir que, $\text{"}\varprojlim_{\alpha}\text{"}\, \tau^{\geq -p}(K_\alpha) \in \widetilde{D^b_{coh}(A)}$. On a :

1) pour tout $n > 0$, $\text{"}\varprojlim_{\alpha}\text{"}\, \tau^{\geq -p}(K_\alpha \otimes A/I^n) \in \widetilde{D^b_{coh}(A/I^n)}$: on utilise a) et ce même théorème 5

2) il existe $K \in D^b_{coh}(A)$, $v : K \longrightarrow \text{"}\varprojlim\text{"}\, \tau^{\geq -p}(K_\alpha)$ tel que pour tout $n > 0$, $\tau^{\geq -p}(v \overset{\square}{\otimes} 1_{A/I^n})$ soit un isomorphisme (théorème 2).

Pour simplifier, nous allons supposer les complexes L_α concentrés en degré ≥ 0 , par suite les complexes K_α sont concentrés en degré ≤ 0 et $p \geq 0$.

Soient $P \in D^-_{parf}(A)$ tel que $P \xrightarrow{\sim} K$, $\omega : P \xrightarrow{\sim} K \xrightarrow{v} \text{"}\varprojlim\text{"}\, \tau^{\geq -p}(K_\alpha)$. Pour tout $n > 0$, $\tau^{\geq -p}(\omega \otimes 1_{A/I^n})$ est un isomorphisme. Posons $L = \operatorname{Hom}^\bullet(P,A)$. Si N est un A-module annulé par I^n pour un $n > 0$, on a deux suites spectrales convergentes :

$$E_2^{r,q}(N) = \operatorname{Ext}^r_{A/I^n}(H^q(P \otimes A/I^n),N) \Longrightarrow H^{r-q}(L \otimes_A N)$$

$$\varinjlim_{\alpha} E_{2,\alpha}^{r,q}(N) = \varinjlim_{\alpha} \operatorname{Ext}^r_{A/I^n}(H^q(K_\alpha \otimes A/I^n),N) \Longrightarrow \varinjlim_{\alpha} H^{r-q}(L_\alpha \otimes N) .$$

La flèche ω induit des isomorphismes pour $0 \geq q \geq -p$ et tout r

$$\varinjlim_{\alpha} E_{2,\alpha}^{r,q}(N) \xrightarrow{\sim} E_2^{r,q}(N)$$

et pour $0 \leq j \leq p$: $\varinjlim_{\alpha} H^j(L_\alpha \otimes_A N) \simeq H^j(L \otimes_A N)$.

Pour tout A-module de type fini M et pour $0 \leq j \leq p$, on a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned}\varinjlim_{\alpha} H^j(L_\alpha \otimes_A M) &= H^j(C \otimes_A M) = \varprojlim_{n} H^j(C \otimes M/I^n M) \quad \text{(par b))} \\ &= \varprojlim_{n} \varinjlim_{\alpha} H^j(L_\alpha \otimes M/I^n M) \simeq \varprojlim_{n} H^j(L \otimes M/I^n M) = H^j(L \otimes M) .\end{aligned}$$

Si M est un A-module non nécessairement de type fini, on a aussi :

$$\varinjlim_{\alpha} H^j(L_\alpha \otimes_A M) = H^j(L \otimes_A M) .$$

Pour terminer de montrer que "$\varprojlim_{\alpha}$" $\tau^{\geq -p}(K_\alpha) \in \widetilde{D_{coh}^b(A)}$, utilisons à nouveau, pour M un A-module, les suites spectrales convergentes :

$$E_2^{r,q} = \mathrm{Ext}_A^r(H^q(P),M) \Longrightarrow H^{r-q}(L \otimes_A M)$$

$$\varinjlim_{\alpha} E_{2,\alpha}^{r,q} = \varinjlim_{\alpha} \mathrm{Ext}_A^r(H^q(K_\alpha),M) \Longrightarrow \varinjlim_{\alpha} H^{r-q}(L_\alpha \otimes_A M) \,..$$

Si M est injectif et si $-p \leq q \leq 0$, on a

$$\varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}_A(H^q(K_\alpha),M) = \varinjlim_{\alpha} H^{-q}(L_\alpha \otimes_A M) \simeq H^{-q}(L \otimes_A M) = \mathrm{Hom}_A(H^q(P),M) .$$

Dans le cas général, M admet une résolution injective

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1$$

où I^0, I^1 sont des A-modules injectifs. L'exactitude à gauche des foncteurs $\varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}(H^q(K_\alpha),.)$ et $\mathrm{Hom}(H^q(P),.)$ montre que, de même pour $-p \leq q \leq 0$, $\varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}(H^q(K_\alpha),M) \simeq \mathrm{Hom}(H^q(P),M)$ pour tout A-module M et par suite $H^q(P) \simeq$ "$\varprojlim$" $H^q(K_\alpha)$ pour $-p \leq q \leq 0$. On termine en appliquant le théorème 1.

<u>Théorème</u> 7. <u>Soient</u> A <u>un anneau noethérien de dimension finie</u>, "$\varinjlim$" $L_\alpha \in \mathrm{Ind}\, D_{parf}(A)$, $C = \varinjlim_{\alpha} L_\alpha$, p <u>un entier</u>. <u>Supposons que</u> :

1) <u>pour tout fermé irréductible</u> S' <u>de</u> $S = \mathrm{Spec}\, A$, <u>il existe un ouvert affine non vide</u> $U = \mathrm{Spec}\, B$ <u>de</u> S', <u>un couple</u> (L',u'), $L' \in D_{parf}(B)$, $u' : L' \longrightarrow \text{"}\varinjlim\text{"}\, L_\alpha \otimes B$ <u>tel que</u>, <u>pour tout</u> B-<u>module</u> M , $\tau_{\leq p}(u' \otimes_B 1_M)$ <u>soit un isomorphisme</u>.

2) <u>pour tout</u> A-<u>module</u> <u>de type fini</u> M <u>et tout</u> $j \leq p$, $H^j(C \otimes_A M)$ <u>est un</u> A-<u>module</u> <u>de type fini</u>. <u>De plus</u>, <u>si</u> I <u>est un idéal de</u> A , $H^j(\widehat{C \otimes_A M}) = \varprojlim_n H^j(C \otimes_A M/I^n M)$, <u>pour</u> $j \leq p$ (où $H^j(\widehat{C \otimes_A M})$ désigne le complété de $H^j(C \otimes_A M)$ pour la topologie I-adique).

<u>Alors il existe</u> (L,u), $L \in D_{parf}(A)$, $u : L \longrightarrow \text{"}\varinjlim\text{"}\, L_\alpha$ <u>tel que</u>, <u>pour tout</u> A-<u>module</u> M , $\tau_{\leq p}(u \otimes 1_M)$ <u>soit un isomorphisme</u>.

<u>Démonstration</u> :

Ce théorème se démontre par récurrence sur $r = \dim A$. On peut supposer S connexe.

i) $\dim A = 0$: A est local et on applique 1).

ii) $\dim A > 0$: posons $L_\alpha^* = \mathrm{Hom}(L_\alpha, A)$, $\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha^* \in \mathrm{Pro}\ D_{parf}(A)$.

Par le théorème 6, il s'agit de voir que

$$\tau_{\geq -p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha^*) \in \widetilde{D^b_{coh}(A)} \ .$$

L'hypothèse 1, le théorème 6 et le corollaire 1 de la proposition 1 montrent qu'il existe un ouvert dense U de S tel que :

$$(*) \quad \tau_{\geq -p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_{\alpha|U}^*) \in \widetilde{D^b_{coh}(O_U)} \ .$$

Soit I un idéal définissant le fermé $S\text{-}U$. Par l'hypothèse de récurrence, pour $n>0$, il existe un couple (L_n,u_n), $L_n \in D_{parf}(A/I^n)$, $u_n : L_n \longrightarrow C \otimes A/I^n$ tel que pour tout A/I^n-module N , $\tau_{\leq p}(u_n \otimes 1_N)$ est un isomorphisme. La proposition 13) et le théorème 6 montrent que, si $\hat{A}$ désigne le complété de A pour la topologie I-adique :

$$(**) \quad \tau_{\geq -p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha^* \otimes \hat{A}) \in \widetilde{D^b_{coh}(\hat{A})} \ .$$

Les relations $(*)$ et $(**)$ entraînent, grâce à la proposition 9, que pour $j \geq -p$, $\text{"}\varprojlim\text{"}\, H^j(L_\alpha^*)$ est isomorphe à un A-module de type fini et par suite que $\tau_{\geq -p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L_\alpha^*) \in \widetilde{D^b_{coh}(A)}$.

Bibliographie

[1] BOURBAKI.- Ch. X Algèbre homologique. Masson.

[2] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN, P. DELIGNE.- Faisceaux pervers. Chapitre I. Collection Asterix 100.

[3] P. DELIGNE.- Séminaire de géométrie algébrique SGA V. Lecture Notes 589 Springer Verlag.

[4] P. DELIGNE. Cohomologie à support propre et construction du foncteur $f^!$. Appendix à [6].

[5] A. GROTHENDIECK.- Séminaire Bourbaki Février 1960.

[6] R. HARTSHORNE.- Residus and duality. Lecture Notes 20 Springer Verlag.

[7] L. GRUSON et M. RAYNAUD.- Platitude en géométrie algébrique. Inv. math. 13 1971.

[8] J.L. VERDIER.- Catégories dérivées. SGA $4\frac{1}{2}$.

Deuxième partie : cohomologie cohérente

0 - Introduction et définitions

0.1. Soient $S = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine noethérien de dimension finie et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme localement de type fini. Si F est un $\mathcal{O}_X$-module plat sur S, le foncteur :

$$(A = \text{catégorie des } A\text{-modules}) \longrightarrow (D(A) = \text{categorie derivée de } A)$$

$$M \longrightarrow R\Gamma(X, F \otimes_A M)$$

possède les propriétés suivantes :

1) Soit $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert affine de X, $C = C^{\cdot}(\mathcal{U}, F)$ le complexe de cochaines de Cech associé à $\mathcal{U}$, C est un complexe de A-modules plats et il existe un isomorphisme dans $D(A)$:

$$\varphi : R\Gamma(X, F) \xrightarrow{\sim} C .$$

En particulier, si M est un A-module

$$R\Gamma(X, F \otimes_A M) = R\Gamma(X, F) \otimes_A M \simeq C \otimes_A M .$$

2) Si f est propre, si F est un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, il existe un couple (L, u), $L \in D_{parf}(A), u : L \simeq R\Gamma(X, F)$.
(cf. [4] 11.9.2, cf. aussi 5 Appendix to 4.5).

En général, lorsque f n'est pas propre, les groupes de cohomologie $H^j(X, F)$ ne sont pas de type fini même si F l'est, $R\Gamma(X, F)$ n'est pas dans $D^b_{coh}(A)$ et à fortiori isomorphe à un objet de $D_{parf}(A)$. Par contre, si X est un "gros ouvert" d'un schéma $\bar{X}$ propre au-dessus de S, $H^o(X, F)$ est un A-module de type fini si F est un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, $H^1(X, F), \ldots, H^p(X, F)$ le sont au fur et à mesure que X est de plus en plus proche de $\bar{X}$ et le problème est de savoir si dans ces conditions, le foncteur :

$$M \longrightarrow \tau_{\leq p} R\Gamma(X, F \otimes_A M)$$

qui représente la cohomologie de $F \otimes_A M$ en degré $\leq p$, pour $M \in A$, est identique à un foncteur du type

$$M \longrightarrow \tau_{\leq p}(L \otimes_S M), \text{ pour } L \in D_{parf}(A) .$$

0.2. Avant d'énoncer les résultats obtenus dans cette direction, donnons la définition suivante :

Définition 1. Soient A un anneau noethérien, $X \longrightarrow S = \operatorname{Spec} A$ un morphisme localement de type fini, F un $\mathcal{O}_X$-module de type fini et p un entier ≥ 0. Le quadruplet (S,X,F,p) vérifie (P_p) si :

> il existe un couple (L,u), $L \in D_{parf}(A)$, $u : L \longrightarrow R\Gamma(X,F)$ tel que pour tout A-module M, $\tau_{\leq p}(u \otimes 1_M)$ soit un isomorphisme .

ou encore

> il existe un couple (L,v), $L \in D_{parf}(A)$, $v : L \longrightarrow C$ tel que $\tau_{\leq p}(v \otimes 1_M)$ est un isomorphisme pour tout A-module M .

Sous cette forme, les résultats obtenus dans la première partie s'appliquent. En utilisant la proposition 12 et le théorème 7 de cette première partie, on obtient le critère suivant :

(S,X,F,p) vérifie (P_p) si et seulement si les conditions suivantes sont remplies:

α) pour tout idéal I , tout A-module de type fini M , tout $j \leq p$, $H^j(X,F \otimes_A M)$ est un A-module de type fini et vérifie

$$\widehat{H^j(X,F \otimes_A M)} = \varprojlim_n H^j(X,F \otimes_A M/I^n M)$$

où $\widehat{H^j(X,F \otimes_A M)}$ désigne le complété de $H^j(X,F \otimes_A M)$ pour la topologie I-adique)

β) pour tout fermé irréductible S' de S , il existe un ouvert affine non vide $U = \operatorname{Spec} B$ de S' tel que $(U, X \times_S U, F \otimes_A B, p)$ vérifie (P_p).

En utilisant la proposition 12 et le théorème 6, on obtient encore :

supposons A local d'idéal maximal m , (S,X,F,p) vérifie (P_p) si et seulement si, pour tout A-module de type fini M et tout $j \leq p$, $H^j(X,F \otimes_A M)$ est un A-module de type fini et vérifie :

$$\widehat{H^j(X,F \otimes_A M)} = \varprojlim_n H^j(X,F \otimes_A M/m^n M)$$

(où $\widehat{H^j(X,F \otimes_A M)}$ désigne le complété de $H^j(X,F \otimes_A M)$ pour la topologie m-adique).

0.3. Examinons ces conditions α) et β).

Définition 2. Soit j un entier ≥ 0 , nous dirons que le foncteur en A-modules $M \longrightarrow H^j(X, F\otimes_A M)$ est de type fini si pour toute A-algèbre noethérienne B , tout B-module de type fini M', $H^j(X, F\otimes_A M')$ est un B-module de type fini.

Examinons la condition α) : dans [3] ch. IX, A. Grothendieck donne un critère suffisant pour que α) soit réalisée :

il suffit que les foncteurs $H^j(X, F\otimes_A .)$ soient de type fini pour $j \leq p+1$.

Première conséquence : si A est local et si les foncteurs $H^j(X, F\otimes_A .)$ sont de type fini pour $j \leq p+1$, (S,X,F,p) vérifie (P_p).

Remarquons déjà que, même lorsque A est local, la finitude des foncteurs $H^j(X, F\otimes_A .)$ pour $j \leq p$ est insuffisante pour que (S,X,F,p) vérifie (P_p) (cf. 0.4, exemple ci-dessous).

Regardons la situation suivante, où ρ est une immersion ouverte et $\bar{f}$ un morphisme propre

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & & \bar{X} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Définition 2'. Soit j un entier ≥ 0 , le foncteur de la catégorie des A-modules dans la catégorie des $\mathcal{O}_{\bar{X}}$-modules: $M \longrightarrow R^j\rho_*(F\otimes_A M)$ est de type fini, si pour toute A-algèbre noethérienne B , tout B-module M' de type fini, $R^j\rho_*(F\otimes_A M')$ est un $\mathcal{O}_{\bar{X}_B}$-module de type fini (où $\bar{X}_B = \bar{X}\times_S \operatorname{Spec} B$).

La finitude des foncteurs $R^j\rho_*(F\otimes_A .)$ pour $j \leq p$ entraîne celle des foncteurs $H^j(X, F\otimes_A .)$ pour $j \leq p$, comme on le voit avec la suite spectrale de Leray associée au morphisme $f = \bar{f}\circ\rho$. D'après A. Grothendieck, (cf. [3]), cette finitude des foncteurs $R^j\rho_*(F\otimes_A .)$ pour $j \leq p$ s'exprime par des conditions de profondeur sur F , lorsque A est quotient d'un anneau régulier.

Moyennant une condition supplémentaire de "semi-finitude" du foncteur $R^{p+1}\rho_*(F\otimes_A .)$, condition qui s'exprime elle aussi en conditions de profondeur sur F , nous montrerons que la condition α) est réalisée.

