

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

B. HELFFER

J. SJÖSTRAND

**Analyse semi-classique pour l'équation de Harper  
(avec application à l'équation de Schrödinger  
avec champ magnétique)**

*Mémoires de la S. M. F. 2<sup>e</sup> série, tome 34 (1988)*

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1988\\_2\\_34\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1988_2_34__1_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**Analyse semi-classique pour l'équation de Harper**  
(avec application à l'équation de Schrödinger avec champ magnétique)

par  
B. Helffer                      et                      J. Sjöstrand

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous commençons l'étude du spectre de l'équation de Harper (bien connue des physiciens du solide) par des méthodes d'analyse semi-classiques en justifiant mathématiquement la démarche du physicien Wilkinson. Des applications sont données à l'étude du spectre de l'équation de Schrödinger avec potentiel électrique et champ magnétique périodiques.

ABSTRACT

In this paper, we begin the study of the spectrum of the Harper's equation (which appears naturally in solid state physics) by semi-classical methods. We give a mathematical justification of the approach by Wilkinson. Applications are given to the study of the spectrum of the Schrödinger equation with periodic electric potential and magnetic fields.

---

Texte reçu le 30 décembre 1987, révisé le 8 septembre 1988.

B.HELFFER, Département de Mathématiques, Université de Nantes, 44072 Nantes cedex 03, France.

J.SJÖSTRAND, Département de Mathématiques, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France.

§.0 Introduction.....	3
§.1 Préliminaires .....	10
§.2 Analyse spectrale modulo $O(h^\infty)$ .....	16
§.3 Décroissance exponentielle .....	27
§.4 Matrice d'interaction .....	34
§.5 Etude de $W_{\alpha,0}$ pour $\ \alpha\ _\infty=1$ .....	45
§.6 Renormalisation .....	58
§.7 Extension au cas de l'opérateur normalisé .....	63
§.8 Quelques calculs pratiques des coefficients d'interaction.....	74
§.9 Application à l'équation de Schrödinger avec champ magnétique..	81
Appendice A : une estimation technique.....	107
Appendice B : le papillon de Hofstadter.....	109
Références.....	110

## 0. Introduction

On s'intéresse dans cet article au spectre de l'opérateur de Harper dans  $l^2(\mathbb{Z})$  donné par :

$$H_{\theta,\lambda,h} u(n) = \frac{u(n+1) + u(n-1)}{2} + \lambda \cos(hn + \theta) u(n),$$

ce modèle (appelé également " almost-Mathieu equation " en souvenir de l'équation de Mathieu :  $u \rightsquigarrow -u'' + \cos x u$ ) est couramment introduit dans les ouvrages de Physique des solides, en liaison par exemple avec l'équation de Schrödinger dans  $\mathbb{R}_{x,y}^2$  avec potentiel périodique en  $x$  et  $y$  et avec un champ magnétique constant. Ici  $\lambda > 0$ ,  $h \in \mathbb{R}$ .

Si  $h/2\pi$  est rationnel, on peut employer la théorie de Floquet pour réduire l'étude du spectre de  $H_\theta (= H_{\theta,\lambda,h})$  à celle d'une matrice finie dépendant de 2 paramètres. La quantité qui nous intéresse dans ce cas est la réunion des spectres de  $H_\theta$  quand  $\theta$  varie dans  $\mathbb{R}$ . Cet ensemble est alors une réunion finie d'intervalles ( " bandes " ) fermés.

Quand  $h/2\pi$  est irrationnel, on montre facilement que le spectre de  $H_\theta$  comme ensemble est indépendant de  $\theta$ . Nous sommes alors en présence d'un opérateur de Schrödinger discret à potentiel quasi-périodique, et il y a une littérature mathématique et physique abondante sur ces opérateurs. Concernant l'opérateur de Harper, on peut en particulier mentionner le travail de Bellissard et Simon [BE-SI], qui montre que pour un ensemble dense ( en fait une intersection dénombrable d'ouverts denses) dans l'ensemble des paramètres  $(\lambda, h)$ , le spectre de  $H$  n'est dense dans aucun intervalle non-trivial (cf également) [SI]<sub>1</sub>). Le cas  $\lambda=1$  semble jouer un rôle important comme valeur de transition entre les cas  $\lambda < 1$  et  $\lambda > 1$ .

Dans ce cas, il ne semble pas y avoir des résultats rigoureux, mais il est conjecturé que pour  $h/2\pi$  irrationnel, le spectre est un ensemble de Cantor de mesure nulle. Les premières études sur ce problème remontent sans doute à Azbel [AZ], Aubry-André [A.A.] et Hofstaedter [HO]. L'approche de Hofstaedter conduit à un célèbre papillon (cf la figure [ Appendice B], initialement conçue par Hofstaedter, dans une version réalisée à Nantes) et on peut décrire brièvement sa démarche ainsi. Pour comprendre le cas irrationnel, Hofstaedter étudie numériquement pour  $h/2\pi = p/q$  avec  $q \in \mathbb{N}$  ( $p$  premier avec  $q$ ,  $q \leq 50$ ) les ensembles  $\bigcup_\theta \text{Sp}(H_{\theta,1,2\pi p/q})$  qu'il reproduit sur des droites d'ordonnée  $p/q$ . On obtient ainsi le " papillon de Hofstaedter " laissant deviner la nature cantorienne du spectre dans le cas irrationnel.

Hofstaedter détermine aussi empiriquement des règles permettant de

déterminer la configuration des bandes correspondant à  $h=2\pi p/q$  en liaison avec le développement en fraction continue de  $p/q$  (développement qui apparaît aussi dans les considérations semi-classiques de Azbel). On trouvera dans le survey de J. Sokoloff [SO] de nombreuses références. Mais, sur une suggestion de J. Bellissard, nous nous sommes beaucoup inspirés d'une suite de travaux de Wilkinson [WILK] qui montre comment des techniques semi-classiques permettent d'interpréter une partie du dessin de Hofstaedter.

Plus précisément, l'analyse de Wilkinson est basée sur une analyse B.K.W. qui fait intervenir une infinité de " puits " dans l'espace  $T^*R$ . On remarque en effet que l'étude de  $\bigcup_{\theta} \text{Sp } H_{\theta, \lambda, h}$  est équivalente à l'étude de l'opérateur pseudo-différentiel :  $\lambda \cos h D_x + \cos x$  sur  $L^2(R)$ .

Ces puits interagissent par effet tunnel et, pour  $h$  assez petit, Wilkinson indique comment, en analysant ces interactions, on tombe sur un nouvel opérateur de Harper avec  $\lambda=1$ , mais avec un nouvel  $h$ . Pour obtenir la structure complète du spectre, on " n'a qu'à " itérer cette procédure indéfiniment. La suite des  $h$  qu'on obtient est donnée par le développement du premier  $h/2\pi$  en fraction continue, et Wilkinson indique que sa procédure marche si tous les  $h$  sont petits. Son travail montre une intuition remarquable, étant donné que ses arguments du point de vue mathématique sont assez flous, mais la rigueur mathématique est remplacée par l'intuition du physicien et des vérifications numériques très soigneuses dans l'esprit de celles de Hofstaeder. Comme l'avait pressenti

J. Bellissard, il se trouve que les techniques que nous avons développées dans le cas d'un nombre fini de puits dans  $[\text{HE-S}]_{1,2}$  pour l'étude de l'effet tunnel pour l'équation de Schrödinger et étendues au cas d'une infinité de puits par Carlsson [CAR], peuvent fournir la justification rigoureuse des arguments de Wilkinson [WILK], mais à chaque étape de la procédure, il y a une petite zone du spectre qui demande une analyse différente (abordée de manière non rigoureuse chez

Azbel [AZ]), et qui ne sera pas développée ici. Ceci nous empêche pour l'instant de donner une analyse complète du spectre et nous démontrerons donc seulement les résultats suivants sur le spectre de l'opérateur :

$$P(h) = \cos h D_x + \cos x \quad \text{sur } L^2(\mathbb{R}).$$

### Théorème 1

Soit  $\varepsilon_0 > 0$ , il existe alors  $C_0 > 0$ , tel que si  $h/2\pi \in ]0, 1[ \setminus \mathbb{Q}$  et  $h/2\pi$  admet le développement en fractions continues :

$$h/2\pi = 1/(q_1 + 1/(q_2 + 1/(q_3 + \dots)))$$

avec  $q_j \in \mathbb{Z}$ ,  $|q_j| \geq C_0$ , on a :

Le plus petit intervalle fermé qui contient  $\text{Sp}(P)$  est de la forme :

$$[-2 + O(1/|q_1|), 2 - O(1/|q_1|)].$$

$\text{Sp}(P) \cap J \subset \cup_{N_- \leq j \leq N_+} J_j$ , où les  $J_j$  sont des intervalles fermés de longueur  $\neq 0$ ,

avec  $\partial J_j \subset \text{Sp}(P)$ .

$J_{j+1}$  se trouve à droite de  $J_j$  à une distance  $\approx 1/|q_1|$ .

$J_0$  est de longueur  $2\varepsilon_0 + O(1/|q_1|)$ , contenant 0 à une distance  $O(1/|q_1|)$  de son centre.

Les autres bandes sont de largeur  $e^{-C(j)/|q_1|}$ , avec  $C(j) \approx 1$ .

Pour  $j \neq 0$ , soit  $K_j$  la fonction affine croissante, qui transforme  $J_j$  en  $[-2, 2]$ ;

on a alors :  $K_j[J_j \cap \text{Sp}(P)] \subset \cup_k J_{j,k}$

où les  $J_{j,k}$  ont les mêmes propriétés et ainsi de suite.

Ici  $a \approx b$  signifie que  $a/b$  et  $b/a$  sont majorées par une constante qui ne dépend que de  $\varepsilon_0$ .

Dans le cas rationnel, on a le même résultat, mais la procédure s'arrête après un nombre fini d'étapes.

Le cas où  $\hbar/2\pi$  est proche d'un rationnel  $p_0/q_0$ , abordé par Sokoloff [SO] et [WILK], sera développé dans un article ultérieur.

Comme nous l'avions mentionné, notre motivation initiale pour l'étude de l'équation de Harper est née dans l'étude semi-classique de l'équation de Schrödinger avec champ magnétique au " fond de puits " , étude entamée dans [HE-SJ]<sub>3</sub>.

On considère dans  $\mathbb{R}^2$  l'équation de Schrödinger avec champ magnétique :

$$P_{tA}(h_0) = (h_0 D_{x_1} - tA_1)^2 + (h_0 D_{x_2} - tA_2)^2 + V$$

avec  $V, A$  analytiques et pour

$$B = \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)$$

les hypothèses suivantes de périodicité :

$$V(x_1 + a_1, x_2) = V(x_1, x_2)$$

$$V(x_1, x_2 + a_2) = V(x_1, x_2)$$

$$B(x_1 + a_1, x_2) = B(x_1, x_2)$$

$$B(x_1, x_2 + a_2) = B(x_1, x_2)$$

On suppose que  $V$  n'a qu'un minima par cellule aux points  $(j a_1, k a_2)$   $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$  et que ces minima sont non-dégénérés avec  $V(0,0)=0$ .

On fait de plus les hypothèses d'invariance par rotation :

$$V(x_1, x_2) = V(-x_2, x_1)$$

$$B(x_1, x_2) = B(-x_2, x_1)$$

On étudie alors le spectre de  $P_{tA}$  près de la première valeur propre  $\lambda_t(h_0)$  de l'oscillateur harmonique en fond de puits :

$$\left( h_0 D_{y_1} - \frac{t B(0,0)}{2} \right)^2 + \left( h_0 D_{y_2} + \frac{t B(0,0)}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \langle V''(0,0) y/y \rangle$$

Sous des hypothèses techniques sur  $V$  rappelées au §9 (cf [HE-SJ]<sub>1</sub>) et portant

sur les géodésiques minimales entre les puits et la distance pour la métrique d'Agmon entre les différents puits, on obtient en particulier le théorème suivant :

**Théorème 2 :**

Soit  $\Phi$  le flux de  $B \, dx_1 \wedge dx_2$  à travers la cellule  $[-a_1/2, a_1/2] \times [-a_2/2, a_2/2]$ ;

Soit  $\varepsilon_0 > 0$ . Il existe alors  $C_0 > 0$  t.q. si  $|t| \leq 1/C_0$ ,  $h_0 \in ]0, 1/C_0]$ ,

$(t\Phi/2\pi h_0)^{-1} \in ]0, 1[ \setminus \mathbb{Q} \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$  admettant un développement en fractions continues :

$$2\pi h_0/t\Phi = \pm(1/(q_0 \pm 1/(q_1 \pm 1/(q_2 \pm \dots)))) \quad \text{avec } q_j \in \mathbb{N}^*, q_j \geq C_0, j=1,2,\dots$$

le plus petit intervalle fermé  $J_0(h_0)$  qui contient

$$\text{Sp}(P_{tA}(h_0)) \cap \left\{ \lambda(h_0) + \left[ -\frac{1}{C_0} h_0, \frac{1}{C_0} h_0 \right] \right\}$$

est de la forme

$$\rho(h_0) \cdot [-2 + O(1/q_1) + O(e^{-1/C_0 h_0}), 2 - (O(1/q_1) + O(e^{-1/C_0 h_0}))].$$

où  $\rho(h_0) > 0$  a un développement de la forme

$$\tilde{\rho}(h_0) = h_0^{-v_0} (a_0(h_0)) e^{-S(t)/h_0}$$

(où  $v_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_0(h_0)$  est un symbole analytique elliptique).

De plus dans  $J_0(h_0)$ , le spectre de  $P_{tA}(h_0)$  a la même structure que celle expliquée au théorème 1 après une similitude.

#

La démonstration consistera à faire une première réduction ramenant à l'étude d'une équation de Harper légèrement perturbée avec  $h = t\Phi/h_0 + 2\pi q_0$  où le théorème 1 s'applique.

Le plan de cet article est le suivant:

Au §1, on donne quelques préliminaires sur l'équation de Harper.

Au §2, on mène l'analyse spectrale modulo  $O(h^\infty)$  dans l'esprit des travaux de [HE-RO]<sub>1</sub>.

Au §3, on généralise les inégalités d'Agmon au cas de l'opérateur:

$$\lambda \cos h D_x + \cos x$$

et on étudie la décroissance exponentielle des fonctions propres de problèmes à un puits.

Les §4 et 5 sont consacrés à l'étude de la matrice d'interaction et de l'effet tunnel.

Le §6 justifie l'approche de Wilkinson concernant la renormalisation ramenant à chaque étape l'étude à une nouvelle équation de Harper perturbée.

Le §7 étend le travail des §1 à 4 au cas de l'équation de Harper perturbée.

Au §8, on calcule explicitement dans presque tous les cas des équivalents asymptotiques des coefficients d'interaction.

Enfin le §9 est consacré à l'étude de l'équation de Schrödinger avec champ magnétique.

### Remerciements

Nous tenons à remercier J. Bellissard qui nous a suggéré l'étude de ce problème et signalé les travaux de M. Wilkinson. Nous remercions également M. Wilkinson et A. Grigis pour d'utiles conversations sur ce travail et J.P. Guillemin et P. Treton pour leur aide dans la réalisation du papillon de Hofstaedter.

## 1. Préliminaires.

On s'intéresse à  $H_\theta : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$  défini par

$$(1.1) \quad H_\theta u(k) = \frac{1}{2}(u_{k+1} + u_{k-1}) + \lambda \cos(\alpha k + \theta) u_k,$$

où  $\lambda > 0$ ,  $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$ . On s'intéresse tout particulièrement à  $\cup_\theta \text{Sp}(H_\theta)$ , où  $\text{Sp}$  désigne : " Spectre de " .

On remarque que  $H_\theta = H_{\theta+2\pi}$  et que  $H_\theta$  est unitairement équivalent à  $H_{\theta+\alpha}$ . De plus, comme  $\|H_{\theta_1} - H_{\theta_2}\| \leq \lambda |\theta_1 - \theta_2|$ , on a :

$$(1.2) \quad t \in \text{Sp}(H_{\theta_1}) \Rightarrow \exists s \in \text{Sp}(H_{\theta_2}) \text{ avec } |t-s| \leq \lambda |\theta_1 - \theta_2|.$$

Si  $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ , on en déduit, que  $\text{Sp}(H_\theta)$  est indépendant de  $\theta$ . En effet, si  $\theta, \omega \in \mathbb{R}$ , il existe une suite  $k_j \in \mathbb{Z}$  t.q.  $\omega + k_j \alpha \rightarrow \theta \pmod{2\pi}$ ,  $j \rightarrow \infty$ .

Comme  $H_{\omega+k_j\alpha}$  est unitairement équivalent à  $H_\omega$ , si  $t \in \text{Sp}(H_\theta)$  et  $\varepsilon > 0$ , on peut

trouver  $s \in \text{Sp}(H_\omega)$  avec  $|t-s| \leq \varepsilon$ . Donc  $t \in \text{Sp}(H_\omega)$  et on a :

$$\text{Sp}(H_\theta) \subset \text{Sp}(H_\omega).$$

De même  $\text{Sp}(H_\omega) \subset \text{Sp}(H_\theta)$ . Donc  $\text{Sp}(H_\theta) = \text{Sp}(H_\omega)$ .

Une autre conséquence de (1.2) et du fait que  $\text{Sp } H_\theta = \text{Sp } H_{\theta+\alpha}$  est que

$$(1.3) \quad \cup_\theta \text{Sp}(H_\theta) = \text{Sp}(\tilde{H}) \quad \text{où}$$

$\tilde{H} : L^2(\mathbb{Z} \times [0, \alpha]) \rightarrow L^2(\mathbb{Z} \times [0, \alpha])$  est défini par :

$$(1.4) \quad (\tilde{\Pi}u)(k, \theta) = \Pi_{\theta} u(., \theta)$$

Identifiant  $L^2(Z \times [0, \alpha[)$  avec  $L^2(R)$  par  $u(k, \theta) \rightarrow \tilde{u}(x)$ ,  $x = \theta + \alpha k$ , l'opérateur  $\tilde{\Pi}$  devient :

$$(1.5) \quad \tilde{\Pi} = \frac{1}{2}(\tau_{\alpha} + \tau_{-\alpha}) + \lambda \cos x,$$

où  $\tau_{\alpha}$  désigne l'opérateur de translation  $\tau_{\alpha}v(x) = v(x - \alpha)$ .

Dans cet article nous allons faire une analyse de  $\tilde{\Pi}$  pour  $\alpha$  petit, et nous écrivons plutôt  $h = \alpha > 0$ . Comme  $\tau_{-h} = e^{ihD}$ , nous pouvons écrire  $P = \tilde{\Pi}$  comme un opérateur  $h$ -pseudodifférentiel :

$$(1.6) \quad P = \cos(hD) + \lambda \cos x$$

dont le symbole associé est

$$(1.7) \quad p = \cos \xi + \lambda \cos x.$$

Appliquant la  $h$ -transformée de Fourier :

$$(1.8) \quad \mathcal{F}_h u(\xi) = (2\pi h)^{-n/2} \int e^{-ix\xi/h} u(x) dx,$$

l'opérateur  $P$  se transforme en  $\lambda \cos(h D_{\xi}) + \cos \xi = \lambda(\cos(h D_{\xi}) + \frac{1}{\lambda} \cos \xi)$ . On pourra donc supposer dans la suite que  $0 < \lambda \leq 1$ .

Si  $\tau = \tau_{2\pi}$  et  $\tau^*$  désigne l'opérateur de multiplication pour  $e^{2\pi i x/h}$ , alors  $P$  commute avec  $\tau$  et  $\tau^*$  et donc aussi avec  $T_{\alpha} = \tau^{\alpha_1} \tau^{*\alpha_2}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2$ . Toute la difficulté du problème provient du fait que  $\tau$  et  $\tau^*$  ne commutent pas entre eux. En effet  $\tau \tau^* = \exp(-(2\pi)^2 i/h) \tau^* \tau$ . Soit :

$$(2\pi)^2/h = 2\pi k + \tilde{h}, \text{ où } k \text{ est un entier.}$$

Alors  $\exp(-(2\pi)^2 i/h) = \exp - i\tilde{h}$ . Si on pose,

$$(1.9) \quad T_{\alpha} = \tau^{\alpha_1} \tau^{\alpha_2},$$

alors

$$(1.10) \quad T_{\alpha} T_{\beta} = \exp(i \alpha_2 \beta_1 \tilde{h}) \cdot T_{\alpha+\beta},$$

$$(1.10') \quad T_{\alpha} T_{\beta} = \exp(i \sigma(\alpha, \beta) \tilde{h}) \cdot T_{\beta} T_{\alpha},$$

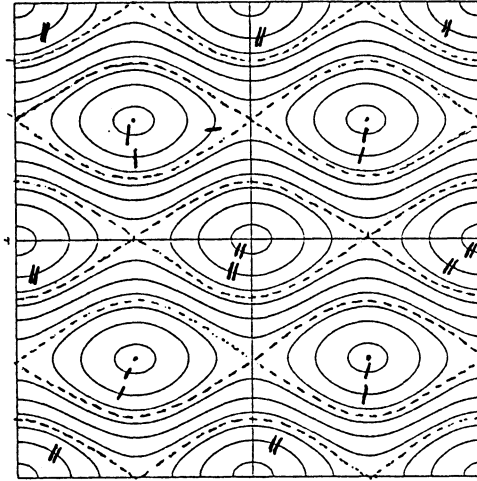
où  $\sigma$  désigne la forme symplectique standard :  $\sigma((x, \xi), (y, \eta)) = \xi y - x \eta$ .

Le spectre de  $P$  est contenu dans l'intervalle  $[-(1+\lambda), (1+\lambda)]$ . Etudions la structure de  $\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 ; p(x, \xi) = E\}$  pour différentes valeurs de  $E$  entre  $-(1+\lambda)$  et  $(1+\lambda)$ . On remarque que  $(x, \xi) \in p^{-1}(E) \Rightarrow (x+2\pi n, \xi+2\pi m) \in p^{-1}(E)$  et que  $(x+\pi, \xi+\pi) \in p^{-1}(-E)$ . Ecrivons  $\cos \xi = E - \lambda \cos x$ , pour  $p(x, \xi) = E$ , et étudions différents cas :

Cas 1.  $-(1-\lambda) < E < (1-\lambda)$ . Alors  $-1 < E - \lambda \cos x < 1$  et  $p=E$  est une réunion de courbes non-compactes, obtenues par une translation par des multiples de  $2\pi$  en  $\xi$  et éventuellement une réflexion  $\xi \rightarrow -\xi$ , à partir de la courbe  $\xi = \arccos(E - \lambda \cos x)$ .

Cas 2.  $1-\lambda < E < 1+\lambda$ . Alors on a toujours  $E - \lambda \cos x \geq E - \lambda > 1 - 2\lambda \geq -1$ , tandis que :  $E - \lambda \cos \pi = E + \lambda > 1$ . Soit  $(x ; E - \lambda \cos x \leq 1, |x| < \pi) = [-\alpha, \alpha]$ . Alors  $p^{-1}(E)$  est la réunion des " cercles " obtenus par les translations  $(x, \xi) \rightarrow (x+2\pi n, \xi+2\pi m)$ , à partir du " cercle " ,  $\xi = \pm \arccos(E - \lambda \cos x)$ ,  $|x| \leq \alpha$ .

Traitant aussi le cas  $-(1+\lambda) < E < -(1-\lambda)$  par symétrie et les cas limites  $E = \pm(1+\lambda), \pm(1-\lambda)$  on trouve pour  $0 < \lambda < 1$  la structure suivante :

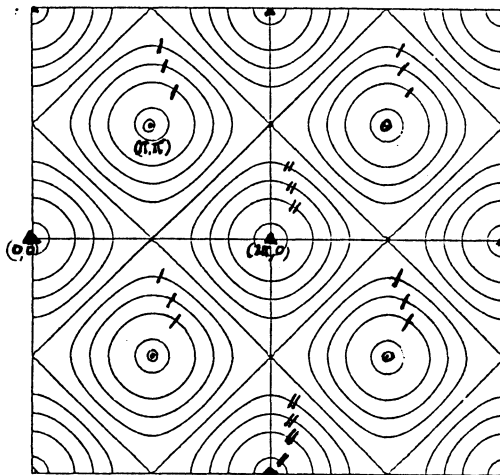


$- : -(1-\lambda) < E < (1-\lambda)$

$+ : -(1+\lambda) < E < -(1-\lambda)$

$\# : 1-\lambda \leq E \leq 1+\lambda$

Pour  $\lambda=1$  on trouve une structure plus simple :



$- : E=0$

$\circ : E=-2$

$+ : -2 < E < 0$

$\Delta : E=2$

$\# : 0 < E < 2$

Donc pour  $\pm E \in ]1-\lambda, 1+\lambda]$ , l'ensemble  $p=E$  est une réunion d'ensembles compacts connexes ; " les puits " . Pour  $\pm E=1+\lambda$  , ce sont des points (minima ou maxima non-dégénérés pour  $p$ ) et ,pour  $\pm E < 1-\lambda$  ,ce sont des courbes non bornées.

Si  $E \in ]1-\lambda, 1+\lambda]$  , on désigne par  $U_\alpha$  la composante qui entoure (respectivement est égale à)  $(2\pi \alpha_1, 2\pi \alpha_2)$ .

Pour les considérations BKW dans la section 5, on aura besoin du résultat suivant :

**Proposition 1.1.** Dans le cas  $1-\lambda < \pm E < 1+\lambda$ , la courbure de chaque composante de  $p^{-1}(E)$  est  $\neq 0$  partout.

**Démonstration.** Soit  $t \rightarrow (x(t), \xi(t))$  un paramétrage d'une partie de  $p^{-1}(E)$ .

Dérivant  $p(x(t), \xi(t))=E$  on trouve,

$$(1.11) \quad -\lambda(\sin x) x' - (\sin \xi) \xi' = 0$$

On a donc la normale  $\vec{n} = (\lambda \sin x, \sin \xi)$  et la tangente  $(x', \xi') = \theta(-\sin \xi, \lambda \sin x)$ ,  $\theta \neq 0$ . Il s'agit de montrer que  $((x'', \xi'') | (\vec{n})) \neq 0$ .

Dérivant (1.9) encore une fois, on trouve :

$$\begin{aligned} ((x'', \xi'') | \vec{n}) &= \lambda \sin x x'' + \sin \xi \xi'' = \lambda \cos x (x')^2 + (\cos \xi) (\xi')^2 \\ &= \lambda \theta^2 (\cos x) (\sin \xi)^2 + \lambda^2 \theta^2 (\cos \xi) (\sin x)^2 \\ &= \lambda \theta^2 (\cos x + \lambda \cos \xi - \cos x (\cos \xi)^2 - \lambda \cos \xi (\cos x)^2) \\ &= \lambda \theta^2 (\cos x + \lambda \cos \xi - \cos x \cos \xi (\cos \xi + \lambda \cos x)) \\ &= \lambda \theta^2 (\cos x + \lambda \cos \xi - E \cos x \cos \xi). \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que la dernière parenthèse est  $\neq 0$ . Comme  $\cos \xi = E - \lambda \cos x = E - \lambda z$  , on obtient :

$$z + \lambda(E - \lambda z) - Ez(E - \lambda z) = (E\lambda)z^2 + (1 - \lambda^2 - E^2)z + E\lambda = E\lambda(z^2 + z(1 - \lambda^2 - E^2)/(E\lambda) + 1)$$

Il suffit alors de montrer que :

$$(1.12) \quad |(1 - \lambda^2 - E^2)/E\lambda| < 2$$

On a :

$$\frac{1-\lambda^2-E^2}{E\lambda} = \frac{1-(\lambda+E)^2}{E\lambda} + 2 < 2 \text{ comme } \lambda+E > 1.$$

et d'autre part,

$$\frac{1-\lambda^2-E^2}{E\lambda} = \frac{1-(E-\lambda)^2}{E\lambda} - 2 > -2 \text{ comme } |E-\lambda| < 1.$$

En effet,  $E-\lambda < 1+\lambda-\lambda=1$ ,  $E-\lambda > 1-2\lambda \geq -1$  comme  $0 < \lambda \leq 1$ .

#

Toujours pour  $1-\lambda < E \leq 1+\lambda$ , soit  $\pi_x(U_{0,0}) = [-\alpha, \alpha]$ ,  $\pi_\xi(U_{0,0}) = [-\beta, \beta]$ . On définit alors l'action horizontale  $S_1$  (entre  $U_{0,0}$  et  $U_{1,0}$ ) comme  $\varphi(2\pi-\alpha) - \varphi(\alpha)$  où  $\varphi$  est solution de l'équation eiconale :  $p(x, i\varphi') - E = 0$ , c.à.d :  $\text{ch}\varphi' = E - \lambda \cos x$

et donc :

$$(1.13) \quad S_1 = \int_{\beta}^{2\pi-\beta} \text{ch}^{-1}(E - \lambda \cos x) dx$$

De même, on définit l'action verticale  $S_2 = \Psi(2\pi-\beta) - \Psi(\beta)$

où :  $p(i\Psi'(\xi), \xi) - E = 0$ ,  $\beta \leq \xi \leq 2\pi-\beta$ , c.à.d :  $\text{ch}\Psi' = (E - \cos \xi)/\lambda$  et donc:

$$(1.14) \quad S_2 = \int_{\beta}^{2\pi-\beta} \text{ch}^{-1}\left(\frac{E - \cos \xi}{\lambda}\right) d\xi.$$

Proposition 1.2 : On a  $S_1 \leq S_2$  pour  $0 < \lambda \leq 1$  avec égalité seulement pour  $\lambda=1$ .

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$(1.15) \quad \frac{E - \cos x}{\lambda} \geq E - \lambda \cos x$$

pour  $\alpha \leq x \leq 2\pi-\alpha$  (ce qui entraîne que  $\beta \leq \alpha$ ) pour avoir  $S_1 \leq S_2$ . Or, (1.15) est équivalent à  $E - \cos x \geq E\lambda - \lambda^2 \cos x$  soit encore  $E(1-\lambda) \geq \cos x(1-\lambda^2)$  ou finalement  $\cos x \leq \frac{E}{1+\lambda}$ . Dans  $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ , on a  $E - \lambda \cos x \geq 1$  soit encore  $\cos x \leq \frac{E-1}{\lambda}$ , il suffit donc de voir que:

$$\frac{E-1}{\lambda} \leq \frac{E}{1+\lambda} \Leftrightarrow (1+\lambda)(E-1) \leq E\lambda \Leftrightarrow E-1-\lambda \leq 0 \Leftrightarrow E \leq 1+\lambda, \text{ ce qui est vrai.}$$

Si  $\lambda < 1$  on a alors inégalité stricte dans (1.15) pour  $x=\pi$  et donc  $S_1 < S_2$  dans ce cas.

## 2. Analyse spectrale mod $O(h^\infty)$

On désigne par  $S^m$  l'espace des symboles  $a(x, \xi, h) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  t.q.  $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \leq C_{\alpha, \beta} h^{-m}$ ,  $\forall \alpha, \beta$ . On dira que  $a \in S^0$  est elliptique si  $|a| \geq \frac{1}{C} > 0$  pour  $h$  assez petit,  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$  et on dira que  $a$  est elliptique près de l'infini si cette inégalité a lieu pour tout  $(x, \xi)$  en dehors d'un compact. Dans la discussion ci-dessous, on admettra aussi des symboles à valeurs dans les matrices  $N \times N$ . Dans la définition de l'ellipticité, il faut alors remplacer  $a$  par  $\det(a)$ . On utilisera systématiquement la quantification de Weyl :

$$(2.1) \quad (a u)(x) = (2\pi h)^{-1} \iint e^{i(x-y)\eta/h} a\left(\frac{x+y}{2}, \eta, h\right) u(y) dy d\eta$$

et on désigne par la même lettre le symbole et l'opérateur associé.

**Lemme 2.1.** Si  $Q\chi_1, \chi_2$  appartiennent à un borné  $B$  dans  $S^0$  et si  $\text{dist}(\text{supp}\chi_1, \text{supp}\chi_2) \geq \varepsilon_0 > 0$ , où  $\text{supp}\chi$  désigne le support de  $\chi$ , alors pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_N > 0$  (ne dépendant que de  $B$  et  $\varepsilon_0$ ) tel que :

$$(2.2) \quad \| \chi_1 Q \chi_2 \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_N h^N \text{dist}(\text{supp}\chi_1, \text{supp}\chi_2)^{-N}$$

**Démonstration.** Avec  $\varphi(x, y) = (i/2)(x-y)^2$  et  $C_0 > 0$  convenable, on introduit la transformation de Bargman, qui est l'opérateur unitaire :

$$T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow H_\Phi = \{u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} ; u \text{ est holomorphe et } u e^{-\Phi/h} \in L^2(\mathbb{C})\},$$

donné par :

$$Tu(x) = C_0 h^{-3/4} \int e^{i\varphi(x, y)/h} u(y) dy,$$

Ici  $\Phi(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} -\text{Im} \varphi(x, y) = (1/2)(\text{Im} x)^2$ .  $T(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$  est l'ensemble des  $u \in H_\Phi$  tels que  $u e^{-\Phi(x)/h}$  soit à décroissance rapide.

A  $T$  on associe la transformation canonique complexe, linéaire  $\mathcal{K}_T$  :

$$C^2 \ni (y, -\varphi'_y(x, y)) \rightarrow (x, \varphi'_x(x, y)) \in C^2.$$

$$\text{Alors : } \mathcal{K}_T(R^2) = \{ (x, (2/i) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x)); x \in C^2 \} := \Lambda_\Phi$$

(voir [SJ] pour plus de détails ).

Comme  $\Lambda_\Phi$  peut s'identifier à  $R^2$ , on peut introduire l'espace  $S^0(\Lambda_\Phi)$ . Pour  $a \in S^0(\Lambda_\Phi)$ ,  $u \in H_\Phi$ , on définit :  $a = \tilde{O}p(a)u(x)$  par l'intégrale (2.1), où on choisit le contour d'intégration  $\eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\frac{x+y}{2})$ . Pour donner un sens à l'intégrale, il faut aussi quelques arguments d'intégrales oscillantes ; on détaille maintenant ; avec ce choix de contour, on a  $dy \, d\eta = \frac{1}{i} \Phi''_{xx} \, dy \, d\bar{y}$  et la phase dans (2.1) devient :  $f(x, y) = 2(x-y) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\frac{x+y}{2})$ , dont la phase principale vaut  $\Phi(x) - \Phi(y)$ .

Comme :  $\partial_{\bar{y}} f = (x-y) \Phi''_{xx}$ , on a :  $L e^{f/h} = e^{f/h}$  avec :

$$L = \chi((x-y)/h) + [h \cdot (1 - \chi((x-y)/h)) / ((x-y) \Phi''_{xx})] \cdot (\partial/\partial \bar{y})$$

avec  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ ,  $\chi=1$  près de 0.

et comme  $u$  est maintenant holomorphe on trouve, avec :

$$a_\Phi = a(\frac{x+y}{2}, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\frac{x+y}{2}), h) :$$

$$a u(x) = (2\pi h)^{-n} \iint e^{f/h} ({}^t L)^N(a_\Phi) u(y) \frac{1}{i} \Phi''_{xx} \, dy \, d\bar{y}.$$

Comme :  $e^{(-\Phi(x) + \Phi(y))/h} e^{f/h} ({}^t L)^N(a_\Phi) = O(1)(1 + \frac{|x-y|}{h})^{-N}$ , on voit immédiatement que  $a = O(1) : H_\Phi \rightarrow H_\Phi$ . Si on relie  $b \in S^0(\Lambda_\Phi)$  et  $a \in S^0(R^2)$  par :

$b \circ \mathcal{K}_T = a$ , alors, au niveau des opérateurs, on a :

$$T^{-1} \circ b \circ T = a.$$

Ceci se vérifie d'abord dans le cas où  $a, b$  sont affines (donc pas tout à fait de classe  $S^0$ ), ensuite dans le cas où  $a, b$  sont de la forme :  $\exp(i(\text{fonction affine}))$ , ensuite par superposition de telles fonctions dans le cas où  $a, b \in \mathcal{S}$ , et on obtient le cas général par densité.

Soient maintenant  $Q, \chi_j$  comme dans le lemme; alors :

$$T Q T^{-1} = \tilde{Q}, \quad T \chi_j T^{-1} = \tilde{\chi}_j$$

où, au niveau des symboles :  $\tilde{Q} \circ \mathcal{K}_T = Q, \tilde{\chi}_j \circ \mathcal{K}_T = \chi_j$ .