Deuxième conséquence : si X est un ouvert d'un schéma S-propre $\bar{X}$, si A est un anneau local et si F vérifie les conditions de profondeur appropriées, (S,X,F,p) vérifie (P_p).

Examinons la condition β) :

On ne sait presque rien sur elle en général. Même lorsque S est intègre, on ne sait pas sous la seule hypothèse de finitude des foncteurs $M \longrightarrow H^j(X, F\otimes_A M)$ pour $j \leq p$, qu'il existe un ouvert non vide U de S tel que, pour $s \in U$, la flèche naturelle :

$$\tau_{\leq p}(R\Gamma(X,F)\otimes k(s)) \longrightarrow \tau_{\leq p}\, R\Gamma(X_s, F\otimes k(s))$$

est un isomorphisme, ce qui bien sûr a lieu si on a (P_p). Néanmoins lorsqu'on est dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & & \bar{X} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

où ρ est une immersion ouverte, $\bar{f}$ est projectif et où F satisfait des conditions de profondeur du type évoqué ci-dessus, la condition α) est satisfaite et par suite (S,X,F,p) vérifie (P_p) (cf. théorème 1).

De plus, on montre que, quitte à éclater S, il existe déjà sur $\bar{X}$ un couple (E,v), $E \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_P)$, $v : E \longrightarrow R\rho_* F$ tel que pour tout A-module M, $\tau_{\leq p}(E\otimes_A M) \simeq \tau_{\leq p}\, R\rho_*(F\otimes_A M)$ (cf. théorème 2).

0.4. Pour terminer cette introduction, donnons un exemple qui montre que la seule finitude du foncteur $M \longrightarrow \Gamma(X, F\otimes_A M)$ est à elle seule insuffisante pour que $(S,X,F,0)$ vérifie (P_0) même lorsque A est local, et X est quasi-projectif :

<u>Exemple</u> :

Soient k un corps algébriquement clos, $A = k[[t]]$, $\bar{X} = \mathbb{P}^2_S$, π une section de $\bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} S = \mathrm{Spec}\, A$, $E = \pi(S)$, s_0 la trace de E sur la fibre spéciale, s_1 celle sur la fibre générique, I l'idéal du fermé $\overline{\{s_1\}}$ dans $\bar{X}$, $X = \bar{X} - \{s_0\}$, $F = I_{|X}$. On a les relations suivantes :

i) $F/t^nF = \mathcal{O}_X/t^n\mathcal{O}_X$ si $n > 0$

ii) si $\rho : X \hookrightarrow \bar{X}$, $I = \rho_*(F)$ et $\Gamma(X,F) = \Gamma(\bar{X},I)$. De plus la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Gamma(\bar{X},I) \longrightarrow \Gamma(\bar{X},\mathcal{O}_{\bar{X}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\bar{X},\mathcal{O}_{\bar{X}}/I)$$

montre que $\Gamma(X,F) = \Gamma(\bar{X},I) = 0$

iii) $A = \varprojlim_n \Gamma(\bar{X},\mathcal{O}_{\bar{X}}/t^n\mathcal{O}_{\bar{X}}) = \varprojlim_n \Gamma(X,F/t^nF)$

iv) $\varprojlim_n \rho_*(F/t^nF) = \mathcal{O}_{\hat{\bar{X}}} \supsetneq \hat{I}$ (où la notation $\hat{}$ désigne le complété de l'objet considéré pour la topologie $t\mathcal{O}_{\bar{X}}$-adique)

v) $\Gamma(X,F\otimes_A M)$ est un A-module de type fini pour tout A-module M de type fini. Comme $0 = \Gamma(X,F) \neq \varprojlim_n \Gamma(X,F/t^nF)$, il n'existe pas de flèche $L^0 \xrightarrow{d} L^1$ de A-modules libres de type fini telle que, pour tout A-module M ,
$\Gamma(X,F\otimes_A M) = \mathrm{Ker}(d\otimes 1_M)$

vi) le foncteur $\Gamma(X,F\otimes_A .)$ est de type fini (cf. proposition 7).

I - Un cas élémentaire

Regardons la situation suivante pour p un entier ≥ 0 :

a) S *est un schéma noethérien*

b) $X \overset{\rho}{\hookrightarrow} \bar{X}$, X *est un ouvert d'un* S-*schéma projectif* $\bar{X}$, *plat sur* S *tel que pour tout* $s \in S$, *tout* $z \in (\bar{X}-X)_s$, *on ait* prof $\mathcal{O}_{s,z} \geq p+2$. Soient $\bar{f} : \bar{X} \to S$, $f = \bar{f} \circ \rho : X \to S$ les morphismes canoniques.

c) F *est un* $\mathcal{O}_X$-*module localement libre de type fini.*

Proposition 1. *Pour* $(S,X,\bar{X},F,p)$ *comme ci-dessus, il existe* $E \in D_{parf}(\mathcal{O}_X)$, $L \in D_{parf}(\mathcal{O}_S)$, *des flèches* $v : E \to R\rho_*(F)$, $u : L \to Rf_*(F)$ *tels que pour tout* $\mathcal{O}_S$-*module* M :

$$v : \tau_{\leq p}(E \otimes_S M) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq p}(R\rho_*(F \otimes_S M))$$

$$u : \tau_{\leq p}(L \otimes_S M) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq p}(Rf_*(F \otimes_S M)) .$$

De plus, si $\mathcal{O}_{\bar{X}}(1)$ *désigne un faisceau inversible très ample au-dessus de* S , *on peut choisir les composantes non nulles* E^i *de* E *de la forme* $\mathcal{O}_{\bar{X}}(n)^r$, *avec* $n > 0$, $r > 0$ *et* $L = \bar{f}_*(E)$.

Démonstration :

Soit N un entier > 0 tel que l'on ait, pour $n \geq N$:

a) $R^j\bar{f}_*(\mathcal{O}_{\bar{X}_s}(n)) = 0$ pour $j > 0$ et $s \in S$

b) $f_*\mathcal{O}_{\bar{X}}(n)$ est localement libre de rang fini (conséquence de a)).

Ce qui implique, pour $n \geq N$:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} R^j\bar{f}_*(\mathcal{O}_{\bar{X}}(n) \otimes_S .) = 0 \quad \text{pour} \quad j > 0 \\ \bar{f}_*(\mathcal{O}_{\bar{X}}(n) \otimes_S .) = \bar{f}_*(\mathcal{O}_{\bar{X}}(n)) \otimes_S . \end{cases}$$

Soit $\mathcal{G}$ un prolongement cohérent du dual $\mathrm{Hom}(F,\mathcal{O}_X)$ à $\bar{X}$. On peut trouver une résolution de $\mathcal{G}$ de la forme suivante :

$$(R) : \dashrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(-n_{p+1})^{r_{p+1}} \to \dashrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(-n_0)^{r_0} \to \mathcal{G} \to 0$$

où les entiers n_j, r_j vérifient $r_j > 0$, $n_j \geq N$.

Dualisons terme à terme la suite exacte (R), on obtient le complexe

$$(C)\quad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(g,\mathcal{O}_{\bar{X}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(n_o)^{r_o} \longrightarrow \cdots\longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(n_{p+1})^{r_{p+1}} \longrightarrow\cdots$$

Notons $\bar{E}$ le complexe : $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(n_o)^{r_o} \longrightarrow\cdots\longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(n_{p+1})^{r_{p+1}} \longrightarrow\cdots$,

$E : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(n_o)^{r_o} \longrightarrow\cdots\longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(n_{p+1})^{r_{p+1}} \longrightarrow 0$ et $L = \bar{f}_*(E)$. On va vérifier que E et L sont les complexes cherchés. Comme F est localement libre, on a $F = \mathrm{Hom}(g,\mathcal{O}_{\bar{X}})_{|X}$ et le complexe (C) est localement scindé sur X, d'où une suite exacte de foncteurs en $\mathcal{O}_S$-modules :

$$0 \longrightarrow F\otimes_S\cdot \longrightarrow \mathcal{O}_X(n_o)^{r_o}\otimes_S\cdot \longrightarrow\cdots\longrightarrow \mathcal{O}_X(n_{p+1})^{r_{p+1}}\otimes_S\cdot \longrightarrow\cdots$$

Si F désigne aussi le complexe concentré en degré 0 et de valeur F en ce degré, $\bar{E}_{|X} \simeq F$.

Si M est un $\mathcal{O}_S$-module, on a encore $\bar{E}_{|X}\otimes_S M \simeq F\otimes_S M$ et

$$R\rho_*(\bar{E}_{|X}\otimes_S M) \xrightarrow{\sim} R\rho_*(F\otimes_S M) .$$

La flèche d'inclusion $E \longrightarrow \bar{E}$ définit des flèches

$$v : E \longrightarrow \bar{E} \xrightarrow{\text{can}} R\rho_*(\bar{E}_{|X}) \simeq R\rho_*(F)$$

$$u : L = R\bar{f}_*E \longrightarrow R\bar{f}_*R\rho_*(\bar{E}_{|X}) \simeq R\bar{f}_*R\rho_*(F) = Rf_*F$$

et pour tout $\mathcal{O}_S$-module M, u et v induisent des flèches :

$$v_M : E\otimes_S M \longrightarrow \bar{E}\otimes_S M \longrightarrow R\rho_*(F\otimes_S M)$$

$$u_M : L\otimes_S M \longrightarrow Rf_*(F\otimes M) .$$

Comme $\mathrm{prof}\,\mathcal{O}_{s,z} \geq p+2$, pour tout $s \in S$ et tout $z \in (\bar{X}-X)_s$, on a pour $j \geq 0$:

$$\bar{E}^j\otimes_S\cdot = \rho_*(\bar{E}^j_{|X}\otimes_S\cdot)$$

et $R^q\rho_*(\bar{E}^j_{|X}\otimes_S\cdot) = 0$ pour $0 < q \leq p$.

Par conséquent, pour tout A-module M,

$$\tau_{\leq p}(E\otimes_A M) = \tau_{\leq p}(\bar{E}\otimes_A M) \simeq \tau_{\leq p}R\rho_*(\bar{E}_{|X}\otimes M)$$

et $\tau_{\leq p}(v_M) : \tau_{\leq p}(E \otimes_S M) \longrightarrow \tau_{\leq p}(R\rho_*(F \otimes_S M))$ est un isomorphisme. Les relations(α) montrent que $\bar{f}_*(\bar{E}^j \otimes_S .) = \bar{f}_*(\bar{E}^j) \otimes_S .$ et pour $0 < q \leq p$, $R^q \bar{f}_*(\bar{E}^j \otimes_S .) = 0$. Par conséquent, pour tout A-module M :

$$\tau_{\leq p}(L \otimes_A M) = \tau_{\leq p}(R\bar{f}_*(\bar{E} \otimes_A M))$$

et $\tau_{\leq p}(u_M) : \tau_{\leq p}(L \otimes_S M) \longrightarrow \tau_{\leq p}(Rf_*(F \otimes_A M))$ est un isomorphisme.

Corollaire 1. Si $S = \operatorname{Spec} A$, où A est un anneau complet pour une topologie adique définie par un idéal I et si $X, \bar{X}$ désignent les complétés formels de X et $\bar{X}$ le long de $V(I\mathcal{O}_X)$ et $V(I\mathcal{O}_{\bar{X}})$ respectivement, pour tout A-module de type fini M, les homomorphismes canoniques :

$$\beta_i : \widehat{R^i \rho_*(F \otimes_A M)} \longrightarrow R^i \hat{\rho}_*(\widehat{F \otimes_A M})$$

et

$$\gamma_i : H^i(X, F \otimes_A M) \longrightarrow H^i(X, \widehat{F \otimes_A M})$$

sont des isomorphismes pour $i \leq p$.

(N.B : la notation $\hat{}$ désigne le complété du module en question pour la topologie I-adique, $\hat{\rho} : X \longrightarrow \bar{X}$ est déduit de ρ de manière naturelle).

Démonstration :

Pour $m \geq 0$, notons X_m (resp. $\bar{X}_m$) le fermé de X (resp. $\bar{X}$) défini par l'idéal $I^{m+1}\mathcal{O}_X$ (resp. $I^{m+1}\mathcal{O}_{\bar{X}}$). Soit N un entier > 0 comme dans la démonstration de la proposition. Si M est un A-module de type fini, si $n \geq N$, on a (cf. [3] ch. IX théorème 1.1)

$$\begin{cases} \hat{\rho}_*(\mathcal{O}_X(n) \otimes_A M) = \varprojlim_m \rho_*(\mathcal{O}_{X_m}(n) \otimes_A M) = \varprojlim_m \mathcal{O}_{\bar{X}_m}(n) \otimes_A M = \mathcal{O}_{\bar{X}}(n) \otimes_A M \text{ et pour } 0 < i \leq p , \\ R^i \hat{\rho}_*(\mathcal{O}_X(n) \otimes_A M) = \varprojlim_m R^i \rho_*(\mathcal{O}_{X_m}(n) \otimes_A M) = 0 . \end{cases}$$

Si $E \in D_{parf}(\mathcal{O}_{\bar{X}})$ est comme dans la proposition 1 (à composante E^i non nulle de la forme $\mathcal{O}_X(n_i)^{r_i}$, $n_i \geq N$, $r_i > 0$), on en déduit que :

$$\widehat{\tau_{\leq p}(E \otimes_A M)} \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq p}\, R\hat{\rho}_*(\widehat{F \otimes_A M}) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq p}(\varprojlim_m (R\rho_*(F \otimes_A M/I^m M)))$$

et que β_i est un isomorphisme pour $i \leq p$. Comme $\bar{X} \longrightarrow S$ est projectif

$$H^i(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(n) \otimes_A M) = H^i(\hat{\bar{X}}, \widehat{\mathcal{O}_{\bar{X}}(n) \otimes_A M})$$

pour tout i et tout A-module de type fini M, et est donc nul pour $i>0$ et $n\geq N$. Par suite

$$\tau_{\leq p}(L\otimes_A M) = \tau_{\leq p}(\Gamma(\bar{X},E\otimes_A M)) = \tau_{\leq p}(\varprojlim_m \Gamma(X_m,E\otimes_A M/I^m M))$$

et les γ_i sont des isomorphismes pour $i\leq p$.

Si T est un schéma, on désigne par $Et(T)$ la catégorie des revêtements étales de T, $\pi_1(T)$ son groupe fondamental algébrique.

Corollaire 2. Soient S, X, X *comme dans le corollaire* 1, X_m *le fermé de* X *défini par l'idéal* $I^{m+1}\mathcal{O}_X$, *pour* $m\geq 0$.

a) *Si* $p=0$, *si* $\pi : T \longrightarrow S$ *est un morphisme fini et si* U *est un voisinage ouvert de* $X_{T_o} = \pi^{-1}(X_o)$:

a.1) *le foncteur* $Et(U) \longrightarrow Et(X_{T_o})$ *est pleinement fidèle. Si de plus* X_{T_o} *est connexe, l'homomorphisme canonique*

$$\pi_1(X_{T_o}) \longrightarrow \pi_1(U)$$

est surjectif.

a.2) *L'homomorphisme canonique* $Pic_T(U) \longrightarrow Pic_T(X_T)$ *est injectif (où* $X_T = X\times_S T$ *est aussi le complété formel de* X_T *pour la topologie* $I\mathcal{O}_{X_T}$*-adique).*

b) *Si* $p=1$, *si* $\pi : T \longrightarrow S$ *est un morphisme fini et* $X_{T_o} = \pi^{-1}(X_o)$:

b.1) *tout revêtement étale de* X_{T_o} *est la trace d'un revêtement étale d'un voisinage ouvert* U *de* X_{T_o}. *Si de plus* X_{T_o} *est connexe, alors*

$$\pi_1(X_{T_o}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{U \text{ vois. ouvert de } X_{T_o}} \pi_1(U)$$

b.2) $$\varinjlim_{U \text{ vois. ouv. de } X_{T_o}} Pic_T(U) \xrightarrow{\sim} Pic_T(X_T)$$

Démonstration :

On procède comme dans [3] Exposés X, XI, (i.e. on montre que l'on a la propriété $Lef(X_T,X_{T_o})$, pour tout revêtement fini T, dans le cas a) et $Leff(X_T,X_{T_o})$ dans le cas b), loc. cit.).

a) Si $T = S$ et si $X_1 \xrightarrow{u} X$, $X_2 \xrightarrow{v} X$ sont deux revêtements étales de X , $u_*(\mathcal{O}_{X_1})$ et $v_*(\mathcal{O}_{X_2})$ sont deux $\mathcal{O}_X$-algèbres localement libres de type fini et il en est de même de $\mathcal{G} = \mathcal{H}om(u_*(\mathcal{O}_{X_1}), v_*(\mathcal{O}_{X_2}))$. En appliquant le corollaire 1, on a :

$$\mathrm{Hom}(u_*(\mathcal{O}_{X_1}), v_*(\mathcal{O}_{X_2})) = \Gamma(X,\mathcal{G}) = \Gamma(X,\hat{\mathcal{G}}) = \mathrm{Hom}(\hat{u}_*(\mathcal{O}_{X_1}), \hat{v}_*(\mathcal{O}_{X_2}))$$

où X_1 (resp. X_2) désigne le complété formel de X_1 (resp. X_2) pour la topologie $I\mathcal{O}_{X_1}$ (resp. $I\mathcal{O}_{X_2}$) adique. En particulier, le foncteur

$$\mathrm{Et}(X) \longrightarrow \mathrm{Et}(X)$$

est pleinement fidèle. Si U est un voisinage ouvert de X_0 dans X , pour tout $x \in \bar{X}-U$, si $s = f(x)$, on a encore $\mathrm{Prof}\ \mathcal{O}_{s,x} \geq 2$ comme nous le verrons ci-dessous. De sorte que la même démonstration montre que le foncteur

$$\mathrm{Et}(U) \longrightarrow \mathrm{Et}(X)$$

est lui aussi pleinement fidèle.

Soit x un point de $\bar{X}-U$, $s = f(x)$, montrons que $\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{s,x} \geq 2$:

- si $x \in \bar{X}-X$, c'est clair

- si $x \in X-U$, soit x' un point générique de $\overline{\{x\}} \cap \bar{X}_0$. Comme U est un voisinage de X_0 dans X , $x' \in \bar{X}_0 - X_0$ et $\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{s',x'} \geq 2$, si $s' = \bar{f}(x')$. Soit $P = \mathbb{P}^N_S$ un espace projectif relatif au-dessus de S tel que $\bar{X} \subset \mathbb{P}^N_S$. Si $\mathrm{dp}\ \mathcal{O}_{s,x}$ (resp. $\mathrm{dp}\ \mathcal{O}_{s',x'}$) désigne la dimension projective du $\mathcal{O}_{P_s}$-module $\mathcal{O}_{s,x}$ (resp. $\mathcal{O}_{P_{s'}}$-module $\mathcal{O}_{s',x'}$), on a :

$$\mathrm{dp}\ \mathcal{O}_{s,x} < \mathrm{dp}\ \mathcal{O}_{s',x'} \leq \dim \mathcal{O}_{P_{s',x'}} - 2 \leq \dim \mathcal{O}_{P_{s,x}} - 2$$

et par suite, $\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{s,x} \geq 2$ comme annoncé.

Le foncteur $\mathrm{Et}(X) \longrightarrow \mathrm{Et}(X_0)$ est une équivalence de catégories et la première assertion de a.1) est prouvée pour $T = S$. Si T est un revêtement fini de S , la démonstration est identique. La dernière assertion de a.1) est une conséquence de la première.

a.2) Si $\mathcal{G}$ est un faisceau inversible sur U , voisinage ouvert de X_0 , on a vu que :

$$\Gamma(U,\mathcal{G}) = \Gamma(X,\hat{\mathcal{G}}) .$$

Par suite, si F est un faisceau inversible sur U , M un faisceau inversible sur T , $F \simeq f^*_{|U}(M)$ si et seulement si $\hat{F} \simeq \hat{f}^*(M)$.

b.1) Comme pour a.1), nous allons le montrer pour $T = X$, le raisonnement étant identique pour un revêtement fini quelconque.

Soit $R_0 \xrightarrow{u_0} X_0$ un revêtement étale de X_0 , $F_0 = (u_0)_*(R_0)$ est une $\mathcal{O}_{X_0}$-algèbre localement libre de type fini et $gr_I(F_0) = \bigoplus_n (F_0 \otimes I^n \mathcal{O}_{X_0} / I^{n+1} \mathcal{O}_{X_0})$ vérifie :

$$(*) \begin{cases} \rho_*(gr_I(F_0)) \text{ est un } gr_I \mathcal{O}_{\bar{X}_0}\text{-module de type fini} \\ R^1 \rho_*(gr_I(F_0)) = 0 \end{cases}$$

Si $\tilde{R} \xrightarrow{\tilde{u}} X$ est le revêtement étale de X correspondant à $R_0 \longrightarrow X_0$ $\tilde{F} = \tilde{u}_*(\mathcal{O}_{\tilde{R}})$, $\tilde{F}_{|X_0} = F_0$, les relations $(*)$ et le théorème 2.1 ch. IX de [3] montrent que $\tilde{\rho}_*(\tilde{F})$ est une $\mathcal{O}_{\bar{X}}$-algèbre de type fini. Comme $\bar{X} \longrightarrow S$ est projectif, il existe une $\mathcal{O}_{\bar{X}}$-algèbre B telle que $\hat{B} \simeq \hat{\rho}_*(\tilde{F})$, libre de rang fini en tout point de X_0 , i.e. B est localement libre de type fini dans un voisinage U de X_0 et définit un revêtement étale $R \xrightarrow{u} U$ tel que $u \otimes 1_{X_0} = u_0$.

La dernière assertion de b.1) est aussi une conséquence de la première.

b.2) Nous avons déjà vu (cf. a.2) que

$$\varinjlim_{U \text{ voisinage ouvert de } X_0} \operatorname{Pic}_T(U) \longrightarrow \operatorname{Pic}_T(X_T)$$

est injectif. La surjectivité peut se voir de la manière suivante:si $\tilde{F}$ est un $\mathcal{O}_{X_T}$-faisceau inversible, on a vu en b.1) qu'il existe un faisceau inversible F défini dans un voisinage U de X_T tel que $\hat{F} \simeq \tilde{F}$.

<u>Corollaire</u> 3. <u>Soit</u> $S = \operatorname{Spec} A$, A <u>anneau local d'idéal maximal</u> m <u>et de corps résiduel</u> $k = A/m$. <u>Soient</u> :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & \bar{X} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & \mathbb{P}^N_S \arrow[dl, "p"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

tels que :

a) X est ouvert dans $\bar{X}$, $\bar{X}$ est fermé dans $\mathbb{P}^N_S$, $\bar{f}$ est plat, ses fibres sont normales et sa fibre spéciale $\bar{X}_o = \bar{X}\times_S k$ est géométriquement intègre.

b) $\dim \bar{X}_o \geq 2+N-\mathrm{codim}_{\bar{X}_o}(\bar{X}_o - X_o)$.

Alors le foncteur $Et(k) \longrightarrow Et(X)$ est un épimorphisme, i.e. tout revêtement étale de X provient d'un revêtement étale de k.

Démonstration :

Comme $N \geq \dim \bar{X}_o$, par l'hypothèse b), on a, pour tout $s \in S$:

$$\mathrm{codim}_{\bar{X}_s}(\bar{X}_s - X_s) \geq \mathrm{codim}_{\bar{X}_o}(\bar{X}_o - X_o) \geq 2 .$$

Comme les fibres de $\bar{f}$ sont normales, si $x \in \bar{X}-X$, si $s = f(x)$

$$\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{\bar{X}_s,x} \geq 2$$

et on peut appliquer le corollaire 2 : le foncteur $Et(X) \longrightarrow Et(X_o)$ est pleinement fidèle.

Soient $X' \xrightarrow{\pi} X$ un revêtement étale de X, $R = \pi_*(\mathcal{O}_{X'})$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre localement libre, $\pi_o : X'_o \longrightarrow X_o$, $R_o = (\pi_o)_*(\mathcal{O}_{X'_o})$ les traces de π et R sur la fibre spéciale.

D'après [2] corollaire 6 du théorème 2, les hypothèses a) et b) entraînent que $\pi_o : X'_o \longrightarrow X_o$ provient d'un revêtement étale de k, i.e. $X'_o = X_o \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathrm{Spec}\,k'$, où k' est une extension finie séparable de S. Soit $S' \xrightarrow{\alpha} S$ un revêtement étale de S, $S' = \mathrm{Spec}\,A'$, A' anneau local de corps résiduel k' relevant l'extension $\mathrm{Spec}\,k' \longrightarrow \mathrm{Spec}\,k$. Comme le foncteur $Et(X) \longrightarrow Et(X_o)$ est pleinement fidèle, $R = \mathcal{O}_X \otimes_A A'$ et $X' = X \times_S S'$.

Remarques.

a) L'hypothèse de normalité faite n'intervient que pour affirmer : $\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{\bar{X}_s,x} \geq 2$ si $s = \bar{f}(x)$ et si $x \in \bar{X}$ vérifie $\dim \mathcal{O}_{\bar{X}_s,x} \geq 2$ (condition S_2 pour les fibres de $\bar{f}$)

b) Si $\mathrm{codim}_{\bar{X}_o}(\bar{X}_o - X_o) = 2$, $\bar{X}_o = \mathbb{P}^N_k$ et c'est bien connu (théorème de pureté).

II - Passage aux limites adiques

0. Les données dans ce paragraphe sont les suivantes :

a) $f : X \longrightarrow S = \operatorname{Spec} A$ est un morphisme localement de type fini, A est noethérien et de dimension finie

b) F est un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, plat sur S

c) p est un entier ≥ 0 .

Rappelons tout d'abord le critère suivant dû à A. Grothendieck :

Proposition 2 ([3] ch. IX théorème 1.1). *Soient R un anneau, I un idéal, $g : Y \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ un morphisme localement de type fini, G un $\mathcal{O}_Y$-module de type fini, q un entier ≥ 0 . Supposons que le $\bigoplus_{k\geq 0} I^k$-module gradué $\bigoplus_{k\geq 0} H^j(Y,I^kG)$ soit de type fini pour $j \leq q+1$, alors*

$$\widehat{H^j(Y,G)} = \varprojlim_n H^j(Y,G/I^nG)$$

pour $j \leq q$ (où $\widehat{H^j(Y,G)}$ désigne le complété de $H^j(Y,G)$ pour la topologie I-adique).

Corollaire 1. *Soit (S,X,F,p) comme en 0.a),b),c). On suppose que pour $j \leq p+1$, les foncteurs $M \longrightarrow H^j(X,F\otimes_A M)$ soit de type fini et que de plus l'une des deux conditions qui suivent est satisfaite :*

1) A *est local*

2) *pour tout fermé irréductible S' de S , il existe un ouvert affine $U = \operatorname{Spec} B$ non vide de S' tel que $(U, X\times_S U, F\otimes_A B, p)$ vérifie (P_p).*

Alors (S,X,F,p) vérifie (P_p).

Démonstration :

Soit I un idéal de A . Comme F est plat sur S , pour tout A-module M de type fini, on a : $\bigoplus_k I^k(F\otimes_A M) = F\otimes_A(\bigoplus_k I^k M)$ et comme les foncteurs $H^j(X,F\otimes_A .)$ sont de type fini pour $j \leq p+1$, $H^j(X,\bigoplus_k I^k(F\otimes_A M))$ est un $\bigoplus_k I^k$-module gradué de type fini pour $j \leq p+1$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 2 et le théorème 6 (resp. théorème 7) de la première partie lorsque A est local (resp. dans l'autre cas).

Proposition 4. Soit (S,X,F,p) comme en 0.a),b),c). On suppose de plus que :

i) A est complet pour la topologie définie par un idéal I

ii) $X \overset{\rho}{\hookrightarrow} \bar{X}$, où $\bar{X}$ est un S-schéma propre, ρ une immersion ouverte

iii) les foncteurs $M \longrightarrow R^j\rho_*(F\otimes_A M)$ sont de type fini pour $j \leq p$

iv) pour tout $x \in \operatorname{Supp} F$ tel que $\overline{\{x\}} \cap V(I\mathcal{O}_X) = \emptyset$, $\operatorname{prof} F_{f(x),x} \geq p+2$ (où $\overline{\{x\}}$ désigne l'adhérence dans $\bar{X}$).

Alors pour tout A-module M de type fini et tout $j \leq p$, les homomorphismes canoniques de $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-modules ($\hat{X}$ = complété de $\bar{X}$ pour la topologie $I\mathcal{O}_{\bar{X}}$-adique)

$$\widehat{R^j\rho_*(F\otimes_A M)} \xrightarrow{\beta_j} R^j\hat{\rho}_*(\widehat{F\otimes_A M}) \xrightarrow{\alpha_j} \varprojlim_n R^j\rho_*(F\otimes M/I^n M)$$

sont des isomorphismes.

Démonstration :

1) L'hypothèse iv) montre que si V est un voisinage de X_0 dans X, si $\varphi : V \hookrightarrow X$ est l'inclusion, pour tout A-module de type fini, on a :

$$\begin{cases} F\otimes_A M \simeq \varphi_*(F\otimes_A M_{|V}) \\ R^j\varphi_*(F\otimes_A M_{|V}) = 0 \quad \text{si} \quad 0 < j \leq p \end{cases}$$

et par suite, si $\rho_V : V \hookrightarrow \bar{X}$:

$$R^j\rho_*(F\otimes_A M) \simeq R^j(\rho_V)_*(F\otimes_A M_{|V}) \quad \text{pour} \quad j \leq p .$$

2) Soit M un A-module de type fini et $\mathcal{G} = F\otimes_A M$.

Lemme 1. Pour (S,X,F,p) comme en 0.a),b),c) et vérifiant de plus ii) et iii), $R^j\hat{\rho}_*(\hat{\mathcal{G}})$ est un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-module de type fini pour $j \leq p$.

Démonstration :

Comme les foncteurs $R^j\rho_*(F\otimes_S .)$ sont de type fini pour $j \leq p$, on sait par le théorème 2.1 ch. IX de [3] que $R^j\hat{\rho}_*(\hat{\mathcal{G}})$ est un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-module de type fini pour $j < p$. Pour $j = p$, le lemme étant de nature locale sur $\bar{X}$, on peut supposer $\bar{X}$ affine d'anneau B complet pour la topologie IB-adique et $\hat{X} = \operatorname{Spf} B$. Posons $H = H^p(X,\hat{\mathcal{G}})$, il est muni d'une filtration $(R_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$R_n = \mathrm{Im}(H^p(X, I^n\hat{g}) \longrightarrow H)$$

compatible avec la topologie IB-adique. Le théorème 1.1 ch. IX de [3] montre que : $H \simeq \varprojlim_n H^p(X, g/I^n g)$ et par conséquent que la filtration $(R_n)_{n \geq 0}$ est séparée.

Posons $gr_I B = \bigoplus_{n \geq 0} I^n B/I^{n+1}B$, $gr\, H = \bigoplus_{n \geq 0} R_n/R_{n+1}$, $gr\, H$ est un $gr_I B$-module gradué.

Avec le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^p(X, I^{n+1}\hat{g}) & \longrightarrow & H^p(X, I^n\hat{g}) & \longrightarrow & H^p(X, I^n g/I^{n+1}g) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ R_{n+1} & \longrightarrow & R_n & & \end{array}$$

on voit que $gr\, H$ est un quotient du sous-$gr_I B$-module gradué $\bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Im}(H^p(X, I^n\hat{g}) \longrightarrow H^p(X, I^n g/I^{n+1}g))$ de $\bigoplus_{n \geq 0} H^p(X, I^n g/I^{n+1}g)$. Comme F est plat, $\bigoplus_{n \geq 0} I^n(F \otimes M)/I^{n+1}(F \otimes M) = F \otimes (\bigoplus_{n \geq 0} I^n M/I^{n+1}M)$ et par (ii), $\bigoplus_{n \geq 0} H^p(X, I^n g/I^{n+1}g)$ est un $gr_I B$-module gradué de type fini. Par suite $gr\, H$ est un $gr_I B$-module gradué et H est un B-module de type fini (cf. [1] corollaire 1 de la proposition 12, §2).

Revenons à la démonstration de la proposition 4 :

3) Par le théorème 1.1 ch. IX de [3], plusieurs fois déjà invoqué, β_j, α_j sont des isomorphismes pour $j < p$, β_p est injectif, α_p est un isomorphisme.