La discussion précédente montre alors que :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\chi}_1 \tilde{Q} \tilde{\chi}_2\|_{\mathcal{L}(H_\Phi)} &\leq C_N h^N \text{dist}(\text{supp } \tilde{\chi}_1, \text{supp } \tilde{\chi}_2)^{-N} \\ &= \tilde{C}_N h^N \text{dist}(\text{supp } \chi_1, \text{supp } \chi_2)^{-N}. \end{aligned}$$

Comme  $T$  est unitaire, on obtient facilement le lemme.

#

Rappelons aussi un résultat de R. Beals [BEA] :

**Proposition 2.2 :** On se place dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $L_j = x_j$  (opérateur de multiplication) pour  $1 \leq j \leq n$ , et  $L_j = \tilde{D}_{x_{j-n}} = \frac{h}{i} \partial_{x_{j-n}}$ ,  $n+1 \leq j \leq 2n$ . Si  $A = A_k : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ , nous avons équivalence entre :

- (i)  $A = \text{Op}(a)$ ,  $a \in S^0$ ,
- (ii) Pour  $N=0,1,2,\dots$  et toute famille finie :  $L_{j_1}, \dots, L_{j_N}$ , l'opérateur  $\text{ad}L_{j_1} \text{ad}L_{j_2} \dots \text{ad}L_{j_N}(A)$  est  $O(h^N)$  dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ .

**Démonstration.** Comme nous avons en plus le paramètre  $h$ , nous rappelons également la démonstration : pour la quantification de Weyl aussi bien que pour la quantification classique (voir ci-dessous) on a :

$$(2.3) \quad [x_j, \text{Op}(a)] = \text{Op}\left(-\frac{h}{i} \frac{\partial a}{\partial \theta_j}\right), \quad [\tilde{D}_{x_j}, \text{Op}(a)] = \text{Op}\left(h \frac{\partial a}{\partial x_j}\right).$$

Donc, si (i) est valable, on voit que

$$\text{ad}L_{j_1} \text{ad}L_{j_2} \dots \text{ad}L_{j_N}(A) = \text{Op}(h^N a_{j_1, \dots, j_N}) \quad , \quad a_{j_1, \dots, j_N} \in S^0.$$

Montrons maintenant que (ii)  $\Rightarrow$  (i). On peut toujours représenter  $A$  par la quantification classique d'un "symbole"  $b \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  :

$$\begin{aligned} (2.4) \quad Au(x) &= (2\pi h)^{-n} \iint e^{i(x-y)\theta/h} b(x, \theta, h) u(y) dy d\theta \\ &= (2\pi h)^{-n/2} \int e^{ix\theta/h} b(x, \theta, h) \mathcal{F}_h u(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{F}_h$  est la transformée de Fourier unitaire :

$$(2.5) \quad \mathcal{F}_h u(\theta) = (2\pi h)^{-n/2} \int e^{-iy\theta/h} u(y) dy.$$

L'hypothèse (ii) nous dit alors que les  $e^{ix\theta/h} \partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta b(x, \theta)$  sont des noyaux d'opérateurs  $K_{\alpha, \beta} : L^2 \rightarrow L^2$  de norme  $O_{\alpha, \beta}(1)$ ,  $h \rightarrow 0$ . De manière générale, la norme  $L^2 \rightarrow L^2$  associée à un noyau  $K(x, y)$  coïncide avec celle du noyau  $\alpha^n K(\alpha x, \alpha y)$ . Si on prend  $\alpha = h^{1/2}$ , on trouve que  $e^{ix\theta} b_h(x, \theta)$  est de norme  $O(1)$  dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$  et plus généralement que  $e^{ix\theta} \partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta b_h(x, \theta)$  est de norme  $O(h^{(\alpha+\beta)/2})$  dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$ . Ici  $b_h(x, \theta) = b(h^{1/2}x, h^{1/2}\theta)$ . De manière générale, si  $K(x, y)$  est le noyau d'un opérateur  $O(1)$  dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$  et si  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  est fixé avec  $\chi(0) = 2$ , alors il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$ , tel que :  $\chi(\cdot - t) K(\cdot, \cdot) \chi(\cdot - s)$  est  $O(1)$  dans  $H^{-N_0}(\mathbb{R}^{2n})$  l'espace de Sobolev standard, uniformément en  $h, t, s$ .

Dans notre cas, on obtient aisément que  $\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta \chi(x) \chi(\theta) e^{ix\theta} b_h(x, \theta) = O(1)$  dans  $H^{-N_0}(\mathbb{R}^{2n})$ . Donc,  $b_h(0, 0) = b(0, 0) = O(1)$ ,  $h \rightarrow 0$ . Pour contrôler  $b(x_0, \theta_0)$  (uniformément par rapport à  $x_0, \theta_0$ ) on remarque ensuite que la norme  $L^2$  du noyau  $e^{i(x-x_0)(\theta-\theta_0)/h} \partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta b(x, \theta)$  coïncide avec celle de  $e^{ix\theta/h} \partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta b(x, \theta)$  qui est  $O(1)$ , faisant une dilation de  $h^{1/2}$  centrée en  $(x_0, \theta_0)$ , on trouve alors par le même argument :  $b(x_0, \theta_0) = O(1)$ , uniformément en  $x_0, \theta_0, h$ .

Finalement, on peut remplacer  $b$  par  $\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta b$  ci-dessus, ce qui donne  $b \in S^0$ . Analysant ensuite la formule intégrale classique qui relie le symbole de Weyl et le symbole classique d'un opérateur pseudodifférentiel, on obtient que  $a \in S^0$ .

#

Si  $a \in S^0$  est elliptique on peut trouver  $b \in S^0$  tel que :

$$a \circ b = I + K_1, \quad b \circ a = I + K_2, \quad K_1, K_2 \in S^{-1}.$$

Donc  $\|K_j\| = O(h)$  dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$  et pour  $h > 0$  assez petit il existe un opérateur  $c \in \mathcal{L}(L^2, L^2)$  t.q. :  $a \circ c = c \circ a = 1$ .

On montre alors (suivant [BEA]) que  $c \in S^0$  de la manière suivante :

$$[L_j, a \circ c] = 0,$$

$$\text{ad} L_j(a) \circ c + a \circ \text{ad} L_j(c) = 0,$$

$$\text{ad}(L_j)(c) = -c \circ \text{ad} L_j(a) \circ c = O(h) \text{ dans } \mathcal{L}(L^2, L^2).$$

Calculant ensuite  $\text{ad}(L_k) \text{ad}(L_j)(c)$  et ainsi de suite, on vérifie par récurrence la condition (ii) dans la Proposition 2.2. On a donc  $c \in S^0$ .

Donnons ensuite une caractérisation de  $S^{-\infty} = \cap_j S^j$  :

**Lemme 2.3.** Un opérateur  $K : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  appartient à  $S^{-\infty}$  si et seulement si pour tout ensemble borné  $B \in S^0$  et tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $C = C_{B,N}$ , telle que :

$$(2.6) \quad \|\chi_1 K \chi_2\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leq C_N h^N (1 + \text{dist}(\text{supp } \chi_1, \text{supp } \chi_2))^{-N}, \quad \chi_1, \chi_2 \in B$$

**Démonstration.** Dans le sens direct, ceci résulte du lemme 2.1 et de la continuité  $L^2$  de la classe  $S^0$ . Inversement, supposons que l'on ait (2.6) pour tout borné  $B \subset S^0$  et tout  $N$ . Soit  $0 \leq \chi(x, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  tel que  $\sum \chi_\alpha = 1$

avec  $\chi_\alpha(x, \xi) = \chi(x - \alpha_x, \xi - \alpha_\xi)$ ,  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_\xi) \in \mathbb{Z}^{2n}$ . Alors de (2.6), on obtient :

$$(2.7) \quad \|\chi_\alpha K \chi_\beta\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leq C_N h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^{2n}.$$

On observe ensuite que si  $L$  désigne l'un des  $L_j$ , alors

$\chi_\alpha [L, K] \chi_\beta = \chi'_{\alpha, \beta} K \chi_\beta + \chi_\alpha K \chi''_{\alpha, \beta}$ , où  $(1 + |\alpha - \beta|)^{-1} \chi'_{\alpha, \beta}$  et  $(1 + |\alpha - \beta|)^{-1} \chi''_{\alpha, \beta}$  sont des familles bornées dans  $S^0$  et  $\text{supp } \chi'_{\alpha, \beta} \subset \text{supp } \chi_\alpha$ ,  $\text{supp } \chi''_{\alpha, \beta} \subset \text{supp } \chi_\beta$ . (Si par exemple  $L = x_1$ , alors on peut prendre  $\chi'_{\alpha, \beta} = \chi_\alpha \circ (x_1 - \beta_1)$ ,  $\chi''_{\alpha, \beta} = (\beta_1 - x_1) \circ \chi_\beta$ ).

Itérant cet argument, on trouve :

$$(2.8) \quad \|\chi_\alpha \text{ad} L_{j_2} \dots \text{ad} L_{j_{N_0}}(K) \chi_\beta\| \leq C_{N, N_0} h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N}.$$

Grâce à la proposition 2.2, il suffit alors de montrer que (2.7) entraîne que :

$$\begin{aligned} \|K\| &\leq C'_N h^N, \quad \forall N. \text{ Soit } E = \sum \chi_\alpha^2. \text{ On vérifie alors que } E \in S^0 \text{ est elliptique } > 0, \text{ et} \\ \text{on a : } |(KEu)(Ev)| &= |\sum \sum (\chi_\alpha K \chi_\beta u | \chi_\alpha v)| \leq C_N h^N \sum \sum (1 + |\alpha - \beta|)^{-N} \|\chi_\beta u\| \|\chi_\alpha v\| \\ &\leq C'_N h^N (\sum \|\chi_\beta u\|^2)^{1/2} (\sum \|\chi_\alpha v\|^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Comme  $\sum \|\chi_\beta u\|^2 = (Eu)u \leq C\|u\|$ , on obtient :

$$|(K Eu)Ev| \leq C_N h^N \|u\| \|v\|,$$

ou bien

$$|(Ku)v| \leq C_N h^N \|E^{-1} u\| \|E^{-1} v\| \leq C'_N h^N \|u\| \|v\|.$$

#

Retournons maintenant au cas unidimensionnel et soit  $P \in S^0$  un opérateur matriciel  $m \times m$  autoadjoint. On suppose pour se fixer les idées que  $P(x, \xi, h) = p(x, \xi) \bmod S^{-1}$ .

On considère d'abord le cas d'un seul puit microlocal.

Plus précisément on suppose :

(2.9)  $P$  est elliptique près de l'infini.

Soit alors  $U = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2; \det p(x, \xi) = 0\}$ .

Soit  $I(h)$  un intervalle compact qui tend vers  $\{0\}$  quand  $h \rightarrow 0$  et soit  $a(h) \gg h^{N_0}$  une fonction qui tend vers 0. On suppose que :

(2.10)  $P$  n'a pas de spectre dans  $(I(h) + [-2a(h), 2a(h)]) \setminus I(h)$  pour  $h$  assez petit

Soit :

$$(2.11) \quad \Omega_h = \{z \in \mathbb{C}; \text{dist}(z, I(h)) \leq a(h)\}.$$

Si  $\chi(x, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  vaut 1 dans un voisinage de  $U$ , on peut trouver  $Q_z^0 \in S^0$  tel que :

$$(2.12) \quad (P - z) Q_z^0 = I - \chi - K_z, \quad K_z \in S^{-\infty},$$

pour  $z \in \Omega_h$ . Ici  $Q_z^0$  et  $K_z$  dépendent holomorphiquement de  $z$  même dans un petit voisinage de  $\Omega_h$ . Avec :  $Q_z = Q_z^0 (I - K_z)^{-1} \in S^0$ , on obtient :

$$(2.13) \quad (P - z) Q_z = I - R_z, \quad R_z = \chi (I - K_z)^{-1} \in S^0.$$

De même, on construit :  $\tilde{Q}_z = (I - \tilde{K}_z)^{-1} \tilde{Q}_z^0 \in S^0$  et  $\tilde{R}_z = (I - \tilde{K}_z)^{-1} \chi \in S^0$  tels que :

$$(2.14) \quad \tilde{Q}_z (P - z) = I - \tilde{R}_z.$$

Soit maintenant  $z \in \partial\Omega_h$ . Si :  $(P - z)u = v$ , alors :

$$u - \tilde{R}_z u = \tilde{Q}_z v, \quad u = \tilde{Q}_z v + \tilde{R}_z u = (\tilde{Q}_z + \tilde{R}_z (P - z)^{-1}) v.$$

Donc,

$$(2.15) \quad (P-z)^{-1} = \tilde{Q}_z + \tilde{R}_z (P-z)^{-1}.$$

D'autre part, comme :  $(P-z)Q_z v = v - R_z v$ , on trouve :  $u = Q_z v + (P-z)^{-1} R_z v$  ;

$$(2.16) \quad (P-z)^{-1} = Q_z + (P-z)^{-1} R_z.$$

Substituons (2.16) dans (2.15) :

$$(2.17) \quad (P-z)^{-1} = \tilde{Q}_z + \tilde{R}_z Q_z + \tilde{R}_z (P-z)^{-1} R_z$$

Comme on peut toujours choisir  $\chi$  à support arbitrairement près de  $U$ , on trouve par " construction " de  $(P-z)^{-1}$ , et par le Lemme 2.1, que :

$$(2.18) \quad \text{Si } \chi_1, \chi_2 \text{ appartiennent à un borné de } S^0 \text{ et } \tilde{d}(\text{supp} \chi_1, \text{supp} \chi_2) \geq \varepsilon_0 > 0,$$

$$\text{alors : } \|\chi_1 (P-z)^{-1} \chi_2\| \leq C_N h^N \tilde{d}(\text{supp} \chi_1, \text{supp} \chi_2)^{-N},$$

$$\text{où on a posé } \tilde{d}(A, B) = \min(\text{dist}(A, B), \text{dist}(A, U) + \text{dist}(U, B)).$$

Seul le dernier terme de (2.17) contribue au projecteur spectral :

$$\Pi = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial \Omega_h} (z-P)^{-1} dz,$$

et on obtient,

$$(2.19) \quad \text{Si } \chi_1, \chi_2 \text{ appartiennent à un borné de } S^0 \text{ et}$$

$$\text{dist}(\text{supp} \chi_1, U) + \text{dist}(\text{supp} \chi_2, U) \geq \varepsilon_0 > 0, \text{ alors :}$$

$$\|\chi_1 \Pi \chi_2\| \leq C_N h^N (\text{dist}(\text{supp} \chi_1, U) + \text{dist}(U, \text{supp} \chi_2))^{-N}.$$

Remarque 2.4. Avec les techniques ci-dessus on montre que si  $P' \in S^0$  est elliptique à l'infini,  $P' = p'(x, \xi) \bmod S^{-1}$ ,  $U = \{(x, \xi) ; \det p' = 0\}$  et si  $P' = P$  dans un voisinage de  $U$ , alors  $P'$  n'a pas de spectre dans  $(I + [-\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a]) \setminus (I + [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}])$  et si  $\Pi'$  est le projecteur spectral associé à  $\text{Sp}(P') \cap (I + [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}])$ , alors :

$$\|\Pi - \Pi'\| = O(h^\infty).$$

De plus (utilisant aussi que  $\text{Sp}(P) \cap I(h)$  et  $\text{Sp}(P') \cap (I(h) + [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}])$  sont discrets et qu'il y a au plus  $O(h^{-1})$  valeurs propres dans ces intervalles) on voit qu'il y a une bijection  $b: \text{Sp}(P) \cap I(h) \rightarrow \text{Sp}(P') \cap (I(h) + [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}])$  t.q. :

$$b(h)(\mu) - \mu = O(h^\infty).$$

Considérons maintenant le cas de plusieurs puits microlocaux.

On suppose toujours que  $P \in S^0$ ,  $P \equiv p(x, \xi) \bmod S^{-1}$  et que :

$((x, \xi) ; \det p = 0) = \bigcup U_\alpha$  (réunion finie ou dénombrable)

où les  $U_\alpha$  sont compacts et disjoints entre eux .

On suppose même que :

(2.20) Il existe  $R_0$  tel que le diamètre de chaque  $U_\alpha$  est  $\leq R_0$ .

(2.21)  $\exists \varepsilon_0 > 0$  tel que les  $U_\alpha + B(0, \varepsilon_0)$  sont disjoints entre eux.

(2.22) Pour tout  $\alpha$ , on peut trouver  $P_\alpha$  qui appartient à un borné de  $S^0$  tel que  $P_\alpha = P$  dans  $U_\alpha + B(0, \varepsilon_0)$  et tel que  $P_\alpha$  est elliptique en dehors de  $U_\alpha + B(0, \varepsilon)$  uniformément par rapport à  $\alpha$  pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ .

Ici  $B((x, \xi), r) = \{(y, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid |(y, \eta) - (x, \xi)| < r\}$ .

Soient  $I(h)$  et  $a(h)$  comme avant et supposons que tous les  $P_\alpha$  vérifient (2.10) pour  $h \leq h_0$  indépendant de  $\alpha$ . La première étape sera de construire  $(P-z)^{-1}$  quand  $z \in \partial\Omega_h$ . On fixe  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit et on choisit :

$\chi_\alpha \in C_0^\infty(U_\alpha + B(0, \varepsilon))$  uniformément bornés dans  $S^0$  tels que  $\chi_\alpha = 1$  sur  $U_\alpha + B(0, \varepsilon/2)$ .

Utilisant l'ellipticité de  $P$  en dehors de  $U(U_\alpha + B(0, \varepsilon/2))$ , on construit d'abord  $\tilde{Q}_z \in S^0$ , holomorphe pour  $z \in \Omega_h$  tel que :

(2.23)  $(P-z) \tilde{Q}_z = I - \sum \chi_\alpha + K$ ,  $K \in S^{-\infty}$

Avec  $Q_z = \tilde{Q}_z (I+K)^{-1} = \tilde{Q}_z (I+L_z)$ , on obtient :

(2.24)  $(P-z) Q_z = I - \sum \chi_\alpha (I+L_z)$ ,  $L_z \in S^{-\infty}$

On pose alors pour  $z \in \partial\Omega_h$  :

(2.25)  $R(z) = Q_z + \sum (P_\alpha - z)^{-1} \chi_\alpha (I+L_z)$

Utilisant les résultats ci-dessus et le fait que la boule  $B((x, \xi), \lambda)$  contient au plus  $C(1+\lambda)^2$  des puits  $U_\alpha$ , on voit sans difficulté que la somme dans (2.25) converge dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$  et que  $\|R(z)\| \leq C a(h)^{-1}$ . On peut être plus précis encore : si  $\chi_1, \chi_2$  appartiennent à un borné de  $S^0$  et  $\text{dist}(\chi_1, U_\alpha) + \text{dist}(\chi_2, U_\alpha) \geq \text{const.} > 2\varepsilon$ , alors :

$$\|\chi_1(P_\alpha - z)^{-1} \chi_\alpha(I + L_2) \chi_2\| \leq C_N h^N (\text{dist}(\text{supp} \chi_1, U_\alpha) + \text{dist}(U_\alpha, \text{supp} \chi_2))^{-N}.$$

On en déduit, en considérant d'abord le cas où les supports de  $\chi_1, \chi_2$  sont contenus dans les boules de rayon 1, que si on pose :

$$\tilde{d}((x, \xi), (y, \eta)) = \min(d((x, \xi), (y, \eta)), d((x, \xi), U_\alpha) + d(U_\alpha, (y, \eta))),$$

et si :  $\tilde{d}(\text{supp} \chi_1, \text{supp} \chi_2) \geq \varepsilon_0 > 0$ , alors :

$$(2.26) \quad \|\chi_1 R(z) \chi_2\| \leq C_N h^N d(\text{supp} \chi_1, \text{supp} \chi_2)^{-N}.$$

On a :

$$(2.27) \quad (P - z) R(z) = I + K_z,$$

$$(2.28) \quad K_z = \Sigma(P - P_\alpha)(P_\alpha - z)^{-1} \chi_\alpha(I + L_2).$$

Ici le support de  $(P - P_\alpha)$  est disjoint de celui de  $\chi_\alpha$  et on a donc :

$$\|\chi_1(P - P_\alpha)(P_\alpha - z)^{-1} \chi_\alpha(I + L_2) \chi_2\| \leq C_N h^N (1 + d(\text{supp} \chi_1, U_\alpha) + d(U_\alpha, \text{supp} \chi_2))^{-N},$$

pour tout  $N$  et sans restriction sur  $\text{supp} \chi_j$ ,  $j=1,2$ .

Sommant sur  $\alpha$ , on trouve immédiatement que  $K_z$  vérifie (2.6). Donc  $K_z \in S^{-\infty}$ ,

$(P - z)^{-1}$  existe (pour  $h$  assez petit) et on a :

$$(2.29) \quad (P - z)^{-1} = R(z)(I + K_z)^{-1}.$$

Combinant (2.26) et la majoration sur  $\|R(z)\|$  ci-dessus avec le lemme 2.1, on obtient :

**Proposition 2.5.** Pour  $z \in \partial\Omega_h$ , on a uniformément en  $z$  :

$$(2.30) \quad \|(P - z)^{-1}\| \leq C a(h)^{-1}$$

Si  $\chi_1, \chi_2$  appartiennent à un borné de  $S^0$  et si  $\tilde{d}(\text{supp} \chi_1, \text{supp} \chi_2) \geq \varepsilon_0 > 0$ , alors :

$$(2.31) \quad \|\chi_1(P - z)^{-1} \chi_2\| \leq C_N h^N d(\text{supp} \chi_1, \text{supp} \chi_2)^{-N}.$$

#

On suppose dans la suite (essentiellement pour simplifier les notations) que  $\text{Sp}(P_\alpha) \cap I(h) = \{\mu_\alpha\}$  où  $\mu_\alpha$  est une valeur propre simple et que  $\alpha$  varie dans  $Z^2$  et que  $d(U_\alpha, U_\beta) \sim |\alpha - \beta|$ . Soit  $\varphi_\alpha$  un vecteur propre normalisé associé à

$(P_\alpha, \mu_\alpha)$  :

$$(2.32) \quad (P_\alpha - \mu_\alpha) \varphi_\alpha = 0, \|\varphi_\alpha\| = 1.$$

Grâce à (2.19), valable uniformément en  $\alpha$  pour  $(P_\alpha, U_\alpha)$ , on sait que :

$$(2.33) \quad \|\chi \varphi_\alpha\| \leq C_N h^N d(\text{supp} \chi, U_\alpha)^{-N},$$

si  $\chi$  appartient à un borné de  $S^0$  et  $d(\text{supp} \chi, U_\alpha) \geq \varepsilon_0 > 0$ .

On en déduit facilement que :

$$(2.34) \quad |(\varphi_\alpha | \varphi_\beta)| \leq C_N h^N |\alpha - \beta|^{-N}, \quad \alpha \neq \beta.$$

La matrice infinie  $((\varphi_\alpha | \varphi_\beta))$  est alors de la forme  $I + K$  avec  $K = O(h^\infty)$  dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$ . Si  $E$  est l'adhérence des combinaisons linéaires des  $\varphi_\alpha$ , alors  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^2}$  est une base hilbertienne dans  $E$  au sens où tout  $u \in E$  s'écrit de manière unique :  $u = \sum u_\alpha \varphi_\alpha$ , avec :  $\|u\| \sim (\sum |u_\alpha|^2)^{1/2}$ .

Soit  $F$  l'espace spectral associé à  $\text{Sp}(P) \cap (I+]-a, a[)$  et  $\pi_F$  le projecteur correspondant. On pose :

$$(2.35) \quad v_\alpha = \pi_F \varphi_\alpha.$$

Utilisant (2.33) et la Proposition 2.5, on voit que  $v_\alpha$  vérifie aussi (2.33).

**Proposition 2.6.** On a  $\|\chi(v_\alpha - \varphi_\alpha)\| \leq C_N h^N (1 + d(\text{supp} \chi, U_\alpha))^{-N}$  si  $\chi \in \text{borné} \subset S^0$ .

**Démonstration :** Comme  $\varphi_\alpha$  et  $v_\alpha$  vérifient (2.33), il suffit de traiter le cas où

$$\chi = 1. \text{ Comme } (P - z)^{-1} = R(z) + O(h^\infty), \text{ on a : } \|v_\alpha + \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega_h} R(z) \varphi_\alpha dz\| = O(h^\infty).$$

Comme  $Q_z$  n'a pas de poles dans  $\Omega_h$ , on trouve :

$$\int R(z) \varphi_\alpha dz = \int_{\Sigma_\beta} (P_\beta - z)^{-1} \chi_\beta (I + L_z) \varphi_\alpha dz.$$

Ici :

$$\begin{aligned} \chi_\beta (I + L_z) \varphi_\alpha &= O(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N}) \text{ si } \alpha \neq \beta \\ &= \varphi_\alpha + O(h^\infty) \quad \text{si } \alpha = \beta, \end{aligned}$$

$$\text{et donc : } -(2\pi i)^{-1} \int R(z) \varphi_\alpha dz = \varphi_\alpha + O(h^\infty) \text{ dans } L^2.$$

#

Il résulte de la Proposition 2.6 et du fait que  $(v_\alpha - \varphi_\alpha)$  est orthogonal à  $F$ , que :

$$(2.36) \quad (v_\alpha | v_\beta) - (\varphi_\alpha | \varphi_\beta) = -(v_\alpha - \varphi_\alpha | v_\beta - \varphi_\beta) = O(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N}), \quad \forall N.$$

Avec (2.34) et le fait que  $\|\varphi_\alpha\| = 1$ , on obtient donc :

$$(2.37) \quad V = ((v_\alpha | v_\beta)) = I + T, \quad T = (t_{\alpha, \beta}),$$

$$(2.38) \quad t_{\alpha, \beta} = O(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N}), \quad \forall N.$$

En particulier,  $T = O(h^\infty)$  dans  $\mathcal{L}(\ell^2(Z^2))$ . Il est alors clair que les  $v_\alpha$  forment une base hilbertienne dans un sous-espace fermé  $F' \subset F$ . Avec la terminologie de [HE-SJ]<sub>1</sub>, on a aussi grâce à (2.36) :

$$(2.39) \quad \vec{d}(E, F) = O(h^\infty).$$

**Proposition 2.7.** Pour  $h > 0$  assez petit on a  $F' = F$  et  $\vec{d}(E, F) = \vec{d}(F, E) = O(h^\infty)$ .

**Démonstration.** Il suffit de montrer que  $\vec{d}(F, E) < 1$ , car alors on sait (grâce à (2.39)), que  $\vec{d}(E, F) = \vec{d}(F, E)$  et que  $F' = \pi_F(E) = F$ . Soit  $u \in F$ ,  $\|u\| = 1$ . Alors :

$$(2.40) \quad u = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial \Omega_h} (z - P)^{-1} u \, dz.$$

De nouveau, comme :  $(z - P)^{-1} = -R(z) + O(h^\infty)$  et comme :

$-R(z) = -Q_z + \sum (z - P_\alpha)^{-1} \chi_\alpha + O(h^\infty)$ , on trouve :

$$(2.41) \quad u = \sum_\alpha \pi_\alpha \chi_\alpha u + O(h^\infty).$$

donc  $\text{dist}(u, E) = O(h^\infty)$ , ce qui prouve que  $\vec{d}(E, F) = O(h^\infty)$ .

#

Grâce aux propriétés (2.37), (2.38) on peut aussi introduire la base orthonormalisée  $(e_\alpha) = (v_\alpha) V^{-1/2}$ . Comme dans la démonstration du lemme 2.3, on trouve que :

$$V^{-1/2} = I + R, \quad R = (r_{\alpha, \beta}), \quad r_{\alpha, \beta} = O(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N}), \quad \forall N.$$

Donc,

$$(2.42) \quad e_\alpha = v_\alpha + \sum_\beta O(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N}) v_\beta.$$

### 3. Décroissance exponentielle.

Pour commencer, on considère un opérateur un peu plus général de la forme:

$$(3.1) \quad P = (1 - \cos \tilde{D}) + V(x)$$

où  $V \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Soit  $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R})$  avec  $\varphi', \varphi'' \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

On a :  $(1 - \cos \tilde{D}) = 2(\sin \frac{1}{2} \tilde{D})^2$ . Donc,

$$(3.2) \quad \int e^{2\varphi/h} (1 - \cos \tilde{D}) u \bar{u} \, dx = 2 \int Q^2 (u_\varphi) \bar{u}_\varphi \, dx,$$

où  $u_\varphi = e^{\varphi/h} u$ ,  $u \in C_0^\infty$  et où:

$$(3.3) \quad Q = e^{\varphi/h} \sin(\frac{1}{2} \tilde{D}) e^{-\varphi/h}.$$

Calculons cet opérateur pseudodifférentiel à la main, en utilisant que

$$(3.4) \quad \sin\left(\frac{1}{2} \tilde{D}\right) = \frac{1}{2i} \left( e^{\frac{h}{2} \partial_x} - e^{-\frac{h}{2} \partial_x} \right) = \frac{1}{2i} (\tau_{-h/2} - \tau_{h/2})$$

où  $\tau_k u(x) = u(x-k)$ .

On a:

$$\sin(\tilde{D}/2)(e^{-\varphi/h} u)(x) = (e^{\varphi(x+h/2)/h} u(x+h/2) - e^{\varphi(x-h/2)/h} u(x-h/2))/2i$$

Utilisant que :  $\varphi(x \pm \frac{h}{2}) = \varphi(x) \pm \varphi'(x)h/2 + O(h^2)$ , uniformément pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$|h| \leq 1$ , on trouve:

$$\begin{aligned} \sin(\tilde{D}/2)(e^{-\varphi/h} u)(x) &= e^{-\varphi(x)/h} \left[ \frac{1}{2i} (e^{-\varphi'(x)/2 + O(h)} \tau_{-\frac{h}{2}} u - \frac{1}{2i} (e^{\varphi'(x)/2 + O(h)} \tau_{\frac{h}{2}} u) \right]. \end{aligned}$$

d'où,

$$(3.5) \quad Q = \frac{1}{2i} (e^{-\varphi'/2 + O(h)} \tau_{-\frac{h}{2}} - \frac{1}{2i} (e^{\varphi'/2 + O(h)} \tau_{\frac{h}{2}}),$$

ce que l'on peut aussi écrire :

$$(3.6) \quad Q = A + iB + O(h) \tau_{-\frac{h}{2}} + O(h) \tau_{\frac{h}{2}},$$

où

$$(3.7) \quad A = \operatorname{ch}\left(\frac{\varphi'}{2}\right) \sin\left(\frac{\tilde{D}}{2}\right), \quad B = \operatorname{sh}\left(\frac{\varphi'}{2}\right) \cos\left(\frac{\tilde{D}}{2}\right).$$

Alors l'adjoint s'écrit :

$$(3.8) \quad Q^* = A - iB + O(h)\tau_{-h/2} + O(h)\tau_{h/2},$$

puisque  $A^* - A, B^* - B = O(h)\tau_{-h/2} + O(h)\tau_{h/2}$ . Revenant à (3.2), on trouve

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \int e^{2\varphi/h} (1 - \cos \tilde{D}) u \bar{u} \, dX &= 2\operatorname{Re}(Q u_\varphi | Q^* u_\varphi) = \\ &= 2(\|A u_\varphi\|^2 - \|B u_\varphi\|^2) + O(h) \|u_\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Pour pouvoir exploiter cette identité on majore :

$$\begin{aligned} \|B u_\varphi\| &\leq \frac{1}{2} \|\operatorname{sh}(\frac{\varphi'}{2}) \tau_{-h/2} u\| + \frac{1}{2} \|\operatorname{sh}(\frac{\varphi'}{2}) \tau_{h/2} u\| \\ &= \frac{1}{2} \|\operatorname{sh}(\tau_{h/2} \varphi'/2) u\| + \frac{1}{2} \|\operatorname{sh}(\tau_{-h/2} \varphi'/2) u\|. \end{aligned}$$

Comme  $\operatorname{sh}(\tau_{\pm h/2} \varphi'/2) = \operatorname{sh}(\varphi'/2) + O(h)$ , on trouve :

$$(3.10) \quad \|B u_\varphi\| \leq \|\operatorname{sh}(\varphi'/2) u_\varphi\| + O(h) \|u_\varphi\|,$$

donc :

$$(3.11) \quad -\|B u_\varphi\|^2 \geq - \int (\operatorname{sh} \varphi'/2)^2 |u_\varphi|^2 \, dx - Ch \|u_\varphi\|^2.$$

Combinant (3.1), (3.2), (3.9), (3.11), on trouve :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} 2\|\operatorname{ch}(\varphi'/2) \sin(\tilde{D}/2) u_\varphi\|^2 + \int (V(x) - Ch - 2(\operatorname{sh} \frac{\varphi'}{2})^2) |u_\varphi|^2 \, dx \\ \leq \operatorname{Re} \int e^{2\varphi/h} P u \bar{u} \, dx. \end{aligned}$$

cette inégalité reste valable si on remplace  $V$  par  $V - \operatorname{Re} z$  et  $P$  par  $P - z$ . Comme dans [IIE-SJ]<sub>1</sub>, on obtient alors la:

**Proposition 3.1.** Soit  $P$  de la forme (3.1), avec  $V \in C(R) \cap L^\infty(R)$ . Soit  $\varphi \in C^{1,1}(R)$  avec  $\varphi', \varphi'' \in L^\infty$ . Alors il existe  $C \geq 0$  tel que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et toutes fonctions  $0 \leq F_\pm \in L^\infty$  vérifiant

$$(3.13) \quad V - \operatorname{Re} z - Ch - 2(\operatorname{sh} \varphi'/2)^2 = F_+^2 - F_-^2,$$

on a :

$$(3.14) \quad 2\|\operatorname{ch}(\varphi'/2) \sin(\tilde{D}/2) u_\varphi\|^2 + \frac{1}{4} \|(F_+ + F_-) u_\varphi\|^2 \\ \leq \left\| \frac{1}{(F_+ + F_-)} e^{\varphi/h} (P - z) u \right\|^2 + \|F_- u_\varphi\|^2,$$

pour toute  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Ici  $u_\varphi = e^{\varphi/h} u$ .

Considérons maintenant l'opérateur de Harper :

$$(3.15) \quad P = \cos \tilde{D} + \lambda \cos x, \quad \lambda > 0.$$

Par transformée de Fourier unitaire on peut échanger  $\cos \tilde{D}$  et  $\cos x$ , ce qui revient, à un facteur scalaire près, à remplacer  $\lambda$  par  $\frac{1}{\lambda}$ . Sans perte de généralité, on peut alors supposer que  $\lambda \leq 1$ .

On fixe un  $\varepsilon_0 > 0$ , et on se propose d'étudier le spectre de  $P$  dans l'intervalle  $[1 - \lambda + \varepsilon_0, 1 + \lambda]$ . Pour  $\mu (=E)$  dans cet intervalle on définit les puits  $U_\alpha = U_\alpha(\mu)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ , comme dans la section 1.

On peut alors expliciter un choix des opérateurs  $P_\alpha$  de la section 2 de la manière suivante : Soit  $0 \leq \chi_{(0,0)} = \chi_0 \in C_0^\infty(U_{1-\lambda < \mu < 1+\lambda} U_0(\mu))$  suffisamment grand, et posons :  $\chi_\alpha(x, \xi) = \chi(x - 2\pi\alpha_1, \xi - 2\pi\alpha_2)$  et :

$$(3.16) \quad P_\alpha = P + \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta.$$

Alors  $P_\alpha$  se déduit de  $P_0$  par translation de  $2\pi\alpha$  et, pour  $1 - \lambda + \varepsilon_0 \leq \mu \leq 1 + \lambda$ , on a :

$$(3.17) \quad P_0^{-1}(\mu) = U_0(\mu).$$

Au niveau des opérateurs, on a :

$$(3.18) \quad P_\alpha = T_\alpha P_0 T_\alpha^{-1},$$

où  $T_\alpha$  a été introduit dans la section 1. L'étude du spectre de  $P_0$  dans  $[1 + \lambda - Ch, 1 + \lambda]$  pour  $C > 0$  arbitrairement grand, est entièrement analogue à celle de l'équation de Schrödinger en présence d'un puits ponctuel non dégénéré. Voir B. Simon [SI]<sub>2</sub>, Helffer-Sjöstrand [HE-SJ]<sub>1</sub>. Dans l'intervalle  $[1 - \lambda + \varepsilon_0, 1 + \lambda - Ch]$ , on peut d'autre part appliquer les résultats de

Helfffer-Robert [HE-RO]<sub>2</sub>. On obtient ainsi le résultat suivant (qui pourrait être encore précisé) :

Proposition 3.2. Pour  $h > 0$  assez petit, on a

$\text{Sp}(P_0) \cap [1 - \lambda + \varepsilon_0, 1 + \lambda] = \cup_{j=0, \dots, N(h)} (\mu_j(h))$ , où les  $\mu_j(h)$  sont des valeurs propres simples,  $\mu_j(h) - \mu_{j+1}(h) \approx h$ ,  $1 + \lambda - \mu_0(h) \approx h$ .