4) Comme $\bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} S$ est propre, $H = R^p\hat{\rho}_*(\hat{g})$ est le complété d'un $\mathcal{O}_{\bar{X}}$-module de type fini, que l'on note $\widetilde{G}$ si $p = 0$ et $\widetilde{H}$ sinon. On note encore $G = \rho_*(g)$ et $H = R^p\rho_*(g)$ si $p > 0$. On a donc : $G \subseteq \widetilde{G}$, pour $p = 0$ et pour $p > 0$, $G = \widetilde{G}$ et $H \subset \widetilde{H}$. De plus comme $\hat{\rho}$ est l'identité sur X, il existe un voisinage V de X_o dans $\bar{X}$ tel que, si $p = 0$, $G_{|V} = \widetilde{G}_{|V}$ et si $p > 0$, $\widetilde{H}_{|V} = 0$.

5) Si $V' = V \cap X$, V' est un voisinage de X_o dans X et on a par 1) :

$$R^j\rho_*(g) \simeq R^j\rho'_*(g_{|V'})$$

pour $j \leq p$, $\rho' : V' \longrightarrow \bar{X}$.

On peut donc supposer que $X = V'$ et dans ce cas, la proposition est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2. Soient $Y \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \bar{Y}$ une immersion ouverte, I un idéal de $\mathcal{O}_{\bar{Y}}$, N un $\mathcal{O}_Y$-module de type fini, $\mathcal{Y}$ et $\bar{\mathcal{Y}}$ les complétés formels de Y et $\bar{Y}$ pour la topologie I-adique, p un entier ≥ 0 . On suppose que :

a) $R^j\varphi_*(N)$ (resp. $R^j\hat{\varphi}_*(\hat{N})$) est un $\mathcal{O}_{\bar{Y}}$-module (resp. $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{Y}}}$-module) de type fini pour $j \leq p$.

b) L'homomorphisme canonique : $\widehat{R^j\varphi_*(N)} \xrightarrow{u^j} R^j\hat{\varphi}_*(\hat{N})$ est un isomorphisme pour $j < p$, un monomorphisme pour $j = p$.

c) $R^p\hat{\varphi}_*(\hat{N})$ est le complété d'un $\mathcal{O}_{\bar{Y}}$-module de type fini T tel que, pour $p = 0$, $N = T_{|Y}$ et pour $p > 0$, Supp $T \subset \bar{Y} - Y$.

Alors u^p est un isomorphisme.

Démonstration :

On peut se ramener au cas où $\bar{Y} = \operatorname{Spec} B$, B est un anneau complet pour la topologie IB-adique, $\bar{\mathcal{Y}} = \operatorname{Spf} B$. Posons $\bar{N} = \Gamma(Y,N)$, c'est un B-module de type fini tel que Ass $\bar{N} \subset Y$. Si $p > 0$, comme Supp $T \subset \bar{Y} - Y$, il existe un élément a de B non diviseur de zéro dans $\bar{N}$ et annulant T . On a une suite exacte :

$$0 \to \bar{N} \xrightarrow{a} \bar{N} \to \bar{N}/a\bar{N} \to 0$$

une suite exacte longue de cohomologie :

$$\dashrightarrow H^{p-1}(Y,N) \xrightarrow{a} H^{p-1}(Y,N) \to H^{p-1}(Y,N/aN) \to H^p(Y,N) \to 0$$

et un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dashrightarrow & \widehat{H^{p-1}(Y,N)} & \xrightarrow{a} & \widehat{H^{p-1}(Y,N)} & \to & \widehat{H^{p-1}(Y,N/aN)} & \to & \widehat{H^p(Y,N)} & \to 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle u^{p-1}} & & \downarrow{\scriptstyle u^{p-1}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u^p} & \\
\dashrightarrow & H^{p-1}(\mathcal{Y},\hat{N}) & \xrightarrow{a} & H^{p-1}(\mathcal{Y},\hat{N}) & \to & H^{p-1}(\mathcal{Y},\widehat{N/aN}) & \to & \hat{T} & \to 0 .
\end{array}$$

Ceci montre que :

- $H^j(Y,N/aN)$ est un B-module de type fini pour $j \leq p-1$
- $H^j(\mathcal{Y},\widehat{N/aN})$ est un $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{Y}}}$-module de type fini pour $j \leq p-1$
- $\widehat{H^j(Y,N/aN)} \simeq H^j(\mathcal{Y},\widehat{N/aN})$ pour $j \leq p-2$
- $\widehat{H^{p-1}(Y,N/aN)} \hookrightarrow H^{p-1}(\mathcal{Y},\widehat{N/aN})$.
- $H^{p-1}(\mathcal{Y},\widehat{N/aN})$ est le complété d'un B-module de type fini T'. De plus, comme u^{p-1} est un isomorphisme, pour $p = 1$, $N/aN = T'_{|Y}$ et pour $p > 1$, Supp $T' \subset \bar{Y} - Y$.

- $\widehat{H^{p-1}(Y,N/aN)} \simeq \hat{T}'$ si et seulement si $\widehat{H^p(Y,N)} \simeq \hat{T}$.

Par récurrence sur p , on peut donc supposer $p=0$. Dans ce cas, on a une flèche d'adjonction

$$T \xrightarrow{i} \Gamma(Y,T_{|Y}) = \Gamma(Y,N)$$

telle que $1d_{\hat{T}} : \hat{T} \xrightarrow{\hat{i}} \Gamma(\widehat{Y,T_{|Y}}) = \Gamma(\widehat{Y,N}) \xrightarrow{u^0} \Gamma(Y,\hat{N})$.

Par suite u^0 , qui est déjà injectif, est un isomorphisme.

Pour démontrer la proposition 4, on applique ce lemme pour $Y=X$, $\bar{Y}=\bar{X}$, $N=G$.

<u>Corollaire</u> 1. <u>Les hypothèses et notations sont celles de la proposition</u> 4. <u>Pour tout</u> $j \leq p$, <u>tout</u> A-<u>module de type fini</u> M , $H^j(X,F\otimes_A M)$ <u>est un</u> A-<u>module de type fini et les homomorphismes canoniques</u> :

$$H^j(X,F\otimes_A M) \longrightarrow H^j(X,\widehat{F\otimes_A M}) \longrightarrow \varprojlim_n H^j(X,F\otimes_A M/I^n M)$$

<u>sont des isomorphismes</u>.

<u>Démonstration</u> :

Pour tout A-module M , on a deux suites spectrales convergentes :

$$E_2^{rq} = H^r(\bar{X},R^q\rho_*(F\otimes_A M)) \Longrightarrow H^{r+q}(X,F\otimes_A M)$$

$$\widehat{E_2^{rq}} = H^r(\bar{X},R^q\hat{\rho}_*(\widehat{F\otimes_A M})) \Longrightarrow H^{r+q}(X,\widehat{F\otimes_A M}) .$$

Comme $\bar{X} \longrightarrow S$ est propre, on voit que

a) $H^j(X,F\otimes_A M)$ est de type fini pour $j \leq p$

b) $\widehat{E_2^{rq}} = H^r(\bar{X},\widehat{R^q\rho_*(F\otimes_A M)}) = H^r(\bar{X},R^q\rho_*(F\otimes_A M))$ pour $q \leq p$.

Par suite, pour $j \leq p$, $H^j(X,F\otimes_A M) = H^j(X,\widehat{F\otimes_A M}) = \varprojlim_n H^j(X,F\otimes_A M/I^n M)$.

<u>Corollaire</u> 2. <u>Soit</u> (S,X,F,p) <u>comme en</u> 0.a),b),c). <u>On suppose que</u> :

1) A <u>est local complet d'idéal maximal</u> m

2) <u>les foncteurs</u> $R^j\rho_*(F\otimes.)$ <u>sont de type fini pour</u> $j \leq p$

3) <u>pour tout</u> $x \in \operatorname{Supp} F$ <u>tel que</u> $\overline{\{x\}} \cap V(m\mathcal{O}_X) = \emptyset$, prof $F_{f(x),x} \geq p+2$ <u>alors</u> (S,X,F,p) <u>vérifie</u> (P_p).

<u>Démonstration</u> : On applique le corollaire 1 et le théorème 6 de la première partie.

III - Critères de finitude des foncteurs $R^j\rho_*(F\otimes_A .)$

Reprenons la situation examinée au paragraphe II.

0.a) $f : X \longrightarrow S = \operatorname{Spec} A$ est un morphisme localement de type fini, A est noethérien, de dimension finie. On suppose de plus que X est un ouvert d'un S-schéma $\bar{X}$ localement de type fini. On note $\rho : X \hookrightarrow \bar{X}$ l'inclusion de X dans $\bar{X}$, $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow S$, $f = \bar{f}\circ\rho$.

0.b) F est un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, plat sur S .

0.c) p est un entier ≥ 0 .

Rappelons tout d'abord le critère suivant dû à A. Grothendieck :

Proposition 5 ([3] corollaire VIII-II-3). Soient Y un schéma localement noethérien, localement immergeable dans un schéma régulier, U un ouvert de Y , $\varphi : U \hookrightarrow Y$ la flèche d'inclusion, G un $\mathcal{O}_U$-module de type fini, q un entier ≥ 0 . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $R^j\varphi_*(G)$ est un $\mathcal{O}_Y$-module de type fini pour $j \leq q$.

2) Pour tout $x \in U$ tel que $\operatorname{codim}_{\overline{\{x\}}}((Y-U)\cap\overline{\{x\}}) = 1$, alors $\operatorname{Prof} G_x \geq q+1$, où $\overline{\{x\}}$ désigne l'adhérence de x dans Y .

Supposons dans ce qui suit dans tout ce paragraphe que A est un quotient d'un anneau régulier.

Corollaire. Soient $(S,X,\bar{X},F,p)$ comme en 0.a),b),c). Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout A-module de type fini M et tout $j \leq p$, $R^j\rho_*(F\otimes_A M)$ est un $\mathcal{O}_{\bar{X}}$-module de type fini.

b) Pour tout $x \in \operatorname{Supp} F$ tel que $\operatorname{codim}_{\overline{\{x\}}}((\bar{X}-X)\cap\overline{\{x\}}) = 1$, on a $\operatorname{prof} F_{f(x),x} \geq p+1$.

Démonstration :

Comme F est plat, pour tout A-module de type fini M et tout $x \in X$, on a : $\operatorname{prof}(F\otimes_A M)_x \geq \operatorname{prof} F_{f(x),x}$ et on applique la proposition précédente.

Lorsque B est un anneau de valuation discrète de spectre T , on note aussi (T,η,ξ) le trait correspondant, où η est le point générique de T , ξ son point fermé.

Soit $\underline{C}$ la catégorie dont les objets sont les triplets (Y,x,y), où Y est un S-schéma, x,y deux points de Y tels que $y\in\overline{\{x\}}$ et les flèches

$$(Y,x,y) \xrightarrow{h} (Z,u,v)$$

sont les S-morphismes $h: Y \to Z$ tels que $h(x)=u$, $h(y)=v$. Si $\varphi: T \to S$ est un morphisme de schémas localement noethériens, on note $F_T = F\otimes_A \mathcal{O}_T$, $\bar{X}_T = \bar{X}\times_S T$, $\bar{f}_T = \bar{f}\times 1_T$ etc...

Si $s\in S$, on note $F_s = F\otimes_S k(s)$, $\bar{X}_s = \bar{X}\times_S \mathrm{Spec}\ k(s)$, etc...

<u>Proposition</u> 6. <u>Soit</u> $(S,X,\bar{X},F,p)$ <u>comme en</u> 0.a),b),c). <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1) <u>Les foncteurs</u> $R^j\rho_*(F\otimes_A .)$ <u>sont de type fini pour</u> $j\leq p$.

2) i) <u>Pour tout</u> $s\in S$, <u>tout</u> $j\leq p$, $R^j\rho_*(F_s)$ <u>est un</u> $\mathcal{O}_{\bar{X}_s}$<u>-module de type fini.</u>

ii) <u>Pour tout trait</u> $\varphi: T \to S$, $R^j(\rho_T)_*(F_T)$ <u>est un</u> $\mathcal{O}_{\bar{X}_T}$<u>-module de type fini pour</u> $j\leq p$.

3) i) <u>Pour tout</u> $s\in S$, <u>tout</u> $j\leq p$, $R^j\rho_*(F_s)$ <u>est un</u> $\mathcal{O}_{\bar{X}_s}$<u>-module de type fini.</u>

ii) <u>Pour toute flèche</u> $(T,\eta,\xi) \xrightarrow{\varphi} (S,t,s)$ <u>de</u> $\underline{C}$, <u>où</u> (T,η,ξ) <u>est un trait tel que</u> $k(\eta) \overset{\varphi}{\simeq} k(t)$, $R^j(\rho_T)_*(F_T)$ <u>est un</u> $\mathcal{O}_{\bar{X}_T}$<u>-module de type fini pour</u> $j\leq p$.

<u>Démonstration</u> :

Il est clair que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3).

Montrons que 3) $\Longrightarrow$ 2) : Soit $(T,\eta,\xi) \xrightarrow{\varphi} (S,t,s)$ une flèche de $\underline{C}$, où (T,η,ξ) est un trait. Soient $B = \Gamma(T,\mathcal{O}_T)$, $B_o = B\cap k(t)$, c'est un anneau de valuation discrète de corps des fractions $k(t)$. On note (T_o,η_o,ξ_o) le trait correspondant à B_o et ψ la flèche naturelle $(T,\eta,\xi) \xrightarrow{\psi} (T_o,\eta_o,\xi_o)$. La flèche φ se factorise à travers (T_o,η_o,ξ_o), i.e :

$$\varphi: (T,\eta,\xi) \xrightarrow{\psi} (T_o,\eta_o,\xi_o) \xrightarrow{\varphi_o} (S,t,s) .$$

Par construction, $k(\eta_0) \overset{\varphi_0}{\simeq} k(t)$. Par 3) ii), $R^j(\rho_{T_0})_*(F_{T_0})$ est un $\mathcal{O}_{\bar{X}_{T_0}}$-module de type fini pour $j \leq p$. Comme ψ est plat, $R^j(\rho_T)_*(F_T) = R^j(\rho_{T_0})_*(F_{T_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{T_0}} \mathcal{O}_T$ et $R^j(\rho_T)_*(F_T)$ est un $\mathcal{O}_{\bar{X}_T}$-module de type fini pour $j \leq p$.

Montrons que 2) $\Longrightarrow$ 1). Les conditions 2i) et 2ii) sont conservées par tout changement de base. On est ramené à montrer que pour tout A-module de type fini M, $R^j\rho_*(F \otimes_A M)$ est un $\mathcal{O}_{\bar{X}}$-module de type fini pour $j \leq p$. Par le corollaire de la proposition 5, il s'agit de voir que, pour $x \in \operatorname{Supp} F$ tel que $\operatorname{codim}_{\overline{\{x\}}}((\bar{X}-X) \cap \overline{\{x\}}) = 1$, on a $\operatorname{prof} F_{f(x),x} \geq p+1$. Soient $x, z \in \bar{X}$ tels que $x \in \operatorname{Supp} F$, $z \in (\bar{X}-X) \cap \overline{\{x\}}$, $\dim \mathcal{O}_z = \dim \mathcal{O}_x + 1$.

Si $f(x) = \bar{f}(z)$, par 2.i) et la proposition 5, on a $\operatorname{prof} F_{f(x),x} \geq p+1$. Supposons maintenant que $f(x) \neq \bar{f}(z)$. Posons $t = f(x)$, $s = \bar{f}(z)$. On note encore : $f : (X,x,z) \longrightarrow (S,t,s)$ la flèche de $\underline{C}$ correspondante.

<u>Lemme. Pour toute flèche</u> $(Y,y,y') \xrightarrow{h} (S,u,u')$ <u>de</u> $\underline{C}$, <u>il existe un carré commutatif de flèches de</u> $\underline{C}$:

$$\begin{tikzcd}
(Y_T,z,z') \arrow[r, "1_Y \times \varphi"] \arrow[d, "h \times 1_T"'] & (Y,y,y') \arrow[d, "h"] \\
(T,\eta,\xi) \arrow[r, "\varphi"] & (S,u,u')
\end{tikzcd}$$

<u>où</u> (T,η,ξ) <u>est un trait tel que</u> $k(\eta) \overset{\varphi}{\simeq} k(u)$.

<u>Démonstration</u> :

On construit tout d'abord une flèche dans $\underline{C}$: $(T',\eta',\xi') \xrightarrow{v} (Y,y,y')$ où (T',η',ξ') est un trait tel que $k(\eta') \overset{v}{\simeq} k(y)$. Posons $\theta = h \circ v : (T',\eta',\xi') \longrightarrow (S,u,u')$. Soient $B' = \Gamma(T',\mathcal{O}_{T'})$, $B = B' \cap k(u)$, (T,η,ξ) le trait correspondant à B, on a $k(\eta) = k(u)$. La flèche θ se factorise à travers (T,η,ξ) :

$$\theta : (T',\eta',\xi') \xrightarrow{\alpha} (T,\eta,\xi) \xrightarrow{\varphi} (S,u,u') .$$

De plus on dispose d'une section $\Lambda : T' \longrightarrow Y_{T'} = Y \times_S T'$ qui, si l'on pose $z_1 = \Lambda(\eta')$, $z_1' = \Lambda(\xi')$, se prolonge en une section dans $\underline{C}$:

$$\Lambda : (T',\eta',\xi') \longrightarrow (Y_{T'},z_1,z_1') .$$

Posons $z = (1_Y\times\alpha)(z_1)$, $z' = (1_Y\times\alpha)(z_1')$, on a les flèches suivantes dans $\underline{C}$:

$$(Y_T,z_1,z_1') \xrightarrow{1_Y\times\alpha} (Y_T,z,z') \xrightarrow{1_Y\times\varphi} (Y,y,y') .$$

D'où le lemme.

Terminons la démonstration de la proposition 6. Soit

$$\begin{array}{ccc} (\bar{X}_T,x',z') & \xrightarrow{1_{\bar{X}}\times\varphi} & (\bar{X},x,z) \\ {\scriptstyle f\times 1_T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ (T,\eta,\xi) & \xrightarrow{\varphi} & (S,t,s) \end{array}$$

un carré commutatif dans $\underline{C}$, où (T,η,ξ) est un trait tel que $k(\eta)\overset{\varphi}{\simeq}k(t)$. On a :

$$\mathcal{O}_{\bar{X}_T,x'} \simeq \mathcal{O}_{t,x} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{T,x'} \simeq \mathcal{F}_{t,x} .$$

Comme $\dim \mathcal{O}_z = \dim \mathcal{O}_x+1$, par le théorème de Krull-Akisuki, $\dim \mathcal{O}_{z'} = \dim \mathcal{O}_{x'}+1$. De plus, $z' \in (\bar{X}_T-X_T)\cap\overline{\{x'\}}$. Comme $R^j(\rho_T)_*(\mathcal{F}_T)$ est un $\mathcal{O}_{\bar{X}_T}$-module de type fini pour $j\leq p$, $\text{prof}\, \mathcal{F}_{T,x'} \geq p+1$ et de même $\text{prof}\, \mathcal{F}_{t,x} \geq p+1$.

<u>Proposition 7</u>. <u>Soit</u> $(S,X,\bar{X},\mathcal{F},p)$ <u>comme en</u> 0.a),b),c). <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u>:

1) <u>Les foncteurs</u> $R^j\rho_*(\mathcal{F}\otimes_S .)$ <u>sont de type fini pour</u> $j\leq p$.

2) i) <u>pour tout</u> $s\in S$, <u>tout</u> $j\leq p$, $R^j\rho_*(\mathcal{F}_s)$ <u>est un</u> $\mathcal{O}_{\bar{X}_s}$<u>-module de type fini</u>.

ii) <u>Pour tout</u> $x\in \text{Supp}\,\mathcal{F}$ <u>tel que</u> $\text{prof}\,\mathcal{F}_{f(x),x}\leq p$, <u>les fibres du morphisme</u> $\overline{\{x\}} \to S$ <u>ont leurs points génériques dans</u> X, <u>où</u> $\overline{\{x\}}$ <u>désigne l'adhérence schématique de</u> x <u>dans</u> $\bar{X}$.

<u>Démonstration</u> :

1) $\Longrightarrow$ 2) : Il suffit de vérifier 2.ii). Soient $x\in\text{Supp}\,\mathcal{F}$ tel que $\text{prof}\,\mathcal{F}_{f(x),x}\leq p$, $t=f(x)$, z un point générique d'une fibre $\overline{\{x\}}_s$ du morphisme $\overline{\{x\}} \to S$. Ceci définit une flèche de $\underline{C}$ que l'on note encore $f:(\bar{X},x,z) \to (S,t,s)$.

D'après le lemme ci-dessus, il existe un carré commutatif dans $\underline{C}$:

$$\begin{array}{ccc} (\bar{X}_T,x',z') & \xrightarrow{1_{\bar{X}}\times\varphi} & (\bar{X},x,z) \\ {\scriptstyle f\times 1_T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ (T,\eta,\xi) & \xrightarrow{\varphi} & (S,t,s) \end{array}$$

où (T,η,ξ) est un trait tel que $k(\eta)\overset{\varphi}{\simeq}k(t)$. En particulier $F_{T,x'}\simeq F_{t,x}$ et prof $F_{T,x'}\leq p$. Comme $R^j(\rho_T)_*(F_T)$ est un $\mathcal{O}_{\bar{X}_T}$-module de type fini pour $j\leq p$, z' est dans une composante irréductible de $\overline{\{x'\}}_\xi$ dont le point générique y' est dans X_T. Soit y l'image de y' dans X, $y\in\overline{\{x\}}_s$, y est une générisation de z, i.e. $z=y\in X$.

2) $\Longrightarrow$ 1) : Nous allons utiliser la proposition précédente.

Il suffit donc de montrer que pour toute flèche dans $\underline{C}$:

$$\varphi:(T,\eta,\xi)\longrightarrow(S,t,s)$$

où (T,η,ξ) est un trait tel que $k(\eta)\simeq k(t)$, $R^j(\rho_T)_*(F_T)$ est un $\mathcal{O}_{\bar{X}_T}$-module de type fini pour $j\leq p$.

Grâce à la condition 2.i), il suffit de voir que si $x'\in(\mathrm{Supp}\,F_T)_\eta$ et si $\mathrm{codim}_{\overline{\{x'\}}}((\bar{X}_T-X_T)\cap\overline{\{x'\}}_\xi)=1$, alors prof $F_{T,x'}\geq p+1$. Soient x' un tel point, $z'\in(\bar{X}_T-X_T)\cap\overline{\{x'\}}_\xi$ tel que $\dim\mathcal{O}_{z'}=\dim\mathcal{O}_{x'}+1$, x et z les images de x' et z' dans $\bar{X}$, d'où une flèche dans $\underline{C}$:

$$(\bar{X}_T,x',z')\xrightarrow{1_{\bar{X}}\times\varphi}(\bar{X},x,z)\ .$$

Comme $\bar{X}\longrightarrow S$ est localement de type fini, il existe un voisinage affine $V=\mathrm{Spec}\,B$ de z dans $\bar{X}$ tel que B soit un quotient d'un anneau de polynômes $R=A[T_1,\ldots,T_r]$. Pour montrer que prof $F_{T,x'}\geq p+1$, on peut remplacer $\bar{X}$ par $V=\mathrm{Spec}\,B$, puis supposer que B lui-même est une A-algèbre de polynômes, i.e. supposer $\bar{X}$ affine à fibres lisses.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que prof $F_{T,x'}\leq p$. Comme $k(\eta)\simeq k(t)$, $\mathcal{O}_{T,x'}\simeq\mathcal{O}_{t,x}$ et $F_{T,x'}\simeq F_{t,x}$, par suite prof $F_{t,x}\leq p$. Appliquons la condition 2ii) : z appartient à une composante irréductible de $\overline{\{x\}}_s$ dont le point générique est dans X. Comme $z\in\bar{X}-X$, la condition i) montre que dans ces conditions, il existe $y\in\overline{\{x\}}_s\cap X$, y générisation de z tel que prof $F_{s,y}\geq p+1$. D'autre part, on a les relations suivantes :

$$\dim \mathcal{O}_{s,y}+1 \leq \dim \mathcal{O}_{s,z} \leq \dim \mathcal{O}_{\xi,z'} = \dim \mathcal{O}_{T,x'} = \dim \mathcal{O}_{t,x}$$

et $\dim \mathcal{O}_{s,y}+1 \leq \dim \mathcal{O}_{t,x}$ (*). D'autre part

$$\dim \mathcal{O}_{t,x}-p \leq \mathrm{dp}\, F_{t,x} \leq \mathrm{dp}\, F_{s,y} \leq \dim \mathcal{O}_{s,y}-(p+1)$$

où $\mathrm{dp}\, F_{t,x}$ (resp. $\mathrm{dp}\, F_{s,y}$) désigne la dimension projective du $\mathcal{O}_{t,x}$- (resp. $\mathcal{O}_{s,y}$-) module $F_{t,x}$ (resp. $F_{s,y}$), et $\dim \mathcal{O}_{t,x} \leq \dim \mathcal{O}_{s,y}-1$ (**).

Ces deux relations (*) et (**) étant contradictoires, on a nécessairement $\mathrm{prof}\, F_{T,x'} \geq p+1$.

<u>Proposition</u> 8. <u>Soient</u> $(S,X,\bar{X},F,p)$ <u>comme en</u> 0.a),b),c), I <u>un idéal de</u> A , A' <u>le complété de</u> A <u>pour la topologie</u> I-<u>adique</u>, $S' = \mathrm{Spec}\, A'$, $\varphi : S' \longrightarrow S$ <u>le morphisme associé</u>, $X' = X\times_S S'$, $\bar{X}' = \bar{X}\times_S S'$, $F' = F\otimes_A A'$, $\rho' = \rho\times 1_{S'}$.

<u>Supposons que</u> :

i) <u>Les foncteurs</u> $R^j\rho_*(F\otimes_S .)$ <u>sont de type fini pour</u> $j\leq p$.

ii) <u>Pour tout</u> $x\in \mathrm{Supp}\, F$ <u>tel que</u> $\mathrm{prof}\, F_{f(x),x} \leq p+1$, <u>les points génériques des fibres</u> $\overline{\{x\}}_s$, $s\in V(I)$, <u>sont dans</u> X .

<u>Alors</u>

i') <u>Les foncteurs</u> $R^j\rho'_*(F'\otimes_{S'} .)$ <u>sont de type fini pour</u> $j\leq p$.

ii') <u>Pour tout</u> $x'\in \mathrm{Supp}\, F$ <u>tel que</u> $\mathrm{prof}\, F'_{f'(x'),x'} \leq p+1$, <u>où</u> $f' = f\times 1_{S'}$, <u>les points génériques des fibres</u> $\overline{\{x'\}}_{s'}$, $s'\in V(IA')$, <u>sont dans</u> X'.

<u>Démonstration</u> :

L'assertion i') est claire. De plus, grâce à la proposition 7, elle montre aussi que si $x'\in \mathrm{Supp}\, F'$ et si $\mathrm{prof}\, F'_{f'(x'),x'} \leq p$, alors les points génériques des fibres de $\overline{\{x'\}} \longrightarrow S'$ sont dans X'.

Soient $x'\in \mathrm{Supp}\, F'$ tel que $\mathrm{prof}\, F'_{f'(x'),x'} = p+1$, $t' = f'(x')$, $t = \varphi(t')$, x l'image de x' dans X , on a aussi $\mathrm{prof}\, F_{t,x} \leq p+1$.

Soient z' un point générique d'une fibre $\overline{\{x'\}}_{s'}$, $s'\in V(IA')$, $s = \varphi(s')$, z l'image de z' dans $\overline{\{x\}}_s$. Comme $\mathrm{prof}\, F_{t,x} \leq p+1$, z appartient à une composante irréductible de $\overline{\{x\}}_s$ dont le point générique est dans X (on utilise ii)).

Supposons que $z'\notin X'$ et par suite $z\notin X$. Comme $R^j\rho_*(F_s)$ est un $\mathcal{O}_{\bar{X}_s}$-module de type fini pour $j\leq p$, il existe $y\in \overline{\{x\}}_s$, générisation de z , tel que $\mathrm{prof}\, F_{s,y} \geq p+1$.

Comme dans la démonstration de la proposition 7, on se ramène au cas où $\bar{X}$ est affine et lisse au-dessus de S .

Comme les fibres du morphisme $X'_{t'} \longrightarrow X_t$ sont des schémas de Cohen-Macaulay, on a :

$$\dim \mathcal{O}_{t',x'} - p-1 = \dim \mathcal{O}_{t',x'} - \operatorname{prof} \mathcal{F}'_{t',x'} = \dim \mathcal{O}_{t,x} - \operatorname{prof} \mathcal{F}_{t,x} .$$

Par suite :

$$\dim \mathcal{O}_{t',x'} - p-1 = \operatorname{dp} \mathcal{F}_{t,x} \leq \operatorname{dp} \mathcal{F}_{s,y} = \dim \mathcal{O}_{s,y} - \operatorname{prof} \mathcal{F}_{s,y}$$

et $\dim \mathcal{O}_{t',x'} \leq \dim \mathcal{O}_{s,y}$.

De plus $\dim \mathcal{O}_{s,y} \leq \dim \mathcal{O}_{s,z} - 1 = \dim \mathcal{O}_{s',z'} - 1 \leq \dim \mathcal{O}_{t',x'} - 1$.

D'où une contradiction et par conséquent $z' \in X'$.

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> $(S,X,\bar{X},\mathcal{F},p)$ <u>comme en</u> 0.a),b),c). <u>On suppose que</u> A <u>est local d'idéal maximal</u> m , <u>que</u> $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow S$ <u>est propre</u>. <u>On suppose de plus que</u> :

i) <u>Pour tout</u> $j \leq p$, <u>les foncteurs</u> $R^j p_*(\mathcal{F} \otimes_A .)$ <u>sont de type fini</u>.

ii) <u>Pour tout</u> $x \in \operatorname{Supp} \mathcal{F}$ <u>tel que</u> $\operatorname{prof} \mathcal{F}_{f(x),x} = p+1$, <u>les points génériques de</u> $\overline{\{x\}} \cap V(m\mathcal{O}_{\bar{X}})$ <u>sont dans</u> X .

<u>Alors</u> $(S,X,\mathcal{F},p)$ <u>vérifie</u> (P_p).

<u>Démonstration</u> :

Grâce à la proposition 8, on peut supposer que A est complet pour la topologie m-adique et dans ce cas, on applique le corollaire 2 de la proposition 4.

IV - Cohomologie cohérente sur un schéma quasi-projectif

⓪ La situation envisagée est la suivante :

a) $S = \mathrm{Spec}\, A$, A est un anneau noethérien de dimension finie, $P = \mathbb{P}^N_S$ = espace projectif relatif, à fibres de dimension N , au-dessus de S .

b) $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & \bar{X} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\bar{f}"] & \mathbb{P}^N_S \arrow[dl, "h"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

ρ est une immersion ouverte, β une immersion fermée.

c) F est un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, plat sur S .

d) p est un entier ≥ 0 .

Remarquons tout d'abord que si $U = P-(\bar{X}-X)$, U est ouvert dans P et si $\alpha : U \hookrightarrow P$, F est aussi un $\mathcal{O}_U$-module de type fini et les foncteurs en $\mathcal{O}_S$-modules, $R^i\rho_*(F\otimes_S .)$ et $H^i(X,F\otimes_S .)$ sont de type fini pour $i \leq p$ si et seulement si les foncteurs $R^i\alpha_*(F\otimes_S .)$ et $H^i(U,F\otimes_S .)$ le sont, de sorte que pour représenter les complexes $\tau_{\leq p} R\rho_*F$ et $\tau_{\leq p} R\Gamma(X,F)$, on peut se ramener au cas où $X = U$, ouvert de P , ce que l'on fait. De plus X vérifie : $X_s = P_s$ pour tout $s \notin p(\mathrm{Supp}\, F)$.

① Enoncé des théorèmes.

Pour énoncer les résultats qui suivent nous avons besoin des définitions suivantes.

Définitions. Soient $\varphi : T \to S$ un morphisme localement de type fini, $X_T = X\times_S T$, $P_T = P\times_S T$, $F_T = \varphi^*(F)$, $\rho_T : X_T \hookrightarrow P_T$, $\rho_T = \rho \times 1_T$, U un ouvert de T . Le quadruplet (T,X_T,F_T,p) vérifie la propriété $(*)_p$ (resp. vérifie la propriété $(*)_p$ sur U) si :

il existe un couple (E,u), $E \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_{P_T})$, $u : E \to R(\rho_T)_*(F_T)$ tel que, pour tout $\mathcal{O}_T$-module M , la flèche induite par u :

$$\tau_{\leq p}(E\otimes_T M) \to \tau_{\leq p}(R(\rho_T)_*(F_T\otimes_T M))$$

soit un isomorphisme (resp. un isomorphisme sur U).

Proposition 9. (Si $S,X,F,p)$ vérifie $(*)_p$, alors (S,X,F,p) vérifie (P_p) (cf. Introduction).