Dans la suite on " fixe " un  $\mu(h) = \mu_{j(h)}(h)$ , mais on verra que tout marche uniformément par rapport à ce choix. Il est maintenant clair que l'on est tout à fait dans la situation de la section 2 avec  $I(h) = (\mu(h))$ ,  $a(h) = h/C_0$ ,  $C_0 > 0$  assez grand. (Sauf pour le fait que  $I(h)$  ne tend pas vers  $\{0\}$ , mais reste dans un intervalle compact, ce qui ne change rien d'essentiel.)

Si  $\mu \in [1 - \lambda + \varepsilon_0, 1 + \lambda]$ , alors  $-(P - \mu) = (1 - \cos \tilde{D}) + \lambda(1 - \cos x) - v$ , où  $v = 1 + \lambda - \mu \in [0, 2\lambda - \varepsilon_0]$ . Provisoirement on changera les notations en écrivant :

$$(3.19) \quad P = (1 - \cos \tilde{D}) + \lambda(1 - \cos x).$$

L'étude spectrale de l'opérateur (3.15) près de  $\mu(h)$  équivaut alors à celle de l'opérateur (3.19) près du niveau  $v(h) = 1 + \lambda - \mu(h)$ .

Soit  $\Omega_h$  le disque de centre  $v(h)$  et de rayon  $a(h) = h/C_1$ , ( $C_1 > 0$  assez grand).

On a le :

Théorème 3.3. Pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $C_0 > 0$ , il existe  $C_\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $z \in \partial \Omega_h$ ,

$h \leq 1/C_\varepsilon$  et tout  $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  avec  $|\varphi''| \leq C_0$  et

$$(\lambda(1 - \cos x) - v(h) - \varepsilon)_+ - 2(\text{sh } \varphi'/2)^2 \geq 0,$$

l'opérateur  $(P - z)^{-1}|_{L^2_{\text{comp}}}$  admette une extension bornée à

$$L^2_\varphi = \{u; e^{-\varphi/h} u \in L^2(\mathbb{R})\} \text{ de norme } \leq C_\varepsilon/a(h).$$

Démonstration. Soit  $U_\alpha = U_\alpha(\mu(h))$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^2$  et soit  $U_{\alpha_1} \subset \mathbb{R}_x$ , la projection de  $U_\alpha$ .

C'est l'intervalle fermé dans  $[2\pi\alpha_1 - \pi, 2\pi\alpha_1 + \pi]$ , défini par l'inégalité  $\lambda(1 - \cos x) \leq v(h)$ . Soit  $0 \leq \Theta_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , à support dans  $\{x; \lambda(1 - \cos x) \leq v(h) + \delta\}$

tel que  $\lambda(1-\cos x) + \Theta_0 \geq \delta/2$ ,  $-\pi < x < \pi$ . Ici  $\delta > 0$  est petit. Soit  $\Theta_k(x) = \Theta_0(x - 2\pi k)$ .

On a alors :  $\lambda(1-\cos x) + \sum \Theta_k \geq \max(\lambda(1-\cos x), \delta/2)$ .

On pose :

$$\tilde{P} = P + \sum_j \Theta_j, P_k = P + \sum_{j \neq k} \Theta_j = \tilde{P} - \Theta_k.$$

La section 2 s'applique aussi bien à  $P_k$  qu'à  $P$  et nous savons donc que pour  $h$  assez petit (en fonction de  $\delta$ ) on a  $\|(P_k - z)^{-1}\| \leq 2/a(h)$  pour  $z \in \partial\Omega_h$ . (La norme étant celle de  $L(L^2, L^2)$  si rien d'autre n'est indiqué.)

Pour  $\tilde{P}$  on peut appliquer la proposition précédente avec  $F_- = 0$  et obtenir :

si  $2(\operatorname{sh} \varphi'/2)^2 \leq (\lambda(1-\cos x) - v(h) - \varepsilon)_+$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $|\varphi''| \leq C_0$ , alors :

$$(3.20) \quad \|(\tilde{P} - z)^{-1}\|_{L(L_\varphi^2, L_\varphi^2)} \leq C(\varepsilon)$$

pour  $h$  assez petit et  $z \in \Omega_h$ .

En effet, de (3.14) on obtient :

$$\|u\|_{L_\varphi^2} \leq C(\varepsilon) \|(\tilde{P} - z)u\|_{L_\varphi^2}, \quad \forall u \in C_0^\infty$$

et par un argument de densité on obtient alors (3.20) dans le cas où  $\varphi$  est constante près de l'infini. Le cas général s'obtient ensuite en prenant une suite  $\varphi_j$  de fonctions constantes près de l'infini qui converge vers  $\varphi$ . On omet les détails.

Etudions ensuite  $(P_k - z)^{-1}$  de plus près. Comme  $(P_k - z)(\tilde{P} - z)^{-1} = I - \Theta_k(\tilde{P} - z)^{-1}$ , on trouve :

$$(3.21) \quad (P_k - z)^{-1} = (\tilde{P} - z)^{-1} + (P_k - z)^{-1} \Theta_k (\tilde{P} - z)^{-1}.$$

Prenant les adjoints en remplaçant  $z$  par  $\bar{z}$ , on obtient aussi :

$$(3.22) \quad (P_k - z)^{-1} = (\tilde{P} - z)^{-1} + (\tilde{P} - z)^{-1} \Theta_k (P_k - z)^{-1}.$$

Une substitution de (3.22) à droite dans (3.21) donne :

$$(3.23) \quad (P_k - z)^{-1} = (\tilde{P} - z)^{-1} + (\tilde{P} - z)^{-1} \Theta_k (\tilde{P} - z)^{-1} + (\tilde{P} - z)^{-1} \Theta_k (P_k - z)^{-1} \Theta_k (\tilde{P} - z)^{-1}.$$

Si  $\varphi$  est comme dans le théorème avec  $\varepsilon \geq \delta$ , alors  $\varphi = \text{const.}$  sur  $\text{supp} \Theta_k$  et on

obtient :

$$(3.24) \quad \|(P_k - z)^{-1}\|_{L(L^2_\varphi, L^2_\varphi)} \leq C(\varepsilon)/a(h), \quad z \in \partial\Omega_h, \quad h \leq 1/C(\varepsilon).$$

Pour aborder  $(P - z)^{-1}$ , il nous faut un peu plus de marge et nous prenons  $\varepsilon \geq 2\delta$ .

Soit  $\chi_k$  la fonction caractéristique de  $[2\pi k - \pi, 2\pi k + \pi]$  et posons :

$$(3.25) \quad R_z = \sum (P_k - z)^{-1} \chi_k.$$

Comme on a un peu de marge dans le choix de  $\varphi$ , on trouve facilement à partir de (3.21) :

$$(3.26) \quad a_{j,k} \stackrel{\text{def}}{=} \|\chi_j (P_k - z)^{-1} \chi_k\|_{L(L^2_\varphi, L^2_\varphi)} \leq \frac{C(\varepsilon)}{a(h)} \times \begin{cases} 1 & \text{si } |j - k| \leq 1 \\ e^{-c|j - k|/Ch} & \text{si } |j - k| \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Soit } v = R_z u, \quad v_j = \|\chi_j v\|_{L^2_\varphi}, \quad u_j = \|\chi_j u\|_{L^2_\varphi}.$$

$$\text{Alors } \|v\|_{L^2_\varphi}^2 = \sum v_j^2, \quad \|u\|_{L^2_\varphi}^2 = \sum u_j^2 \text{ et on a } v_j \leq \sum_k a_{j,k} u_k. \text{ Vu la majoration}$$

(3.26), on obtient :

$$(3.27) \quad \|R_z\|_{L(L^2_\varphi, L^2_\varphi)} \leq C(\varepsilon)/a(h).$$

D'autre part,

$$(3.28) \quad (P - z)R_z = I - K, \quad K = \sum_{j \neq k} \sum \Theta_j (P_k - z)^{-1} \chi_k,$$

et de la même manière que pour (3.27), on obtient :

$$(3.29) \quad \|K\|_{L(L^2_\varphi, L^2_\varphi)} \leq 1/2,$$

si  $h \leq 1/C(\varepsilon)$  et ceci avec (3.24) donne le théorème puisque  $(P - z)^{-1} = R_z(I - K)^{-1}$ .

#

Corollaire 3.4. Pour tous  $\varepsilon > 0$ ,  $C_0 > 0$ , il existe  $C(\varepsilon) > 0$  tel que

$$(3.30) \quad \|\Pi_F\|_{L(L^2_{\varphi_1}, L^2_{\varphi_2})} \leq C(\varepsilon), \quad \text{si } 0 < h \leq 1/C(\varepsilon),$$

pour toutes  $\varphi_j \in C^{1,1}$  avec  $|\varphi''_j| \leq C_0$ ,  $2(\text{sh}(\varphi'_j/2))^2 \leq (\lambda(1 - \cos x) - v(h) - \varepsilon)_+$  et

$$\varphi_1 = \varphi_2 \text{ sur } \cup U_j.$$

Ici  $\Pi_F$  est le projecteur orthogonal sur l'espace  $F$  comme dans la section 2.

Démonstration. Si  $\Theta = \sum \Theta_k$ , on obtient comme pour (3.23) :

$$(P-z)^{-1} = (\tilde{P}-z)^{-1} + (\tilde{P}-z)^{-1} \Theta (\tilde{P}-z)^{-1} + (\tilde{P}-z)^{-1} \Theta (P-z)^{-1} \Theta (\tilde{P}-z)^{-1}$$

et seulement le dernier terme contribue à la représentation intégrale de  $\Pi_F$ .

Comme la longueur de  $\partial\Omega_h$  est  $O(h)$  et  $a(h) \approx h$  on obtient alors (3.30) à partir du théorème 3.3.

#

#### 4. Matrice d'interaction.

Soit  $P$  donné par (3.15) et soient  $\mu(h)$ ,  $a(h)$  comme dans la section 3.

Soient  $\varphi_\alpha \in L^2$ , t.q. :

$$(4.0) \quad \|\varphi_\alpha\|=1, \quad (P_\alpha - \mu)\varphi_\alpha = 0, \quad \text{où } P_\alpha = T_\alpha P_0 T_\alpha^{-1}.$$

Soient  $g_\alpha \in L^2$  t.q.

$$(4.1) \quad (g_\alpha | \varphi_\alpha) = 1$$

$$(4.2) \quad \|g_\alpha\| = O(h^{-N/2})$$

$$(4.3) \quad \|\chi g_\alpha\| = O(h^N d(\text{supp} \chi, U_\alpha)^{-N})$$

uniformément pour  $\chi \in \text{borné} \subset S_{0,0}^0$ ,  $d(\text{supp} \chi, U_\alpha) \geq \varepsilon_0 > 0$ .

Rappelons que les  $v_\alpha = \Pi_F \varphi_\alpha$  forment une base hilbertienne dans  $F$ , et que

$$(4.4) \quad \|\chi(v_\alpha - \varphi_\alpha)\| = O(h^N (1 + d(\text{supp} \chi, U_\alpha))^{-N})$$

sans restriction sur  $\text{supp} \chi$

$$(4.5) \quad \|\chi v_\alpha\| + \|\chi \varphi_\alpha\| = O(h^N d(\text{supp} \chi, U_\alpha)^{-N}),$$

si  $d(\text{supp} \chi, U_\alpha) \geq \varepsilon_0 > 0$ .

On a :

$$(\Pi_F g_\alpha | v_\beta) = (g_\alpha | v_\beta) = (g_\alpha | \varphi_\beta) + (g_\alpha | v_\beta - \varphi_\beta),$$

et d'après (4.1)-(4.3) :  $(g_\alpha | \varphi_\beta) = \delta_{\alpha,\beta} + O(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N})$ .

D'après (4.3), (4.4), on a  $(g_\alpha | v_\beta - \varphi_\beta) = O(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N})$ . Donc,

$$(4.6) \quad (\Pi_F g_\alpha | v_\beta) = \delta_{\alpha,\beta} + O(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N}).$$

Si  $(e_\alpha) = \vec{e}$  est une base orthonormalisée de  $\vec{v}$  ; alors :

$$\vec{v} = \vec{e} (I + (k_{\alpha,\beta})), \quad k_{\alpha,\beta} = O(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N})$$

et (4.6) reste valable avec  $v_\beta$  remplacé par  $e_\beta$ .

Autrement dit :

$$(4.7) \quad \Pi_F g_\alpha = e_\alpha + \sum \tilde{k}_{\alpha,\beta} e_\beta,$$

$$\tilde{k}_{\alpha,\beta} = O(h^N (1+|\alpha-\beta|)^{-N})$$

On en déduit que  $(\Pi_F g_\alpha)$  est une base hilbertienne dans  $F$ .

**Lemme 4.1.** Soit  $(x_0(h), \xi_0(h)) \in U_0(\mu(h))$ ,  $b > 0$ . Alors on peut trouver  $(x_1(h), \xi_1(h))$  tels que  $|(x_1(h), \xi_1(h)) - (x_0(h), \xi_0(h))| \rightarrow 0$ ,  $N_0$  et  $c(h)$  tels que  $c(h), c(h)^{-1} = O(h^{-N_0})$  et tels que :

$$g_0(x, h) = c(h) \exp \frac{1}{h} (i(x - x_1(h))\xi_1(h) - \frac{b}{2}(x - x_1(h))^2)$$

vérifie les hypothèses (4.1)-(4.3).

#### Démonstration

(4.2) et (4.3) sont faciles à établir si  $g_0$  a la forme indiquée avec :

$|(x_1(h), \xi_1(h)) - (x_0(h), \xi_0(h))| \rightarrow 0$  et  $c(h)$  à croissance polynômiale. Il s'agit donc de vérifier (4.1), c'est-à-dire de trouver une suite  $(x_1(h), \xi_1(h))$  telle que  $|(x_1(h), \xi_1(h)) - (x_0(h), \xi_0(h))| \rightarrow 0$  et telle que  $|\mathcal{T}\varphi_0(x_h, \xi_h)| \geq h^{N_0}$  soit vérifiée avec :

$$\begin{aligned} (*) \quad (\mathcal{T}\varphi_0)(x_1(h), \xi_1(h)) &= \int e^{(i(x_1(h)-y)\xi_1(h) - b(y-x_1(h))^2)/h} \varphi_0(y) dy \\ &= (\varphi_0 | v_0(x_1(h), \xi_1(h))) \\ &\quad (\text{où } v_0(x, \xi)(y) := e^{(i(x-y)\xi - b(y-x)^2/2)/h}) \end{aligned}$$

Supposons par un raisonnement par l'absurde que ceci ne soit pas possible.

On trouverait pour tout  $N_0$ , un  $\mu_0$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  et un point  $(x_0, \xi_0) \in U_0(\mu_0)$  tels que pour une suite de  $h$  qui tend vers 0, on ait :

$$|\mathcal{T}\varphi_0(x, \xi)| \leq h^{N_0} \text{ pour } |(x, \xi) - (x_0, \xi_0)| \leq \varepsilon_1.$$

Le raisonnement qui suit est classique dans l'étude de la propagation des singularités (cf [SJ]<sub>1</sub>)

Si  $\text{dist}((x, \xi), U_{(0,0)}) \leq \varepsilon_2$  où  $\varepsilon_2 > 0$  est assez petit, alors il existe  $\tilde{t} = t(x, \xi) \in [-C_0, C_0]$  pour un  $C_0 > 0$  fixé assez grand, tel que  $(x(\tilde{t}), \xi(\tilde{t})) = \exp \tilde{t} H_p(x, \xi)$  vérifie  $|(x(\tilde{t}), \xi(\tilde{t})) - (x_0, \xi_0)| \leq \varepsilon_1/2$ .

On peut d'autre part construire  $v_t(x, \xi)(y) = a(t, y, h) \exp i \varphi(t, y, x, \xi)/h$

t.q.  $\text{Im } \varphi(t, y, x, \xi) \geq 0$  avec égalité pour  $y = x(t)$ ,  $\text{Im } \varphi''_{y,y} > 0$ ,  $\varphi'_y(t, x_t, x, \xi) = \xi_t$

vérifiant  $(h D_t + P_y - \mu)v_t = 0$ ,  $v_{t=0} = v_0$

Inversant la transformation de F.B.I (\*) (voir par exemple [SJ]<sub>1</sub> (§9 p61),

[HE-SJ]<sub>4</sub> pour ce genre d'argument, on voit que :

$$(\varphi_0 | v_t) = O(h^{N_0 - N_1})$$

où  $N_1$  est une constante universelle.

D'autre part  $(\varphi_0 | v_0(x, \xi)) = (\varphi_0 | v_t(x, \xi)) + O(h^\infty)$  donc  $T\varphi_0(x, \xi) = O(h^{N_0 - N_1})$  pour tout

$(x, \xi) \in U_{0,0} + B((0,0), \varepsilon_2)$ .

Ceci est clairement impossible pour  $N_0$  arbitrairement grand (car  $\varphi_0$  est  $O(h^\infty)$  en dehors de  $U_{0,0}$  et de norme 1).

#

On définit ensuite  $g_\alpha = T_\alpha g_0$ . Ainsi (4.1)-(4.3) sont vérifiées. Dans le cas  $\lambda=1$ , un choix optimal semble être de prendre  $b=1$  et  $x_0 = \xi_0$ , car alors  $g_0$  et  $\hat{g}_0$  ont essentiellement la même décroissance.

Soit  $G_0(x) = \frac{b}{2} (x - x_0)^2$ ,  $\hat{G}_0(\xi) = \frac{1}{2b} (\xi - \xi_0)^2$ . Soit  $\Phi(x)$  la fonction croissante continue telle que  $\Phi(0)=0$ ,  $\Phi(x)=\text{const.}$  sur chaque  $U_j = \Pi_x U_{j,k}$  (où  $\pi_x$  est la projection de  $U_{j,k}$  sur l'axe des  $x$ ) et telle que :

$$\cos(i\Phi') + \lambda \cos x - E_0 = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \setminus U_k.$$

Pour faire le lien avec les fonctions poids utilisées dans la section 3, on remarque que :

$$(4.8) \quad 2(\text{sh } \Phi'/2)^2 = (\lambda(1 - \cos x) - F_0)_+,$$

où  $F_0$  est défini avant le Théorème 3.3. On définit alors une distance dégénérée sur les puits, par :

$$(4.9) \quad D(x, y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|.$$

De même, on introduit  $\hat{U}_k = \Pi_\xi U_{j,k}$  et la fonction continue croissante  $\hat{\Phi}$  avec  $\hat{\Phi}(0)=0$ ,  $\hat{\Phi}=\text{const.}$  sur chaque  $\hat{U}_k$ ,  $\cos \xi + \lambda \cos i \hat{\Phi}'(\xi) - E_0 = 0$  dans  $\mathbb{R} \setminus \hat{U}_k$ , ainsi

que la distance associée :

$$(4.10) \quad \hat{D}(\xi, \eta) = |\hat{\Phi}(\xi) - \hat{\Phi}(\eta)|.$$

Posons aussi :

$$(4.11) \quad D^{(1)}(x, y) = \min_k D(x, U_k) + D(U_k, y).$$

Si :  $\gamma_1(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}} G_0(y) + D^{(1)}(x, y)$ , on obtient à l'aide du corollaire 3.4 :

$$(4.12) \quad \text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } \frac{(1-\varepsilon)\gamma_1}{h} \text{ tel que } \|\Pi_F g_0\| \leq C(\varepsilon).$$

(Voir [HE-SJ]<sub>1-2</sub>] pour des arguments semblables.)

On constate que  $\gamma_1(0) = 0$ ,  $\gamma_1(2\pi k) \geq v_1 |k|$  pour un  $v_1 \in ]0, S_1]$ , où  $S_1 = D(0, 2\pi)$  est l'action horizontale, déjà considérée dans la section 1. Pour  $2\pi k \leq |x| \leq 2\pi(k+1)$ , on a :

$$(4.13) \quad \gamma_1(x) \geq \min(v_1 k + D(2\pi k, |x|), v_1(k+1) + D(2\pi(k+1), |x|)).$$

Ceci résulte de :  $\gamma_1(x) = \min_k \gamma_1(U_k) + D(U_k, x)$ .

Bien entendu nous avons des résultats analogues pour  $\Pi_F g_\alpha$  en remplaçant

$$\gamma_1(x) \text{ par } \gamma_1(x - 2\pi\alpha_1) \text{ et pour } \widehat{\Pi_F g_\alpha}(\xi) = (2\pi h)^{-1/2} \int e^{-ix\xi/h} \Pi_F g_\alpha(x) dx,$$

en remplaçant  $\gamma_1(x)$  par  $\gamma_2(\xi - 2\pi\alpha_2)$ , où  $\gamma_2(\xi) = \inf_{\eta \in \mathbb{R}} \hat{G}_0(\eta) + \hat{D}^{(1)}(\xi, \eta)$ ,  $\hat{D}^{(1)}(\xi, \eta) = \min_k \hat{D}(\xi, U_k) + \hat{D}(U_k, \eta)$ . On a  $\gamma_2(0) = 0$ ,  $\gamma_2(2\pi k) \geq v_2 |k|$ ,  $0 < v_2 \leq S_2$ , où  $S_2$  est l'action verticale introduite dans la section 1.

**Remarque 4.2.** Si  $\lambda = 1$ ,  $E_0 = 2$ ,  $b = 1$  on trouve que  $G_0 = \hat{G}_0 \geq D(0, x)$  et donc  $\gamma_1 = \gamma_2 = D(0, x)$ ,  $v_1 = v_2 = S_1 = S_2$  dans ce cas. De manière plus générale, si  $\lambda = 1$  on peut montrer que l'on peut prendre  $v_1 = v_2$  suffisamment grands pour que certains arguments de cette section se simplifient. Voir l'appendice A pour plus de détails.

Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^2$ , on pose :

$$(4.14) \quad \delta(\alpha, \beta) = \max_{j=1,2} (v_j |\alpha_j - \beta_j|).$$

$\delta$  est une distance sur  $\mathbb{Z}^2$ , et on pose pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$(4.15) \quad \delta^{(k)}(\alpha, \beta) = \min_{\substack{\alpha = \alpha^{(1)} \\ \dots \\ \alpha^{(1-k)} \\ l > k}} \delta(\alpha, \alpha^{(1)}) + \delta(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) + \dots + \delta(\alpha^{(1-k)}, \beta).$$

avec  $\delta^{(0)} = \delta$ .

A cause de l'inégalité triangulaire il suffit de prendre  $l \in (k, k+1)$ . Remarquons aussi que :

$$(4.16) \quad \delta^{(k+l)}(\alpha, \gamma) \leq \delta^{(k)}(\alpha, \beta) + \delta^{(l)}(\beta, \gamma).$$

Définition 4.3. Soit  $A = (a_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . On dit que  $A = \tilde{O}(e^{-\delta^{(k)}/h})$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :  $|a_{\alpha, \beta}| \leq \exp((\varepsilon - (1-\varepsilon)\delta^{(k)}(\alpha, \beta)/h)$ , si  $0 < h \leq h(\varepsilon) > 0$ .

#

On montre facilement :

$$(4.17) \quad \text{Si } A = \tilde{O}(\exp - \delta^{(k)}/h), B = \tilde{O}(\exp - \delta^{(l)}/h),$$

alors  $A \circ B = \tilde{O}(\exp(-\delta^{(k+l)}/h))$

$$(4.18) \quad \text{Si } A = \tilde{O}(\exp - \delta^{(k)}/h), k \geq 1 \text{ et si } \mathcal{H} \in \mathbb{R} \text{ alors pour } h > 0 \text{ assez petit on peut définir } (I+A)^{\mathcal{H}} \text{ (car } \|A\|_{\mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)} \text{ est exponentiellement petite)}$$

et on a  $(I+A)^{\mathcal{H}} = I + \mathcal{H}A + \tilde{O}(\exp - \delta^{(2k)}/h)$ .

$$(4.19) \quad \text{Si } A = \tilde{O}(\exp - \delta^{(k)}/h) \text{ alors } A = \tilde{O}(\exp - \delta^{(l)}/h), \forall l \leq k.$$

Changeant légèrement la normalisation de  $g_\alpha$ , on peut supposer que  $\|\Pi_F g_\alpha\| = 1$ .

Utilisant (4.12), (4.13) et les majorations analogues pour  $\widehat{\Pi_F g_0}$ , on obtient, pour la base orthonormalisée de la base  $\Pi_F g_\alpha$  :

$$(4.20) \quad \vec{u} = \overrightarrow{\Pi_F g} (I + \tilde{O}(e^{-\delta^{(1)}/h})),$$

ce qui donne avec (4.12), (4.13) et leurs analogues pour  $\widehat{\Pi_F g_0}$  :

(4.22) Pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\|e^{(1-\varepsilon)f_1(x-2\pi\alpha_1)/h} u_\alpha\| + \|e^{(1-\varepsilon)f_2(\xi-2\pi\alpha_2)/2} \hat{u}_\alpha\| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h},$$

où  $f_1, f_2$  sont les fonctions paires définies par

$$(4.23) \quad f_1(x) = \min(v_1 k + D(2\pi k, |x|), v_1(k+1) + D(2\pi(k+1), |x|)),$$

$$(4.24) \quad f_2(\xi) = \min(v_2 k + \hat{D}(2\pi k, |\xi|), v_2(k+1) + \hat{D}(2\pi(k+1), |\xi|)),$$

pour  $|x|, |\xi| \in [2\pi k, 2\pi(k+1)]$ .

On s'intéresse maintenant à la matrice P/F dans la base  $(u_\alpha)$ . Rappelons que  $g_\alpha = T_\alpha g_0$ .

**Lemme 4.4.** On a  $u_\alpha = T_\alpha u_0$ .

**Démonstration.** Comme P commute avec  $T_\alpha$  on a aussi  $v_\alpha = T_\alpha v_0$ , où on a posé  $v_0 = \Pi_F g_0$ . Rappelons que  $T_\beta T_\alpha = \exp(i\hbar \beta_2 \alpha_1) T_{\beta+\alpha}$ , où  $(2\pi)^2 / \hbar = 2\pi k + \tilde{h}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . La base orthonormalisée  $(u_\alpha)$  est caractérisée par le fait que

$$v_\alpha = \sum_\beta S_{\alpha,\beta} u_\beta$$

pour une matrice positive  $(S_{\alpha,\beta})$ . Comme  $T_\gamma$  est unitaire la base orthonormalisée de  $(T_\gamma v_\alpha)$  est  $(T_\gamma u_\alpha)$ . Or,  $T_\gamma v_\alpha = \exp(i\hbar \gamma_2 \alpha_1) v_{\alpha+\gamma}$ , donc

$$(4.25) \quad T_\gamma v_\alpha = \sum_\beta \exp(i\hbar \alpha_2 \alpha_1) S_{\alpha+\gamma,\beta+\gamma} u_{\beta+\gamma}$$

$$= \sum_\beta [\exp(i\hbar \gamma_2 (\alpha_2 - \beta_1)) S_{\alpha+\gamma,\beta+\gamma}] \exp(i\hbar \gamma_2 \beta_1) u_{\beta+\gamma}.$$

Entre crochets apparaît une nouvelle matrice positive et comme  $(\exp(i\hbar \gamma_2 \beta_1) u_{\beta+\gamma})_\beta$  est orthonormale, c'est bien l'orthonormalisée de  $(T_\gamma v_\alpha)_\alpha$ . Donc,

$$(4.26) \quad T_\gamma u_\alpha = \exp(i\hbar \gamma_2 \alpha_1) u_{\alpha+\gamma},$$

et, si on pose  $\alpha=0$ , on obtient le lemme.

#

On a  $(Pu_\beta | u_\alpha) = (T_\gamma Pu_\beta | T_\gamma u_\alpha) = (P T_\gamma u_\beta | T_\gamma u_\alpha) = \exp i\hbar \gamma_2 (\beta_1 - \alpha_1) (P u_{\beta+\gamma} | u_{\alpha+\gamma})$ . Donc la matrice de  $P|_F$  est de la forme :

$$\mu I + W, \quad W = (w_{\alpha,\beta}),$$

où

$$(4.27) \quad w_{\alpha,\beta} = \exp(i\hbar \gamma_2 (\beta_1 - \alpha_1)) w_{\alpha+\gamma,\beta+\gamma}.$$

Ici la nouvelle valeur de  $\mu(\hbar)$  diffère par  $O(\hbar^\infty)$  de l'ancienne.

Comme (4.22) reste vrai avec  $u_\alpha$  remplacé par  $Pu_\alpha$ , on a :

$$(4.28) \quad W = \tilde{O}(e^{-\delta^{(1)}/h}).$$

Si  $v_j < S_j$  cette estimation sera insuffisante, et nous allons maintenant l'améliorer pour les  $w_{\alpha,\beta}$  avec  $|\alpha-\beta|$  petit.

Grâce à (4.27) il suffit de majorer  $w_{\alpha,0}$ . Faisons l'hypothèse de récurrence (II) = (H.1.5) :

$$(H.1) \quad |w_{\alpha,0}| \leq C_\epsilon \exp \left[ -\frac{1}{h}(1-\epsilon) \max_{j=1,2} a_j(|\alpha_j|)/h \right],$$

où  $a_j : N^* \rightarrow R_+$  vérifie

$$(H.2) \quad 0 \leq a_j(k+1) - a_j(k) \leq v_j,$$

$$(H.3) \quad |a_1(1) - a_2(1)| \leq \min(v_1, v_2),$$

$$(H.4) \quad |a_j(1)| \leq S_j, \quad j=1,2.$$

$$(H.5) \quad a_j(k) \geq \epsilon_0 k \text{ pour un } \epsilon_0 > 0.$$

Estimons d'abord :

$$(4.29) \quad (P-\mu)u_0 = \sum_{\beta \neq (0,0)} w_{\beta,0} u_\beta.$$

Pour abrégé, on écrira  $u = \tilde{O}(1) e^{-f/h}$  si pour la norme  $L^2$  sur tout compact.

$\|e^{(1-\epsilon)f/h} u\|_{L^2} = O(e^{\epsilon/h}), \quad \forall \epsilon > 0$ . La contribution des termes avec  $\beta_1 = 0$  se

majoré alors par :  $\tilde{O}(1) e^{-(a_2(1) + f_1(x))/h}$ .

La contribution des termes avec  $\beta_1$  fixé  $\neq 0$  se majoré par :

$$\tilde{O}(1) e^{-(a_1(|\beta_1|) + f_1(x - 2\pi\beta_1))/h}. \text{ Donc :}$$

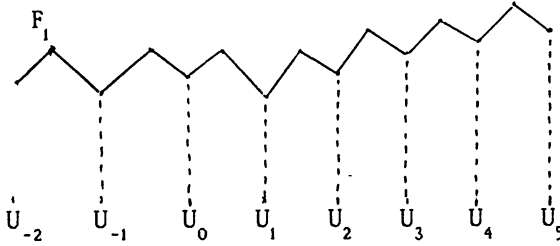
$$(P-\mu)u_0 = \tilde{O}(1) e^{-F_1(x)/h}, \text{ où :}$$

$$F_1(x) = \min(a_2(1) + f_1(x), \min_{\beta_1 \neq 0} a_1(|\beta_1|) + f_1(x - 2\pi\beta_1)).$$

Grâce aux propriétés (H2), (H3) on a pour  $2\pi k \leq |\alpha| \leq 2\pi(k+1)$  :

$$F_1(x) = \min(a_1^*(k) + D(2\pi k, |x|), a_1^*(k+1) + D(2\pi(k+1), |x|)),$$

où  $a_1^*(k) = a_1^*(-k)$ ,  $a_1^*(0) = a_2(1)$ ,  $a_1^*(k) = a_1(k)$ ,  $k \geq 1$ .



Cherchons maintenant une nouvelle estimation sur  $W_{\alpha,0}$  quand  $\alpha_1 \neq 0$ , par exemple pour  $\alpha_1 > 0$ . On écrit :

$$W_{\alpha,0} = ((P - \mu)u_0|u_\alpha) = (\chi(P - \mu)u_0|u_\alpha) + (u_0|(1 - \chi)P - \mu)u_\alpha) - (u_0|[P, \chi]u_\alpha) = I + II + III.$$

Ici  $\chi = 1_{]-\infty, \lambda]}$  avec  $\lambda \in ]0, 2\pi\alpha_1[$  convenable à choisir.

Cas 1.  $\alpha_1 = 1$ . On choisit  $\lambda/2\pi = 1/2$  ce qui donne la même majoration pour I et II :

$I + II = \mathcal{O}(1)\exp(-\min(a_2(1) + v_1, a_1(1) + S_1)/h)$ . Aussi :  $III = \mathcal{O}(1)\exp(-S_1/h)$ , car  $\text{supp}[P - \chi]u_\alpha \subset [\lambda - h, \lambda + h]$ . Donc,  $W_{\alpha,0} = \mathcal{O}(1)\exp(-\min(a_2(1) + v_1, S_1)/h)$ .

Cas 2.  $\alpha_1$  est pair  $\geq 2$ . Si on choisit  $\lambda/2\pi = \alpha_1/2$ , alors I et II ont la même majoration, mais pour III on trouve seulement  $\mathcal{O}(1)\exp(-v_1\alpha_1/h)$  ce qui ne donne aucune amélioration. On prend  $\lambda/2\pi = \frac{\alpha_1 + 1}{2}$  ce qui augmente la majoration de I et diminue celle de II. On trouve

$$I, II = \mathcal{O}(1)\exp(-(a_1(\frac{\alpha_1}{2}) + v_1\frac{\alpha_1}{2})/h)$$

$$III = \mathcal{O}(1)\exp(-(v_1(\alpha_1 - 1) + S_1)/h).$$

Donc,

$$W_{0,\alpha} = \mathcal{O}(1)\exp(-(\min(S_1 + v_1(\alpha_1 - 1), a_1(\frac{\alpha_1}{2}) + v_1\frac{\alpha_1}{2}))/h).$$

Cas 3.  $\alpha_1$  est impair  $\geq 3$ . On choisit  $\lambda/2\pi = \frac{\alpha_1}{2} = [\frac{\alpha_1}{2}] + \frac{1}{2}$ . Alors

$$I, II = O(1) \exp - (a_1(\lfloor \frac{\alpha}{2} \rfloor) + v_1(\alpha_1 - \lfloor \frac{\alpha}{2} \rfloor)) / h$$

$$III = O(1) \exp - (v_1(\alpha_1 - 1) + S_1) / h.$$

Donc

$$W_{\alpha,0} = O(1) \exp - \min(S_1 + v_1(\alpha_1 - 1), a_1(\lfloor \frac{\alpha}{2} \rfloor) + (\alpha_1 - \lfloor \frac{\alpha}{2} \rfloor)v_1) / h,$$

ce qui est aussi la majoration dans le cas 2.

Les mêmes arguments marchent pour  $W_{\alpha,0}$  et nous avons démontré que si  $(a_1, a_2)$  vérifie (II) alors (H.1) et (H.4) sont vérifiées par  $(b_1, b_2)$ , où :

$$\begin{aligned} b_1(1) &= \min(a_2(1) + v_1, S_1) \\ b_1(j) &= \min(a_1(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) + (j - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor)v_1, S_1 + (j-1)v_1), \quad j \geq 2 \\ (4.30) \quad b_2(1) &= \min(a_1(1) + v_2, S_2) \\ b_2(j) &= \min(a_2(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) + (j - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor)v_2, S_2 + (j-1)v_2), \quad j \geq 2 \end{aligned}$$

Pour assurer (H2), (H3) on prend  $b_1, b_2$  plus petits :

$$\begin{aligned} b_1(1) &= \min(\min(a_1(1), a_2(1)) + \min(v_1, v_2), S_1) \\ b_1(j) &= \min(a_1(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) + (j - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor)v_1, S_1 + (j-1)v_1), \quad j \geq 2 \\ (4.31) \quad b_2(1) &= \min(\min(a_1(1), a_2(1)) + \min(v_1, v_2), S_2) \\ b_2(j) &= \min(a_2(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) + (j - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor)v_2, S_2 + (j-1)v_2), \quad j \geq 2 \end{aligned}$$

**Proposition 4.5.** Si  $(a_1, a_2)$  vérifie (H) et si  $(b_1, b_2)$  est donné par (4.31), alors  $(b_1, b_2)$  vérifie (H). De plus  $b_k(j) \geq a_k(j)$  pour tout  $k, j$ .