Démonstration :

Soit (E,u), $E \in D_{parf}(\mathcal{O}_P)$, $u : E \to R\rho_*(F)$ tel que pour tout A-module M, $\tau_{\leq p}(E \otimes_A M) \simeq \tau_{\leq p} R\rho_*(F \otimes_A M)$. Si $\mathcal{O}_P(1)$ désigne un faisceau inversible très ample au-dessus de S, dans $D^+_{parf}(\mathcal{O}_P)$ E est isomorphe à un complexe E' de la forme :

$$0 \to \mathcal{O}_P(n_o)^{r_o} \to \mathcal{O}_P(n_1)^{r_1} \to \cdots \to \mathcal{O}_P(n_p)^{r_p} \to \cdots$$

où $n_i > 0$, $r_i > 0$ pour tout $i \geq 0$. Posons $L' = R\bar{f}_*E' = \bar{f}_*E'$, $u' : L' \simeq R\bar{f}_*(E) \xrightarrow{R\bar{f}_*u} R\bar{f}_*R\rho_*F = Rf_*F$. Soient L le complexe tronqué : $0 \to L'^{o} \to \cdots \to L'^{p+1} \to 0$, $u : L \to Rf_*F$ la flèche déduite naturellement de u'. Ils vérifient : pour tout A-module M , la flèche induite par $u : \tau_{\leq p}(L \otimes_A M) \to \tau_{\leq p}(Rf_*(F \otimes_A M))$ est un isomorphisme.

Théorème 1. Soient (S,X,F,p) comme en 0.a),b),c),d). On suppose que :

0) A est quotient d'un anneau régulier.

1) Pour tout $s \in S$, les $\mathcal{O}_{P_s}$-modules $R^j\rho_*(F_s)$ sont de type fini pour $j \leq p$.

2) Pour tout $x \in \operatorname{Supp} F$ tel que $\operatorname{prof} F_{f(x),x} \leq p+1$, les fibres de $\overline{\{x\}} \to S$ ont leurs points génériques dans X (où $\overline{\{x\}}$ désigne l'adhérence schématique dans P).

Alors (S,X,F,p) vérifie (P_p).

Théorème 2. Soient (S,X,F,p) comme en 0.a),b),c),d). On suppose que :

1) Pour tout $s \in S$, $R^j\rho_*(F_s)$ est un $\mathcal{O}_{P_s}$-module de type fini pour $j \leq p$.

2) Pour tout $x \in \operatorname{Supp} F$ tel que $\operatorname{prof} F_{f(x),x} \leq p+1$, alors les fibres de $\overline{\{x\}} \to S$ ont leurs points génériques dans X .

Alors

i) il existe un éclatement $\tilde{S} \xrightarrow{\pi} S$, isomorphisme en dehors d'un fermé de codimension ≥ 2 , tel que, si $\tilde{X} = X \times_S \tilde{S}$, $(\tilde{S},\tilde{X},\pi^*(F),p)$ vérifie $(*)_p$

ii) (S,X,F,p) vérifie (P_p)

iii) si de plus $(P-X) \xrightarrow{\bar{f}} S$ est fini, (S,X,F,p) vérifie aussi $(*)_p$.

Remarques.

R_1 : La condition 2) du théorème 1 n'est pas vérifiée dans l'exemple donné en 0.4 dans l'introduction.

R_2 : Dans le théorème 2, pour voir que $(S,X,\mathcal{F},p)$ vérifie (P_p), on peut, lorsque A est quotient d'un anneau régulier, appliquer bien sûr le théorème 1. Sans faire cette hypothèse sur A, une autre manière, lorsqu'on dispose de i), de montrer que $(S,X,\mathcal{F},p)$ vérifie (P_p) est la suivante :

On sait déjà que :

γ_1) $(\tilde{S},\tilde{X},\tilde{\mathcal{F}},p)$ vérifie (P_p) : on applique i) et la proposition 9.

Montrons, par récurrence sur $\dim A$, que $(S,X,\mathcal{F},p)$ vérifie (P_p).

γ_2) Si $\dim A \leq 1$, $\tilde{S} \simeq S$ et $(S,X,\mathcal{F},p)$ vérifie (P_p). Si $\dim A \geq 2$, soit I un idéal définissant le fermé F tel que π soit un isomorphisme sur $S-F$, $\dim A/I^n < \dim A$ pour tout $n > 0$ et $(S_n = \operatorname{Spec} A/I^n$, $X_n = X \times_S S_n$, $\mathcal{F}/I^n\mathcal{F},p)$ vérifie (P_p) pour tout $n > 0$.

γ_3) Soient $(\text{"}\varinjlim\text{"}\, L_\lambda, u = (u_\lambda))$, $\text{"}\varinjlim\text{"}\, L_\lambda \in \operatorname{Ind} D_{parf}(A)$, $u = (u_\lambda)$: $\text{"}\varinjlim\text{"}\, L_\lambda \longrightarrow R\Gamma(X,\mathcal{F})$, tel que $\varinjlim u_\lambda$ soit un isomorphisme, $\text{"}\varprojlim\text{"}\, L^*_\lambda \in \operatorname{Pro} D_{parf}(A)$ le pro-objet dual. Par le théorème 6 de la première partie et γ_1), $\tau_{\geq -p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L^*_\lambda \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}) \in D^b_{coh}(\mathcal{O}_{\tilde{S}})$ et par le théorème 4 de cette première partie et γ_2), $\tau_{\geq -p}(\text{"}\varprojlim\text{"}\, L^*_\lambda) \in D^b_{coh}(A)$. On applique à nouveau ce théorème 6 et $(S,X,\mathcal{F},p)$ vérifie (P_p).

Les théorèmes 1 et 2 nécessitent quelques constructions supplémentaires et seront démontrés plus loin.

Corollaire 1. *Soit* $(S,X,\mathcal{F},p)$ *comme dans le théorème* 3.

a) *Pour* $i \leq p$, *la fonction* $s \longrightarrow \dim_{k(s)} H^i(X_s, \mathcal{F} \otimes k(s))$ *est semi-continue supérieurement sur* S.

b) *Supposons de plus* S *réduit et connexe. Soit* $i \leq p$. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

b.1) *la fonction* $s \longrightarrow \dim_{k(s)} H^i(X_s, \mathcal{F} \otimes k(s))$ *est constante*

b.2) $H^i(X,\mathcal{F})$ *est un* A-*module plat et pour tout* s, *la flèche naturelle* : $H^i(X,\mathcal{F}) \otimes k(s) \longrightarrow H^i(X_s, \mathcal{F} \otimes k(s))$, *est un isomorphisme.*

Si ces conditions sont remplies, $H^{i-1}(X,\mathcal{F}) \otimes k(s) \simeq H^{i-1}(X_s, \mathcal{F} \otimes k(s))$ *pour tout* $s \in S$.

c) Supposons S connexe. Si pour un $i \leq p$, $H^i(X_s, F\otimes k(s)) = 0$ pour tout $s \in S$, la flèche naturelle :

$$H^{i-1}(X,F) \otimes k(s) \longrightarrow H^{i-1}(X_s, F\otimes k(s))$$

est un isomorphisme, pour tout $s \in S$.

Démonstration :

Toutes ces propriétés énumérées dans le corollaire sont bien connues et sont conséquences du fait que les foncteurs en $\mathcal{O}_S$-modules $H^i(X, F\otimes_S .)$, pour $i \leq p$, sont les foncteurs d'homologie associés à un complexe parfait L . Dans ce cas, une démonstration détaillée se trouve dans [5] Appendix to §4.

Corollaire 2. Soit (S,X,F,p) comme en 0.a),b),c),d). Supposons que :

1) $\dim(P-X)/S \leq N-(p+2)$

2) pour tout $s \in S$, F_s vérifie la propriété S_{p+2} ([4] 5.7.2) i.e. pour tout $x \in \operatorname{Supp} F_s$, $\operatorname{prof} F_{s,x} \geq \inf(p+2, \dim \mathcal{O}_{s,x})$.

Alors (S,X,F,p) vérifie (P_p).

② Prolongements d'un $\mathcal{O}_X$-module.

Soient (S,X,F,p) comme en 0.a),b),c),d), X ouvert dans $P = \mathbb{P}^N_S$. Plus généralement, nous aurons aussi à considérer le cas où S n'est plus affine, mais éventuellement est un schéma projectif au-dessus d'un schéma affine noethérien. S'il en est ainsi, il reste néanmoins vrai que tout $\mathcal{O}_S$-module de type fini admet une présentation par des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de type fini.

Dans ce qui suit, on considère F comme un complexe concentré en degré 0.

Définition. Un complexe $E \in D^+_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_P)$ est un prolongement de F à P si $E_{|X} \simeq F$.

Lemme 1. Il existe un tel prolongement $E \in D^+_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_P)$. De plus, pour tout A-module M , $E_{|X} \otimes_S M \simeq F \otimes_S M$.

Démonstration :

Soient $\bar{F}$ un $\mathcal{O}_P$-module de type fini tel que $\bar{F}_{|X} = F$, et

$$\dashrightarrow L^{-i} \xrightarrow{d^{-i}} L^{-i+1} \dashrightarrow L^{-1} \longrightarrow L^0 \longrightarrow \bar{F} \longrightarrow 0$$

une résolution projective de $\bar{F}$ par des $\mathcal{O}_P$-modules localement libres de type fini. Comme F est plat sur S et les fibres de $P \to S$ sont regulieres de dimension N, $\tilde{L}^{-N} = \operatorname{Ker} d^{-N+1}$ est localement libre sur X. Posons $L : 0 \to \tilde{L}^{-N} \to L^{-N+1} \to \cdots \to L^0 \to 0$, $L^* = \operatorname{Hom}^\cdot(L,\mathcal{O}_P)$. Soit $E^* \in D^-_{parf}(\mathcal{O}_P)$ tel que $E^* \simeq L^*$. Le complexe $E = \operatorname{Hom}(E^*,\mathcal{O}_P)$ vérifie $E_{|X} \simeq F$ et pour tout A-module M, $E_{|X} \otimes_A M \simeq F \otimes_A M$.

<u>Lemme</u> 2. <u>Soient</u> $E \in D^+_{parf}(\mathcal{O}_P)$ <u>un prolongement de</u> F, $E^* = \operatorname{Hom}(E,\mathcal{O}_P)$. <u>On a</u>, <u>pour</u> $n \in \mathbb{Z}$:

$$H^n(E^*_{|X} \otimes_S \cdot) = \operatorname{Ext}^n(F \otimes_S \cdot, \mathcal{O}_X \otimes_S \cdot) .$$

<u>Démonstration</u> :

Pour tout S-module M, on a une suite spectrale :

$$E_2^{rq}(M) = \operatorname{Ext}^r(H^q(E_{|X} \otimes M), \mathcal{O}_X \otimes M) \Longrightarrow H^{r-q}(E^*_{|X} \otimes M) .$$

Comme $H^q(E_{|X} \otimes M) = 0$ si $q \neq 0$ et $H^0(E_{|X} \otimes M) = F \otimes M$, on a

$$\operatorname{Ext}^r(F \otimes M, \mathcal{O}_X \otimes M) = H^r(E^*_{|X} \otimes M) \quad \text{pour tout } r .$$

Pour $s \in S$, on note $E_s = E \otimes k(s)$, $P_s = P \otimes \operatorname{Spec} k(s)$, $F_s = F \otimes k(s)$ etc...

<u>Proposition</u> 10. <u>Soient</u> $E \in D^+_{parf}(\mathcal{O}_P)$ <u>un prolongement de</u> F, $E^* = \operatorname{Hom}(E,\mathcal{O}_P)$ <u>et</u> $G = \operatorname{coker}(E^{-1} \to E^0)$, <u>alors</u> :

a) $G_{|X}$ <u>est plat sur</u> S

b) <u>pour</u> $n > 0$, $H^n(E^*_{|X} \otimes \cdot) = \operatorname{Ext}^n(G_{|X} \otimes_S \cdot, \mathcal{O}_X \otimes_S \cdot)$

c) <u>pour</u> $n > 0$, $s \in S$, $\operatorname{codim}_{P_s}(\operatorname{Supp} H^n(E_s^*) \cap X_s) \geq n$

<u>De plus, pour</u> $q \geq 0$, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

d.1) <u>pour tout</u> $s \in S$, $H^n(E_s) = 0$ <u>si</u> $n < 0$, $\operatorname{prof} G_{s,z} \geq q$ <u>pour</u> $z \in (P-X)_s$

d.2) <u>pour tous</u> $n > 0$, $s \in S$, $\operatorname{codim}_{P_s}(\operatorname{Supp} H^n(E_s^*)) \geq n$ <u>et</u>

$$\operatorname{codim}_{P_s}(\operatorname{Supp} H^n(E_s^*) \cap (P-X)_s) \geq n+q .$$

<u>Démonstration</u> :

Comme E est un prolongement de F, $H^n(E \otimes_S \cdot)_{|X} = 0$ si $n \neq 0$. En particulier, $G_{|X}$ est plat sur S et la suite

$$\cdots \to E^{-1}_{|X} \to E^0_{|X} \to G_{|X} \to 0$$

est exacte et définit une résolution de G sur X par des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres. Pour tout $n>0$ et tout $\mathcal{O}_S$-module M :

$$H^n(E^*_{|X}\otimes_S M) = \mathrm{Ext}^n(G_{|X}\otimes M, \mathcal{O}_X\otimes M)$$

et on a montré a) et b).

Comme les fibres de $X \xrightarrow{f} S$ sont régulières, $\mathrm{Ext}^n(G_s,\mathcal{O}_{P_s})_x = 0$ pour tout $x\in X_s$ tel que $\dim \mathcal{O}_{s,x} < n$. De plus, pour un tel x ,

$$H^n(E^*_s)_x = \mathrm{Ext}^n(G_s,\mathcal{O}_{P_s})_x = 0$$

et on a c).

Soit q un entier ≥ 0 . Montrons que d.1) $\Longrightarrow$ d.2) : si $H^n(E_s)=0$ pour $n<0$ et tout $s\in S$, les suites

$$\dashrightarrow E_s^{-1} \longrightarrow E_s^{0} \longrightarrow G_s \longrightarrow 0 \qquad \text{pour tout } s\in S$$

$$\dashrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^{0} \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

sont exactes, G est plat sur S , $H^n(E^*_s) = \mathrm{Ext}^n(G_s,\mathcal{O}_{P_s})$ pour $n>0$ et tout $s\in S$. En particulier

$$\mathrm{codim}_{P_s}(\mathrm{Supp}\, H^n(E^*_s)) \geq n \qquad \text{pour } n>0 \text{ et tout } s\in S.$$

Si de plus $\mathrm{prof}\, G_{s,z} \geq q$ pour $z\in (P\text{-}X)_s$, $\mathrm{dp}\, G_{s,z} \leq \dim \mathcal{O}_{s,z}-q$,

$$H^n(E^*_s)_z = \mathrm{Ext}^n(G_s,\mathcal{O}_{P_s})_z = 0 \quad \text{pour } n>\dim \mathcal{O}_{s,z}-q$$

et

$$\mathrm{codim}_{P_s}(\mathrm{Supp}\, H^n(E^*_s)\cap (P\text{-}X)_s) \geq n+q \qquad \text{pour tout } s\in S .$$

Montrons pour terminer que d.2) $\Longrightarrow$ d.1) : si pour tout $s\in S$, $\mathrm{codim}_{P_s} H^n(E^*_s) \geq n$ pour $n>0$, un calcul rapide montre que $H^n(E_s)=0$ pour $n<0$. Par suite, G est plat sur S , $H^n(E^*_s) = \mathrm{Ext}^n(G_s,\mathcal{O}_{P_s})$ pour $n>0$ et tout $s\in S$. Si de plus $\mathrm{codim}_{P_s}(\mathrm{Supp}\, H^n(E^*_s)\cap (P\text{-}X)_s) \geq n+q$, on a

$$H^n(E^*_s)_z = \mathrm{Ext}^n(G_s,\mathcal{O}_{P_s})_z = 0 \quad \text{pour } z\in (P\text{-}X)_s \text{ , } n > \dim \mathcal{O}_{s,z}-q$$

i.e. $\mathrm{prof}\, G_{s,z} \geq q$ pour $z\in (P\text{-}X)_s$.

Finalement, nous arrivons à la proposition suivante qui est le point clé de ce paragraphe.