**Démonstration.** On a déjà vu que  $(b_1, b_2)$  vérifie (H1), (H4). Supposons par exemple que  $S_1 \leq S_2$ . Alors  $b_1(1) \leq b_2(1)$ . Montrons d'abord (H3) :

Si  $\min(a_1(1), a_2(1)) + \min(v_1, v_2) \leq S_1$  alors  $b_1(1) = b_2(1)$  et on a bien (H3).

Si  $\min(a_1(1), a_2(1)) + \min(v_1, v_2) > S_1$ , alors  $b_1(1) = S_1$  et  $b_2(1) \leq \min(a_1(1), a_2(1)) + \min(v_1, v_2) \leq S_1 + \min(v_1, v_2)$ . On a donc (H3).

On constate ensuite que  $0 \leq b_k(1) - a_k(1) \leq \min(v_1, v_2)$ . D'après (4.31) :

$b_k(2) = a_k(1) + v_k$ , donc  $b_k(2) - b_k(1) = v_k - (b_k(1) - a_k(1)) \in [0, v_k]$ .

Pour  $j$  pair :  $b_k(j+1) - b_k(j) = v_k \in [0, v_k]$ ,

pour  $j$  impair :  $b_k(j+1) - b_k(j) = a_k(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 1) - a_k(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) \in [0, v_k]$ .

Donc on a bien (H2) pour  $(b_1, b_2)$ . Il reste seulement à montrer que  $b_k(j) \leq a_k(j)$ .

On l'a déjà fait pour  $j=1$ .

Pour  $j \geq 2$  :  $b_k(j) = a_k(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) + (j - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor)v_k \geq a_k(j)$  à cause de (H2).

#

Faisons maintenant plusieurs itérations selon (4.31) en commençant par exemple avec  $a_k(j) = \min(v_1, v_2)j$ .

Supposons que  $S_1 \leq S_2$  (c'est le cas  $\lambda \leq 1$ ). Si on regarde d'abord uniquement  $a_k(1)$ , on voit qu'au bout d'un certain nombre d'itérations on arrive à un  $(a_1, a_2)$  qui vérifie (II) tel que  $a_1(1) = S_1$ ,  $a_2(1) = \min(S_2, S_1 + \min(v_1, v_2))$ . Après encore une itération, on obtient les mêmes valeurs pour  $a_1(1), a_2(1)$  pendant que  $a_1(j) \geq S_1 + v_1$ ,  $a_2(j) \geq a_2(1) + v_2$  pour  $j \geq 2$ . Il résulte aussi du cas 1 ci-dessus que, si  $\alpha_1 = 1$ , alors :

$$(4.32) \quad w_{\alpha,0} = -(u_0 | [P, \chi] u_\alpha) + O(1) e^{-\frac{(S_1 + v_1)j}{h}}$$

Si  $\alpha_2 = 1$ , on a :

$$(4.33) \quad w_{\alpha,0} = -(u_0 | [\hat{P}, \chi] \hat{u}_\alpha) + O(1) e^{-\frac{\min(S_1 + v_1, 2S_2)j}{h}}$$

Ici  $\chi = 1_{]-\infty, \pi]}$ .

Pour résumer ; on a la :

Proposition 4.6. Soit  $\mu I + W$ ,  $W = (w_{\alpha,\beta})$  la matrice de  $Pl_F$  pour la base orthonormée  $(u_\alpha)$ . Si  $S_1 \leq S_2$  on a (4.28) et :

$$(4.34) \quad w_{\alpha,0} = \begin{cases} \hat{O}(1)e^{-\frac{(S_1 + \epsilon_0)}{h}} & \text{si } |\alpha|_{\ell^\infty} \geq 2 \\ \hat{O}(1)e^{-\frac{S_1}{h}} & \text{si } |\alpha_1| = 1 \\ \hat{O}(1)e^{-\frac{\min(S_2, S_1 + \epsilon_0)}{h}} & \text{si } |\alpha_2| = 1. \end{cases}$$

Ici  $\epsilon_0 > 0$ . De plus, on a (4.32) si  $\alpha_1 = 1$ , et (4.33) si  $\alpha_2 = 1$ .

#

### 5. Etude de $w_{\alpha,0}$ pour $\|\alpha\|_\infty = 1$ .

On suppose toujours que  $S_1 \leq S_2$  (c'est-à-dire que  $\lambda \leq 1$ ). Utilisant la Proposition 4.6 comme après (4.29) on trouve :

$$(5.1) \quad (P-\mu)u_0 = O(1)e^{-F_1(x)/h},$$

$$(5.2) \quad \widehat{(P-\mu)u_0} = O(1)e^{-F_2(\xi)/h},$$

où :

$$(5.3) \quad F_1(x) = \min(\min(S_2, S_1 + \varepsilon_0) + f_1(x), \min_{\beta_1 \neq 0} S_1 + f_1(x - 2\pi\beta_1)),$$

$$(5.4) \quad F_2(\xi) = \min(S_1 + f_2(\xi), \min(S_1 + \varepsilon_0, S_2) + \min_{\beta_2 \neq 0} f_2(\xi - 2\pi\beta_2)).$$

Ecrivons  $U_0 = [-\mu_0, \mu_0]$ , et rappelons la définition de  $D(0, x)$  dans la section 4. Comme  $D(0, x)$  vérifie une équation eiconale dans  $]\mu_0, 2\pi - \mu_0[$ , on peut étendre  $D(0, x)$  en une fonction holomorphe définie dans un voisinage complexe de cet intervalle.

**Proposition 5.1.** Il existe  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  tels que :

$$(5.5) \quad |u_0(x, h)| \leq C_\varepsilon e^{-(\operatorname{Re} D(0, x) - \varepsilon)/h},$$

pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $x \in B(\mu_0 + \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{C} ; |x - \mu_0 - \varepsilon_1| < \varepsilon_2\}$ .

**Démonstration.** On utilisera assez librement l'analyse microlocale analytique développée dans [SJ]<sub>1</sub>. Soit :

$$(5.6) \quad Tu(x, h) = h^{-3/4} \int e^{i\varphi(x, y)/h} a(x, y, h) u(y) dy$$

une transformation de FBI qui permet de microlocaliser  $u$  dans un voisinage de  $U_{(0,0)}$ . Plus particulièrement, on prend  $\varphi(x, y) = i(x - y)^2/2$ ,  $a = \text{Cste}$ .

Soit  $\Phi_0(x)$ ,  $x \in \mathbb{C}$ , le poids strictement sous harmonique associé, donné par  $\Phi_0(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} -\operatorname{Im} \varphi(x, y) = -\operatorname{Im} \varphi(x, y, (x)) = (\operatorname{Im} x)^2/2$ , où  $y(x)$  est le maximum

non dégénéré de  $-\text{Im } \varphi(x, \cdot)|_{\mathbb{R}}$ . Avec un choix convenable de  $a = \text{const.}$ , on sait

alors que  $T$  est unitaire :

$$L^2(\mathbb{R}) \rightarrow H_{\Phi_0}(C) = \{u; C \rightarrow C; u \text{ est entière et } u e^{-\Phi_0/h} \in L^2(C, L(dx)), \text{ où } L(dx) \text{ est}$$

la mesure de Lebesgue sur  $C$ . Pour  $Tu_0$  on montre à l'aide de (4.22)-(4.24)

que  $Tu_0 = O(1)$  dans  $H_{\Phi'}(C)$ , où  $\Phi' \geq \Phi_0$  est une fonction continue sur  $C$ , qui coïncide avec  $\Phi_0$  dans un voisinage arbitrairement petit de  $\Pi_x \mathcal{H}_T(U_{0,0})$ , et qui vérifie :  $\Phi'(x) - \Phi_0(x) = \frac{1}{C_0}|x|$  pour  $|x| \geq C_0$ ;  $C_0 > 0$  suffisamment grand.

Ici,  $\mathcal{H}_T(y, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)) \rightarrow (x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y))$ , est la transformation canonique associée à  $T$ .

On peut alors récupérer  $u_0$  par :

$$(5.7) \quad u_0(y, h) = h^{-1/4} \int_{\Gamma(y)} e^{-i\varphi(x, y)/h} b(Tu_0(x, h)) dx,$$

où  $b$  est une constante et  $\Gamma(y)$  est le contour  $(x; y(x)=y) = (x; \text{Re } x=y)$ , et on voit que  $u_0$  est holomorphe dans une bande autour de  $\mathbb{R}$ , et que pour tout voisinage  $\Omega$  de  $\Pi_x \mathcal{H}_T U_{0,0}$  il existe un voisinage complexe  $\Omega'$  de  $U_0$ , tel que  $u_0$  est déterminé modulo  $O(\exp(-1/C_0 h))$  dans  $\Omega'$  par  $Tu_0$  dans  $\Omega$ . Par rapport à la formule d'inversion (5.7), on remarque aussi que :

$$(5.8) \quad \text{Im } \varphi(x, y) + \Phi_0(x) \sim |y - y(x)|^2 \sim \text{dist}(x, \Gamma(y))^2,$$

ce qui explique le choix de contour dans (5.7).

Rappelons aussi (cf (5.1)) que  $(Q - \mu)Tu_0 \sim 0$  dans  $H_{\Phi_0}^{\ell, \text{oc}}(\Omega)$  où :

$$H_{\Phi_0}^{\ell, \text{oc}}(\Omega) = \{v = v(x, h); v \text{ défini sur } \Omega \times ]0, h_0], v \text{ holomorphe en } x \text{ et pour tout}$$

$$K \subset \subset \Omega \text{ et tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } C_{K, \varepsilon} > 0, \text{ tel que : } |v(x, h)| \leq C_{K, \varepsilon} e^{(\Phi_0(x) + \varepsilon)/h}, x \in K\}.$$

On dit que  $v \sim 0$  dans  $H_{\Phi_0}^{\ell, \text{oc}}(\Omega)$  si pour tout  $K \subset \subset \Omega$ , il existe  $\varepsilon(K) > 0$ , et  $C(K) > 0$

$$\text{tels que : } |v(x, h)| \leq C(K) e^{(\Phi_0(x) - \varepsilon(K))/h}, x \in K.$$

Ici  $Q$  est une réalisation convenable de l'opérateur  $h$ -pseudodifférentiel analytique classique qui formellement vaut  $TPT^{-1}$ .

Examinons d'abord le cas où  $1-\lambda+\varepsilon_0 \leq \mu \leq 1+\lambda-\delta$ , où  $\delta > 0$  est petit, mais fixé. Dans ce cas  $\gamma_\mu =_{\text{def}} \Pi_x \mathcal{K}_T U_{0,0}(\mu)$ , est difféomorphe à un cercle et par une méthode de déformations non-caractéristiques (comme par exemple dans [S]₁, voir aussi plus loin dans cette démonstration), on obtient après diminution de  $\Omega$ , que  $Tu_0 \in H_\Phi^{l,0,c}(\Omega)$ , où  $\Phi$  est l'unique fonction harmonique définie près de  $\gamma_\mu$ , qui vérifie

$$(5.9) \quad \Phi_0 - \Phi \sim \text{dist}(\cdot, \gamma_\mu)^2.$$

Ici l'existence de  $\Phi$  est donnée par le théorème de Cauchy-Kowalevski ; que l'on a (5.9) et pas seulement  $\Phi_0 - \Phi = O(\text{dist}(\cdot, \gamma_\mu)^2)$  résulte ensuite de la stricte sous-harmonicité de  $\Phi_0 - \Phi$ . D'autre part  $q(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x}) - \mu$  est une fonction holomorphe qui s'annule sur  $\gamma_\mu$  et donc identiquement.

D'après (5.8), (5.9), on a :

$$\text{Im } \varphi(x, y) + \Phi(x) \sim -\text{dist}(x, \gamma_\mu)^2 + \text{dist}(x, \Gamma(y))^2, \text{ pour } x \text{ voisin de } x_0 = \Pi_x \mathcal{K}_T((\mu_0, 0)).$$

Dans les coordonnées  $t = \text{Re } x - \mu_0$ ,  $s = \text{Im } x$ , on a  $\gamma_\mu$  défini par :

$$t + \alpha(s)s^2 = 0; \alpha(0) > 0, \text{ et } \Gamma_{(\mu+y)} \text{ défini par : } t = y.$$

On trouve alors :

$$f(t, s, y) =_{\text{def}} \text{Im } \varphi(x, y + \mu) + \Phi(x) = a(t, s, y)(t - y)^2 - b(t, s, y)(t + \alpha(s)s^2)^2 \text{ avec } a, b > 0.$$

Pour  $y < 0$ , on a les deux points critiques (de col) donnés par :

$$t = y, y + \alpha(s)s^2 = 0, \text{ que l'on note } (y, s_\pm(y)).$$

Calculons les dérivées :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\tilde{a}(t - y) - 2\tilde{b} \cdot \tilde{t}, \text{ avec } \tilde{a}(0) = a(0), \tilde{b}(0) = b(0), \tilde{t} = (t + \alpha(s)s^2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial a}{\partial s}(t - y)^2 - \frac{\partial b}{\partial s} \tilde{t}^2 - 2b\tilde{t} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial s}$$

Pour  $t = y$ ,  $\tilde{t} = 0$ , on trouve ensuite :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 2(\tilde{a} - \tilde{b})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = -2\tilde{b} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial s} = -4\tilde{b} \tilde{\alpha}(s)s, \quad \tilde{\alpha}(0) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = -2b\left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial s}\right)^2 = -8b(\tilde{\alpha}(s))^2 s^2 = O(s^2).$$

Comme  $f$  est harmonique ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = 0$ , on a aussi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 2(\tilde{a} - \tilde{b}) = O(s^2) \text{ pour } t=y, \tilde{t}=0.$$

En particulier pour  $y=0$  on obtient :  $a(0)=b(0)$ . Pour  $t=y, \tilde{t}=0$ , on a :

$$(5.10) \quad f''_{(t,s),(t,s)} = -4\tilde{b} \tilde{\alpha}(s) s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(s^2)$$

$f''$  admet donc les valeurs propres  $\pm 4\tilde{b} \tilde{\alpha}s + O(s^2)$ , avec des vecteurs propres associés :  $(1,1)+O(s)$  respectivement  $(1,-1)+O(s)$ .

Comme  $a(0)=b(0)$ , il est clair que  $f(t,s,0)$  s'annule à l'ordre au moins 3 en  $(0,0)$ .

Comme d'autre part  $f''_{(t,s),(t,s)}$  s'annule au plus à l'ordre 1, on voit que l'ordre d'annulation de  $f(t,s,0)$  en  $(0,0)$  est exactement 3.

Ecrivons maintenant :

$f(t,s,y)=f(x,y)=-\text{Im } F(x,y)$ , où  $F(x,y)=-\varphi(x,y+\mu)+\tilde{\Phi}(x)$ ,  $\tilde{\Phi}$  holomorphe avec  $-\text{Im } \tilde{\Phi}(x)=\Phi(x)$ ,  $\tilde{\Phi}(0)=0$ . Alors  $F(x,0)$  s'annule à l'origine exactement à l'ordre 3 ; et les points critiques de  $x \rightarrow F(x,y)$  coïncident avec ceux de  $f(x,y)$ ; soit  $x(y)=O(y)$  le point où  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(.,y)$  s'annule. Alors :

$$F(x,y)=\frac{1}{3} A(x,y)(x-x(y))^3 - B(y)(x-x(y)) + C(y), \quad B(0)=0, C(0)=0$$

On sait en plus que  $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$ , ce qui entraîne  $C'(0)=0$ .

Alors :  $\partial_x F = \tilde{A}(x-x(y))^2 - B(y)$ ,  $\tilde{A}(0)=A(0)$ , et on trouve les points critiques  $x_{\pm}(y)$  par :

$$(x_{\pm}(y)-x(y)) = \pm \sqrt{B(y)/\tilde{A}}.$$

Pour  $y < 0$ , ces points coïncident avec ceux déjà trouvés, ce qui entraîne :

$$B(y) = \beta A(0)y + O(y^2), \quad \beta > 0.$$

Alors :  $x_{\pm}(y)-x(y) = \pm i\sqrt{\beta} \sqrt{-y} + O(|y|)$ .

Pour  $y \leq 0$ , on trouve les valeurs critiques :

$$\begin{aligned}
 F(x_{\pm}(y), y) &= \pm \frac{\Lambda(0)}{3} (i\sqrt{\beta} \sqrt{-y})^3 \pm \beta A(0)y i\sqrt{\beta} \sqrt{-y} + O(y^2) \\
 &= \pm \frac{\Lambda(0)\beta}{3} y i\sqrt{\beta} \sqrt{-y} \pm \beta A(0)y i\sqrt{\beta} \sqrt{-y} + O(y^2) \\
 &= -\frac{2}{3} (\pm A(0)) \beta y i\sqrt{\beta} \sqrt{-y} + O(y^2).
 \end{aligned}$$

Sachant que cette quantité doit être réelle, on obtient :  $A(0) = -ik$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Pour déterminer le signe de  $k$ , on regarde  $\partial_x^2 F(x, y) = 2\hat{\Lambda}(x - x(y))$ ,  $\hat{\Lambda}(0) = 0$ .

Pour  $x = x_{\pm}(y)$ , on trouve :

$$\partial_x^2 F(x_{\pm}(y), y) = -2i k i\sqrt{\beta} \sqrt{-y} + O(y) = +2k \sqrt{-\beta} \sqrt{-y} + O(y).$$

Donc :

$$-\text{Im}(+2k\sqrt{-\beta}\sqrt{-y} z^2) = \text{Im} -4k \sqrt{-\beta} \sqrt{-y} i \text{Re } z \text{Im} z = -4k \sqrt{-\beta}\sqrt{-y} \text{Re } z \text{Im} z.$$

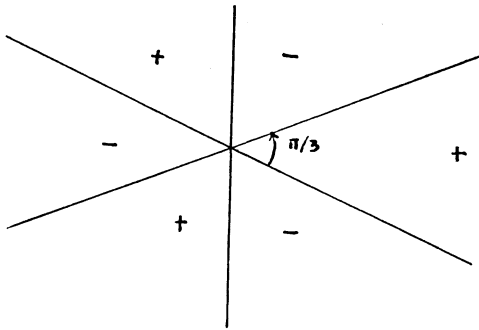
Comparant avec le calcul précédent du hessien de  $f$ , on trouve  $k > 0$ . On a donc :

$$F(x, y) = \frac{-ik}{3} (1 + O(|x, y|))(x - x(y))^3 + ik \beta (y + O(y^2))(x - x(y)) + O(y^2)$$

avec  $k, \beta > 0$ .

Pour pouvoir déformer le contour  $\Gamma(\mu + y)$  pour  $y > 0$ , on s'intéresse aux zones où  $-\text{Im } F(x, y)$  est  $< 0$ . Regardons d'abord le terme cubique :

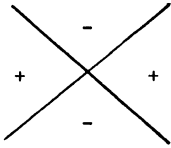
$-\text{Im} \frac{-ik}{3} x^3 = \frac{k}{3} \text{Re } x^3$  qui est  $\leq 0$  dans les secteurs marqués du signe - :



Pour  $y > 0$  on a les points critiques  $x_{\pm}(y)$ , donnés par

$x_{\pm}(y) - x(y) = \pm \sqrt{\beta} \sqrt{-y} + O(|y|)$ , et la valeur critique en  $x_{+}(y)$  est  $\frac{2}{3} i k \beta^{3/2} y^{3/2} + O(y)$ , tandis que  $\partial_x^2 F(x_{+}(y), y) = -2 i k \sqrt{\beta} \sqrt{-y} + O(y)$ .

Ici  $-\operatorname{Im} -2 i k \sqrt{\beta} \sqrt{y} z^2 = 2k\sqrt{\beta} \operatorname{Re} z^2$ , pour lequel on a le diagramme :



Pour  $y > 0$  petit on peut maintenant déformer le contour  $\Gamma(\mu+y)$  dans un petit voisinage de 0 pour obtenir un nouveau contour  $\tilde{\Gamma}(\mu+y)$  qui passe verticalement par le point col  $x_+(y)$  et tel que :

$$-\operatorname{Im} F(x,y) \leq -\operatorname{Im} F(x_+(y),y) \quad \text{pour } x \in \tilde{\Gamma}(\mu+y)$$

avec égalité seulement pour  $x=x_+(y)$ , (voir Sjöstrand [SJ]<sub>2</sub> et Laubin [LA] pour plus de détails dans des situations analogues).

Par ailleurs, c'est un exercice en géométrie symplectique de voir que  $F(x_+(y),y) = iD(0,\mu+y)$ , et si on remplace  $\Gamma(y)$  dans (5.7) par  $\tilde{\Gamma}(\mu+y)$ , on obtient

(5.5) pour  $x=\mu+y$  avec  $|y-\varepsilon_1| < \varepsilon_2$ ,  $y$  réel. Quitte à diminuer  $\varepsilon_2$ , on obtient ensuite (5.5) pour  $x$  complexe, à l'aide des arguments du chapitre 2 dans [SJ]<sub>1</sub>.

Dans le cas où  $\mu=1+\lambda-\nu$ , avec  $\nu \geq 0$  très petit, on choisit une transformation de FBI  $T$  de forme générale, qui permet de microlocaliser  $u_0$  dans un voisinage de  $(0,0)$ , indépendant de  $\mu$ , tel que si  $Q$  désigne le conjugué formel de  $P$ , alors :

$$-(Q-\mu) = \tilde{P} - \nu$$

où  $\tilde{P}$  a comme symbole principal :  $\tilde{p}(x,\xi) = i a(x,\xi) x \cdot \xi$ ,  $\Phi_0(x) = \frac{1}{2} |x|^2$ ,

$$\Lambda_{\Phi_0} : \xi = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = \bar{x}/i, \quad a(x,\bar{x}/i) > 0 \quad \text{et} \quad \gamma_\mu = \Pi_x \mathcal{K}_T U_{(0,0)}(\mu) = \{x \in \mathbb{C}, a(x,\bar{x}/i) |x|^2 = \nu\};$$

$\gamma_\mu$  est donc approximativement un cercle de rayon  $\sqrt{\nu/a(0)}$ . Les caractéristiques complexes de  $\tilde{P}$  sont données par  $x \cdot \xi = 0$  et celles de  $\tilde{P} - \nu$  par  $i a(x,x) x \cdot \xi = \nu$ .

Pour  $x$  à l'extérieur de  $\gamma_\mu$ , on a  $|x| \geq \frac{1}{C} \sqrt{\nu}$  et on suit l'équation pour les caractéristiques comme :  $i a(x,\xi) \xi = \frac{\nu}{x}$ .

Comme le second membre est petit ( $\leq C\sqrt{\nu_0}$ ), on a une solution  $\xi = \xi(x, \frac{\nu}{x})$ , où

$\xi(x,s)$  est holomorphe,  $\xi(x,0)=0$ ,  $\frac{\partial}{\partial s} \xi(x,s)|_{s=0} = \frac{1}{ia(x,0)}$ . Donc :

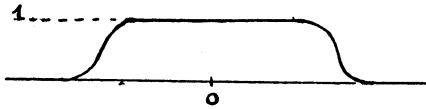
$$\xi(x, \frac{v}{x}) = \frac{v}{ia(x,0)x} + O(|\frac{v}{x}|^2).$$

Soit  $\Phi$  la fonction harmonique avec  $\Phi = \Phi_0$  sur  $\gamma_\mu$  telle que :  $\frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \xi(x, \frac{v}{x})$  à l'extérieur de  $\gamma_\mu$ .

Comme  $\arg 1/x = \arg \bar{x}$ , on trouve pour  $v$  assez petit et  $x$  pas trop grand à l'extérieur de  $\gamma_\mu$  :

$$(5.11) \quad \arg\left(\frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \approx \arg\left(\frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\right).$$

Soit  $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$  une fonction radiale du type :



et posons :  $\Phi_t = \Phi_0 - t \chi(x)(\Phi_0 - \Phi)$ .

Ici  $\Omega$  est un petit voisinage de 0. Montrons que pour  $0 \leq t < 1$ ,  $(\tilde{p}-v)(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_t}{\partial x}) \neq 0$  pour  $x \in \Omega \cap$  extérieur de  $\gamma_\mu =_{\text{det}} \tilde{\Omega}$ .

1° Dans la région où  $\chi=1$ , on trouve :  $\Phi_t = (1-t)\Phi_0 + t\Phi$  ;

utilisant le fait que  $|\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}| > |\frac{\partial \Phi}{\partial x}|$  à l'extérieur de  $\gamma_{E_0}$ , on trouve :

$$\frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_t}{\partial x} = (1-t) \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + t \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ si } t \neq 1.$$

2° Si  $\chi \neq 1$ , on utilise (5.11) et le fait que  $|\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}| > |\frac{\partial \Phi}{\partial x}|$ . Alors,

$$\frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_t}{\partial x} = ((1-t)\chi) \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + t\chi \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + t(\Phi_0 - \Phi)(-\frac{2}{i} \frac{\partial \chi}{\partial x}) \neq \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

en utilisant aussi :  $0 \leq t\chi < 1$  et :  $\arg(-\frac{2}{i} \frac{\partial \chi}{\partial x}) \approx \arg(\frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x}) \approx \arg(\frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x})$ .

Par le principe des déformations non-caractéristiques, on obtient de nouveau que  $Tu_0 \in H_\Phi^{l,oc}(\tilde{\Omega})$ . On répète ensuite essentiellement le même argument que précédemment ; d'abord si  $v=0$ , alors  $\Phi=0$  et  $Tu \in H_\Phi^{l,oc}(\Omega)$ . On a  $\text{Im} \varphi(x,y) + |x|^2/2 \sim \text{dist}(x, \Gamma_y)^2$  et on en conclut que  $x \rightarrow \text{Im} \varphi(x,0)$  a un col en  $x=0$ . Si on remplace 0 par  $y>0$  ce col bouge et quitte 0. Si on fixe  $y_0>0$  assez petit, alors pour  $0 \leq F_0$  assez petit,  $x \rightarrow \text{Im} \varphi(x, y_0) + \Phi(x)$  a un col à l'extérieur de

$\gamma_{E_0}$ . Ceci termine la preuve.

#

Nous aurons aussi besoin de minoration pour  $u_0$ . Le cas le plus délicat pour obtenir ces minoration est celui où  $\mu = 1 + \lambda - \nu$ ,  $\nu \in [0, \delta]$ ,  $\delta > 0$  petit. Reprenons la preuve de la Proposition 5.1. Soit  $x_1$  proche de mais à l'extérieur de  $\gamma_{1+\lambda-\delta}$ . On sait donc que  $|v(x_1, h)| \leq C_\epsilon \exp(\Phi(x_1) + \epsilon)/h$  pour tout  $\epsilon > 0$ . Soit  $f(x)$  une fonction holomorphe dans  $\Omega \cap$  extérieur de  $\gamma_\mu$ ,  $1 + \lambda - \delta \leq \mu \leq 1 + \lambda$ , telle que  $-\text{Im} f = \Phi$ . En général  $\text{Ref}$  sera multivaluée. Alors dans tout ouvert relativement compact dans  $\Omega \cap$  extérieur de  $\gamma_{1+\lambda-\delta}$ , on a

$$(5.12) \quad v(x, h) = b(h) a(x, h) e^{i f(x)/h} \text{ modulo équivalence dans } H_\Phi^{\ell, \text{oc}},$$

où  $a$  est une réalisation d'un symbole elliptique analytique classique, qui s'obtient par des constructions BKW standard, vérifiant  $a(x_1, h) = 1$ , et  $b(h)$  vérifie  $|b(h)| \leq C_\epsilon e^{\epsilon/h}$ ,  $\forall \epsilon > 0$ .

Si l'ouvert où on travaille n'est pas simplement connexe,  $a$  (et  $f$ ) sont en général multivalués, et formellement, les "valeurs spectrales"  $v$  sont déterminées par la condition que  $a e^{i f/h}$  n'est pas multivalué. Pour montrer (5.12), on construit d'abord  $a$  avec les propriétés ci-dessus, tel que  $(\tilde{P} - v)(a e^{i f/h}) \sim 0$ , et pour montrer que toute solution de  $(\tilde{P} - v)(v) \sim 0$  dans  $H_\Phi^{\ell, \text{oc}}$ ,  $v \in H_\Phi^{\ell, \text{oc}}$  possède la structure (5.12) il suffit essentiellement de remarquer que l'opérateur  $u \rightarrow e^{-i f/h} (\tilde{P} - v)(a e^{i f/h} u)$  est de la forme  $B \tilde{D}$ , où  $B$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0, elliptique près de  $\Lambda_0$ .

**Lemme 5.2.** Pour tout  $\epsilon > 0$ , on a  $|b(h)| \geq \frac{1}{C} e^{-\epsilon/h}$ , pour toutes les valeurs possibles de  $v(h) = 1 + \lambda - \mu(h)$  dans  $[0, \delta]$ .

**Démonstration.** Si on suppose le contraire, alors il existe une suite  $h_j \rightarrow 0$  et  $\mu_j = 1 + \lambda - \nu_j(h_j) \in [0, \delta]$  t.q.  $\nu_j(h_j) \rightarrow \nu_0$  et  $\epsilon_0 > 0$ ,  $C_0 > 0$  tel que pour le  $b$

correspondant :

$$(5.13) \quad |b(h_j)| \leq C_0 e^{-\varepsilon_0/h_j}.$$

Si  $v_0 > 0$ , la représentation (5.12) reste valable dans un voisinage de  $\gamma_{\mu_0}$  (avec  $\mu_0 = 1 + \lambda - v_0$ ), et (5.13) entraîne que  $|v| \leq C_0 \exp(\Phi_0 - \varepsilon_1)/h$  dans un tel voisinage, ce qui contredit le fait que  $u_0$  est normalisé dans  $L^2$  et microlocalement concentré en  $U_{0,0}$ .

Si  $v_0 = 0$  on utilisera le principe du maximum ; soit  $\Gamma = \partial W$  un cercle avec :

$W \supset \gamma_{1+\lambda-\delta}$ . Alors :

$$(5.14) \quad |v| \leq C_0 e^{(\Phi_0 - \varepsilon_1)/h} \text{ sur } \Gamma.$$

Soit  $\Phi_\Gamma$  la fonction harmonique dans  $W$  avec  $\Phi_{\Gamma|_\Gamma} = \Phi$ . Alors, par le principe du maximum :

$$(5.15) \quad |v| \leq C_0 e^{(\Phi_\Gamma - \varepsilon_0)/h} \text{ dans } W.$$

Soit d'autre part,  $\tilde{\Phi}$  la fonction sous-harmonique dans  $W$  égale à  $\Phi$  à l'extérieur de  $\gamma_{\mu_j}$  et égale à  $\Phi_0$  à l'intérieur de  $\gamma_{\mu_j}$ . Alors  $\Phi_\Gamma - \tilde{\Phi}$  est positive, égale à  $G(-\Delta \Phi_0 1_{\text{int}(\gamma_{\mu_j})})$ , où  $G$  est le noyau de Green du domaine  $W$ . Comme le noyau de Green a une singularité logarithmique, et comme  $\Delta \Phi_0 1_{\text{int}(\gamma_{\mu_j})} \rightarrow 0$  dans  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$  quand  $j \rightarrow \infty$ , on voit que  $\Phi_\Gamma - \tilde{\Phi} \rightarrow 0$  dans  $L^\infty(W)$ .

Pour  $j$  assez grand, on a donc :

$$|v_j| \leq C_0 e^{(\Phi_0 - \varepsilon_0/2)/h_j} \leq C_0 e^{(\Phi_0 - \varepsilon_0/2)/h_j} \text{ dans } W$$

ce qui donne une contradiction comme dans le cas précédent.

#

Utilisant le lemme, (5.12) et le fait que  $u_0$  près de  $y_0$  est décrite par une intégrale de col avec un chemin d'intégration qui reste à l'extérieur de  $\gamma_{E_0}$ , on trouve la :

**Proposition 5.3.** Soit  $y_0 > \mu_0$  assez proche de  $\mu_0$ . Alors dans un voisinage

complexe de  $y_0$ , on a :

$$(5.16) \quad |u_0(x, h)| \geq \frac{1}{C} e^{-(\operatorname{Re} D(0, x) + \varepsilon)/h}, \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

#

Nous avons en fait démontré un peu plus. Dans un voisinage de  $y_0$ , on a :

$$(5.17) \quad u_0(x, h) = b(h) a(x, h) e^{-D(0, x)/h},$$

où  $a$  est une réalisation d'un symbole analytique elliptique classique d'ordre 0 avec  $a(y_0, h) = 1$  et :

$$(5.18) \quad |b(h)| + 1/|b(h)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h}, \forall \varepsilon > 0.$$

(uniformément par rapport à  $\mu$  comme dans 1°).

Remarque 5.4. Tous les résultats ci-dessus restent valables pour  $\hat{u}_0$  avec les modifications évidentes.

#

Par la méthode BKW analytique (voir par exemple [SJ]<sub>1</sub>), on peut étendre  $a$  comme symbole analytique classique à un voisinage complexe de  $[y_0, \pi]$ , tel que si :

$$(5.19) \quad v_0(x, h) = b(h) a'(x, h) e^{-D(0, x)/h},$$

où  $a'$  est une réalisation; alors :

$$(5.20) \quad (P - \mu)v_0 = O(1) e^{-(\operatorname{Re} D(0, x) + \varepsilon_0)/h}, \text{ pour un } \varepsilon_0 > 0.$$

On a aussi :  $u_0 - v_0 = O(1) e^{-(\operatorname{Re} D(0, x) + \varepsilon_0)/h}$  dans un voisinage de  $y_0$ ,

et si on combine ceci avec (5.20), (5.1) et (5.3), on trouve :

$$(5.21) \quad \|(u_0 - v_0) e^{D(0, x)/h}\|_{L^2([y_0 - \varepsilon_0, \pi + \varepsilon_0])} \leq C_0 e^{-\varepsilon_0/h}$$

pour un  $\varepsilon_0 > 0$ . Nous avons une description analogue pour  $u_0$  dans  $[-\pi - \varepsilon_0, -y_0 + \varepsilon_0]$ , ainsi que pour  $\hat{u}_0$ . Etudions maintenant  $w_{0, \alpha}$  pour  $\alpha_1 = 1$ . Les arguments menant à (4.32) donnent aussi :

$$(5.22) \quad w_{0, \alpha} = -(u_0([P, \chi]u_\alpha) + O(e^{-(S_1 + \varepsilon_0)/h})), \text{ pour } \chi = 1_{[-\infty, t]}, |t - \pi| \leq \varepsilon_0.$$

Comme  $[\cos \tilde{D}, \chi] = \frac{1}{2}(1_{[t, t+h]} \tau_h - 1_{[t-h, t]} \tau_{-h})$ , on trouve avec  $\alpha = (1, k)$  :

$$(5.23) \quad I_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} - (u_{(0,0)}) [P, X] u_{(1,k)} = - \int_t^{t+h} \Phi_k(x, h) dx,$$

$$(5.24) \quad \Phi_k(x, h) = \frac{1}{2} (u_{(0,0)}(x) \overline{u_{1,k}(x-h)} - u_{(0,0)}(x-h) \overline{u_{1,k}(x)}).$$

Montrons d'abord que  $\Phi_k$  est  $h$ -périodique modulo une erreur exponentiellement petite ; on a :

$$(5.25) \quad \begin{aligned} \Phi_k(x+h) - \Phi_k(x) &= \frac{1}{2} (u_{0,0}(x+h) \overline{u_{1,k}(x)} - u_{0,0}(x) \overline{u_{1,k}(x+h)} \\ &\quad - u_{0,0}(x) \overline{u_{1,k}(x-h)} + u_{0,0}(x-h) \overline{u_{1,k}(x)}) \\ &= (\cos(\tilde{D}) u_{0,0}) \overline{u_{1,k}} - u_{0,0} \overline{(\cos \tilde{D})(u_{1,k})}. \end{aligned}$$

Ici on utilise (5.1) sous la forme :

$$\cos(\tilde{D}) u_\alpha = (\mu - \lambda \cos x) u_\alpha + r_\alpha, \quad \text{où : } r_\alpha = \tilde{O}(1) \exp(-F_1(x - 2\pi\alpha_1)/h).$$

Comme  $\lambda, \mu$  sont réels :

$$(5.26) \quad \Phi_k(x+h) - \Phi_k(x) = r_{(0,0)} \overline{u_{1,k}} - u_{(0,0)} \overline{r_{(1,k)}}.$$

Utilisant aussi que  $u_\alpha = \tilde{O}(1) \exp(-f_1(x - 2\pi\alpha_1)/h)$ , on obtient au sens des normes  $L^1$  :

$$(5.27) \quad \Phi_k(x+h) - \Phi_k(x) = \tilde{O}(1) \exp(-F(x)/h), \quad 0 < x < 2\pi,$$

où :

$$(5.28) \quad F(x) = \min(F_1(x) + f_1(x - 2\pi), F_1(x - 2\pi) + f_1(x)).$$

Comme  $F(x) > S_1$  pour  $0 < x < 2\pi$ , on obtient au sens  $L^1$  :

$$(5.29) \quad \Phi_k(x+h) - \Phi_k(x) = O(e^{-\frac{(S_1 + \varepsilon_0)}{h}}), \quad |x - \pi| \leq \varepsilon_0.$$

On retrouve alors le fait que  $I_k(t)$  est indépendant de  $t$  modulo  $O(\exp(-S_1 + \varepsilon_0)/h)$  pour  $|t - \pi| \leq \varepsilon_0$ . Puisque :

$$(5.30) \quad \Phi_k(x) = e^{-2\pi i k x/h} \Phi_0(x) \cdot \exp(-ik\tilde{h})$$

à cause du Lemme 4.4, on peut approximativement considérer  $I_k \cdot \exp(ik\tilde{h})$  comme le  $k$ -ième coefficient de Fourier de  $\Phi_0$ .

**Proposition 5.5.** Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $|I_k(t)| \leq C e^{-\frac{(S_1 + \varepsilon_0)}{h}}$  pour  $k \neq 0$ ,  $|t - \pi| \leq \varepsilon_0$ .

**Démonstration.** Utilisant (5.19), (5.21) et les résultats analogues pour  $u_{(1,0)}$ , on

voit que modulo une fonction  $= O(e^{-(S_1 + \epsilon_0)/h})$  dans  $L^1$ , on a :

$$\Phi_0(x, h) = c(h) d(x, h) e^{-S_1/h} \quad \text{dans un voisinage de } x = \pi,$$

où maintenant  $S_1 = D(0, 2\pi)$  avec  $D$  dépendant de  $\mu$ ,  $|c(h)| + |1/c(h)| \leq C_\epsilon e^{\epsilon/h}$ ,  $\forall \epsilon > 0$ , et où  $d(x, h)$  est une réalisation d'un symbole analytique classique d'ordre 0.

Utilisant (5.29), on voit que :  $d(x+h, h) - d(x, h) = O(e^{-\epsilon_0/2h})$ . Ecrivant :

$d(x, h) \sim d_0(x) + d_1(x)h + \dots$ , on en déduit que :

$$d_0(x+h) - d_0(x) + (d_1(x+h) - d_1(x))h + O(h^2) = 0, \text{ et donc : } d'_0(x)h = O(h^2)$$

c'est-à-dire  $d'_0(x) = 0$ . Itérant cet argument on trouve que  $d_k(x) = \text{const.}$  pour

tout  $k$ . Donc  $d(x, h) = d(\pi, h) + O(e^{-\epsilon_0/h})$  pour un  $\epsilon_0 > 0$ . Donc (avec un nouveau

$\epsilon_0 > 0$ ) on a  $\Phi_0(x, h) = \Phi_0(\pi, h) + O(e^{-(S_1 + \epsilon_0)/h})$  dans  $L^1$  ( $[\pi - \epsilon_0, \pi + \epsilon_0]$ ), ce qui donne

la Proposition, vù (5.30).

#

Indiquons une deuxième démonstration. Utilisant la Proposition 5.1, on

constate d'abord que modulo un terme qui est  $O(e^{-(S_1 + \epsilon_0)/h})$  et qui sera

désormais négligé, on a  $\Phi_0(x, h) = O(1) \exp(-(S_1 + \epsilon)/h)$  pour tout  $\epsilon > 0$  dans un

voisinage complexe de  $\pi$ . Combinant cette estimation avec (5.29) et quelques

arguments simples (essentiellement le principe du maximum) on constate que

(5.29) reste vérifiée dans un voisinage complexe de  $\Pi$ . Si  $w = e^{S_1/h} \Phi_0$ , on a donc,

$w \in H_0^{\ell, \text{oc}}$ ,  $(\exp i \tilde{D} - 1)w \sim 0$  dans  $H_0^{\ell, \text{oc}}$ . Comme  $(e^{iD} - 1) = Q(\tilde{D})\tilde{D}$ , où  $Q$  est

elliptique dans un voisinage de  $\Lambda_0 : \xi = 0$ , on déduit du calcul pseudodifférentiel

complexe (voir [SJ]<sub>1</sub>), que  $\tilde{D}w \sim 0$  dans  $H_0^{\ell, \text{oc}}$ , c'est-à-dire  $\Phi_0$  est constant

modulo  $O(1) \exp(-(S_1 + \epsilon_0)/h)$ .

#

Il résulte de la preuve de la Proposition 5.5 que  $I_0(\pi, h) = -h\Phi_0(\pi, h)$  modulo une

erreur  $O(1) \exp(-(S_1 + \epsilon_0)/h)$ . D'après (5.19), (5.21) et les résultats analogues pour

$u_{(1,0)}$  (que nous décrivons par  $\tilde{b}(h)\tilde{a}(x,h)e^{-D(x,2\pi)/h}$  dans un voisinage de  $x=\pi$ )

on obtient modulo une erreur  $O(1)\exp(-(S_1+\varepsilon_0)/h)$  :

$$(5.31) \quad \Phi_0(x,h) \equiv \frac{1}{2} b(h) \overline{\tilde{b}(h)} (a(x,h) \overline{\tilde{a}(x-h,h)} e^{-(D(0,x)+D(x-h,2\pi))/h} \\ - a(x-h,h) \overline{\tilde{a}(x,h)} e^{-(D(0,x-h)+D(x,2\pi))/h}).$$

Comme  $D(x-h,2\pi) = D(x,2\pi) - D'_x(x,2\pi)h + O(h^2) = D(x,2\pi) + D'_x(0,x)h + O(h^2)$ ,

on a :  $D(0,x) + D(x-h,2\pi) = S_1 + D'_x(0,x)h + O(h^2)$  et de même :

$$D(0,x-h) + D(x,2\pi) = S_1 - D'_x(0,x)h + O(h^2).$$

Si on note  $a_0(x) \neq 0$ ,  $\tilde{a}_0 \neq 0$  les parties principales de  $a$  et  $\tilde{a}$ , la parenthèse de

$$(5.31) \text{ devient : } -e^{-S_1/h} a_0(x) \overline{\tilde{a}_0(x)} (1+O(h)) \operatorname{sh}(D'_x(0,x)), \text{ ce qui donne :}$$

$$(5.32) \quad I_0(\pi,h) = h e^{-S_1/h} b_0(h) \overline{\tilde{b}_0} a_0(\pi) \overline{\tilde{a}_0(\pi)} (1+O(h)) \operatorname{sh}(D'_x(0,\pi)).$$

Comme  $\tilde{b}$  vérifie (5.18), on en déduit :

(5.33) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C_\varepsilon > 0$  tel que :

$$C_\varepsilon^{-1} e^{-(S_1+\varepsilon)/h} \leq |I_0(\pi,h)| \leq C_\varepsilon e^{-(S_1-\varepsilon)/h}.$$

On a les résultats analogues pour :

$$(5.34) \quad I_j(t) = -(\dot{u}_{(0,0)} | [\hat{P}, \chi] \dot{u}_{j,1}),$$

et en particulier :

$$(5.35) \quad |I_j(t)| \leq C e^{-(S_2+\varepsilon_0)/h}, \quad |t-\pi| \leq \varepsilon_0, \quad j \neq 0, \quad \text{pour un } \varepsilon_0 > 0$$

$$(5.36) \quad C_\varepsilon^{-1} e^{-(S_2+\varepsilon)/h} \leq |I_0(\pi,h)| \leq C_\varepsilon e^{-(S_2-\varepsilon)/h}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Combinant la proposition 5.5, (5.35), (5.33), (5.36), (4.32), (4.33), on obtient :

**Proposition 5.6.** On suppose  $S_1 \leq S_2$  : Il existe  $\varepsilon_0 \geq 0$  tel que

- (i)  $w_{\alpha,0} = O(e^{-(S_2+\varepsilon_0)/h})$  si  $|\alpha_1| + |\alpha_2| \geq 2$
- (ii)  $C_\varepsilon^{-1} e^{-(S_1+\varepsilon)/h} \leq |w_{(\pm 1,0),0}| \leq C_\varepsilon e^{-(S_1-\varepsilon)/h}$ , pour tout  $\varepsilon > 0$
- (iii) Si  $S_2 \geq S_1 + \varepsilon_0$ , alors :  $|w_{(0,\pm 1),0}| \leq C_0 e^{-(S_1+\varepsilon_0)/h}$ ,

et si :  $S_1 \leq S_2 \leq S_1 + \varepsilon_0$ , alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$C_\varepsilon^{-1} e^{-(S_2+\varepsilon)/h} \leq |w_{(0,\pm 1),0}| \leq C_\varepsilon e^{-(S_2-\varepsilon)/h}.$$

## 6. Renormalisation

On va voir ici que l'analyse de  $(P-\mu)|_F = W = (w_{\alpha,\beta})$  mène essentiellement à une nouvelle équation de Harper. Posant  $\gamma = -\beta$  dans (4.27), on obtient avec  $f(\alpha) = w_{\alpha,0}$  :

$$(6.1) \quad w_{\alpha,\beta} = \exp(i\hbar \beta_2 (\alpha_1 - \beta_1)) f(\alpha - \beta)$$

Comme  $W$  est hermitien ;  $\overline{w_{\alpha,\beta}} = w_{\beta,\alpha}$ , on a :

$$(6.2) \quad f(-\gamma) = \exp(i\hbar \gamma_1 \gamma_2) \overline{f(\gamma)}.$$

(6.1) montre que  $W$  peut être considéré comme une convolution dans les variables  $\alpha_1$ . Si, à la place de (1.9), on avait défini  $T_\alpha$  comme  $\tau^{*\alpha_2} \tau^{\alpha_1}$ ,  $u_\alpha$  serait remplacé par  $u'_\alpha = \exp(i\hbar \alpha_1 \alpha_2) u_\alpha$ .

Dans la base  $u'_\alpha$  on trouve la matrice unitairement équivalente à  $w$  ;  $w' = (w'_{\alpha,\beta})$ , où :

$$(6.3) \quad w'_{\alpha,\beta} = ((P-\mu)u'_\beta, u'_\alpha) = \exp(i\hbar(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)) w_{\alpha,\beta} = \exp(-i\hbar\alpha_1(\alpha_2 - \beta_2)) f(\alpha - \beta).$$

$w'$  agit donc comme une convolution dans les variables  $\alpha_2$ . Pour avoir des notations un peu plus naturelles, on travaillera avec  $w'$  plutôt qu'avec  $w$ . Il sera commode de faire une transformation de Fourier inverse par rapport à  $\alpha_2$  et on introduit donc l'opérateur unitaire  $G_2 : L^2(Z^2) \rightarrow L^2(Z \times S^1)$  par :

$$(G_2 u)(\alpha_1, \theta) = \sum_{\alpha_2 \in Z} u(\alpha) e^{i\frac{\alpha_2 \theta}{2}}.$$

$w'$  est donc unitairement équivalent à  $\hat{w} : L^2(Z \times S^1) \rightarrow L^2(Z \times S^1)$ , donné par :

$$(\hat{w}u)(\alpha_1, \theta) = \sum_{\beta_1 \in Z} k(\alpha_1, \beta_1, \theta) u(\beta_1, \theta) = (K_\theta u(\cdot, \theta))(\alpha_1),$$

où :

$$(6.4) \quad k(\alpha_1, \beta_1, \theta) = \sum_{\gamma_2 \in Z} f(\alpha_1 - \beta_1, \gamma_2) \exp(i\gamma_2(\theta - \hbar\alpha_1))$$

Si  $g(\alpha, \theta) = (G_2 f)(\alpha, \theta)$ , alors (6.4) montre que :

$$(6.5) \quad k(\alpha, \beta, \theta) = g(\alpha_1 - \beta_1, \theta - \tilde{h}\alpha_1).$$

Supposons maintenant que  $0 < \tilde{h} < 2\pi$ . Cette formule montre que le spectre de  $\hat{w}$  est déterminé par le spectre de sa restriction à  $Z \times [0, \tilde{h}]$ . Cette restriction peut s'identifier à un opérateur  $Q : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  par la substitution  $x = -(\theta - \tilde{h}\alpha_1)$ ,  $y = -(\theta - \tilde{h}\beta_1)$ . Le noyau distribution de  $Q$  est alors de la forme :

$$(6.6) \quad \sum g(k, -x) \delta(x - y - k\tilde{h}).$$

c'est-à-dire :

$$(6.7) \quad Q = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k, -x) \tau_{k\tilde{h}} = \sum_k g(k, -x) \exp(-ik\tilde{h}D),$$

et en utilisant la définition de  $g$  :

$$(6.8) \quad Q = \sum \sum f(k, j) e^{-ijx} \exp(-ik\tilde{h}D).$$

Ceci donne  $Q$  sous forme d'opérateur pseudodifférentiel classique (avec petit paramètre  $\tilde{h}$ ) ; nous préférons cependant la quantification de Weyl : si  $a(x, \xi)$  est un symbole (par exemple de classe  $S^0$ ) nous posons :

$$(6.9) \quad \text{Op}^w(a) = (2\pi\tilde{h})^{-1} \iint \exp(i(x-y)\theta/\tilde{h}) a\left(\frac{x+y}{2}, \theta\right) u(y) dy d\theta.$$

On voit que :

$$(6.10) \quad \text{Op}^w(e^{i(ax+b\xi)}) = e^{i(a/2)x} \circ \exp(ib\tilde{h}D) \circ e^{i(a/2)x} = \exp(iab\tilde{h}/2) e^{iax} \exp(ib\tilde{h}D).$$

La substitution dans (6.8) avec  $a = (-j)$ ,  $b = -k$ , donne après permutation de  $j$  et de  $k$  :

$$(6.11) \quad Q = \sum \sum f(j, k) \exp(-ijk\tilde{h}/2) \exp(-i(kx + j\xi))$$

Vérifions directement que  $Q$  est autoadjoint, c. à. d. que  $Q(x, \xi, \tilde{h})$  est réel; le terme " $-j, -k$ " du (6.12) est d'après (6.2) :

$f(-j, -k) \exp(-ijk\hbar/2) \exp(i(kx + j\xi)) = \overline{f(j, k)} \exp(ijk\hbar/2) \exp(i(kx + j\xi))$   
 = conjugué du terme " $j, k$ ".

Remarque 6.1 Dans le cas  $\lambda=1$ , l'opérateur  $P = \cos \tilde{D} + \cos x$  est invariant par conjugaison par la transformation de Fourier  $\mathcal{F}_h$ , où :

$$(6.13) \quad \mathcal{F}_h u(\xi) = (2\pi h)^{-1/2} \int \exp(-ix\xi/h) u(x) dx.$$

On montre facilement que :

$$(6.14) \quad \mathcal{F}_h T_\alpha = \exp(-i\hbar\alpha_1\alpha_2) \mathcal{F}_h T_{\mathcal{K}(\alpha)}$$

où  $\mathcal{K}(x, \xi) = (\xi, -x)$  est la transformation associée à  $\mathcal{F}_h$

Montrons que l'on peut s'arranger pour que  $Q = \mathcal{F}_{\tilde{h}} \cdot Q \cdot \mathcal{F}_{\tilde{h}}^{-1}$  :

Quitte à remplacer  $g_0$  par un normalisé d'un des quatre vecteurs

$$\sum_{k=0}^3 i^{jk} \mathcal{F}_h g_0^k, \quad j=0,1,2,3 \quad (\text{dont la somme vaut } 4 g_0),$$

On pourra supposer que  $\mathcal{F}_h g_0 = \omega_0 g_0$ , avec  $|\omega_0|=1$ .

Cette modification ne gêne pas les arguments que nous avons développés jusqu'à présent. On a :

$$\mathcal{F}_h v_\alpha = \mathcal{F}_h T_\alpha v_0 = \exp(-i\hbar\alpha_1\alpha_2) T_{\mathcal{K}(\alpha)} \mathcal{F}_h v_0 = \omega_0 \exp(-i\hbar\alpha_1\alpha_2) v_{\mathcal{K}(\alpha)}$$

Comme dans la démonstration du Lemme 4.4, on montre ensuite que :

$$(6.15) \quad \mathcal{F}_h u_\alpha = \omega_0 \exp(-i\hbar\alpha_1\alpha_2) u_{\mathcal{K}(\alpha)},$$

ce qui entraîne :

$$w_{\alpha,\beta} = ((P-\mu)u_\beta | u_\alpha) = ((P-\mu) \mathcal{F}_h u_\beta | \mathcal{F}_h u_\alpha) = \exp(i\hbar(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)) W_{\mathcal{K}(\alpha) \cdot \mathcal{K}(\beta)}$$

d'où :

$$(6.16) \quad f(\alpha) = \exp(i\hbar\alpha_1\alpha_2) f(\mathcal{K}(\alpha)).$$

Combinant ceci avec (6.2), on voit que  $f(1,0)=f(0,-1)=f(-1,0)=f(0,1) \in \mathbb{R}$ .

L'opérateur  $\mathcal{F}_{\tilde{h}}^{-1} Q \mathcal{F}_{\tilde{h}}$  est le  $\tilde{h}$ -quantifié de Weyl de :

$Q \circ \mathcal{K}(x, \xi) = Q(\xi, -x)$  et d'après (6.12) :

$$\begin{aligned} Q(\xi, -x) &= \sum_j \sum_k f(j, k) \exp(-ijk\tilde{h}/2) \exp(-i(k\xi - jx)) \\ &= \sum_j \sum_k f(-k, j) \exp(ijk\tilde{h}/2) \exp(-i(kx + j\xi)) \end{aligned}$$

Posant  $\alpha = (-k, j)$  dans (6.16), on obtient  $f(-k, j) = \exp(-ijk\tilde{h}) f(j, k)$ , d'où :

$$(6.17) \quad Q(\xi, -x) = Q(x, \xi),$$

et on a bien :  $\mathcal{F}_{\tilde{h}} \circ Q = Q \circ \mathcal{F}_{\tilde{h}}$ .

#

Revenons maintenant au cas général. Combinant (6.12), la définition de  $f$  avant (6.1), la proposition 5.6-(i), ainsi que (4.28), on voit que les termes de (6.12) avec  $|j| + |k| \geq 2$  contribuent à  $Q(x, \xi) = Q(x, \xi, h, \tilde{h})$  par un terme qui est holomorphe dans  $|\operatorname{Im}(x, \xi)| \leq \varepsilon_0/h$  et y vérifie la majoration par  $O(\exp(-\varepsilon_0/h))$ , pour un  $\varepsilon_0 > 0$ . Il reste à étudier la somme des termes avec  $|j| + |k| = 1$  :

$$Q_0 = f(1, 0) \exp(-i\xi) + f(-1, 0) \exp(i\xi) + f(0, 1) \exp(-ix) + f(0, -1) \exp(ix).$$

Comme  $f(-1, 0) = f(1, 0)$ ,  $f(0, -1) = f(0, 1)$  d'après (6.2), on trouve :

$$(6.18) \quad Q_0 = 2|f(1, 0)| \cos(\xi - \theta_1) + 2|f(0, 1)| \cos(x - \theta_2),$$

$$\text{avec } \theta_1 = \arg f(1, 0), \theta_2 = \arg f(0, 1).$$

Dans le cas  $\lambda = 1$ , on a vu que :  $f(1, 0) = f(-1, 0) = f(0, 1) = f(0, -1)$  est réel, et donc :  $Q_0 = 2|f(1, 0)|(\cos \xi + \cos x)$  dans ce cas.

Après conjugaison par  $\tau_{\theta_2}$  et  $\exp(i\theta_1 x / \tilde{h})$  on trouve,

**Théorème 6.2** : Soit  $0 < \tilde{h} < 2\pi$ .  $(P - \mu)|F$  a le même spectre que la  $\tilde{h}$ -quantification de Weyl de  $Q$ , où  $Q \in S^0$  est  $2\pi$ -périodique à la fois en  $x$  et en  $\xi$  et de la forme,

$$(6.19) \quad Q(x, \xi, h, \tilde{h}) = Q_0 + R,$$

$$(6.20) \quad Q_0 = 2|f(1, 0)| \cos \xi + 2|f(0, 1)| \cos x.$$

De plus, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $R = R(x, \xi, h, \tilde{h})$  est holomorphe dans la bande  $|\operatorname{Im}(x, \xi)| \leq \varepsilon_0/h$  et y vérifie  $|R| \leq C_0 \exp(-(S_1 + \varepsilon_0)/h)$ , le tout pour  $h > 0$  assez petit et en supposant que  $S_1 \leq S_2$ .

#

Si  $\tilde{h} = 0$ , alors  $W$  est un opérateur de convolution d'après (6.1), unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication dans  $L^2(T^2)$  par :

$Q'(x, \xi) = \sum f(\alpha) \exp(i(\alpha_1 x + \alpha_2 \xi))$ . Après le changement de variables :

$(x, \xi) \rightarrow (-\xi, -x)$ , on trouve donc que  $W$  est unitairement équivalent avec l'opérateur de multiplication par  $Q(x, \xi)$  dans  $L^2(T^2)$ , où  $Q$  est le même symbole qu'avant. On en déduit dans ce cas, que le spectre de  $W$  est un intervalle de longueur dans  $[\frac{1}{C_\varepsilon} \exp(-(S_1 + \varepsilon)/h), C_\varepsilon \exp(-(S_1 - \varepsilon)/h)]$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

## 7. Extension au cas de l'opérateur renormalisé.

- a. Structure de la surface d'énergie réelle
- b. Structure des caractéristiques complexes
- c. Préparation géométrique pour des inégalités  $L^2$  à poids
- d. Conjugaison par des facteurs exponentiels
- e. Inégalités  $L^2$  à poids
- f. Suite et fin.

### a. Structure de la surface d'énergie réelle.

Soit  $P(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $2\pi$ -périodique en  $x$  et en  $\xi$ , à valeurs réelles et proche de  $P_0(x, \xi) = \cos \xi + \cos x$  pour la topologie  $C^\infty$ . On suppose aussi que  $P \circ \mathcal{H} = P$ , où  $\mathcal{H}(x, \xi) = (\xi, -x)$ .  $P$  est donc invariant par translation de  $2\pi$  en  $x$  ou en  $\xi$  et par une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  autour de  $(0,0)$ . Composant judicieusement des rotations et des translations, on constate alors que  $P$  est invariant par :

1° Des rotations de  $\frac{\pi}{2}$  autour d'un point  $(2\pi k, 2\pi \ell)$  ( $\pi(2k+1)$ ,  $\pi(2\ell+1)$ ) avec  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ .

2° Des réflexions dans  $(\pi(2k+1), 2\pi \ell)$  et dans  $(2\pi k, (2\ell+1)\pi)$ .

Si on considère  $P, P_0$  comme des fonctions sur  $T^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ , on constate d'abord que  $P_0$  est une fonction de Morse avec 4 points critiques : un maximum :  $(0,0)$ , un minimum :  $(\pi, \pi)$  et 2 points selle :  $(\pi, 0), (0, \pi)$ . Comme  $P$  est une petite perturbation de  $P_0$ , c'est également une fonction de Morse avec 4 points critiques : un maximum près de  $(0,0)$ , un minimum près de  $(\pi, \pi)$  et deux points selle près de  $(\pi, 0)$  et  $(0, \pi)$ . Comme les applications décrites dans 1° et 2° envoient un point critique de  $P$  sur un point critique du même type, on

voit que les points critiques de  $P$  sont exactement les mêmes que ceux de  $P_0$ . Les valeurs critiques de  $P$  sont donc :  $P(0,0) \approx 2$ ,  $P(\pi,\pi) \approx -2$ ,  $P(\pi,0) = P(0,\pi) = c \approx 0$ . (Ici on utilise que  $\mathcal{H}(0,\pi) = (\pi,0)$ ). Pour  $P_0$ , le segment droit  $[(\pi,0), (0,\pi)]$  est aussi une courbe de niveau. Comme  $P$  est une petite perturbation de  $P_0$ , on sait qu'il y a une courbe de niveau pour  $P=c$ , qui part de  $(\pi,0)$  et qui reste près du segment  $[(\pi,0), (0,\pi)]$  jusqu'à l'arrivée dans un petit voisinage de  $(0,\pi)$ . De même, il y a une courbe de niveau dans  $P=c$  qui part de  $(0,\pi)$  vers  $(\pi,0)$ . Comme dans un petit disque centré en

$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , il ne peut y avoir qu'une composante de  $P=c$ , les deux courbes coïncident et on a donc une courbe de niveau dans  $P=c$  de  $(\pi,0)$  à  $(0,\pi)$  et qui reste proche du segment  $[(\pi,0), (0,\pi)]$  pour la topologie  $C^2$  (et même si on veut dans  $C^k$  pour tout  $k$ ). Le même argument marche pour les autres segments de longueur  $\sqrt{2} \cdot \pi$  dans  $P_0=0$  et on conclut que l'ensemble  $P=c$  peut être décrite comme  $f((P_0=0))$  où  $f$  est  $2\pi$ -périodique et proche de  $\text{id}$ . On peut dire alors que le plan est découpé par  $(P=c)$  en une réunion de carrés déformés.

Pour  $E \in ]P(\pi,\pi), c[ \cup ]c, P(0,0)[$  on peut décrire  $(P=E)$  comme une réunion de "cercles". Si par exemple  $E > c$ , chaque "cercle"  $U_\alpha$  entoure un point  $2\pi\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ . Pour  $E \geq c + \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  on sait que la courbure de  $U_\alpha$  est proche du bord du carré déformé qui contient  $U_\alpha$  et la courbure de  $U_\alpha$  est  $\neq 0$  près des sommets de ce carré et en particulier aux points  $(2\pi\alpha + (x_0, \xi_0))$ ,  $(2\pi\alpha - (x_0, \xi_0)) \in U_\alpha$  qui sont les points tournants caractérisés par le fait que :  $\frac{\partial P}{\partial \xi}(x_\alpha, \xi_\alpha) = 0$ .

### b. Structure des racines complexes.

On suppose maintenant que  $P$  est  $2\pi$ -périodique en  $x, \xi$ , holomorphe pour  $|\text{Im}(x, \xi)| \leq 1/\varepsilon$  et vérifiant  $|P - P_0| \leq \varepsilon$  dans cette bande. Les résultats du §7.b et §7.c sont valables uniformément pour :  $|E| \leq \eta$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ , si  $\varepsilon_1 > 0$  est suffisamment petit. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $E \in [-3, 3]$ , on pose :

$$\Gamma_E(x) = \{\xi \in \mathbb{C} ; |\text{Im} \xi| \leq 1/2\varepsilon, P(x, \xi) = E\}, \quad \Gamma_{0,E}(x) = \{\xi \in \mathbb{C} ; P_0(x, \xi) = E\}.$$

On a :  $\xi \in \Gamma_{0,E}(x)$  ssi  $\cos \xi = E - \cos x$ . Si  $|E - \cos x| \leq 1$ , on trouve :

$\xi = \pm \arccos(E - \cos x) + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et, si  $E - \cos x > 1$  :

$\xi = \pm i \operatorname{ch}^{-1}(E - \cos x) + 2\pi n$ . Finalement, si  $E - \cos x < -1$ , on obtient :

$\xi = \pi \pm i \operatorname{ch}^{-1}(|E - \cos x|) + 2\pi n$ . Comptant chaque élément de  $\Gamma_{0,E}(x)$  avec sa multiplicité, il est clair que l'on a une bijection  $b_x : \Gamma_{0,E}(x) \rightarrow \Gamma_E(x)$  avec

$|b_x(\mu) - \mu|$  arbitrairement et uniformément petit (si  $\varepsilon_1$  est suffisamment petit).

De plus, on sait que  $\Gamma_E(x)$  est invariant par les applications  $\xi \rightarrow \xi$  et  $\xi \rightarrow \xi + 2\pi$ .

Prenons maintenant  $E \in ]c, P(0,0)]$  et rappelons (cf §7.a) que :

$$((x, \xi) \in \mathbb{R}^2 ; P(x, \xi) = E) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} U_\alpha, \quad \pi_x U_\alpha = [2\pi\alpha_1 - x_0, 2\pi\alpha_1 + x_0].$$

L'équation  $P(x, \xi) = E$  possède une solution  $\xi = \xi_+(x, E)$  telle que :

(7.1)  $x \rightarrow \xi_+(x, E)$  est continue et  $2\pi$ -périodique.

(7.2)  $\xi_+(x_0, E) = \xi_0$ . (Bien entendu,  $x_0$  et  $\xi_0$  dépendent de  $E$ ).

(7.3)  $\xi_+(x, E) > \xi_0$  pour  $-x_0 < x < x_0$ ,  $x$  proche de  $x_0$ .

(7.4)  $\operatorname{Im} \xi_+(x, E) > 0$  pour  $x > x_0$  proche de  $x_0$ .

Ici on observe que  $\xi_+(x_0, E)$  est une racine double et que (7.1)-(7.4) déterminent  $\xi_+$  complètement. De même on peut introduire  $\xi_-(x, E)$  vérifiant (7.1), (7.2) :

(7.3')  $\xi_-(x, E) < \xi_0$  pour  $-x_0 < x < x_0$ ,  $x$  proche de  $x_0$ ,

(7.4')  $\operatorname{Im} \xi_-(x, E) < 0$  pour  $x > x_0$  proche de  $x_0$ .

Alors :

$$(7.5) \quad \Gamma(x, E) = ((\xi_+) + 2\pi\mathbb{Z}) \cup ((\xi_-) + 2\pi\mathbb{Z}).$$

On se place maintenant dans un voisinage de  $(x_0, \xi_0)$ . Comme  $\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} < 0$

en ce point, on a :

$$(7.6) \quad E - P(x, \xi) = a(x, \xi) (\xi - \xi(x))^2 + (b(x) + E)$$

où  $a, b, \xi$  sont réels et analytiques  $a > 0$ ,  $\xi(x_0) = \xi_0$ ,  $b(x_0) + E = 0$ ,  $b(x) + E > 0$  pour  $x > x_0$  proche de  $x_0$ . Si  $E < P(0,0)$ , alors  $x_0 > 0$  et  $b'(x_0) > 0$ . Si  $E = P(0,0)$ , on a :

$x_0 = 0$  et  $b(x) \approx x^2$  près de 0.

### Lemme 7.1.

Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que

$$(7.7) \quad P(x, \xi + it \operatorname{Im} \xi_+(x, E)) - E - \varepsilon \neq 0,$$

pour  $x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon_0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $|t| \leq 1$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  dans chacun des cas suivants :

$$(a) \quad |t| < 1, x > x_0,$$

$$(b) \quad |t| \leq 1, \varepsilon > 0.$$

### Démonstration.

Soit  $\eta = \xi_+(x, E + \varepsilon)$ . Alors :  $P(x, \eta) - E - \varepsilon = 0$ . La substitution dans (7.5) donne :

$$a(x, \eta) (\eta - \xi(x))^2 + b(x) + E + \varepsilon = 0, \quad \sqrt{a(x, \eta)} (\eta - \xi(x)) = i \sqrt{b(x) + E + \varepsilon}.$$

On en déduit :  $\eta - \xi(x) = f(x, i \sqrt{b(x) + E + \varepsilon})$ ,

où  $f(x, t)$  est une fonction réelle et analytique, avec  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = a(x, \xi(x))^{-1/2}$ .

Il est alors clair que  $\operatorname{Im} \eta(x, \varepsilon)$  augmente avec  $\varepsilon$  pour  $x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon_0$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

Comme toutes les racines de  $P = E + \varepsilon$  sont de la forme  $\eta + 2\pi n$  ou  $\overline{\eta} + 2\pi n$ , il est

clair que  $P(x, \xi) - E - \varepsilon \neq 0$  si  $|\operatorname{Im} \xi| < \operatorname{Im} \xi$ , ce qui est le cas dans les cas (a) et

(b) si  $\xi = \xi + i t \operatorname{Im} \xi_+(x, E)$ .

#

Pour  $x_0 < x < 2\pi - x_0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $|t| < 1$ , on a

$$(7.8) \quad P(x, \xi + i t \operatorname{Im} \xi_+(x, E)) - E \neq 0.$$

Ceci résulte de (7.5) et du fait que  $\xi_- = \overline{\xi_+}$ . Si on prolonge  $\xi_+(x, E)$  par continuité au cas  $P(0, 0) < E \leq 3$ , alors on a encore (7.8) pour  $|t| < 1, x \in \mathbb{R}$ .

### c. Préparation géométrique pour des inégalités $L^2$ à poids.

Soit  $\Phi(x)$  la fonction  $C^1$  vérifiant

$$(7.9) \quad \Phi(0) = 0$$

$$(7.10) \quad \Phi' = 0 \text{ pour } x \in \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} U_j, \quad U_j = \pi_x U_{(j, k)},$$

$$\Phi' = \operatorname{Im} \xi_+(x, E) \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} U_j.$$

Soit d'autre part,  $0 \leq \chi_0 \in C_0^\infty ]-x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[$  une fonction paire avec :

$$(7.11) \quad 0 \leq \chi_0 \leq \varepsilon_0, \text{ pour } x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon_0, \chi_0(x_0) > 0,$$

$$(7.12) \quad P(x, \xi) - \chi_0 - E < 0, \text{ pour } -x_0 \leq x \leq x_0, \xi \in \mathbb{R}.$$

On pose  $\tilde{P}(x, \xi) = P(x, \xi) - \chi(x)$  où  $\chi = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau_{2\pi j} \chi_0$ .

Il résulte alors de (7.8) et du lemme 7.1, que

$$(7.13) \quad \tilde{P}(x, \xi + it \Phi'(x)) - E \neq 0, \forall x, \xi \in \mathbb{R}, |t| < 1.$$

#### d. Conjugaison par des facteurs exponentiels.

Dans ce §, on peut relâcher les hypothèses sur  $P$  et supposer seulement que  $P \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times (C_0 \cap \{|\operatorname{Im} \theta| < 2C_0\}))$ , holomorphe en  $\theta$  et borné avec toutes ses dérivées. Soit  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  avec  $|\varphi'| \leq C_0$  et tel que les autres dérivés sont bornées. Comme d'habitude, on identifie  $P$  avec son  $h$ -quantifié de Weyl :

$$(7.14) \quad Pu(x) = (2\pi h)^{-1} \iint e^{i(x-y)\theta/h} P\left(\frac{x+y}{2}, \theta\right) u(y) dy d\theta, \text{ et on s'intéresse ici à :}$$

$$P_\varphi = e^{-\varphi/h} P e^{\varphi/h}.$$

#### Proposition 7.2.

Sous les hypothèses ci-dessus,  $P_\varphi$  est le  $h$ -quantifié de Weyl d'un symbole  $P_\varphi \in S^0$ , vérifiant :

$$(7.15) \quad P_\varphi(x, \theta) = P(x, \theta - i\varphi'(x)) \mod. S^{-1}.$$

Démonstration. On laissera au lecteur le soin de compléter la démonstration avec quelques arguments de densité. Le noyau distribution de  $P_\varphi$  est donné par l'intégrale oscillante :

$$(7.16) \quad K_\varphi(x, y) = (2\pi h)^{-1} \int e^{i[(x-y)\theta + i(\varphi(x) - \varphi(y))]/h} P\left(\frac{x+y}{2}, \theta\right) d\theta.$$

Suivant l'astuce standard, on écrit  $\varphi(x) - \varphi(y) = (x-y) \Phi(x, y)$ , où :

$$\Phi(x, y) = \int_0^1 \varphi'((1-t)y + tx) dt \in C^\infty \text{ est borné avec toutes ses dérivées, et :}$$

$|\Phi(x, y)| \leq C_0$ . Introduisant  $(\theta + i\Phi(x, y))$  comme nouvelle variable de fibre, on obtient

$$(7.17) \quad K_\varphi(x, y) = (2\pi h)^{-1} \int e^{i(x-y)\theta/h} P\left(\frac{x+y}{2}, \theta + i\Phi(x, y)\right) d\theta.$$

(remplacer  $\theta$  par  $\theta + i\Phi(x, y)$  revient à faire un changement de contour

d'intégration dans l'intégrale (7.16), ce que l'on peut justifier en approchant  $P$  par  $P \exp(-\varepsilon^2)$ . On remarque ensuite que  $Q_\varphi = P(\frac{x+y}{2}, \theta - i\Phi(x,y))$  appartient à  $S^0$  et il est alors standard que l'on peut remplacer  $Q_\varphi$  dans (7.16) par :  $R_\varphi(x, \theta) = (\exp(\frac{h}{i} \sum_j D_{\theta_j} D_{y_j}) Q(x, y, \theta))|_{y=x}$ . On passe ensuite au symbole de Weyl :  $P_\varphi(x, \theta)$  par une formule analogue. Il est bien connu (et facile à vérifier) que l'on reste dans  $S^0$  pendant ces manipulations et que l'on a bien (7.15).