Proposition 11. Supposons $\dim(P-X)/S) \leq N-(p+2)$ et soient $E \in D^+_{parf}(\mathcal{O}_P)$ un prolongement de F, $E^* = \mathrm{Hom}^\cdot(E,\mathcal{O}_P)$. Si pour tout $n>0$, tout $s \in S$:

$$\operatorname{codim}_{P_s}(\operatorname{Supp} H^n(E^*_s) \cap (P-X)_s) \geq n+p+2$$

il existe une flèche $v : E \longrightarrow R\rho_* F$ dans $D(\mathcal{O}_P)$ telle que, pour tout $\mathcal{O}_S$-module M, la flèche induite par v :

$$\tau_{\leq p}(E \otimes_S M) \longrightarrow \tau_{\leq p} R\rho_*(F \otimes_A M)$$

soit un isomorphisme.

Démonstration :

La flèche naturelle $E \longrightarrow R\rho_*(E_{|X})$ définit une flèche

$$v : E \longrightarrow R\rho_*(F) .$$

Soit M un $\mathcal{O}_S$-module de type fini. Posons $G = \operatorname{coker} E^{-1} \longrightarrow E^0$. Par la proposition précédente, on a : $H^n(E_s) = 0$ pour $n<0$ et tout $s \in S$. Par conséquent, $H^n(E \otimes_S M) = 0$ pour $n<0$, et

$$E \otimes_S M \simeq \tau^{\geq 0}(E \otimes_S M)$$

où $\tau^{\geq 0}(E \otimes_S M)$ est le complexe : $0 \longrightarrow G \otimes_S M \longrightarrow E^1 \otimes_S M \longrightarrow E^2 \otimes_S M \longrightarrow \cdots$. Soient $s \in S$, et $z \in (P-X)_s$, toujours par la proposition précédente, on a $\operatorname{prof} G_{s,z} \geq p+2$ et

$$(1) \begin{cases} G \otimes_S M \simeq \rho_*(G_{|X} \otimes_S M) \\ R^n\rho_*(G_{|X} \otimes_S M) = 0 \quad \text{si} \quad p>0 \quad \text{et} \quad 0<n \leq p . \end{cases}$$

Comme $\dim((P-X)/S) \leq N-p-2$, on a de même, pour tout i

$$(2) \begin{cases} E^i \otimes_S M \simeq \rho_*(E^i_{|X} \otimes_S M) \\ R^n\rho_*(E^i \otimes_S M) = 0 \quad \text{si} \quad p>0 \quad \text{et} \quad 0<n \leq p . \end{cases}$$

Les relations (1) et (2) montrent que

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq p}(E \otimes_S M) \simeq \tau_{\leq p}(\tau^{\geq 0}(E \otimes_S M)) & \longrightarrow & \tau_{\leq p}(R\rho_*(E_{|X} \otimes M)) \\ & & \wr\| \\ & & \tau_{\leq p}(R\rho_*(F \otimes M)) \end{array}$$

est un isomorphisme.

<u>Proposition</u> 12. <u>Soit</u> $F \in D^-_{parf}(\mathcal{O}_P)$, q <u>un entier</u>. <u>L'ensemble</u> U <u>des points</u> $s \in S$ <u>tels que pour</u> $n > 0$,

$$\operatorname{codim}_{P_s}(\operatorname{Supp} H^n(F_s) \cap (P-X)_s) \geq n+q$$

<u>est ouvert</u>.

<u>Démonstration</u> :

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, posons $T_n = \bigcup_{m \geq n} \operatorname{Supp} H^m(F)$. C'est un fermé de P qui possède la propriété suivante :

$$T_n \cap P_s = \bigcup_{m \geq n} \operatorname{Supp} H^m(F_s) \qquad \text{pour tout } s \in S .$$

Comme $p : P \to S$ est propre, l'ensemble U_n des points $s \in S$ tels que $\operatorname{codim}_{P_s}(T_n \cap (P-X))_s \geq n+q$ est ouvert et il en est de même de $U = \bigcap_{n>0} U_n$.

③ <u>Prolongement adapté d'un</u> $\mathcal{O}_X$<u>-module</u> F .

Parmi les complexes $E \in D^+_{parf}(\mathcal{O}_P)$ qui prolongent F, il en existe des "minimaux", i.e. tels que pour $i \in \mathbb{Z}$, $E^* = \operatorname{Hom}^\cdot(E, \mathcal{O}_P)$

$$\bigcup_{j \geq i} \operatorname{Supp} H^j(E^*) = \bigcup_{j \geq i} \overline{\operatorname{Supp} H^j(E^*) \cap X} = \bigcup_{j \geq i} \overline{\operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j(F, \mathcal{O}_X)} .$$

La proposition 4 ci-dessous assure l'existence de tels prolongements. Au préalable, pour la montrer, rappelons quelques propriétés de la catégorie $D(\mathcal{O}_P)$ (cf. [7] 1.4).

. Si $j : T \hookrightarrow P$ est une immersion fermée, $h : U = P-T \hookrightarrow P$ l'immersion ouverte associée, on dispose, sur la catégorie $\underline{Mod}(P)$ (resp. $\underline{Mod}(U)$, $\underline{Mod}(T)$) des $\mathcal{O}_P$ (resp. $\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_T$)-modules, des foncteurs :

$j_* : \underline{Mod}(T) \to \underline{Mod}\ P$ (image directe)

$j^! : \underline{Mod}(P) \to \underline{Mod}(T)$ (sections à support dans T)

$h^* : \underline{Mod}(P) \to \underline{Mod}(U)$ (restriction)

$h_* : \underline{Mod}(U) \to \underline{Mod}(P)$ (image directe)

$h_! : \underline{Mod}(U) \to \operatorname{Pro} \underline{Mod}(P)$ (prolongement par zéro)

$j_*, h^*, h_!$ sont exacts, $j^!$ et h_* sont exacts à gauche, $h_!$ et h^* sont adjoints. Ces foncteurs fournissent par dérivation (à droite) des foncteurs :

$$\begin{aligned} Rj_* = j_* &: D(\mathcal{O}_T) \longrightarrow D(\mathcal{O}_P) \\ Rj^! &: D^+(\mathcal{O}_P) \longrightarrow D^+(\mathcal{O}_T) \\ Rh^* = h^* &: D(\mathcal{O}_P) \longrightarrow D(\mathcal{O}_U) \\ Rh_* &: D^+(\mathcal{O}_U) \longrightarrow D^+(\mathcal{O}_P) \\ h_! &: D^+(\mathcal{O}_U) \longrightarrow \mathrm{Pro}\ D^+(\mathcal{O}_P) . \end{aligned}$$

Pour plus de simplicité dans les notations, on note encore $Rj^! = j^!$ et $Rh_* = h_*$. Si $E \in D^+(\mathcal{O}_P)$, on a un triangle distingué naturel

$$(j_*j^!E \longrightarrow E \longrightarrow h_*h^*E) .$$

Si $E \in D^+_{q.c}(\mathcal{O}_P)$ (catégorie de $D^+(\mathcal{O}_P)$ des complexes à cohomologie quasi-cohérente), h_*h^*E et par suite $j_*j^!E$ sont aussi dans $D^+_{q.c}(\mathcal{O}_P)$.

<u>Remarque</u>. Si $E \in D^b_{coh}(\mathcal{O}_P)$, $j_*j^!E$ n'est pas en général dans $D^b_{coh}(\mathcal{O}_P)$. Si E est concentré en degrés $\geq a$,

$$H^a(j_*j^!E) = \{\text{sections de } H^a(E) \text{ à support dans } T\}$$

est un $\mathcal{O}_P$-module de type fini, les autres modules de cohomologie de $j_*j^!E$ ne sont pas en général de type fini.

<u>Lemme. Soient</u> U <u>un ouvert de</u> P <u>et</u> $u : F \longrightarrow G$ <u>une flèche de</u> $D^+_{q.c}(\mathcal{O}_P)$ <u>tel que</u> $u_{|U}$ <u>soit un isomorphisme. Si</u> $G \in D^b_{coh}(\mathcal{O}_P)$, <u>il existe</u> $F' \in D^b_{coh}(\mathcal{O}_P)$, $v : F' \longrightarrow F$ <u>tel que, si</u> $u' = u \circ v$, $u'_{|U}$ <u>soit un isomorphisme.</u>

<u>Démonstration</u> :

Posons $h : U \hookrightarrow P$, $G' = h^*G$. Par adjonction, on a :

$$\mathrm{Hom}_U(G', h^*F) = \mathrm{Hom}_P(h_!G', F) .$$

Si I est un idéal définissant le fermé $P-U$, $h_!G' = \text{"}\varprojlim_{n>0}\text{"}\ I^nG$ et la formule précédente s'écrit encore

$$\mathrm{Hom}_U(G', h^*F) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_P(I^nG, F) .$$

Il existe donc $n > 0, \varphi \in \mathrm{Hom}_P(I^nG, F)$ tel que $\varphi_{|U} = u^{-1}_{|U}$.

Notations. Si $G \in D(\mathcal{O}_P)$, *pour* $i \in \mathbb{Z}$, *on note* $H^{\geq i}(G) = H^*(\tau^{\geq i}(G))$.

Proposition 13. *Soient* P *un schéma localement noethérien*, X *un ouvert de* P , $G \in D^b_{coh}(\mathcal{O}_P)$. *Il existe* $F \in D^b_{coh}(\mathcal{O}_P)$ *et* $u : F \longrightarrow G$ *une flèche de* $D^b_{coh}(\mathcal{O}_P)$ *tels que* :

a) $u_{|X}$ *est un isomorphisme*

b) *pour tout* $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Supp}\, H^{\geq i}(F) = \overline{\mathrm{Supp}\, H^{\geq i}(G) \cap X}$.

De plus, si G *est concentré en degré dans l'intervalle* [a,b] , *on peut choisir* F *concentré en degré dans* [a,b].

Démonstration :

Montrons cette proposition par récurrence sur la longueur N du complexe G que l'on suppose par commodité concentré en degrés positifs. On pose encore $H^* = H^*(G)$.

1) $N = 0$: dans ce cas $G = H^0$ et $F =$ sous-module de G des sections à support dans $\overline{\mathrm{Supp}\, G \cap X}$.

2) $N > 0$: posons $T = \overline{\mathrm{Supp}\, H^* \cap X}$, $j : T \hookrightarrow P$. La flèche naturelle $\pi : j_*j^!G \longrightarrow G$ est un isomorphisme sur X .

Regardons le triangle distingué associé à $j_*j^!G$ (cf. 1ère partie § 2.5 lemme 1)

$$\begin{tikzcd} & \tau^{\geq 1}(j_*j^!G) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \tau_{\leq 0}(j_*j^!G) \arrow[rr, "can"] & & j_*j^!G \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

et notons $\xi : \tau^{\geq 1}(j_*j^!G) \longrightarrow \tau_{\leq 0}(j_*j^!G)[1]$ la flèche de $D(\mathcal{O}_P)$ définie par ce triangle. Si $M(\xi)$ désigne le mapping cone de ξ , rappelons que $j_*j^!G \simeq M(\xi)[-1]$.

Appliquons le lemme précédent à la flèche naturelle :

$$\tau^{\geq 1}(j_*j^!G) \xrightarrow{\pi'} \tau^{\geq 1}(G) .$$

Il existe $G' \in D^b_{coh}(\mathcal{O}_P)$ que l'on peut supposer concentré en degrés dans [1,N], $v' : G' \longrightarrow \tau^{\geq 1}(j_*j^!G)$ tel que $\pi' \circ v'_{|X}$ soit un isomorphisme. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à G', il existe $F' \in D^b_{coh}(\mathcal{O}_P)$, $u' : F' \longrightarrow G'$ tels que :

a') $u'_{|X}$ est un isomorphisme

b') pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Supp} \mathcal{H}^{\geq i}(F') = \overline{\operatorname{Supp} \mathcal{H}^{\geq i}(G') \cap X}$

$= \overline{\operatorname{Supp} \mathcal{H}^{\geq i}(G) \cap X}$ pour $i \geq 1$.

Si φ est la flèche composée définie par le carré commutatif :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{v' \circ u'} & \tau^{\geq 1}(j_*j^!G) \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\xi \\ \tau_{\leq 0}(j_*j^!G)[1] & \xrightarrow{=} & \tau_{\leq 0}(j_*j^!G)[1] \end{array}$$

et si $M(\varphi)$ désigne le mapping cone de φ , $F = M(\varphi)[-1]$, par construction, on a :

a) Pour $i \geq 1$, $H^i(F) = H^i(F')$ et $\operatorname{Supp} \mathcal{H}^{\geq i}(F) = \overline{\operatorname{Supp} \mathcal{H}^{\geq i}(G) \cap X}$, $H^0(F) = H^0(j_*j^!G) =$ sous-module de H^0 des sections à support dans T . En particulier, $F \in D^b_{coh}(\mathcal{O}_P)$, $\operatorname{Supp} H^*(F) = T$.

b) Le carré commutatif $(*)$ définit une flèche $w : M(\varphi) \longrightarrow M(\xi)$ et par décalage une flèche $v : F \longrightarrow j_*j^!G$. Posons $u = \pi \circ v : F \longrightarrow G$, $v_{|X}$ et $u_{|X}$ sont des isomorphismes.

<u>Corollaire et définition</u>. <u>Soit</u> (S,X,p) <u>comme en</u> 0.a),b). <u>Un</u> <u>$\mathcal{O}_X$-module</u> <u>de type fini</u> F , <u>plat sur</u> S , <u>possède un prolongement</u> $E \in D^+_{parf}(\mathcal{O}_P)$ <u>tel que</u>, <u>si</u> $E^* = \operatorname{Hom}^\bullet(E,\mathcal{O}_P)$:

1) <u>pour</u> $i \geq 0$, $\operatorname{Supp} \mathcal{H}^{\geq i}(E^*) = \overline{\bigcup_{j \geq i} \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j(F,\mathcal{O}_X)}$

2) <u>pour</u> $i < 0$, $H^i(E^*) = 0$.

<u>Un tel prolongement est dit adapté</u>.

<u>Démonstration</u> :

Soit $E \in D^+_{parf}(\mathcal{O}_P)$ un prolongement de F , $E^* = \operatorname{Hom}^\bullet(E,\mathcal{O}_P)$. Comme $E_{|X} \simeq F$, $E^*_{|X} \simeq \operatorname{RHom}(F,\mathcal{O}_X)$ et $E^*_{|X} \simeq \tau^{\geq 0}(E^*)_{|X}$. Soit $G \in D^-_{parf}(\mathcal{O}_P)$ tel que $G \simeq \tau^{\geq 0}(E^*)$, $E' = \operatorname{Hom}^\bullet(G,\mathcal{O}_P)$ est un autre prolongement de F . Appliquons la proposition précédente à G :

il existe $F \in D^b_{coh}(\mathcal{O}_P)$, concentré en degrés ≥ 0 , $u : F \longrightarrow G$ tels que :

- $u_{|X} : F_{|X} \longrightarrow G_{|X}$ est un isomorphisme. Par suite $\mathrm{RHom}(F,\mathcal{O}_P)$ est un prolongement de F.

- pour $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Supp}\, \mathcal{H}^{\geq i}(F) = \overline{\mathrm{Supp}\, \mathcal{H}^{\geq i}(G) \cap X} = \overline{\bigcup_{j \geq i} \mathrm{Supp}\, \mathcal{E}xt^j(F,\mathcal{O}_X)}$.

Soient $F'' \in D^-_{parf}(\mathcal{O}_P)$ tel que $F'' \simeq F$, $E'' = \mathrm{Hom}^{\cdot}(F'',\mathcal{O}_P) \in D^+_{parf}(\mathcal{O}_P)$ est un prolongement adapté de F.

En combinant le corollaire de la proposition 13 et la proposition 11 on obtient le résultat suivant sur lequel s'appuie la démonstration des théorèmes 1 et 2.

Théorème 3. Soient (S,X,F,p) comme en 0.a),b),c),d) (et plus généralement S projectif au-dessus d'un schéma affine noethérien). Pour $n \geq 0$, posons $T_n = \overline{\bigcup_{j \geq n} \mathrm{Supp}\, \mathcal{E}xt^j(F,\mathcal{O}_X)}$ et supposons que :

1) $\dim(P-X)/S \leq N-(p+2)$

2) pour tout $n > 0$, $\dim((T_n \cap (P-X))/S) \leq N-(n+p+2)$.

Alors (S,X,F,p) vérifie $(*)_p$.

④ Démonstration du théorème 1.