#

### e. Inégalités $L^2$ à poids.

Soient  $P$ ,  $\tilde{P} = P - \chi$ ,  $\Phi$ ,  $\varepsilon$  comme dans §b,c. Avec des précautions évidentes dans le choix de  $\chi_0 \chi$ , le résultat suivant est valable uniformément pour  $c + \varepsilon_0 \leq E \leq \varepsilon$  ;  $\varepsilon_0 \leq 0$  :

#### Proposition 7.3.

Soit  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ,  $0 < t < 1$ , avec  $|\varphi'| \leq t|\Phi'|$ ,  $|\varphi^{(j)}| \leq C_j$ ,  $j \geq 2$ . Alors il existe  $C_0 > 0$  tel que, pour  $0 < h \leq 1/C_0$  :

$$\|u\|_{L^2_\varphi} \leq C_0 \|(\tilde{P} - E)u\|_{L^2_\varphi}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Démonstration. Il suffit de combiner (7.13) et la Proposition 7.2, pour voir que  $\tilde{P}_\varphi - E = e^{-\varphi/h} (\tilde{P} - E) e^{\varphi/h}$  est un opérateur elliptique.

#

### f. Suite et fin.

Il s'agit maintenant de voir qu'essentiellement tout ce qu'on a fait dans les sections 1-6 pour  $P_0 = \cos \tilde{D} + \cos x$  marche aussi pour  $P$  pourvu que " $\varepsilon$ " dans le §7b soit suffisamment petit. Les résultats vont être uniformes par rapport à  $h$  si on restreint le paramètre spectral à  $[c + \varepsilon_0, \eta]$ .

D'abord tout marche sans modifications jusqu'au Théorème 3.2, où il faut modifier les conditions sur  $\varphi$  et supposer que  $\varphi \in C^\infty$ , que  $\varphi', \varphi'', \dots$  sont bornés avec  $|\varphi'| \leq (\Phi' - \delta)_+$ , où  $\Phi = \Phi_E$  est défini ci-dessus. La démonstration reste alors quasiment inchangée. Il faut simplement penser à utiliser

maintenant la Proposition 7.3 au bon endroit. Avec des modifications analogues, on a aussi le Corollaire 3.4.

Ensuite tout marche sans changement jusqu'à l'estimation de  $W_{\alpha,0}$   
 $= I + II + III$  où on ne peut plus estimer III tout à fait de la même manière, car le support de  $[P, \chi] u_\alpha$  n'est plus nécessairement concentré à un petit voisinage de  $\lambda$ . (Ici  $\chi = 1_{]-\infty, \lambda]}$ ). Pour  $x > \lambda$  on a  $[P, \chi] u = P \chi u$  et pour  $x < \lambda$  on a :  $[P, \chi] u = -[P, (I - \chi)] u = -P(I - \chi)u$ . D'après la Proposition 7.2, on sait que  $P = O(1) : L_\varphi^2 \rightarrow L_\varphi^2$  pour tout  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ , avec  $|\varphi| \leq C_0$  et  $\varphi'', \varphi''', \dots$  bornés. On en déduit que si  $\varphi_1, \varphi_2$  sont uniformément Lipschitziennes avec  $|\varphi'_j| \leq C_0$  et  $\varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda)$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$\| [P, \chi] \|_{\mathcal{L}(L_{\varphi_1}^2, L_{\varphi_2}^2)} \leq C_\varepsilon e^{c/h}, \quad 0 < h \leq C_\varepsilon.$$

Cette estimation suffit très largement pour estimer le terme III dans les trois cas considérés dans la section 4 et on obtient la Proposition 4.6.

Dans la section 5 on remplace  $D(0, x)$  par la solution  $d(x)$  de :

$i d'(x) = \xi_+(x)$ ,  $x \geq x_0$ ,  $d(x_0) = 0$  (dont la partie réelle est  $D(0, x)$  pour  $x$  réel). Alors les Propositions 5.1 et 5.3 ainsi que (5.17) et la Remarque 5.4 restent valables.

Les arguments suivants sont basés sur des calculs assez explicites pour  $P_0$  et doivent être modifiés. On commence par modifier le choix de  $\chi$  de la manière suivante : Pour  $C_0 > 0$  assez grand, soit  $\pi_s$  l'opérateur de multiplication par  $C_1 h^{-1/2} \exp i\varphi_s(x)/4$ ,  $\varphi_s(x) = \varphi_0(x-s)$ ,  $\varphi_0(t) = i C_0 t^2$ . On choisit  $C_1 > 0$  tel que  $\int \pi_s dx = 1$ . On vérifie facilement que toute la discussion de la section 5 jusqu'à la Remarque 5.4 comprise reste valable avec  $\chi(x)$  remplacé par  $K = \int \chi(s) \pi_s ds$ , où  $\chi$  est toujours choisi comme dans la section 5. Nous avons, (7.18)  $[P, \int \chi(s) \pi_s ds] = \int \chi(s) [P, \pi_s] ds$ , et nous allons voir que modulo une petite erreur on a  $[P, \pi_s] = \frac{\partial}{\partial s} Q_s$  pour un opérateur convenable  $Q_s$ . (On utilise ici des idées de [ME-SJ], développées

dans le cadre analytique dans  $[S]_1$ , mais on fera des calculs assez explicites).

D'abord

$$P \pi_s u(x) = C h^{-3/2} \iint e^{i((x-y)\theta + \varphi_s(y))/h} P(\frac{x+y}{2}, \theta) u(y) dy d\theta$$

$$\pi_s P u(x) = C h^{-3/2} \iint e^{i((x-y)\theta + \varphi_s(x))/h} P(\frac{x+y}{2}, \theta) u(y) dy d\theta$$

Ici  $C$  désigne le même facteur constant dans les deux intégrales et on veut aussi avoir la même phase. Pour cela on écrit :

$$(x-y)\theta + \varphi_s(y) = (x-y)\theta_+ + 1/2 \varphi_s(x) + 1/2 \varphi_s(y)$$

$$(x-y)\theta + \varphi_s(x) = (x-y)\theta_- + 1/2 \varphi_s(x) + 1/2 \varphi_s(y),$$

avec  $\theta_{\pm} = (\theta \pm (1/2) \varphi'_s(\frac{x+y}{2}))$ . Utilisant  $\theta_{\pm}$  comme des nouvelles variables de fibre, on trouve :

$$(7.19) [P, \pi_s] u(x) = C h^{-3/2} \iint e^{i[(x-y)\theta + (1/2) \varphi'_s(x) + (1/2) \varphi'_s(y)]/h}$$

$$x (P(\frac{x+y}{2}, \theta + 1/2 \varphi'_s(\frac{x+y}{2})) - P(\frac{x+y}{2}, \theta - (1/2) \varphi'_s(\frac{x+y}{2}))) u(y) dy d\theta.$$

Ici  $(1/2) \varphi'_s(x) + (1/2) \varphi'_s(y) = C_0 i [(\frac{x+y}{2} - s)^2 + 1/4 (x-y)^2]$ . La partie qui dépend de  $s$  dans l'intégrale dans (7.19) est alors :

$$(7.20) \exp(-C_0 (\frac{x+y}{2} - s)^2/h) (P(\frac{x+y}{2}, \theta + i C_0 (\frac{x+y}{2} - s)) - P(\frac{x+y}{2}, \theta - i C_0 (\frac{x+y}{2} - s))).$$

**Lemme 7.4.** Soit  $0 < C \leq 1/2 \varepsilon$  (avec  $\varepsilon > 0$  comme dans §7b). Alors on peut trouver un symbole analytique classique  $Q(\frac{x+y}{2}, \theta, \frac{x+y}{2} - s, h)$  d'ordre 0, défini pour  $|\operatorname{Im} \frac{x+y}{2}| + C_0 |\operatorname{Im} \theta| + |\frac{x+y}{2} - s| \leq C$ ,  $2\pi$ -périodique dans les deux premières variables, tel que formellement l'expression (7.19) soit égale à :

$$h \frac{\partial}{\partial s} [\exp(-C_0 (\frac{x+y}{2} - s)^2/h) Q(\frac{x+y}{2}, \theta, \frac{x+y}{2} - s, h)].$$

**Démonstration.** Après des substitutions de variables, on obtient :

$$(7.22) \exp(-C_0 \sigma^2/h) (P(x, \theta + i\sigma) - P(x, \theta - i\sigma)) = -h \frac{\partial}{\partial \sigma} [\exp(-C_0 \sigma^2/h) Q(x, \theta, \sigma, h)].$$

Comme  $\sigma \rightarrow P(x, \theta + i\sigma) - P(x, \theta - i\sigma)$  est impair, on a une solution symbole classique formel qui est unique, et comme dans  $[S]_1$  on constate que  $Q$  est aussi un symbole analytique.

#

Passant aux réalisations, on peut décrire le noyau distribution de  $[P, \pi_s]$  dans  $|x-s| + |y-s| \leq 1$  par :

$$(7.23) \quad h \frac{\partial}{\partial s} Q_s + R_s,$$

où

$$Q_s = \text{const.} \cdot h^{-3/2} \int e^{i[(x-y)\theta + 1/2(\varphi_s(x) + \varphi_s(y))]/h} Q\left(\frac{x+y}{2}, \theta, \frac{x+y}{2} - s, h\right) d\theta,$$

$$R_s = \text{const.} \cdot h^{-3/2} \int e^{i[(x-y)\theta + 1/2(\varphi_s(x) + \varphi_s(y))]/h} R\left(\frac{x+y}{2}, \theta, \frac{x+y}{2} - s, h\right) d\theta,$$

où  $Q$  est holomorphe et  $O(1)$  dans :  $|\text{Im } \frac{x+y}{2}| + |\text{Im } \theta| + |\frac{x+y}{2} - s| \leq \text{const.}$  et  $R$  est holomorphe et  $O(\exp(-\varepsilon_0/h))$  dans la même région. De plus  $Q$  et  $R$  sont  $2\pi$ -périodiques dans les 2 premières variables.

Analysons maintenant  $W_{\alpha,0}$  pour  $\alpha_1=1$  à l'aide de (5.22), qui reste valable si l'on remplace  $\chi$  par  $K$  avec  $t=\pi$  et  $C_0 > 0$  suffisamment grand. La contribution essentielle à  $-(u_0 | [P, K] u_\alpha)$  vu comme intégrale double en  $x, s$  provient d'un voisinage de  $(\pi, \pi)$  et utilisant (7.18), (7.23) et la démonstration de la Proposition 7.2 (qui permet de majorer la norme de  $R_s$  dans des espaces  $L^2_{\varphi}$ ), on constate que :

$$(7.24) \quad w_{\alpha,0} = -h (u_0 | \Psi Q_\pi \Psi u_\alpha) + O(e^{-(S_1 + \varepsilon_0)/h}), \quad (\varepsilon_0 > 0),$$

où  $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  vaut 1 dans un petit voisinage de  $\pi$ . Sachant que le symbole dans  $Q_\pi$  est elliptique et que  $u_0$  et  $u_\alpha$  ont des formes BKW assez précises près de  $\pi$  on vérifie alors facilement à l'aide de la méthode de la phase stationnaire que l'on a bien (ii) dans la Proposition 5.6. Comme on savait déjà que (i) reste vrai et que  $P$  est invariant par transformation de Fourier (et  $S_1=S_2$ ), on sait que la Proposition 5.6 reste vraie pour  $P$ . La section 6 reste valable sans modification. Pour résumer notre discussion, on obtient :

#### Théorème 7.5 :

Il existe  $\delta_0, \delta'_0 > 0$  et pour tout  $\varepsilon_0 > 0$  des constantes  $h_0, C_0 > 0$  telles que :

Soit  $P(x, \xi) = \cos \xi + \cos x + R(x, \xi)$  avec  $R$  réel,  $2\pi$ -périodique en  $x$  et en  $\xi$  avec  $P_0 \mathcal{H} = P$ , où  $\mathcal{H}(x, \xi) = (\xi, -x)$ ; on suppose aussi que  $R$  est holomorphe dans :

$|\operatorname{Im}(x, \xi)| \leq 1/\delta'$ ,  $y$  vérifiant  $|\operatorname{Re}(x, \xi)| \leq \delta$ , pour  $0 < \delta' \leq \delta'_0$ ,  $0 < \delta \leq \delta_0$ ; alors :

(A)  $P$  a exactement trois différentes valeurs critiques  $M_{\pm}$  et  $c$ , avec  $|M_{\pm} - (\pm 2)| \leq \delta$ ,  $|c| \leq \delta$ .

Notons aussi par  $P$  le  $h$ -quantifié de Weyl de  $P$ ; alors, pour  $0 < h \leq h_0$ , on a :

(B) Il existe des valeurs  $\mu_0, \dots, \mu_{N(h)} \in [c + \varepsilon_0, M_+]$  telles que  $M_+ - \mu_0, \mu_j - \mu_{j+1} \in [h/C_0, C_0 h]$ ,  $\mu_{N(h)} - c - \varepsilon_0 \leq C_0 h$ , et tels que :

$\operatorname{Sp}(P) \cap [c + \varepsilon_0, M_0] \subset \bigcup J_j$ , où  $J_j$  est l'intervalle fermé centré autour de  $\mu_j$  de longueur  $\exp(-1/C_0 h)$  (et  $h_0 > 0$  est suffisamment petit pour que les  $J_j$  soient deux à deux disjoints).

(C) Si  $F = F_j \operatorname{cL}^2$  est l'espace spectral associé à  $\operatorname{Sp}(P) \cap J_j$ , alors il existe une base orthonormée de  $F$  indexée sur  $\mathbb{Z}^2$  telle que la matrice de  $P|_F$  est de la forme  $\mu_j + W$ ,  $W = W_j = (w_{\alpha, \beta})$ ,  $w_{\alpha, \alpha} = 0$  et  $w_{\alpha, \beta}$  vérifient (6.1), (6.2), (6.16) avec  $f(1, 0)$  réel. De plus,  $|f(1, 0)| = \exp(-S/h)$ , où :

$$S = S(j, h) \in [1/C_0, C_0], \text{ et } |f(\alpha)|/|f(1, 0)| \leq \exp(-(|\alpha| - 1)/C_0 h) \quad (f(0) = 0).$$

(D) Il existe  $P_j(x, \xi) = \cos \xi + \cos x + R_j(x, \xi)$  dépendent aussi de  $h$  vérifiant les mêmes hypothèses que  $P$  avec  $\delta' = C_0 h$ ,  $\delta = e^{-1/C_0 h}$  tel que :

Si  $0 < \tilde{h} < 2\pi$  (où  $\tilde{h}$  est défini par :  $(2\pi)^2/h \equiv \tilde{h} \pmod{2\pi}$ , cf §1), alors le spectre de  $f(1, 0)^{-1} W_j$  coïncide avec celui du  $\tilde{h}$ -quantifié de Weyl de  $P_j$  et si  $\tilde{h} = 0$ ; le spectre de  $f(1, 0)^{-1} W_j$  est l'ensemble de valeurs de  $P_j$  pour  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ . On a aussi le résultat analogue pour  $[M_-, c - \varepsilon_0]$ .

#

Soit  $P$  comme dans le théorème avec  $0 \leq \delta \leq \delta_0$ ,  $0 \leq \delta' \leq \delta'_0$  et soit  $\varepsilon_0 > 0$  petit. Alors si  $0 < h \leq h_0$ , avec  $h_0 = h_0(\varepsilon_0)$  suffisamment petit, les nouvelles valeurs  $\delta, \delta'$  pour  $P_j$  appartiennent aussi à  $]0, h_0]$  et  $]0, h'_0]$ . Donc, si  $0 < \tilde{h} \leq h_0(\varepsilon_0)$  le théorème s'applique à  $P_j$  et ainsi de suite. Pour tout  $\varepsilon_0 > 0$  on peut aussi imposer :  $0 \leq \delta \leq \varepsilon_0$  et on arrive alors au théorème 1.

Remarque 7.7.

Si on suppose maintenant que  $\frac{2\pi}{h} = k + \frac{\tilde{h}}{2\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $-2\pi < \tilde{h} < 0$ , alors tout ce qu'on a fait marche encore au prix de quelques modifications minimales dans la section 6. Là on trouve encore que  $W$  a le même spectre que  $Q$  donné par (6.8). Si  $Q(x, \xi)$  est le symbole donné par (6.12) on trouve aussi que

$$(7.25) \quad \begin{aligned} Qu(x) &= (2\pi)^{-1} \iint e^{i(x-y)\theta} Q\left(\frac{x+y}{2}, \tilde{h}\theta\right) u(y) dy d\theta \\ &= (2\pi |\tilde{h}|)^{-1} \iint e^{i(x-y)\eta/|\tilde{h}|} Q\left(\frac{x+y}{2}, -\eta\right) u(y) dy d\eta. \end{aligned}$$

L'opérateur  $Q$  est donc le  $|\tilde{h}|$ -quantifié de Weyl de  $Q' = Q(x, -\eta)$ , qui est un symbole avec les mêmes propriétés générales que  $Q$ . (Comme :

$$\overline{\text{Op}_{|\tilde{h}|}(Q)}u = \text{Op}_{|\tilde{h}|}(Q')\overline{u}, \quad Q = \text{Op}_{|\tilde{h}|}(Q') \text{ a aussi le même spectre que } \text{Op}_{|\tilde{h}|}(Q).$$

Il est alors clair que le théorème 7.6 admet une extension évidente au cas où :

$$\frac{h}{2\pi} = 1/(q_1 + 1/(q_2 + 1/(q_3 + \dots))) \text{ avec } q_j \in \mathbb{Z}, |q_j| \geq C_0.$$

### §8- Quelques calculs pratiques des coefficients d'interaction

On se propose dans ce § de préciser les résultats du §5 (proposition 5.6) dans les cas "faciles" : le cas "fond de puits" et le cas où la valeur propre reste dans un intervalle de valeurs non critiques pour l'hamiltonien :  $\cos \xi + \lambda \cos x$ .

Cas a : Dans le premier cas, on considère le niveau d'énergie  $\mu_k(h)$  proche de la  $(k+1)^{\text{ème}}$  valeur propre de l'oscillateur harmonique :

$$(8.1) \quad (1+\lambda) - \frac{h^2 D^2 x}{2} - \lambda \frac{x^2}{2}$$

où on peut préciser les résultats du §5 en utilisant les résultats de [HE-SJ], montrant que  $\mu_k(h)$  est la réalisation d'un symbole analytique en  $h$  i.e :

$$(8.2) \quad \mu_k(h) \sim (1+\lambda) - h \beta_k + \sum_{j \geq 2} \beta_k^j h^j$$

$$\text{avec : } \beta_k = (2k+1) \sqrt{\lambda}/2 \quad \text{et} \quad |\beta_k^j| \leq C_k^{j+1} \cdot j!$$

et d'une solution B.K.W :

$$(8.3) \quad u_k^{BKW}(x,h) = h^{-\frac{1}{2}k} a^k(x,h) e^{-\phi(x)/h}$$

où  $a^k(x,h)$  est la réalisation d'un symbole analytique formel :

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j^k(x) h^j \quad \text{et où } \phi(x) \text{ est solution de l'équation eikonale :}$$

$$(8.4) \quad (1 - \cos \phi) + \lambda(1 - \cos x) = 0 \quad \text{avec : } \phi \geq 0, \phi(0)=0$$

qui vérifie :

$$(8.5) \quad (P - \mu_k) [u_k^{BKW}(x,h)] = 0_k (\exp(-\epsilon_k/h) \cdot \exp(-\phi(x)/h) \quad \text{avec } \epsilon_k > 0$$

La fonction propre  $u_0^k$  vérifie alors :

$$u_0^k(x,h) - u_k^{BKW}(x,h) = 0_k (\exp(-\epsilon_k/h) \cdot e^{-\phi(x)/h} \text{ dans un voisinage de } 0.$$

(On a éventuellement modifié  $u_0^k$  introduite au §4(cf 5.1) par un terme multiplicatif de module 1 :  $e^{i\theta_k(h)}$ )

Ce résultat est plus précis que celui obtenu au §5 mais il n'est pas uniforme par rapport à  $k$ !

Cas b : Dans le 2<sup>ème</sup> cas, on considère une famille de valeurs propres  $E(h)$  ( $h \in \mathcal{J} \subset ]0, h_0]$  ;  $\mathcal{J}$  est un ensemble éventuellement discret ayant 0 comme point d'accumulation) t.q

$$(8.6) \quad 1 - \lambda + \varepsilon_0 < E(h) < 1 + \lambda - \varepsilon_0 \quad \text{avec } \varepsilon_0 > 0$$

On est dans la situation classique considérée par Maslov [MA] car alors :

$(\cos \xi + \lambda \cos x = E(h))$  est une réunion de courbes régulières simples disjointes dans  $T^*R$  et on construira une solution Lagrangienne attachée à l'une de ces courbes. On est dans le cas le plus simple où la dimension est 1 et où les résultats sont donc censés être classiques. Nous n'avons pas de référence précise dans le cas analytique (cf cependant Gérard-Grigis [GE-GRI] dans le cas de Schrödinger et F. Pham [PH]) alors que les références abondent dans le cas  $C^\infty$  par différentes techniques (cf V.P Maslov [MA], J.J Duistermaat [DU], J. Leray [LE], B-Candelpergher, J.C Nosmas [CA-NO], B. Helffer-D.Robert [HE.RO]<sub>1</sub>). Cependant, la démonstration développée dans [GE-SJ] pour l'étude du cas beaucoup plus compliqué des résonances engendrées par une trajectoire fermée de type hyperbolique s'adapte parfaitement dans le cadre analytique. Si on considère que l'espace normal apparaissant dans cet article est réduit à 0, on peut suivre le schéma général de cette démonstration. Après transformation de F.B. I analytique, on est ramené essentiellement (cf §3 dans [GE-SJ]) à l'étude du spectre de  $(h\partial_\theta)$  sur le cercle pour les sections d'un fibré en droites non trivial. Revenant par F.B.I inverse au problème initial, on retrouve après normalisation le comportement suivant pour la "fonction propre"  $u_0(x, h)$  au voisinage du puits  $[-\mu_0(E(h)), \mu_0(E(h))]$  :

Si  $\varphi_E(x)$  est la solution de  $\cos \varphi'_E + \lambda \cos x = E$  t.q :

$$\varphi_E(-\mu_0(E)) = 0, \quad \varphi'_E > 0 \quad \text{dans } ]-\mu_0(E), \mu_0(E)[$$

On a : dans  $[-\mu_0(E(h)), \mu_0(E(h))]$  :

$$(8.7) \quad u_0(x, h) = a_{E(h)}(x, h) \sin \left( \frac{\varphi_{E(h)}(h)}{h} + \frac{\pi}{4} \right)$$

(modulo  $O(\exp(-\varepsilon_k/h))$  uniformément sur tout compact de  $]-\mu_0(E), \mu_0(E)[$ )

où  $a_E(x, h)$  est la réalisation d'un symbole analytique formel  $\sum_j a_j(E) h^j$ ,

dans  $C([- \mu_0, \mu_0] \cap ]-2\pi, 2\pi[)$

$$(8.8) \quad u_0(x, h) = b_{E(h)}(x, h) \exp(-\phi_{E(h)}(x)/h)$$

où :  $\phi_E(x)$  est solution de l'équation eiconale :

$$\text{ch } \phi'_E(x) + \lambda \cos x = E \text{ dans } ]\mu_0(E), 2\pi[, \phi_E(\mu_0(E)) = 0, \phi_E(x) > 0$$

$$(8.9) \quad b_E(x, h) = \left( \sum_j b_j(x, E) h^j \right) \text{ dans } ]\mu_0(E), 2\pi[$$

(et on a un développement analogue dans  $]-2\pi, -\mu_0(E)[$ )

Enfin pour  $E(h)$ , on a le développement suivant :

$$(8.10) \quad E(h) = \sum_j E_j((n+1/2)h) h^j \text{ (modulo } O(\exp(-\varepsilon_0/h))$$

où les  $E_j$  vérifient  $|E_j(E)| \leq C^{j+1} |j|$  et où  $n(h)$  est un entier convenable.

(Compte-tenu des estimations sur  $E_j(E)$ , le terme de droite est plus exactement une réalisation du symbole formel écrit.)

et où  $E_0(s)$  est la fonction inverse de  $E \rightarrow S_{p(x, \xi)} dx d\xi$

(8.7) et (8.8) sont simplement la traduction par des théorèmes de phase stationnaire de la propriété que  $u_0(x, h)$  est une distribution analytique Lagrangienne qui admet au voisinage des points tournants une représentation de type Airy. Ceci nous permet également comme dans [HE-SJ]<sub>4</sub> (formule 10.73) d'établir la correspondance suivante entre  $a_0^{(E)}$  et  $b_0(E)$  qui nous sera utile pour déterminer l'effet d'interaction :

$$(8.11) \quad \frac{1}{4} \lim_{\substack{x \rightarrow \mu_0(E) \\ x < \mu_0}} a_0(E, x)^2 \sin \phi'_E(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \mu_0(E) \\ x > \mu_0}} (f_0(E, x))^2 \text{sh } \phi'_E(x)$$

Explicitons maintenant dans les 2 cas l'expression du terme d'interaction  $I_0(\pi, h)$  introduit en (5.32).

cas a : Il s'agit donc de calculer l'expression :

$$(8.12) \quad -h a_0^k(x) a_0^k(x-2\pi) \cdot h^{2\gamma} \text{sh } (\phi'(x)) \exp(-S_1/h)$$

(dont on sait déjà qu'elle est indépendante de  $x$ ) où  $S_1$  est la distance d'Agmon entre 2 puits successifs  $(0,0)$  et  $(2\pi,0)$  donnée par :

$$(8.13) \quad S_1 = 2 \int_0^{2\pi} \text{Arg sh}(\sqrt{\lambda} \sin t/2) dt$$

On déduit en effet de (8.4) l'expression suivante pour  $\Phi'(x)$  :

$$(8.14) \quad \Phi'(x) = 2 \text{Arg sh}(\sqrt{\lambda} \sin(x/2))$$

Notons pour la suite que :

$$(8.15) \quad \Phi(x) = \sqrt{\lambda} \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad \Phi'(x) = \sqrt{\lambda} x$$

$a_0^k(x)$  est déterminé à une constante multiplicative près par l'équation de transport :

$$(8.16) \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} [x, i, \Phi] \left( \frac{1}{i} \frac{d a_0^k}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} (x, i, \Phi'(x)) \right] a_0^k + \beta_k a_0^k = 0$$

soit encore :

$$(8.17) \quad \text{sh } \Phi'(x) \frac{d a_0^k}{dx}(x) + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\text{sh } \Phi'(x)) a_0^k(x) - \beta_k a_0^k(x) = 0$$

(on peut chercher  $a_0^k$  réel).

Lorsque  $k > 0$ , on ne peut plus chercher l'amplitude avec  $a_0^{(k)}(0) \neq 0$ . On remplace cette condition initiale par une condition permettant l'ajustement de la solution B.K.W avec la solution propre normalisée de l'oscillateur harmonique que l'on doit retrouver près de 0 (conformément à  $[\text{HE-SJ}]_1$ ). Ceci nous permettra également de déterminer  $\gamma_k$ . Cette fonction propre est donnée par (cf (1.15) dans  $[\text{HE-SJ}]_2$ ) :

$$h^{-1/4} \lambda^{1/8} \cdot \sigma_k(\lambda^{1/4} x/h^{1/2})$$

(où  $\sigma_k$  est la  $(k+1)^{\text{ème}}$  fonction propre de  $\frac{1}{2}(D_x^2 + x^2)$ ), et on a donc :

$$(8.18) \quad \gamma_k = -\frac{1}{4} - \frac{k}{2}$$

et

$$(8.19) \quad a_0^k(x) = [\lambda^{1/8} \pi^{-1/4} \left( \frac{2^k}{k!} \right)^{1/2} \lambda^{k/4}] x^k + O(x^{k+1})$$

Exploitant la parité de l'hamiltonien :  $p(-x, -\xi) = p(x, \xi)$ , on remarque que les

fonctions propres sont paires ou impaires (et les constructions B.K.W aussi), ce qui se traduit par :

$$(8.20) \quad a_0^k(x) = (-1)^k a_0^k(-x)$$

Venons en donc au calcul de la quantité :

$$(8.21) \quad b^{(k)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^k a_0^{(k)}(x) \cdot a_0^k(x-2\pi) \operatorname{sh} \phi'(x)$$

qu'on va calculer en  $x = \pi$ . Compte-tenu de (8.20), on va plutôt calculer :

$\tilde{b}^{(k)}(\pi) = b^{(k)}(\pi)$  où  $\tilde{b}^{(k)}(x)$  est défini par :

$$(8.22) \quad \tilde{b}^{(k)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} a_0^{(k)}(x)^2 \operatorname{sh} \phi'(x)$$

Compte-tenu de (8.17), on a :

$$(d\tilde{b}^{(k)} / dx) / \tilde{b}^{(k)} = (2da_0^k/dx) / a_0^k + (d \operatorname{sh} \phi' / dx) / \operatorname{sh} \phi' = 2\beta_k / \operatorname{sh} \phi'$$

soit, pour  $x > 0$  :

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Log} \tilde{b}^{(k)} = \frac{(2k+1) \sqrt{\lambda}}{\operatorname{sh} \phi'}$$

qu'on réécrit sous la forme , pour  $\varepsilon < x < 2\pi$  :

$$(8.23) \quad \tilde{b}^{(k)}(x) = \left( \frac{\tilde{b}^{(k)}(\varepsilon)}{\varepsilon^{2k+1}} \right) \exp[(2k+1) (\sqrt{\lambda} \int_{\varepsilon}^x \frac{dt}{\operatorname{sh} \phi'} + \operatorname{Log} \varepsilon)]$$

Compte tenu de (8.19) et (8.15), on a :

(8.24)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{b}^{(k)}(\varepsilon)}{\varepsilon^{2k+1}} = \lambda^{1/4 [2k+1]} \pi^{-1/2} \left( \frac{2^k}{k!} \right) \sqrt{\lambda}$$

Si on pose :

$$A(x) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon}^x \frac{dt}{\operatorname{sh} \phi'(t)} + \frac{\operatorname{Log} \varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \right]$$

On déduit de (8.23) et (8.24) que :

$$\tilde{b}^{(k)}(x) = \pi^{-1/2} \left( \frac{2^k}{k!} \right) \lambda^{3/4} \cdot \lambda^{k/2} \exp(\sqrt{\lambda} \left( \frac{2k+1}{2} \right)) \cdot A(x)$$

D'où :

$$(8.25) \quad \tilde{b}^{(k)}(\pi) = \pi^{-1/2} \left( \frac{2^k}{k!} \right) \lambda^{3/4} \cdot \lambda^{k/2} \exp(\sqrt{\lambda} \left( \frac{2k+1}{2} \right)) \cdot A(\pi)$$

Il nous reste à calculer  $A(\pi)$  et à donner son interprétation dans le même esprit que dans  $[HE-SJ]_2$  §1 en liaison avec la théorie des instantons (cf Coleman [COL]). Revenons aux équations de hamilton pour l'hamiltonien :

$$q(x, \xi) = p(x, i\xi) - (1 + \lambda) = (-1 + \text{ch} \xi) - \lambda[-\cos x + 1] ; \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial q}{\partial \xi} = \text{sh } \xi \\ \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{\partial q}{\partial x} = \lambda \sin x \end{aligned}$$

La solution  $(x(t), \xi(t))$  avec  $(x(0), \xi(0)) = (0, 0)$  vérifie :  $\xi(t) = \phi'(x(t))$

$$\int_{\epsilon}^{\pi} \frac{dx}{\text{sh} \phi'(x)} \text{ représente le temps mis pour aller de } x=\epsilon \text{ à } x=\pi.$$

$A(\pi)$  représente donc la "partie finie" (lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ ) du temps mis pour aller de  $\epsilon$  à  $(2\pi - \epsilon)$ .  $A(\pi)$  se calcul explicitement par des intégrales classiques et on trouve :

$$(8.26) \quad A(\pi) = \frac{4 \text{ Log } 2}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\text{Log } (\lambda + 1)}{\sqrt{\lambda}}$$

On a donc finalement pour l'expression (8.12) en  $x=\pi$  (cf 5.32) :

(8.27)

$$-I(\pi) = h^{(1/2-k)} (-1)^{k+1} \pi^{-1/2} \left(\frac{2}{k!}\right)^k \lambda^{3/4} \cdot \lambda^{k/2} \cdot \left(\frac{2^4}{\lambda+1}\right)^{(k+1/2)} \exp -S_1/h [1 + o(h)]$$

Cas b :

Comme il est classique (cf Landau-Lifshitz) [LA-LI] (p.210-211 pb3)

$$(8.28) \quad a_E(x, h) = \frac{c}{(\sin \varphi'_E)^{1/2}} + o(h)$$

où  $\varphi_E$  est solution de :  $\cos \varphi'_E + \lambda \cos x = E$ . La constante  $c$  est calculée de telle sorte que la solution Lagrangienne correspondante soit de norme 1, soit :

$$(8.29) \quad \frac{c^2}{2} \int_{-\mu_0(E)}^{\mu_0(E)} \frac{dx}{\sin \phi'_E} = 1$$

$E$  est relié à  $h$  par la relation de quantification

$$(8.30) \quad \int_{p(x, \xi) \geq E} dx \cdot d\xi = (n+1/2)h \quad \text{pour un } n \in \mathbb{Z}$$

Pour calculer la formule d'interaction (5.32) (cf proposition 5.6), on doit

calculer :

$$(8.31) \quad -I_0(\pi, h) = -h \exp(-s_1/h) b_0^E(\pi)^2 \operatorname{sh} \phi'_E(\pi) [1 + O(h)]$$

où  $\bullet S_1(E)$  est la distance d'Agmon entre  $\mu_0(E)$  et  $2\pi - \mu_0(E)$

$\bullet b_0^E(x)$  est solution dans  $]\mu_0, 2\pi - \mu_0[$  de :

$$(8.32) \quad \operatorname{sh} \phi'_E \frac{db_0^E}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [\operatorname{sh} \phi'_E] b_0^E = 0$$

$\bullet \phi'$  est solution de l'équation eiconale :

$$(8.33) \quad \operatorname{ch} \phi'_E + \lambda \cos x = E$$

On remarque que  $b_0^E(x)^2 \operatorname{sh} \phi'_E(x)$  est constant d'après (8.32) et on a donc :

$$(8.34) \quad -I_0(\pi, h) = -h \exp(-S_1/h) \lim_{\substack{x \rightarrow \mu_0 \\ x > 0}} (b_0^E(x))^2 \operatorname{sh} \phi'_E(x) [1 + O(h)]$$

En utilisant (8.11), on montre que :

$$\frac{1}{4} \lim_{\substack{x \rightarrow \mu_0 \\ x < \mu_0}} (b_0^E(x))^2 \sin \phi'_E(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \mu_0 \\ x > \mu_0}} (b_0^E(x))^2 \operatorname{sh} \phi'_E(x) = \frac{c^2}{4}$$

D'où finalement :

$$(8.35) \quad -I_0(\pi, h) = -h \cdot e^{-\frac{S_1(E)}{h}} \cdot \left( (1 + \frac{1}{2} \int_{-\mu_0(E)}^{\mu_0(E)} \frac{dx}{\sin \phi'_E(x)}) + O(h) \right)$$

Comme remarqué dans le livre de Landau-Lifschitz [LA-LI], on a :

$$\left| 2 \int_{-\mu_0(E)}^{\mu_0(E)} \frac{dx}{\sin \phi'_E(x)} \right| = T(E)$$

( où  $T(E)$  est la période correspondant à l'énergie  $E$ ).

## §9 Application à l'équation de Schrödinger avec champ magnétique.

### § 9.1- Introduction

En fait, comme signalé dans l'introduction, nous avons été conduits à l'étude de l'équation de Harper par l'intermédiaire de l'étude semi-classique du Spectre de l'équation de Schrödinger à potentiel électrique périodique et champ magnétique périodique.

On se limite ici à l'étude dans  $\mathbb{R}^2$  du spectre de l'opérateur :

$$(9.1.1) \quad P_A(h) = (hD_{x_1} - A_1)^2 + (hD_{x_2} - A_2)^2 + V$$

où on suppose que le potentiel électrique  $V$  est  $C^\infty$  périodique :

$$(9.1.2) \quad \begin{cases} V(x_2 + a_1, x_2) = V(x_1, x_2) & a_1 > 0 \\ V(x_1, x_2 + a_2) = V(x_1, x_2) & a_2 > 0 \end{cases}$$

De même, le champ magnétique  $B$  défini par :

$$d(A_1 dx_1 + A_2 dx_2) = B dx_1 \wedge dx_2, \text{ soit :}$$

$$(9.1.3) \quad B(x_1, x_2) = \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) (x_1, x_2)$$

est supposé  $C^\infty$  périodique de mêmes périodes :

$$(9.1.4) \quad \begin{cases} B(x_1 + a_1, x_2) = B(x_1, x_2) \\ B(x_1, x_2 + a_2) = B(x_1, x_2) \end{cases}$$

Les travaux concernant cette situation sont très nombreux dans la littérature de physique des solides (même dans les livres élémentaires) et on se limite ici à signaler quelques contributions mathématiques. Le cas  $A=0$  est

connu depuis longtemps (cf [RE-SI]). On sait que le spectre est constitué de bandes qui se recouvrent éventuellement. L'étude semi-classique des premières bandes a été faite par E.M. Harrell [HA] en dimension 1 puis dans le cas de la dimension  $>1$  par B. Simon [SI] et A. Outassourt [OU]. Plus récemment, Carlsson [CAR] étudie le problème à une infinité de puits sans hypothèse de périodicité.

Pour  $A \neq 0$ , la situation peut changer nettement, car le spectre se met à dépendre des propriétés du flux de B à travers une cellule :

$$(9.1.5) \quad \Phi = \int_C B(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2$$

où C est une cellule de base (par exemple  $[-\frac{a_1}{2}, \frac{a_1}{2}] \times [-\frac{a_2}{2}, \frac{a_2}{2}]$ )

Plus précisément, la situation est radicalement différente selon que :

$$(9.1.6) \quad a) \quad \Phi / 2\pi h \in \mathbb{Z}$$

$$b) \quad \Phi / 2\pi h \in \mathbb{Q}$$

$$c) \quad \Phi / 2\pi h \notin \mathbb{Q}$$

Le cas a) est essentiellement le même que celui traité dans [OU]. Nous montrerons que le cas b) peut se traiter par une adaptation des techniques de Outassourt [OU] et [HE-SJ]<sub>1,2,3</sub>. Enfin, pour l'étude du cas c), nous montrerons comment les techniques de Carlsson [CAR] s'adaptent, sans changement notable (en utilisant [HE-SJ]<sub>3</sub>), et permettent de se ramener à l'étude d'une équation de Harper un peu perturbée du type de celle étudiée au §7.

## §9.2 Etude du cas rationnel (9.1.6 a ou 9.1.6 b)

La condition (9.1.4) se traduit par l'existence de  $\varphi_i(x)$  ( $i=1,2$ ) t. q

$$(9.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1(x_1 - a_1, x_2) = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + A_1(x_1, x_2) \\ A_1(x_1, x_2 - a_2) = - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) + A_1(x_1, x_2) \end{array} \right.$$

On va essayer d'appliquer comme dans le cas  $A=0$  la théorie de Floquet (cf [RE-SI], [BEN] et [NOV] pour ce qui suit). On désigne par  $T_j$  ( $j=1,2$ ) l'opérateur unitaire sur  $L^2$  défini par :

$$(9.2.2) \quad L^2 \ni f \longrightarrow (T_j f)(x_1, x_2) = \exp(i \varphi_j(x_1, x_2)/h) f[x - a_j e_j]$$

$$\text{avec } e_1=(1,0), e_2=(0,1)$$

$T_j$  commute avec  $P_A(h)$  et la théorie de Floquet marcherait (comme dans le cas  $A=0$ ) si  $T_1$  et  $T_2$  commutaient. Un petit calcul montre que l'on a :

$$(9.2.3) \quad T_1 T_2 = \exp(i \Phi/h) T_2 T_1$$

On notera bien entendu l'analogie avec la discussion précédent (1.9). On pose :

$$(9.2.4) \quad \Phi/h = 2\pi l - \tilde{h} \quad \ell \in \mathbb{Z}, \tilde{h} \in [0, 2\pi[$$

On considère dans ce paragraphe les cas où  $\tilde{h}=0$  ou plus généralement

$$(9.2.5) \quad \tilde{h} = 2\pi p/q \quad \text{avec } p \text{ premier avec } q \ (p < q)$$

Une première idée (mais qui ne marchera que dans ce cas) est de faire une théorie de Floquet, non plus avec  $T_1$  et  $T_2$  qui ne commutent pas, mais avec  $T_1^q$  et  $T_2$  ou bien encore avec  $T_2^q$  et  $T_1$ . On remarque en effet qu'alors :

$$T_1^q \cdot T_2 = \exp(i q \Phi/h) T_2 T_1^q = T_2 T_1^q$$

Si  $q$  n'est pas premier, on peut également considérer  $T_1^{q_1}$  et  $T_2^{q_2}$  avec  $q_1 q_2 = q$ . La théorie de Floquet classique s'applique alors et on sait que :

$$(9.2.6) \quad Sp(P_A) = U_{\theta_1, \theta_2} Sp(P_A^{\theta_1, \theta_2})$$

où :

$$(9.2.7) \quad P_A^{(\theta_1, \theta_2)} \text{ est l'opérateur } P_A \text{ de domaine :}$$

$$D(P_A^{(\theta_1, \theta_2)}) = \{u \in H_{loc}^2 ; T_1^q u = \exp(iq\theta_1 u), T_2 u = \exp(i\theta_2 u)\}$$

On suit alors la méthode d'Outassourt [OU] dont nous esquissons les grandes lignes de la démarche. On suppose que :

$$(9.2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} V \in C^\infty, V \geq 0 \text{ et les seuls minimas de } V \text{ sont atteints pour} \\ V=0 \text{ aux points } (\ell_1 a_1, \ell_2 a_2) \text{ avec } (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^2. \text{ On suppose} \\ \text{de plus que ces minimas sont non dégénérés.} \end{array} \right.$$

Soit  $d_V$  la distance d'Agmon associé à la métrique  $V dx^2$  et introduisons les distances :

$$(9.2.9) \quad d_1 = d_V((0,0), (a_1, 0)) ; \quad d_2 = d_V((0,0), (0, a_2))$$

On s'intéresse comme dans [OU] au spectre de  $P_A(h)$  dans un intervalle de la forme :  $I(h) = ](E_1 - \varepsilon)h, (E_1 + \varepsilon)h[$  avec  $\varepsilon > 0$  assez petit, où  $E_1(b)$  est la première valeur propre de l'oscillateur harmonique attaché au fond de puits en  $(0,0)$  (cf [HE-SJ]<sub>3</sub>) :

$$(9.2.10) \quad (D_{Y_1} - \frac{b}{2} Y_2)^2 + (D_{Y_2} + \frac{b}{2} Y_1)^2 + \frac{1}{2} (V''(0)Y, Y), \quad \text{avec } b = B(0,0)$$

Dans le cas  $A=0$ , Outassourt montrait l'existence dans  $I(h)$  d'une bande de spectre dont il estimait la largeur. On va montrer ici que cette bande s'éclate en  $q$  sous-bandes en général séparées lorsqu'on a l'hypothèse (9.2.5) plus un certain nombre d'hypothèses que l'on introduit maintenant. La première est importante et dicte la "géométrie" du problème. On suppose que :

$$(9.2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Les puits les plus proches (pour la distance d'Agmon) de } (0,0) \\ \text{sont } (a_1, 0), (0, a_2), (-a_1, 0), (0, -a_2) \end{array} \right.$$

Posons

$$(9.2.12) \quad d = \inf(d_1, d_2), \quad D = \sup(d_1, d_2)$$

Dans ces conditions, suivant la technique de ([HE-SJ]<sub>1</sub>, [OU]), on étudie d'abord un problème de référence à un puits :

$$(9.2.13) \quad \tilde{P}_A(h) = P_A(h) + \sum_{\alpha \neq (0,0)} W(x - \tilde{\alpha}) \quad \text{avec } \tilde{\alpha} = (a_1 \alpha_1, a_2 \alpha_2)$$

où  $W$  est une fonction  $C^\infty$  positive, strictement positive dans un petit voisinage de  $(0,0)$  et à support voisin également de  $(0,0)$ .

On introduit maintenant une suite d'hypothèses héritées de [HE-SJ]<sub>1</sub> ou [HE-SJ]<sub>3</sub> dont la nécessité n'apparaît que pour les résultats les plus fins.

$$(9.2.14) \quad A = A(t) \quad t \in [0,1] \quad \text{avec } A(0) = 0 \quad \text{et dépendance analytique en } t$$

$$(\text{par exemple } A(t) = t A_0).$$

Les résultats optimaux ne seront valables que pour des couples  $(t, h)$  t.q :

(9.2.15)  $\left\{ \begin{array}{l} |t| \leq t_0, h \in ]0, h_0] \text{ et } t, q \text{ le flux } \Phi_t/h \text{ vérifie (9.2.5) et (9.2.4) où} \\ t_0 \text{ et } h_0 \text{ sont assez petits.} \end{array} \right.$

Pour éviter une surcharge de notations, on omettra souvent la référence à ce paramètre  $t$  (mais  $h_0$  est indépendant de  $t$ ).

(9.2.16) Par ailleurs, on fera sur  $A$  et  $V$  des hypothèses d'analyticité au voisinage des puits et des géodesiques minimales (pour la distance d'Agmon), chaque fois que nous aurons besoin de constructions B.K.W pour estimer des coefficients d'interaction.

(9.2.17) Enfin, chaque fois que nous voudrons des développements en puissances de  $h$ , nous ferons des hypothèses de non dégénérescence (cf [HE-SJ]<sub>1</sub>) sur les géodesiques minimales entre les puits permettant l'application des théorèmes de phase stationnaire. (cf [SJ]<sub>1</sub>)

Soit  $E_1^0 = E_1(0)$  dans (9.2.10). Pour  $t_0$  assez petit et  $h_0$  assez petit,  $\tilde{P}_A(h)$  admet alors dans l'intervalle  $I_0(h) = ](E_1(0) - \varepsilon_0)h, (E_1(0) + \varepsilon_0)h[$  une unique valeur propre  $\tilde{\lambda}(h)$  (lorsque  $h \in ]0, h_0]$  et une fonction propre normalisée  $\tilde{\varphi}_0(h)(x)$  approximable par des constructions BKW (cf 9.2.16). Soit maintenant  $\tilde{\lambda}$  une fonction égale à 1 dans  $B_{d_v}(0, \frac{D}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2})$  et à support dans  $B_{d_v}(0, \frac{D}{2} + \varepsilon_1)$  avec  $\varepsilon_1 > 0$ . ( $B_{d_v}(x, a)$  désigne la boule de centre  $x$  et de rayon  $p$  pour la distance d'Agmon).  $\varepsilon_1 > 0$  est choisi assez petit de sorte que :

(9.2.18)  $\sum_{\alpha \neq (0,0)} W(x-\alpha)$  est nul dans  $B_{d_v}(0, \frac{D}{2} + \varepsilon_1)$ .

Soit alors :

(9.2.19)  $\tilde{\Psi}_0 = \tilde{\lambda}(x) \cdot \tilde{\varphi}(h)(x)$

On a :

$$(9.2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} (P_A(h) - \tilde{\lambda}(h)) \tilde{\Psi}_0(h) = r_0(h)(x) \\ \text{avec } r_0(h) = 0 \text{ (exp } - (D/2 + \varepsilon_1/3)/h) \\ \text{et } \text{supp } r_0(h) \subset B_{d_v}(0, \frac{D}{2} + \varepsilon_1) \setminus B_{d_v}(0, \frac{D}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2}) \end{array} \right.$$

(9.2.20) résulte du contrôle de la décroissance de  $\tilde{\Psi}_0(h)$  grâce aux inégalités d'Agmon :

$$(9.2.21) \quad \tilde{\Psi}_0(h)(x) = O_\varepsilon(\exp -d_v(x,0) + \frac{\varepsilon}{h}) \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

On construit maintenant à partir de  $\tilde{\Psi}_0(h)$  q fonctions propres approchées de  $P_A^{\theta_1, \theta_2}$ , en posant :

$$(9.2.22) \quad \Psi_j^\theta = e^{-i j \theta_1} \sum_{\alpha} e^{-i[\alpha_2 \theta_2 + q \alpha_1 \theta_1]} T_2^{\alpha_2} T_1^{(\alpha_1 q) + j} \tilde{\Psi}_0$$

$$j=0, \dots, q-1$$

Dans la cellule de base  $\mathbb{C}_q = [-\frac{a_1}{2}, (q-1/2) a_1] \times [-\frac{a_2}{2}, \frac{a_2}{2}]$ ,  $\Psi_j^\theta$  est en norme  $L^2$  exponentiellement concentrée dans le puits  $(j a_1, 0)$ . On vérifie immédiatement que la somme dans (9.2.22) est localement finie et que  $\Psi_j^\theta$  vérifie les conditions de Floquet. On a donc :

$$(9.2.23) \quad \Psi_j^\theta \in D(P_A^\theta)$$

et :

$$(9.2.24) \quad (\Psi_j^\theta / \Psi_k^\theta)_{L^2(\mathbb{C}_q)} = \rho_{jk} + O_\varepsilon(\exp(-\frac{d}{h} + \varepsilon/h)) \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

Notons ici que  $O_\varepsilon$  est uniforme par rapport aux paramètres  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  et  $t$  dans  $[-t_0, t_0]$ .

Comme dans [HE-SJ]<sub>1,2</sub> ou [OU], on montre alors que si  $F^\theta(h)$  désigne l'espace spectral de  $P_A^\theta(h)$  associé à  $I_0(h)$  et si  $\Pi_{F^\theta(h)}$  désigne le projecteur spectral associé,  $P_A^\theta / F^\theta$  est donné dans la base orthonormalisée des  $(\Pi_{F^\theta} \Psi_j^\theta)$  par une

matrice  $q \times q$   $\mathcal{M}_\theta(h)$  ayant les propriétés suivantes :

$$(9.2.25) \quad \mathcal{M}_\theta(h) = \tilde{\lambda}(h) I_q + M_\theta^v(h) + O(\exp(-(D+\varepsilon_2)/h)) \quad \varepsilon_2 > 0$$

$$\text{avec } M_\theta^v(h)_{j,k} = ((P_A^\theta - \tilde{\lambda}(h)) \Psi_k^\theta / \Psi_j^\theta)_L^2(\mathbb{C}_q)$$

$\mathcal{M}_\theta(h)$  est une matrice hermitienne (ceci traduit le caractère autoadjoint du problème de départ). Notons  $\Theta_\theta$  l'opérateur défini sur  $C_0^\infty$  par :

$$(9.2.26) \quad \Theta_\theta f = \sum_\alpha \exp(-i[\alpha_2 \theta_2 + q \alpha_1 \theta_1]) T_2^{\alpha_2} T_1^{\alpha_1 q} f$$

On a alors :

$$\Psi_j^\theta = \exp(-i j \theta_1) \Theta_\theta T_1^j \tilde{\Psi}_0$$

et :

$$M_\theta^v(h)_{(j,k)} = \exp(i(j-k)\theta_1) (\Theta_\theta T_1^k \tilde{r}_0 / \Theta_\theta T_1^j \tilde{\Psi}_0)_L^2(\mathbb{C}_q) :$$

utilisant (9.2.20) et (9.2.21), on obtient, modulo  $O(\exp(-(D+\varepsilon_2)/h))$ , (avec  $\varepsilon_2 > 0$ ) :

$$(9.2.27) \quad \begin{aligned} (a) \quad & M_\theta^v(h)_{j,k} = 0 \quad \text{si } |j-k| \not\equiv 0,1 \text{ modulo } q \\ (b) \quad & M_\theta^v(h)_{j,j} = \exp(i[\theta_2 + 2\pi p j/q]) (\tilde{r}_0/T_2 \tilde{\Psi}_0)_L^2(\mathbb{R}^2) \\ & \quad + \exp(-i[\theta_2 + 2\pi p j/q]) (\tilde{r}_0/T_2^{-1} \tilde{\Psi}_0)_L^2(\mathbb{R}^2) \\ (c) \quad & M_\theta^v(h)_{j,j+1} = \exp(-i\theta_1) (\tilde{r}_0/T_1^{-1} \tilde{\Psi}_0)_L^2(\mathbb{R}^2) \quad j=0, \dots, q-2 \\ (d) \quad & M_\theta^v(h)_{0,q-1} = \exp(i\theta_1) (\tilde{r}_0/T_1 \tilde{\Psi}_0)_L^2(\mathbb{R}^2) \\ (e) \quad & M_\theta^v(h)_{j+1,j} = \exp(i\theta_1) (\tilde{r}_0/T_1 \tilde{\Psi}_0)_L^2(\mathbb{R}^2) \quad j=0, \dots, q-2 \\ (f) \quad & M_\theta^v(h)_{q-1,0} = \exp(-i\theta_1) (\tilde{r}_0/T_1^{-1} \tilde{\Psi}_0)_L^2(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

Remarquons également que :  $T_1 \Theta_\theta = \Theta_{(\theta_1, \theta_2 - 2\pi p/q)} T_1, T_2 \Theta_\theta = \Theta_\theta T_2$ .

Comme  $T_1$  est unitaire sur les fonctions " $\theta$ -Floquet" avec le produit scalaire de  $L^2(\mathbb{C}_q)$ , on trouve :

$$(g) \quad M_\theta^v(h)_{j+v, k+v} = M_{(\theta_1, \theta_2 + v p/q - 2\pi)}^v(h)_{j,k}$$

Lorsque  $q=2$ , on doit remplacer (c)  $\iff$  (f) par :

$$M_{\theta}^{\vee}(h)_{1,2} = \exp(-i\theta_1) (\tilde{r}_0 / T_1^{-1} \tilde{\Psi}_0) + \exp(i\theta_1) (\tilde{r}_0 / T_1 \tilde{\Psi}_0)$$

$$M_{\theta}^{\vee}(h)_{2,1} = \exp(i\theta_1) (\tilde{r}_0 / T_1 \tilde{\Psi}_0) + \exp(-i\theta_1) (\tilde{r}_0 / T_1^{-1} \tilde{\Psi}_0)$$

Posant :

$$(9.2.28) \quad \gamma_j = (\tilde{r}_0 / T_j \tilde{\Psi}_0) \quad j=1,2 \quad ,$$

on remarque que :

$$(9.2.29) \quad \bar{\gamma}_j = (\tilde{r}_0 / T_j^{-1} \tilde{\Psi}_0) \quad j=1,2 \quad .$$

On a donc finalement :

$$(9.2.30) \quad \mathcal{M}_{\theta}(h) = \tilde{\lambda}(h) I_q + M_{\theta}(h)$$

avec :

$$(9.2.31) \quad M_{\theta}(h) = \exp(i\theta_2) \gamma_2 J_{p,q} + \exp(-i\theta_2) \bar{\gamma}_2 J_{p,q}^* + \exp(i\theta_1) \gamma_1 K + \exp(-i\theta_1) \bar{\gamma}_1 K^*$$

$$\text{et : } J_{p,q} = J_q^p$$

$$(9.2.32) \quad J_q = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{2i\pi/q} & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{2i\pi((q-1)/q)} \end{pmatrix}$$

$$(9.2.33) \quad K = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ & 1 & \\ & & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que  $J_q$  et  $K$  sont unitaires et que :

$$(9.2.34) \quad J_q K = \exp(2i\pi/q) K J_q$$

$$(9.2.35) \quad J_q^q = I \quad , \quad K^q = I$$

Posons :  $\gamma_j = \rho_j \exp(i\theta_j^0)$   $j=1,2$

Une translation en  $\theta$  ramène alors l'étude de la réunion des spectres de Floquet pour les différents  $\theta$  à celle de la matrice :

$$(9.2.36) M_\theta(q, p, \rho_1, \rho_2) = \exp(i\theta_2) \rho_2 J_{p,q} + \exp(-i\theta_2) \rho_2 J_{p,q}^* \\ + \exp(i\theta_1) \rho_1 K + \exp(-i\theta_1) \rho_1 K^*$$

Modulo 0 ( $\exp(-(D+\varepsilon_2)/h)$ ), la dépendance en  $h$  n'intervient plus que par l'intermédiaire de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  avec :

$$(9.2.37) \quad \rho_j = |(\tilde{r}_0 / T_j \tilde{\Psi}_0)|$$

Soit  $\lambda_1[\rho, p, q, \theta], \dots, \lambda_q[\rho, p, q, \theta]$  les valeurs propres de  $M_\theta(q, p, \rho_1, \rho_2)$  ordonnées de manière croissante et posons :

$$(9.2.38) \quad I_\ell[\rho, p, q] = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi]} (\lambda_\ell(\rho, p, q, \theta))$$

Les intervalles  $I_\ell[\rho, p, q]$  décrivent modulo 0 ( $\exp -(D+\varepsilon_2)/h$ ) les bandes du spectre de  $P_A(h)$  dans  $I_0(h)$ .

Pour décrire plus précisément le spectre, la question naturelle est de savoir si ces bandes se recouvrent ou non. On étudiera plus en détail au §9.3 la matrice  $M_\theta(q, p, \rho_1, \rho_2)$  en liaison avec l'équation de Harper (cas rationnel). En particulier, on donnera des cas explicites où l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$(9.2.39) \quad \begin{cases} \text{Il existe } c_0 > 0, c_1 > 0 \text{ t.q. Les intervalles } I_\ell[\rho, p, q] \text{ sont disjoints} \\ \text{pour } c_0 \leq \rho_1/\rho_2 \leq c_1 \end{cases}$$

Compte-tenu de l'homogénéité en  $\rho$ , l'hypothèse (9.2.39) implique que :

$$(9.2.40) \quad \begin{cases} d_\ell(\rho, p, q) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{dist}(I_\ell(\rho, p, q), I_{\ell+1}(\rho, p, q)) \geq c_3 (\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2} \\ \text{avec } c_3 > 0, \text{ pour } \rho_1/\rho_2 \in [c_0, c_1] \end{cases}$$

On note la largeur de  $I_\ell(\rho, p, q) = [\alpha_\ell, \beta_\ell]$

$$(9.2.41) \quad \mathcal{L}_\ell(\rho, p, q) = |\beta_\ell - \alpha_\ell| \quad \ell=1, \dots, q$$

On a alors le théorème suivant :

### Théorème 9.2.1

Sous les hypothèses (9.1.2), (9.1.4), (9.2.8), (9.2.11), (9.2.12), (9.2.14), (9.2.15),

(9.2.39) pour  $\rho_i$  donné par (9.2.37), et :

$$(9.2.42) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0 \text{ t.q. : } \forall h \in ]0, h(\varepsilon)], \forall t \in [-t_0, t_0], \\ (\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2} \geq C_\varepsilon \exp(-(D_t + \varepsilon)/h) \text{ avec } |D_t - D| \leq c t^2$$

$$(9.2.43) \quad \rho_1/\rho_2 \in [c_0, c_1]$$

Alors dans l'intervalle  $I_0(h)$  et quitte à diminuer  $t_0$ , le spectre de  $P_{A(t)}(h)$  est constitué de  $q$  bandes distinctes  $I_\ell = [\tilde{\alpha}_\ell, \tilde{\beta}_\ell]$  avec :

$$\tilde{\alpha}_\ell = \alpha_\ell(\rho, p, q), \quad \tilde{\beta}_\ell = \beta_\ell(\rho, p, q), \quad \tilde{\mathcal{E}}_\ell(\rho, p, q) = |\tilde{\beta}_\ell - \tilde{\alpha}_\ell| = |\beta_\ell(\rho, p, q) - \alpha_\ell(\rho, p, q)|$$

### Remarque 9.2.2

La vérification des conditions (9.2.42) et (9.2.43) suppose le calcul des termes d'interactions  $\rho_j$  qui sont calculés dans  $[\text{HE-SJ}]_3$  sous les hypothèses mentionnées en (9.2.16) et (9.2.17). (9.2.43) suppose  $d_1 = d_2$  qui est vérifiée dès qu'on a par exemple :

$$(9.2.44) \quad V(x_1, x_2) = V(-x_2, x_1); B(x_1, x_2) = B(-x_2, x_1)$$

Les résultats de  $[\text{HE-SJ}]_3$  donnent alors :

$$(9.2.45) \quad \tilde{\mathcal{E}}_\ell(\rho, p, q) = h^{-\nu} a_\ell^t(h) \exp(-d_1^t/h) \\ \text{où } a_\ell^t(h) \text{ est un symbole elliptique.}$$

### Remarque 9.2.3

Le cas  $A=0$ ,  $q=1$  correspond au cas étudié par Outassourt [OU]

### Remarque 9.2.4

Lorsque (9.2.39) n'est pas vérifié (par exemple  $p=1$ ,  $q=2$ ,  $\rho_1=\rho_2$ ), des résultats partiels subsistent dont l'énoncé est laissé au lecteur.

## § 9.3-Etude de la condition (9.2.39) . lien avec l'équation de Harper dans le cas rationnel

Cette section est donc consacrée à l'étude de la famille de matrices  $q \times q$  :

$$(9.3.1) \quad M_{\theta}(q, p, \rho_1, \rho_2) = \exp(i\theta_2) \rho_2 J_{p, q} + \exp(-i\theta_2) \rho_2 \cdot J_{p, q}^* \\ + \exp(i\theta_1) \rho_1 K + \exp(-i\theta_1) \rho_1 \cdot K^*$$

Pour l'essentiel, elle n'est pas très originale et rassemble des résultats connus des spécialistes mais pas toujours explicités de la manière qui nous était utile. On s'est beaucoup inspiré de l'article de Bellissard-Simon [BE-SI] et des discussions avec J. Bellissard et A. Grigis ont été très utiles. Notre objectif principal est ici l'étude de la condition (9.2.39) sur la séparation des bandes, mais en vue d'un article ultérieur nous développerons d'autres aspects qui n'ont pas d'application directe dans cet article.

### Dualité d'Aubry

Ecrivons  $M_{\theta}(q, p, \rho_1, \rho_2)$  sous la forme :

$$(9.3.2) \quad M_{\theta}(q, p, \rho_1, \rho_2) = \rho_1 A_{\theta_1} + \rho_2 \cdot B_{p, \theta_2}$$

On note :

$$(9.3.3) \quad \omega_p = \exp(2i\pi p/q) = \omega^p$$

Alors  $A_{\theta_1}$  a une base orthonormée de vecteurs propres :

$$(9.3.4) \quad f_j = \frac{1}{\sqrt{q}} (1, \omega_p^j, \dots, \omega_p^{(q-1)j}) \quad j = 0, \dots, q-1$$

de valeur propre correspondante  $\cos(2\pi jp/q - \theta_1)$

Introduisons la matrice unitaire et hermitienne :

$$(9.3.5) \quad (U_{p, \omega})_{j, k} = \frac{1}{\sqrt{q}} \omega_p^{(j-1)(k-1)}$$

On a alors :

$$(9.2.6) \quad U_{p, \omega}^{-1} A_{\theta_1} U_{p, \omega} = B_{p, \theta_1}, \quad p = 1, \dots, q-1, \quad (p \text{ premier avec } q)$$

On remarque alors que :

$$(9.3.7) \quad U_{p, \omega}^{-1} M_{\theta_1, \theta_2}(q, p, \rho_1, \rho_2) U_{p, \omega} = M_{\theta_2, -\theta_1}(q, p, \rho_2, \rho_1)$$

Ceci exprime la dualité d'Aubry qui n'est autre qu'une propriété d'invariance

par la transformée de Fourier discrète sur le groupe  $Z_q = Z/qZ$ .

### Quelques calculs explicites

Regardons pour fixer les idées les petites valeurs de  $q$  où il est possible d'expliciter algébriquement le polynôme caractéristique  $P_\theta(\lambda)$  de  $M_\theta$  et ses valeurs propres.

$$*q=1, p=1, M_\theta = 2\rho_1 \cos \theta_1 + 2\rho_2 \cos \theta_2; P_\theta(\lambda) = -\lambda + 2\rho_1(\cos \theta_1) + 2\rho_2(\cos \theta_2)$$

$$*q=2, p=1$$

$$M_\theta = \begin{pmatrix} 2\rho_2 \cos \theta_2 & 2\rho_1 \cos \theta_1 \\ 2\rho_1 \cos \theta_1 & -2\rho_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$P_\theta(\lambda) = \lambda^2 - 2(\rho_1^2 + \rho_2^2) - 2\rho_1 \cos 2\theta_1 - 2\rho_2 \cos 2\theta_2$$

$$\lambda_1(\theta) = -2 \sqrt{\rho_1^2 (\cos \theta_1)^2 + \rho_2^2 (\cos \theta_2)^2} = -\lambda_2(\theta)$$

On voit que les 2 racines sont égales pour  $\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = \pi/2$  et par conséquent lorsque  $\theta$  varie, les 2 bandes parcourues par  $\lambda_1(\theta)$  et  $\lambda_2(\theta)$  se touchent. La condition (9.2.39) n'est pas satisfaite.

$$*q=3, p=1 \text{ ou } 2$$

$$M_\theta = \begin{pmatrix} 2\rho_2 \cos \theta_2 & \rho_1 \exp(-i\theta_1) & \rho_1 \exp(i\theta_1) \\ \rho_1 \exp(i\theta_1) & 2\rho_2 \cos[\theta_2 + 2\pi p/3] & \rho_1 \exp(-i\theta_1) \\ \rho_1 \exp(-i\theta_1) & \rho_1 \exp(i\theta_1) & 2\rho_2 \cos[\theta_2 + 4\pi p/3] \end{pmatrix}$$

$$P_\theta(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda[\rho_1^2 + \rho_2^2] + 2\rho_1^3 \cos \theta_1 + 2\rho_2^3 \cos 3\theta_2$$

Un calcul élémentaire montre que la condition (9.2.39) est vérifiée pour tout couple  $(c_0, c_1)$  t.q.  $0 < c_0 < c_1$ . En effet, en suivant la méthode classique, on pose :  $\lambda = u+v$ ,  $\lambda^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

Une racine de  $P_\theta$  vérifie donc :

$$-(u^3 + v^3) + (u+v)(-3uv + 3(\rho_1^2 + \rho_2^2)) + 2\rho_1^3 \cos 3\theta_1 + 2\rho_2^3 \cos 3\theta_2 = 0$$

On impose  $uv = \rho_1^2 + \rho_2^2$  et on tombe alors sur un système classique sur  $u^3$  et

$$v^3 : u^3 v^3 = (\rho_1^2 + \rho_2^2)^3, u^3 + v^3 = 2\rho_1^3 \cos 3\theta_1 + 2\rho_2^3 \cos 3\theta_2$$

$u^3$  et  $v^3$  vérifient donc une équation du second degré dont les solutions sont

$$X_{\pm} = \rho_1^3 \cos 3\theta_1 + \rho_2^3 \cos 3\theta_2 \pm \sqrt{(\rho_1^3 \cos 3\theta_1 + \rho_2^3 \cos 3\theta_2)^2 - (\rho_1^2 + \rho_2^2)^3}$$

On vérifie que le discriminant est strictement négatif dès que  $\rho_1 \rho_2 \neq 0$ .

$X_+$  et  $X_-$  sont conjugués et si on écrit  $X_{\pm}$  sous la forme :

$$X_{\pm} = \mu^3 \exp(\pm i\varphi(\theta)) \quad \text{avec } \mu > 0$$

On obtient que les racines  $\lambda_\ell(\theta)$  de  $P_\theta$  sont données par :

$$\lambda_\ell = 2\mu \operatorname{Re} [\exp(i[\frac{\varphi(\theta)}{3} + 2\pi \ell/3])] , \ell = 2, 3$$

avec :  $\mu = (\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2}$

$$\cos(\varphi(\theta)) = (\rho_1^3 \cos 3\theta_1 + \rho_2^3 \cos 3\theta_2) / (\rho_1^2 + \rho_2^2)^{3/2}$$

$$\sin(\varphi(\theta)) = ((\rho_1^2 + \rho_2^2)^3 - (\rho_1^3 \cos 3\theta_1 + \rho_2^3 \cos 3\theta_2)^2)^{1/2} / (\rho_1^2 + \rho_2^2)^{3/2}$$

Notons  $\alpha$  l'angle dans  $[0, \frac{\pi}{2}]$  défini par :

$$\cos \alpha = \frac{\rho_1^3 + \rho_2^3}{(\rho_1^2 + \rho_2^2)^{3/2}} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{(\rho_1^2 + \rho_2^2)^3 - (\rho_1^3 - \rho_2^3)^2}}{(\rho_1^2 + \rho_2^2)^{3/2}}$$

Les 3 bandes sont données par :

$$I_1 = [2(\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2} \cos(\pi - \frac{\alpha}{3}), 2(\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2} \cos((2\pi + \alpha)/3)]$$

$$I_2 = [2(\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2} \cos((4\pi + \alpha)/3), 2(\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2} \cos((5\pi - \alpha)/3)]$$

$$I_3 = [2(\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2} \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}), 2(\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2} \cos(\alpha/3)]$$

et on vérifie qu'elles sont distinctes pour  $\rho_1 \rho_2 \neq 0$ .

On pourrait espérer pouvoir calculer les valeurs propres de  $M_\theta(q, p, \rho_1, \rho_2)$  dans le cas général mais cet espoir semble vain au delà de  $q=7$ . Des calculs numériques dus à Hofstaedter [HO] semblent suggérer que pour  $\rho_1 = \rho_2, p=1$ , on a  $q$  bandes distinctes et que pour  $q$  pair les 2 bandes centrales se touchent. On

va maintenant expliciter les résultats connus en s'appuyant sur des résultats de [BE-SI] et des remarques de J. Bellissard. Le point de vue de ces derniers étant légèrement différent, on va expliciter maintenant l'équivalence des différents points de vue dans le cas rationnel.

#### Lien avec l'équation de Harper dans le cas rationnel

Remarquons tout d'abord que  $M_\theta$  est unitairement équivalent (conjugaison par la matrice diag  $(\exp(ij\theta_1))$ ) à :

$$(9.3.8) \quad \tilde{M}_\theta = \exp(i\theta_2) \rho_2 J_{p,q} + \exp(-i\theta_2) \rho_2 J_{p,q}^* + \rho_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \exp(iq\theta_1) \\ 1 & 0 & & & \\ . & . & . & . & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \exp(-iq\theta_1) & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit alors  $\lambda$  une valeur propre de  $\tilde{M}_\theta$  et  $\vec{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{q-1})$  un vecteur propre de  $\tilde{M}_\theta$ .

Si on pose  $u_{-1} = \exp(iq\theta_1) u_{q-1}$ ,  $u_q = \exp(-iq\theta_1) u_0$  et :

$$(9.3.9) \quad N_\ell^\lambda(\theta_2) = \begin{bmatrix} (\lambda - 2\rho_2 \cos[\theta_2 + 2\pi\ell p/q]) / \rho_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

on voit que :  $(\tilde{M}_\theta - \lambda) \vec{u} = 0$  se réécrit sous la forme :

$$(9.3.10) \quad \begin{pmatrix} u_{\ell+1} \\ u_\ell \end{pmatrix} = N_\ell^\lambda(\theta_2) \begin{pmatrix} u_\ell \\ u_{\ell-1} \end{pmatrix} \quad \ell = 0, \dots, q-1$$

En particulier  $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_{-1} \end{pmatrix}$  est vecteur propre de la matrice

$$(9.3.11) \quad Q^\lambda(\theta_2) = N_{q-1}^\lambda(\theta_2) \circ \dots \circ N_0^\lambda(\theta_2)$$

avec comme valeur propre  $\exp(-iq\theta_1)$ . Par ailleurs, si on considère l'équation de Harper :

$$(9.3.12) \quad \rho_1(u_{n+1} + u_{n-1}) + 2\rho_2 \cos[2\pi p/q + \theta_2] u_n = \lambda u_n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Il est classique que  $\lambda$  appartient au spectre de Harper si et seulement si

(9.3.12) admet une solution dans  $\ell^\infty$ , ce qui se réinterprète immédiatement en disant que  $Q^\lambda(\theta_2)$  a une valeur propre de module 1.