Soit (S,X,F,p) comme en 0.a),b),c),d) tel que :

1) Pour tout $s \in S$, les $\mathcal{O}_{\bar{X}_s}$-modules $R^j\rho_*(F\otimes_A .)$ sont de type fini pour $j \leq p$.

2) Pour tout $x \in \mathrm{Supp}\, F$ tel que $\mathrm{prof}\, F_{f(x),x} \leq p+1$, alors les fibres de $\overline{\{x\}} \longrightarrow S$ ont leurs points génériques dans X.

Rappelons (cf. introduction) ce qu'il nous faut montrer pour que (S,X,F,p) vérifie (P_p) :

α) Pour tout idéal I, tout A-module de type fini M et tout $j \leq p$, $H^j(X,F\otimes_A M)$ est un A-module de type fini, et $\widehat{H^j(X,F\otimes_A M)} = \varprojlim_n H^j(X,F\otimes_A M/I^n M)$ (où $\widehat{H^j(X,F\otimes_A M)}$ désigne le complété de $H^j(X,F\otimes_A M)$ pour la topologie I-adique).

β) Pour tout fermé irréductible S' de S, il existe un ouvert affine non vide $U = \mathrm{Spec}\, B$ de S' tel que $(U, X\times_S U, F\otimes_A B, p)$ vérifie (P_p).

La proposition 8 montre que les propriétés 1) et 2) sont conservées par un changement de base $S' \xrightarrow{\varphi} S$ où $S'=\mathrm{Spec}\, A'$, A' complété de A pour la topologie I-adique, lorsque A est un quotient d'un anneau régulier.

L'assertion α) résulte du corollaire 1 de la proposition 4 de II.

Pour voir que β) est satisfaite, il nous suffit grâce à la proposition 5 de démontrer la proposition suivante :

Proposition 14. Soit (S,X,F,p) comme en 0.a),b),c),d). Supposons que pour tout point générique η de S, tout $j \leq p$, $R^j(\rho_\eta)_*(F_\eta)$ soit un $\mathcal{O}_{P_\eta}$-module de type fini. Alors il existe un ouvert dense U de S tel que (S,X,F,p) vérifie $(*_p)$ sur U.

Démonstration :

Par le théorème 4, il nous faut voir qu'il existe un ouvert dense U de S tel que :

1) pour tout $s \in U$, $\dim(P-X)_s \leq N-(p+2)$

2) si $T_n = \bigcup_{j \geq n} \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j(F,\mathcal{O}_X)$, pour $n > 0$, $\dim(T_n \cap (P-X))_s \leq N-(n+p+2)$ pour tout $s \in U$.

Montrons 1) : Soit η un point générique de S. Si $\eta \notin f(\operatorname{Supp} F)$, $X_\eta = P_\eta$ et $\dim(P-X)_\eta \leq N-(p+2)$. Si $\eta \in f(\operatorname{Supp} F)$, comme $R^j\rho_*(F_\eta)$ est un $\mathcal{O}_{P_\eta}$-module de type fini pour $j \leq p$, $\dim(P-X)_\eta \leq N-(p+2)$. Il existe un ouvert dense V_1 de S tel que, pour tout $s \in V_1$, $\dim(P-X)_s \leq N-(p+2)$.

Montrons 2) : Soit η un point générique de S. Si $\eta \notin f(\operatorname{Supp} F)$, on a : $\dim(T_n \cap (P-X))_\eta \leq N-(n+p+2)$ pour tout $n > 0$. Si $\eta \in f(\operatorname{Supp} F)$, soient n un entier > 0 et $z \in ((P-X) \cap T_n)_\eta$. Il existe $x \in \bigcup_{j \geq n} \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j(F,\mathcal{O}_X)$ tel que $z \in \overline{\{x\}}$. Comme $R^j\rho_*(F_\eta)$ est un $\mathcal{O}_{P_\eta}$-module de type fini pour $0 \leq j \leq p$, on a (proposition 5) :

$$\operatorname{prof} F_{\eta,x} + \dim \mathcal{O}_{\overline{\{x\}},z} \geq p+2 .$$

Donc $\operatorname{dp} F_{\eta,x} = \dim \mathcal{O}_{\eta,x} - \operatorname{prof} F_{\eta,x} \leq \dim \mathcal{O}_{\eta,z} - p-2$ et $\operatorname{Ext}^j(F_\eta,\mathcal{O}_{X_\eta})_x = 0$ pour $j \geq \dim \mathcal{O}_{\eta,z} - p-1$ et $\dim \mathcal{O}_{\eta,z} \geq n+p+2$.

Si V_2 est l'ensemble des points $s \in S$ tels que $\dim(T_n \cap (P-X))_s \leq N-(n+p+2)$ pour tout $n > 0$, V_2 est ouvert (proposition 12) et dense dans S. Pour terminer la démonstration de cette proposition, on prend pour U l'intersection de V_1 et V_2.

(5) Démonstration du théorème 2.

Soient (S,X,F,p) comme en 0.a),b),c),d) et vérifiant les conditions 1) et 2) du théorème 2. Montrons comme précédemment que les hypothèses 1) et 2) du théorème 3 sont vérifiées, éventuellement après un éclatement de la base S.

Si $s \notin f(\operatorname{Supp} F)$, $X_s = P_s$. Si $s \in f(\operatorname{Supp} F)$, comme $R^j p_*(F_s)$ est un $\mathcal{O}_{P_s}$-module de type fini pour $j \leq p$, on a :

$$\dim(P-X)_s \leq N-(p+2)$$

et par suite $\dim((P-X)/S) \leq N-(p+2)$. La condition a) du théorème 3 est vérifiée et le reste après tout changement de base. Posons comme d'habitude,

$T_n = \overline{\bigcup_{j \geq n} \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j(F,\mathcal{O}_X)}$ et $p(n) = p+n+2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 1. L'ensemble U des points $s \in S$ tels que pour $n > 0$ $\dim(T_n \cap (P-X))_s \leq N-p(n)$ est un ouvert qui contient tous les points de codimension ≤ 1.

Démonstration :

Soient E un prolongement adapté de F, $E^* = \operatorname{Hom}^{\bullet}(E,\mathcal{O}_P)$. Pour $n > 0$, $\operatorname{Supp} H^{\geq n}(E^*) = T_n$ (cf. corollaire de la proposition 13). La proposition 12 montre alors que U est ouvert. Soit $s \in S$ tel que $\dim \mathcal{O}_s \leq 1$, montrons que $s \in U$. Soient $n > 0$ et z un point générique de $T_n \cap (P-X)_s$. Il existe $x \in \bigcup_{j \geq n} \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j(F,\mathcal{O}_X)$ tel que $z \in \overline{\{x\}}$. Deux cas sont possibles :

1) $x \in X_s$, i.e. $x \in \bigcup_{j \geq n} \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j(F_s,\mathcal{O}_{X_s})$.

Comme $R^j p_*(F_s)$ est un $\mathcal{O}_{P_s}$-module de type fini pour $j \leq p$

$$\operatorname{prof} F_{s,x} + \dim \mathcal{O}_{\overline{\{x\}},z} > p+1$$

i.e. $\operatorname{prof} F_{s,x} + \dim \mathcal{O}_{s,z} - \dim \mathcal{O}_{s,x} > p+1$

i.e. $\dim \mathcal{O}_{s,z} > p+1+\operatorname{dp} F_{s,x}$

et $\operatorname{Ext}^j(F_s,\mathcal{O}_{X_s})_x = 0$ pour $j+p+1 \geq \dim \mathcal{O}_{s,z}$

et $\operatorname{Ext}^j(F,\mathcal{O}_X)_x = 0$ pour $j+p+1 \geq \dim \mathcal{O}_{s,z}$.

Par suite $\dim \mathcal{O}_{s,z} \geq n+p+2 = p(n)$.

2) $x \in X_t$, $t \neq s$, $x \in \bigcup_{j \geq n} \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j(F_t, \mathcal{O}_{X_t})$.

Grâce à 1), on peut supposer que z est un point générique de $\overline{\{x\}} \cap P_s$. Dans ce cas, l'hypothèse 2) du théorème 2 montre que :

$$\operatorname{prof} F_{t,x} > p+1 .$$

Si $\dim \mathcal{O}_s = 1$, $\dim \mathcal{O}_t = 0$ et on a

$$p+1+\operatorname{dp} F_{t,x} < \operatorname{prof} F_{t,x} + \operatorname{dp} F_{t,x} = \dim \mathcal{O}_{t,x} = \dim \mathcal{O}_x$$

et $p+1+\operatorname{dp} F_{t,x} < \dim \mathcal{O}_z - 1 = \dim \mathcal{O}_{s,z}$.

On conclut comme précédemment.

Remarques.

i) Ce lemme achève la démonstration du théorème 2 lorsque $\dim S \leq 1$.

ii) On a encore vu en cours de démonstration du lemme 1 (cf. 2)) que si s est un point de S tel que pour un $n > 0$:

$$\dim(T_n \cap (P-X))_s > N-p(n)$$

il existe un point $x \in T_n$ tel que :

1) $x \in X$, $t = f(x) \neq s$, $\operatorname{prof} F_{t,x} \geq p+2$

2) $\dim \overline{\{x\}}_s \geq \dim(\overline{\{x\}} \cap (P-X)_s) > N-p(n)$

3) $x \in \bigcup_{j \geq n} \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j(F_t, \mathcal{O}_{X_t})$, en particulier $\operatorname{dp} F_{t,x} \geq n$ et

$\dim \mathcal{O}_{t,x} = \operatorname{dp} F_{t,x} + \operatorname{prof} F_{t,x} \geq p(n) = n+p+2$ i.e. $\dim \overline{\{x\}}_t \leq N-p(n)$.

iii) Pour $n > 0$, définissons l'ensemble

$Y_n = \{y \in T_n \cap X$, il existe $s \in S$ tel que $\dim(\overline{\{y\}} \cap (P-X)_s) > N-p(n)\}$.

Il possède les propriétés suivantes :

- Y_n est stable par générisation
- si $y \in Y_n \cap P_t$, $\dim \overline{\{y\}}_t \leq N-p(n)$ (cf. ii)-3)).

Lemme 2. Il existe un morphisme $\varphi : S' \longrightarrow S$, produit d'éclatements, isomorphisme sur un ouvert U de S tel que $\operatorname{codim}(S-U) \geq 2$, des sous-schémas fermés Y'_n de

$\varphi^{-1}(T_n)$ <u>pour</u> $n>0$ <u>tels que</u>, <u>si</u> $P' = P\times_S S'$:

1) $\dim(Y'_n/S) \leq N-p(n)$

2) $\varphi^{-1}(Y_n) \subset Y'_n$.

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de montrer ce lemme pour un seul $n>0$. On pose $T_n = T$, $Y_n = Y$, $\ell = N-p(n)$.

Soient Z_0 la réunion des composantes irréductibles de T dont les points génériques sont dans Y et $U_0 = \{t \in S, \dim(Z_0)_t \leq \ell\}$, U_0 est un ouvert et contient tous les points de codimension ≤ 1 .

Soit $\varphi_1 : S_1 \longrightarrow S$ un éclatement à centre dans $S-U_0$ tel que le transformé strict Z'_0 de Z_0 vérifie :

$$\dim(Z'_0/S_1) \leq \ell \qquad \text{(cf. [6] 5.7.10)}$$

Soient Z_1 la réunion des composantes irréductibles de $T\cap p^{-1}(S-U_0)$ dont les points génériques sont dans Y , $U_1 = \{t \in S, \dim(Z_1)_t \leq \ell\}$, U_1 est ouvert, $U_1 \supset U_0$ et U_1 contient tous les points génériques de $S-U_0$ (cf. remarque iii)). De même, soit $\varphi_2 : S_2 \longrightarrow S_1$ un éclatement à centre dans $S_1-\varphi_1^{-1}(U_1)$ tel que, si Z'_1 est le transformé strict de $\varphi_1^{-1}(Z_1)$, on ait

$$\dim(Z'_1/S_2) \leq \ell \ .$$

En recommençant les mêmes opérations, on obtient :

- une stratification $U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_r$ de S

- des éclatements $\varphi_i : S_i \longrightarrow S_{i-1}$ le long de $(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_{i-1})^{-1}(S-U_{i-1})$ pour $i = 1,\ldots,r$

- des fermés Z_i pour $i \in [0,\ldots,r-1]$, $Z_i \subset T\cap p^{-1}(S-U_{i-1})$ dont les points génériques sont dans Y et tels que si Z'_i est le transformé strict de $(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_{i-1})^{-1}(Z_i)$

$$\dim(Z'_i/S_{i+1}) \leq \ell \ .$$

On pose $\varphi = \varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_r$, $Y' = \bigcup_{i=1}^{r-1} (\varphi_{i+1}\circ\ldots\circ\varphi_r)^{-1}(Z'_i)$, $S' = S_r$. Il est clair que Y' vérifie les conditions a) et b) du lemme 2.

Terminons la démonstration du théorème 2 :

Soient $S' \xrightarrow{\varphi} S$ le morphisme construit au lemme 2, $P' = P\times_S S'$, $X' = X\times_S S'$, $F' = \varphi^*(F)$, Y'_n les sous-schémas fermés de $\varphi^{-1}(T_n)$ pour $n > 0$, définis au lemme 2, $T'_n = \overline{\bigcup_{j\geq n} \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j(F', \mathcal{O}_{X'})}$. Vérifions que : $\dim(T'_n \cap (P'-X')/S') \leq N-p(n)$ pour tout $n > 0$. Comme $T'_n \cap X' = \bigcup_{j\geq n} \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j(F', \mathcal{O}_{X'})$, on a : $T'_n \subseteq \varphi^{-1}(T_n)$.

Soient $z' \in T'_n \cap (P'-X')$, s' son image dans S'. Il existe $x' \in T'_n \cap X'$ tel que $z' \in \overline{\{x'\}}$. Si $z = \varphi(z')$, $x = \varphi(x')$, on a : $z \in \overline{\{x\}} \cap (P-X)$.

Si $x' \in Y'_n$, $z' \in Y'_n$ et $\dim \mathcal{O}_{s',z'} \geq p(n)$.

Si $x' \notin Y'_n$, $x \notin Y_n$ et $p(n) \leq \dim \mathcal{O}_{s,z} \leq \dim \mathcal{O}_{s',z'}$.

Ce qui achève de montrer que $\dim(T'_n \cap (P'-X')/S') \leq N-p(n)$ pour tout $n > 0$ et la première assertion i) du théorème 2. Nous avons vu que l'assertion ii) est une conséquence de i) (cf. remarque R_2 qui suit l'énoncé du théorème 2).

Vérifions la dernière assertion iii) :

Si $(P-X) \xrightarrow{\bar{f}} S$ est fini, vérifions que l'on a déjà sur S :

$$\dim(T_n \cap (P-X)/S) \leq N-p(n) \quad \text{pour tout } n > 0 .$$

Dans ce cas, $\dim(T_n \cap (P-X)/S) \leq 0$ et il faut montrer que, si $T_n \cap (P-X)_s \neq \emptyset$ pour un $s \in S$, alors $p(n) \leq N$. Soient $z \in T_n \cap (P-X)_s$ et x une générisation de z dans $T_n \cap X$ tels que $\dim \mathcal{O}_{\overline{\{x\}},z} = 1$. On a :

$$N \geq \dim \mathcal{O}_{f(x),x} \geq N-1$$

$$\operatorname{prof} F_{f(x),x} \geq p+1$$

$$\operatorname{Ext}^j(F_{f(x)}, \mathcal{O}_{X_{f(x)}})_x = \operatorname{Ext}^j(F, \mathcal{O}_X)_x = 0 \quad \text{pour } j \geq N-(p+1)$$

et par suite $n \leq N-(p+2)$ i.e. $p(n) \leq N$.

Bibliographie

[1] N. BOURBAKI.- Algèbre commutative. Ch. III, Hermann.

[2] G. FALTING.- Algebraisation of some formal vectors bundles. Annals of Math. 110 (1979).

[3] A. GROTHENDIECK.- SGA II. Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. IHES 1962.

[4] A. GROTHENDIECK.- EGA Ch. III. Pub. Math. n° 11 n° 24.

[5] D. MUMFORD.- Abelian Varieties. Tata Institute Oxford University Press.

[6] L. GRUSON et M. RAYNAUD.- Platitude en géométrie algébrique. Inv. Math. 13 1971.

[7] A.A. BEILINSON, J. BERNSTEIN, P. DELIGNE.- Analyse et topologie sur les espaces singuliers. Astérisque 100, 1982.