Compte-tenu du fait que  $\det Q^\lambda(\theta_2)$  est égal à 1 et que ses 2 valeurs propres sont conjuguées, on déduit de (9.3.11) que si  $\lambda$  est valeur propre de  $\tilde{M}_\theta$ ,  $\lambda$  est dans le spectre de Harper. Inversement, si  $\lambda$  appartient au spectre de Harper,  $Q^\lambda(\theta_2)$  a une valeur propre de module 1. Il existe alors  $\theta_1 \in [0, 2\pi]$  t.q cette valeur propre soit  $\exp(-iq\theta_1)$ . On vérifie alors que, si  $(u_0, u_{-1})$  désigne le vecteur propre associé,  $(u_0, u_1, \dots, u_{q-1})$  défini par les équations :

$$(2\rho_2(\cos \theta_2 - \lambda) u_0 + \rho_1 u_1 + \rho_1 u_{-1} = 0$$

$$\rho_1 u_{q-3} + [2\rho_2 \cos [\theta_2 + 2\pi p(q-2)/q] - \lambda] u_{q-2} + \rho_1 u_{q-1} = 0$$

est vecteur propre de  $\tilde{M}_\theta$ .

Remarquons encore, ce qui peut être utile pour des calculs numériques à la Hofstadter, que l'on peut encore exprimer l'appartenance de  $\lambda$  au spectre de Harper par la condition :

$$(9.3.13) \quad |\text{Tr } Q^\lambda(\theta_2)| \leq 2$$

ou encore :

$$(9.3.14) \quad \exists \theta_1 \text{ t.q } \text{Tr } Q^\lambda(\theta_2) = 2 \cos q\theta_1.$$

$\lambda$  est alors défini comme le zéro d'un polynôme de degré  $q$  dont le terme principal est  $(-1)^q \lambda^q : (-1)^q \rho_1^q \text{Tr } Q^\lambda(\theta_2) + 2(-1)^{q+1} \rho_1^q \cos q\theta_1$

Il est également un zéro du polynôme caractéristique de  $\tilde{M}_\theta$  (ou  $M_\theta$ ). Tout dépendant holomorphiquement de  $\rho_1, \rho_2, \theta$  et les racines étant génériquement simples, on obtient l'identité :

$$(9.3.15) \quad \det(M_\theta - \lambda) = (-1)^q \rho_1^q \text{Tr } Q^\lambda(\theta_2) + 2(-1)^{q+1} \rho_1^q \cos q\theta_1$$

Les travaux de Bellissard-Simon concernent le membre de droite de (9.3.15) et pourront donc se transcrire immédiatement à l'étude de  $\det(M_\theta - \lambda)$ .

Inversement, l'étude directe de  $\det(M_\theta - \lambda)$  ou de  $\det(\tilde{M}_\theta - \lambda)$  (qui sont égaux) donnera parfois des démonstrations alternatives de leurs résultats.

Lemme 9.3.1 [BE-SI]

$$(9.3.16) \quad \det(M_\theta(q, p, \rho_1, \rho_2) - \lambda) = f_{p, q, \rho_1, \rho_2}(\lambda) - 2(-1)^q \rho_1^q \cos q \theta_1 - 2(-1)^q \rho_2^q \cos q \theta_2$$

$$(9.3.17)_a \quad f_{p, q, \rho_1, \rho_2}(\lambda) = \lambda \cdot g_{p, q, \rho_1, \rho_2}(\lambda^2) \quad \text{si } q \text{ est impair}$$

$$(9.3.17)_b \quad f_{p, q, \rho_1, \rho_2}(\lambda) = \tilde{g}_{p, q, \rho_1, \rho_2}(\lambda^2) \quad \text{si } q \text{ est pair}$$

$$(9.3.18) \quad f_{p, q, \rho_1, \rho_2}(\lambda) = f_{p, q, \rho_2, \rho_1}(\lambda)$$

Démonstration:

(9.3.18) résulte de la dualité d'Aubry. (9.3.16) résulte de (9.3.15) et de la dualité d'Aubry. Une autre démonstration dans l'esprit de [BE-SI] est de remarquer que l'on a :

$$(9.3.19)_a \quad J_q^{-1} M_\theta J_q = M_{\theta_1 - 2\pi/q, \theta_2}$$

$$(9.3.19)_b \quad K^{-1} M_\theta K = M_{\theta_1, \theta_2 + 2\pi p/q}$$

Ceci est une conséquence immédiate de (9.2.34), (9.2.35) et de (9.3.1). Le polynôme caractéristique  $P_\theta(\lambda)$  de  $M_\theta$  est polynômial de degré au plus  $q$  par rapport à  $(\cos \theta_1)$  et  $(\cos \theta_2)$  et les seuls polynômes vérifiant :

$$P_{\theta_1 - 2\pi/q, \theta_2} = P_{\theta_1, \theta_2}, \quad P_{\theta_1, \theta_2 + 2\pi p/q} = P_{\theta_1, \theta_2}$$

sont des combinaisons linéaires de  $(\cos q\theta_1)$  et  $(\cos q\theta_2)$  si  $p$  est premier avec  $q$ . (9.3.17) résulte par exemple d'une écriture plus explicite de  $P_\theta(\lambda)$  qui nous a été suggéré par J. Bellissard. On écrit que :

$$(9.3.20) \quad \det(M_\theta - \lambda) = \exp(\text{Tr} \log(M_\theta - \lambda I)) = (-\lambda)^q \exp(-\sum_k \text{Tr}(M_\theta^k / \lambda^k) \cdot k) \quad k \geq 1$$

Tout est ainsi ramené au calcul de :  $\text{Tr}(M_\theta^k)$  qui est une somme de monômes

$$L_1 \dots L_k \quad \text{avec : } i_j \in [1, \dots, 4]$$

$$L_1 = \exp(i\theta_2) \rho_2 J_{p, q} ; L_2 = \exp(-i\theta_2) \rho_2 J_{p, q}^{-1}$$

$$L_3 = \exp(i\theta_1) \rho_1 K ; L_4 = \exp(-i\theta_1) \rho_1 \cdot K^{-1}$$

et on peut faire un usage intensif de :  $J_q K = \exp(2i\pi/q) K J_q$ . On remarque aussi que :

$$(9.3.21) \text{ Trace } (J_{p,q}^{\ell_1} K^{\ell_2}) = 0 \quad \text{sauf si } \ell_1 = 0 \bmod q \text{ et } \ell_2 = 0 \bmod q.$$

En particulier, lorsque  $k$  impair avec  $0 < k < q$ , on a :

$$(9.3.22) \quad \text{Trace } (M_\theta)^k = 0$$

qui conduit à la démonstration de (9.3.17).

On voit aussi dans la formule (9.3.20) que  $\exp(iq\theta_1), \exp(-iq\theta_1), \exp(iq\theta_2), \exp(-iq\theta_2)$  ne peuvent apparaître que dans  $\text{Tr } (M_\theta^q)$  et on a :

$$-\frac{1}{q} \text{Tr } (M_\theta)^q = -2 \rho_1^q \cos q\theta_1 - 2 \rho_2^q \cos q\theta_2$$

qui donnent l'expression exacte pour (9.3.16) par une méthode différente de celle mentionnée avant (9.3.19). On peut également calculer le coefficient de  $\lambda^{q-2}$  dans (9.3.20) qui est donné par :  $(-1)^q (-(1/2) \text{Tr } M_\theta^2) = 2(-1)^{q+1} q$  soit :

$$(9.3.23) \quad \text{Le coefficient de } \lambda^{q-2} \text{ dans 9.3.16 est } 2(-1)^{q+1} q$$

Comme nous l'a signalé J. Bellissard, l'intérêt de cette approche est que l'on voit clairement que la dépendance en  $p$  des coefficients ne se fait que par un polynôme réel de  $(\exp(2i\pi p/q))$  et  $\exp(-2i\pi p/q)$ .

# Fin de la démonstration du lemme 9.3.1

Le lemme 9.3.1 donne de bonnes informations sur la structure du polynôme caractéristique mais reste muet sur la question posée, à savoir, si les bandes se séparent ou pas. Notons toutefois le corollaire suivant du lemme :

#### Corollaire 9.3.2

Si  $I$  est une bande de spectre,  $-I$  est une bande de spectre.

$0 \in \text{spectre}$  si  $q$  est impair

#

On remarque en effet que si  $\lambda$  est valeur propre de  $M_\theta$ ,  $-\lambda$  est valeur propre de  $M_\theta$  (dans le cas pair) et de  $M_{\theta + (\pi/q, \pi/q)}$  (dans le cas impair).

Rappelons également le résultat suivant (cf lemme 3.1 dans [BE-SI]) :

**Lemme 9.3.3** On suppose  $\rho_1 \rho_2 \neq 0$

(9.3.24) Les points critiques de  $f_{p,q,\rho_1,\rho_2}(\lambda)$  sont dans la zone :

$$|f_{p,q,\rho_1,\rho_2}(\lambda)| \geq 2(\rho_1^q + \rho_2^q)$$

(9.3.25) En un point critique  $\lambda$  où  $|f_{p,q,\rho_1,\rho_2}(\lambda)| = 2(\rho_1^q + \rho_2^q)$ , on a

$$f''_{p,q,\rho_1,\rho_2}(\lambda) \neq 0.$$

#

(9.3.24) est démontré dans [BE-SI]. Il s'agit d'utiliser le fait que :

$f_{p,q,\rho_1,\rho_2}(\lambda) + 2(-1)^{q+1}[\rho_1^q \cos q\theta_1 + \rho_2^q \cos q\theta_2]$  est le polynôme caractéristique d'une famille analytique de matrices hermitiennes. On sait qu'alors on a un choix analytique par rapport à l'une des variables des valeurs propres qui sont réelles. Le lemme 9.3.3 en résulte.

**Corollaire 9.3.4** (Cf théorème 4 de [BE-SI]) : On suppose  $\rho_1 \rho_2 \neq 0$ . Alors les racines du polynôme caractéristiques sont simples ou doubles. On ne peut avoir de racines doubles que pour  $\cos q\theta_1 + \cos q\theta_2 = \pm 2$ . Les bandes  $I_\ell(\rho, p, q)$  ne peuvent se toucher qu'en des points où  $\cos q\theta_1 + \cos q\theta_2 = \pm 2$

#

On a également la :

**Proposition 9.3.5** (Cf. Proposition 3.2 de [BE-SI])

Soit  $\lambda_\ell(\theta)$  est les valeurs propres de  $P_\theta(\lambda)$  rangées par ordre croissant, alors :

pour  $\ell + q$  pair:  $\beta_\ell = \lambda_\ell(0,0)$  ,  $\alpha_{\ell+1} = \lambda_{\ell+1}(0,0)$

Pour  $\ell + q$  impair:  $\beta_\ell = \lambda_\ell(\pi/q, \pi/q)$  ,  $\alpha_{\ell+1} = \lambda_{\ell+1}(\pi/q, \pi/q)$

Tout le problème de la séparation des bandes est donc ramené à un calcul de  $|\lambda_{\ell+1}(0,0) - \lambda_\ell(0,0)|$  ou de  $|\lambda_{\ell+1}(\pi/q, \pi/q) - \lambda_\ell(\pi/q, \pi/q)|$ . Malheureusement, ce problème n'est pas résolu en général ! On a toutefois une réponse dans le cas q

pair qui est suggérée par le dessin de Hofstaedter [HOF] :

Proposition 9.3.6 (cf théorème 3 de [BE-SI])

Si  $q$  est pair et  $p$  impair alors :

$$\text{si } q \equiv 0 \pmod{4} \quad \lambda_{q/2}(0,0) = \lambda_{q/2+1}(0,0) = 0$$

$$q \equiv 2 \pmod{4} \quad \lambda_{q/2}(\pi/q, \pi/q) = \lambda_{q/2+1}(\pi/q, \pi/q) = 0$$

Démonstration (cf Bellissard-Simon.)

Remarque 9.3.7

0 est donc toujours dans une des bandes. On va maintenant compléter ce résultat en s'inspirant de remarques de Grigis et en faisant apparaître la structure de  $M_\theta$  dans le cas où  $q$  est pair. Considérons donc le cas  $q$  pair,  $p$  impair et soit  $U$  la matrice unitaire :

$$(9.3.26) \quad U = J_q^{pq/2} \cdot K^{q/2}$$

On vérifie qu'alors :

$$(9.3.27) \quad U^2 = (-1)^{q/2}$$

On voit en particulier que si  $f$  est vecteur propre de  $M_\theta$  associé à la valeur propre  $\lambda$ ,  $(Uf)$  est vecteur propre de  $M_\theta$  associé à la valeur propre  $-\lambda$ . Notons également que  $U$  est une matrice réelle. On distinguera 2 cas selon que  $q/2$  est pair ou impair :

Cas a)  $q \equiv 2 \pmod{4}$  ; on a :  $U^2 = -I$  ; on introduit :

$$\Sigma_{\pm} = \{ u \in \mathbb{C}^q \text{ t.q. } Uu = \pm i u \}$$

Notons alors que  $\Sigma_+$  et  $\Sigma_-$  sont orthogonaux et que  $u \rightarrow \bar{u}$  échange  $\Sigma_+$  et  $\Sigma_-$  qui sont donc de même dimension. On choisit une base orthogonale de  $\Sigma_+$  et celle de  $\Sigma_-$  en utilisant  $u \rightarrow \bar{u}$ .

Dans cette base, on a :

$$(9.3.29) \quad M_\theta = \begin{pmatrix} 0 & A_\theta \\ A_\theta^* & 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent, on a :

$$(9.3.30) |\det M_\theta| = |\det A_\theta|^2$$

Exemple  $p=1, q=2$

$$\text{On a : } U = J_2 ; K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $(e_2, e_2)$  désigne la base de  $\mathbb{C}^2$ , on prend comme nouvelle base :

$$f = 1/\sqrt{2} (e_1 + i e_2) ; \bar{f} = 1/\sqrt{2} (e_1 - i e_2)$$

et on trouve :  $A_\theta = 2[\rho_2 \cos \theta_2 + i \rho_1 \cos \theta_1]$

#

On est en fait dans une situation classique en supersymétrie. Plus précisément, les espaces propres peuvent être décrits par :

$$\text{Ker } M_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Ker } A_\theta \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \text{Ker } A_\theta^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puis si  $\mu$  est une valeur propre non nulle de  $A_\theta^* A_\theta$  de vecteur propre associé  $v_\mu$ ,  $(\pm 1/\sqrt{\mu} A_\theta \cdot v_\mu, v_\mu)$  est un vecteur propre de  $M_\theta$  de valeur propre  $\pm \sqrt{\mu}$

Cas b)  $q \equiv \text{modulo } 4$  ; on a cette fois-ci :  $U^2 = I$ . On introduit :

$$\Sigma_\pm = \{ u \in \mathbb{C}^q \text{ t.q. } Uu = \pm u \}.$$

Observons que  $J U = -U J$  et que par conséquent  $J$  échange  $\Sigma_+$  et  $\Sigma_-$ .

Soit  $f_j$  une base de  $\Sigma_+$ , et  $(Jf_j)$  la base correspondante de  $\Sigma_-$ . Dans cette base, on a :

$$M_\theta = \begin{pmatrix} 0 & A_\theta \\ A_\theta^* & 0 \end{pmatrix}$$

et les considérations de l'autre cas s'appliquent.

Remarque 9.3.8

Il résulte de la proposition (9.3.6) que :

$$(9.3.31) \begin{cases} f_{p,q,\rho_1,\rho_2} [0] = 2 (\rho_1^q + \rho_2^q) & \text{si } q \equiv 0 \pmod{4} \\ f_{p,q,\rho_1,\rho_2} [0] = -2[\rho_1^q + \rho_2^q] & \text{si } q \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

#

Le dernier résultat de [BE-SI] qui nous intéressera est le suivant :

Proposition 9.3.9 (cf théorème 5 de [BE-SI])

$\exists \eta_1 > 0$  t.q.  $\forall \eta_0 > 0$  t.q.  $0 < \eta_0 < \eta_1$ ,  $\exists C_{\eta_0} > 0$  t.q. :

$\forall \rho_1, \rho_2$  vérifiant :  $\eta_0 \leq \rho_1/\rho_2 \leq \eta_1$ , on ait,  $\forall \ell \neq q/2$

$$|\lambda_{\ell+1}^p(0,0) - \lambda_{\ell}^p(0,0)| \geq C_{\eta_0} (\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2}$$

$$|\lambda_{\ell+1}^p(\pi/q, \pi/q) - \lambda_{\ell}^p(\pi/q, \pi/q)| \geq C_{\eta_0} (\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2}$$

La démonstration est basée sur un argument de perturbation de la situation

$(\rho_1/\rho_2) = 0$ .

Remarque 9.3.10 Par la dualité d'Aubry, on peut échanger dans cette proposition le rôle de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

La proposition (9.3.9) donne immédiatement de nombreuses valeurs de  $c_0, c_1$  pour lesquelles la condition (9.2.39) est vérifiée. La démonstration de Bellissard et Simon montre même qu'hormis la situation des 2 bandes centrales apparaissant dans le cas  $q$  pair, la condition est que si  $[c_0, c_1]$  évite un nombre fini de valeurs  $v_j$  de  $\mathbb{R}^+$ , les intervalles  $I_{\ell}(\rho, p, q)$  sont disjoints (sauf pour  $I_{\ell}$  et  $I_{\ell+1}$  avec  $\ell = q/2$ ). Malheureusement, le cas qui intéresse le plus les physiciens est le cas où  $\rho_1/\rho_2 = 1$  et on ignore bien entendu si  $v_j = 1$  pour un certain  $j$ . Notons enfin que les résultats des § 1 à 6 montrent que pour  $p=1$  et  $q$  grand ou plus généralement pour :

$p/q = 1/(q_0 + 1/(q_1 + 1/(q_2 + \dots)))$  avec tous les  $q_i$  grands,

la plupart des bandes se séparent et on a donc une vérification partielle de la

condition (9.2.39).

#### § 9.4. Etude du cas général

On revient au cas général où :

$$(9.4.1) \quad \Phi/h = 2\pi \ell - \tilde{h} \quad , \ell \in \mathbb{Z}$$

mais où  $\tilde{h}$  n'est plus nécessairement un multiple rationnel de  $2\pi$ . La réduction par la théorie de Floquet n'est plus possible. On pourrait sans doute faire une théorie de Floquet partielle en utilisant  $T_1$  ou  $T_2$  mais on retombe de nouveau sur un problème à une infinité de puits qui ne relève pas des techniques de [HE-SJ]<sub>1</sub>. On renonce donc à la théorie de Floquet, et on considère ce problème comme un problème à une infinité de puits et on va utiliser les résultats de Carlsson [CAR] (convenablement généralisés au cas  $A \neq 0$ ) sur l'équation de Schrödinger à une infinité de puits qui utilise des techniques très voisines de celles développées au §2 pour l'analyse semi-classique de Harper modulo  $0(h^\infty)$  ou celles du §4 pour l'analyse modulo des exponentiellement petits. On garde les hypothèses suivantes du théorème (9.21) : (9.1.2), (9.1.4), (9.2.8), (9.2.11), (9.2.14) et (9.2.42) et on conserve le même problème de référence  $\tilde{P}_A$  introduit en (9.2.13) que l'on notera ici :

$$(9.4.2) \quad \tilde{p}_{0,0} = \sum_{j=1}^2 (h D_{x_j} - A_j)^2 + V + \sum_{\beta \in (0,0)} W[x - \tilde{\beta}]$$

où on convient que  $\tilde{\beta} = (a_1 \beta_1, a_2 \beta_2)$

Le support de  $W$  est dans une bande de rayon  $\eta$  pour la distance d'Agmon centrée en  $(0,0)$  et on pourra choisir  $\eta$  arbitrairement petit si nécessaire.

$P_A$  admet une infinité de puits  $U_\alpha = \tilde{\alpha}$ .

Carlsson [CAR] réduit l'étude du spectre dans  $I_0(h)$  à l'étude d'une matrice infinie opérant sur  $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ , et ses résultats se généralisent immédiatement à notre situation :  $A \neq 0$ , compte-tenu des inégalités d'Agmon démontrées dans [HE-SJ]<sub>3</sub>, qui permettent le contrôle de la décroissance des fonctions propres de

$\tilde{P}_{0,0}$ . En fait, compte-tenu des hypothèses de périodicité, la théorie développée par Carlsson se simplifie considérablement. Établissons maintenant, les résultats qui se déduisent de l'approche de Carlsson.

Soit  $\tilde{\varphi}_{0,0}$  la première fonction propre de la réalisation de  $\tilde{P}_{0,0}$  de valeur propre  $\tilde{\lambda}$

$\tilde{\lambda}(h)$  et, comme déjà remarqué, on a :

$$(9.4.3) \quad P_A \tilde{\varphi}_{0,0} = \tilde{\lambda} \tilde{\varphi}_{0,0} + r_{0,0}$$

avec

$$(9.4.4) \quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,0}, r_{0,0} &= 0_c \left( \exp - \frac{d(x, (0,0)) (1-\varepsilon)}{h} + \varepsilon/h \right) \text{ dans } L^2 \\ \nabla_A \tilde{\varphi}_{0,0}, \nabla_A r_{0,0} &= 0_c \left( \exp - \frac{d(x, (0,0)) (1-\varepsilon)}{h} + \varepsilon/h \right) \text{ dans } L^2 \\ \text{où } \nabla_A f &= ((D_j - A_j) f)_{j=1,2} \end{aligned}$$

$$(9.4.5) \quad \text{supp } r_{0,0} \subset \bigcup_{\beta \neq (0,0)} B(\tilde{\beta}, \eta)$$

Soit  $F(h)$  l'espace spectral de  $P_A$  associé à l'intervalle  $I_0(h)$ . L'idée est maintenant de construire un "bon espace" approché de  $F(h)$  en utilisant  $\tilde{\varphi}_{0,0}$  et ses "translatés" associés aux puits  $U_{j,k}$  ( $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ ) :

$$(9.4.6) \quad \tilde{\varphi}_{j,k} = T_1^j T_2^k \tilde{\varphi}_{0,0}$$

qui vérifient, pour  $r_{j,k} = T_1^j T_2^k r_{0,0}$  :

$$(9.4.3)_{j,k} \quad P_A \tilde{\varphi}_{j,k} = \tilde{\lambda} \tilde{\varphi}_{j,k} + r_{j,k}$$

avec :

$$(9.4.4)_{j,k} \quad \tilde{\varphi}_{j,k}, r_{j,k}, \nabla_A \tilde{\varphi}_{j,k}, \nabla_A r_{j,k} = 0_c \left( \exp - (d_v(x, (\tilde{j}, \tilde{k}))) (1-\varepsilon) - \varepsilon/h \right) \text{ dans } L^2.$$

$$(9.4.5)_{j,k} \quad \text{supp } r_{(j,k)} \subset \bigcup_{\beta \neq (j,k)} B(\tilde{\beta}, \eta)$$

Soit  $\Pi_F$  le projecteur orthogonal sur  $F$ , on montre alors que :

$$(9.4.7) \quad v_{j,k} = \Pi_F \tilde{\varphi}_{j,k}$$

est une base Hilbertienne de  $F$  "presque" orthonormale, chacun des  $v_{j,k}$  étant exponentiellement localisé dans le puits  $U_{j,k}$  et très proche de  $\tilde{\varphi}_{j,k}$ .

Pour être plus précis, introduisons un certain nombre de notations héritées de

[HE-SJ]<sub>2</sub>. Soit  $\mathcal{D}^{(\ell)}$  la matrice infinie de terme général :

$$(9.4.8) \quad d_{\alpha,\beta}^{(\ell)} = \exp(-\delta_{\alpha,\beta}^{(\ell)}/h) \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$$

où :

$$(9.4.9) \quad \delta_{\alpha,\beta}^{(\ell)} = \inf_{\ell \geq \ell} [d_v[\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}_1] + d_v(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) + \dots + d_v(\tilde{\gamma}_{\ell-1}, \tilde{\beta})]$$

$$\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell-1}$$

$$\alpha \neq \gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \dots \neq \gamma_{\ell-1} \neq \beta$$

Si  $(A_{\alpha,\beta})$  est une matrice infinie (dépendant de toutes les constructions antérieures), on écrira que  $(A)_{\alpha,\beta} = \tilde{O}(\mathcal{D}^{(\ell)})$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un choix de  $\eta > 0$  dans la construction de  $W$  t.q :

$$|(A)_{\alpha,\beta}| \leq (d_{\alpha,\beta}^{(\ell)})^{1-\varepsilon} \quad \text{pour } h < h(\varepsilon)$$

Introduisons :

$$(9.4.10) \quad V_{\alpha,\beta} = ((v_\alpha/v_\beta))$$

Les propriétés (9.4.4)<sub>j,k</sub> et (9.4.5)<sub>j,k</sub> permettent alors de montrer que :

$$(9.4.11) \quad V = I + \tilde{O}(\mathcal{D}^{(1)})$$

Introduisons enfin la base orthonormalisée des  $v_\alpha$  :

$$(9.4.12) \quad e_\alpha = \sum_\beta v_\beta (V^{-1/2})_{\beta\alpha}$$

Le théorème de Carlssohn s'énonce alors ainsi :

**Théorème 9.4.1** Sous les hypothèses rappelées avant (9.4.2), la matrice de  $P_A/F$  dans la base  $e_\alpha$  est donnée par :

$$(9.4.13) \quad (P_A/F) = \tilde{\lambda} \cdot I + \tilde{W} = \tilde{\lambda} \cdot I + \tilde{W} + \tilde{O}(\mathcal{D}^{(2)})$$

$$\text{où} \quad : \quad \tilde{W}_{\alpha,\beta} = 1/2 [(\tilde{\varphi}_\alpha/r_\beta) + (r_\alpha/\tilde{\varphi}_\beta)]$$

Nous n'avons pas encore exploité toutes les invariances du problème initial sur les matrices  $(P/F)$  et  $(\tilde{W})$ . C'est une étude complètement analogue à celle des §1 à 7, où on exploite les propriétés suivantes :

$$(9.4.14) \quad T_1^j T_2^k e_{0,0} = e_{j,k} \quad ; \quad T_1^j T_2^k \tilde{\varphi}_{0,0} = \tilde{\varphi}_{j,k} \quad ; \quad T_1^j T_2^k r_{0,0} = r_{j,k}$$

$$(9.4.15) \quad T_j P_A = P_A T_j \quad j=1,2$$

$$(9.4.16) \quad T_1 T_2 = \exp(-i \tilde{h}) T_2 T_1$$

On obtient ainsi que  $W$  vérifie (6.1) et (6.2). Toutes les considérations du §6 s'appliquent alors. L'hypothèse (9.2.11) assure alors l'analogie du théorème 6.2 avec  $S_1 = D$  :

$$(9.4.17) \quad \begin{cases} f(1,0) = 1/2 [(\tilde{\varphi}_{0,0}/r_{1,0}) + (r_{0,0}/\tilde{\varphi}_{1,0})] \\ f(0,1) = 1/2 [(\tilde{\varphi}_{0,0}/r_{0,1}) + (r_{0,0}/\tilde{\varphi}_{0,1})] \end{cases}$$

Enfin, les hypothèses mentionnées en (9.2.16) et (9.2.17) permettent d'utiliser les résultats de  $[HE-SJ]_3$  pour minorer  $|f(0,1)|$  et  $|f(1,0)|$ .

### Renormalisation

Un cas particulièrement intéressant est le cas où on a la symétrie mentionnée en (9.2.44) :

$$(9.4.18) \quad \alpha^* B = B, \quad \alpha^* V = V$$

$$\text{où} \quad : \quad \alpha(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

Rappelons (cf 9.2.2.1) qu'on avait :

$$(9.4.19) \quad T_{v_j} A - A = -d \varphi_j \quad (v_1 = (a_1, 0), v_2 = (0, a_2))$$

et que d'après (9.4.18), il existe  $f$  t.q :

$$(9.4.20) \quad \alpha^* A - A = -d f.$$

On vérifie alors que l'opérateur  $\mathcal{F}$  défini par :

$$(9.4.21) \quad \mathcal{F} u = \exp(i f / \hbar) (\alpha^* u)$$

commute avec  $P_A$  et on a donc :

$$(9.4.22) \quad [T_j, P] = 0, \quad [\mathcal{F}, P] = 0$$

utilisant que  $\alpha^{*4} = \text{id}$ , on montre facilement que :

$$f + \alpha^* f + \alpha^{*2} f + \alpha^{*3} f = \text{conste}$$

qu'on peut supposer nulle en modifiant  $f$  par une constante. On a alors :

$$(9.4.23) \quad \mathcal{F}^4 = I$$

Regardons maintenant les propriétés de commutation entre  $T_j$  et  $\mathcal{F}$  ; on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} T_2 &= \exp(i f/h) \alpha^* \exp(i \varphi_2/h) \tau_{V_2} \\ &= \exp(i(f+\alpha^* \varphi_2)/h) \alpha^* \tau_{V_2} \exp(i(f+\alpha^* \varphi_2)/h) \tau_{V_1} \alpha^*\end{aligned}$$

et :

$$T_1 \mathcal{F} = \exp(i \varphi_1/h) \tau_{V_1} \exp(i f/h) \alpha^* = \exp(i(\varphi_1 + \tau_{V_1} f)/h) \tau_{V_1} \alpha^*$$

et donc :

$$\mathcal{F} \cdot T_2 = \exp(i E/h) T_1 \cdot \mathcal{F} \quad \text{avec :} \quad E = f + \alpha^* \varphi_2 - \varphi_1 - \tau_{V_1} f$$

On remarque maintenant que :

$$\begin{aligned}dE &= df + \alpha^* d\varphi_2 - d\varphi_1 - \tau_{V_1} df \\ &= -\alpha^* A + A + \tau_{V_1} \alpha^* A - \tau_{V_1} A + \tau_{V_1} A - A + \alpha^* A - \alpha^* \tau_{V_2} A \\ &= (\tau_{V_1} \alpha^* - \alpha^* \tau_{V_1}) A = 0\end{aligned}$$

Par conséquent E est constant . De même :

$$\mathcal{F} T_1 = T_2^{-1} \mathcal{F} \cdot \exp(i G/h) \quad \text{avec } G \text{ constante}$$

Comme on a la possibilité de modifier  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  par des constantes (sans modifier les relations jusqu'à 9.4.23), on peut se ramener au cas où  $E=G=0$ .

$$(9.4.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} [T_1, P] = 0, [\mathcal{F}, P] = 0 \\ T_1 T_2 = \exp(i \Phi/h) T_2 T_1 \\ \mathcal{F}^4 = \text{id}, T_1 \mathcal{F} = \mathcal{F} T_2, T_2^{-1} \mathcal{F} = \mathcal{F} T_1 \end{array} \right.$$

$\mathcal{F}$  joue le rôle de la transformée de Fourier dans les §1 à 7. On assure en particulier que  $|f(0,1)| = |f(1,0)|$  et que l'étude du spectre de  $(P_A - \tilde{\lambda})/F$  se ramène à l'étude d'une équation de Harper, perturbée de  $|f(0,1)| [\cos \tilde{h} D_x + \cos(x)]$

qui satisfait à toutes les propriétés requises pour appliquer le § 7 et on obtient ainsi le théorème 2 .

## Appendice A

Précisons la remarque (4.2) (dans le cas où  $b=1$ ,  $\lambda=1$ ). Notons que nécessairement :

$$A1 \quad v_1 \leq S_1 - \sup_{y \in \mathbb{R}} [D(0,y) - G_0(y)]$$

On doit donc étudier l'expression :

$$\theta(x) = \int_{y_0}^x \text{ch}^{-1} [1 + \cos y_0 - \cos t] \, dt - 1/2 (x - x_0)^2$$

où  $x_0$  est lié à  $y_0$  par :  $1 + \cos y_0 = 2 \cos x_0$

Des calculs numériques semblent montrer que :

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} [D(0,y) - G_0(y)] \leq 2.10^{-2} \cdot S_1$$

On va vérifier ici par des estimations grossières que :

$$A2 \quad \sup_{y \in \mathbb{R}} [D(0,y) - G_0(y)] \leq R \cdot S_1 \quad \text{avec : } R < 1/2$$

Ceci permettrait de choisir  $v_1 > S_1/2$  dans le cas  $\lambda=1$  et simplifierait les arguments développés dans la suite du paragraphe . On va utiliser les inégalités :

$$\text{ch}^{-1}(1+u) \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{u} \quad \text{et} \quad |\cos y - \cos t| \leq |t - y|$$

On peut alors majorer  $\theta(x)$  par :

$$\theta(x) \leq F(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} (x - y_0)^{3/2} - 1/2 (x - x_0)^2$$

$$\text{et on a : } F'(x) = \sqrt{2} (x - y_0)^{1/2} - (x - x_0)$$

Pour l'étude de  $F'(x)$ , on pose  $y = (x - y_0)^{1/2}$  et on obtient :

$$F'(x) = \Psi(y) = \sqrt{2} y - (y^2 + (y_0 - x_0))$$

Notons tout d'abord que si :  $(y_0 - x_0) > 1/\sqrt{2}$  alors  $\Psi$  est toujours négatif et il est alors clair (car  $F(y_0) = -1/2 (y_0 - x_0)^2$ ) que :

$$A3 \quad (y_0 - x_0) > 1/\sqrt{2} \Rightarrow \theta(x) \leq F(x) \leq 0 \quad \forall x > y_0$$

Notons également que  $y_0(x_0) - x_0$  est une fonction croissante de  $x_0$  pour

$x_0 \in [0, \pi/2]$ . Considérons maintenant le cas où  $(y_0 - x_0) < 1/\sqrt{2}$ , alors  $F$  atteint un maximum au point :  $x_+ = y_0 + y_+^2$  où  $y_+$  est le zéro positif de  $\Psi$  :

$$y_+ = 1/2 \left[ \sqrt{2} + \sqrt{2 - 4(y_0 - x_0)^2} \right]$$

Calculons :  $F(x_+) = y_+^2 \left[ \frac{2}{3} \sqrt{2} y_+ - 1 \right]$

Si  $y_+ \leq 3/2\sqrt{2}$ , on a de nouveau :  $F(x_+) \leq 0$  et donc :

$$A4 \quad \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < (y_0 - x_0) \Rightarrow \theta(x) \leq 0$$

Considérons donc maintenant le cas où :  $(y_0 - x_0) < \sqrt{3}/(2\sqrt{2})$ . On majore  $\theta(x)$  par  $F(x_+)$ . Notons que  $y_+(x_0)$  est une fonction décroissante de  $x_0$ . On en déduit que :  $F(x_+(x_0)) \leq 2/3$  (en prenant  $x_0=0$ ) ; par ailleurs,  $S_1(y_0(x_0))$  décroît également avec  $x_0$  et pour estimer :  $F(x_+(x_0))/S_1(y_0(x_0))$ , on va utiliser la majoration grossière :

$$\frac{F(x_+(x_0))}{S_1(y_0(x_0))} \leq (2/3) \times (1/S_1(y_0(\tilde{x}_0)))$$

En prenant comme valeur de  $\tilde{x}_0$  la valeur t.q :  $y_0 - \tilde{x}_0 = \sqrt{3}/2\sqrt{2}$ , soit :

$$\tilde{x}_0 \sim 1.16, \tilde{y}_0 \sim 1.77$$

Pour minorer  $S_1(\tilde{y}_0)$ , on observe que  $\tilde{y}_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  et que, pour  $t \in [\tilde{y}_0, \pi]$ ,

on a :

$$\frac{\cos t - \cos \tilde{y}_0}{\tilde{y}_0} \leq - \frac{(\cos \tilde{y}_0 + 1)}{\pi - \tilde{y}_0}$$

$$\text{ch}^{-1}(1+v) \geq \text{Log}(1+2v)$$

$$\text{d'où : } S_1(\tilde{y}_0) \geq 2 \int_{\tilde{y}_0}^{\pi} \text{Log}(1+2(1+\cos \tilde{y}_0)) \frac{(t - \tilde{y}_0)}{(\pi - \tilde{y}_0)} dt$$

$$\geq (\pi - \tilde{y}_0)/(1+\cos \tilde{y}_0) [(1+2(1+\cos \tilde{y}_0)) \text{Log}(1+2(1+\cos \tilde{y}_0)) - 2(1+\cos \tilde{y}_0)]$$

On trouve ainsi :  $S_1(\tilde{y}_0) \geq 1.52$  et par conséquent  $R \leq 0.43$

# APPENDICE B

## PAPILLON DE HOFSTADTER

Spectre de l'équation de HARTER

J.P. GUILLEMET B. HELFFER P. TRETON  
Département de Mathématiques  
UNIVERSITÉ DE NANTES

$(2, 1)$

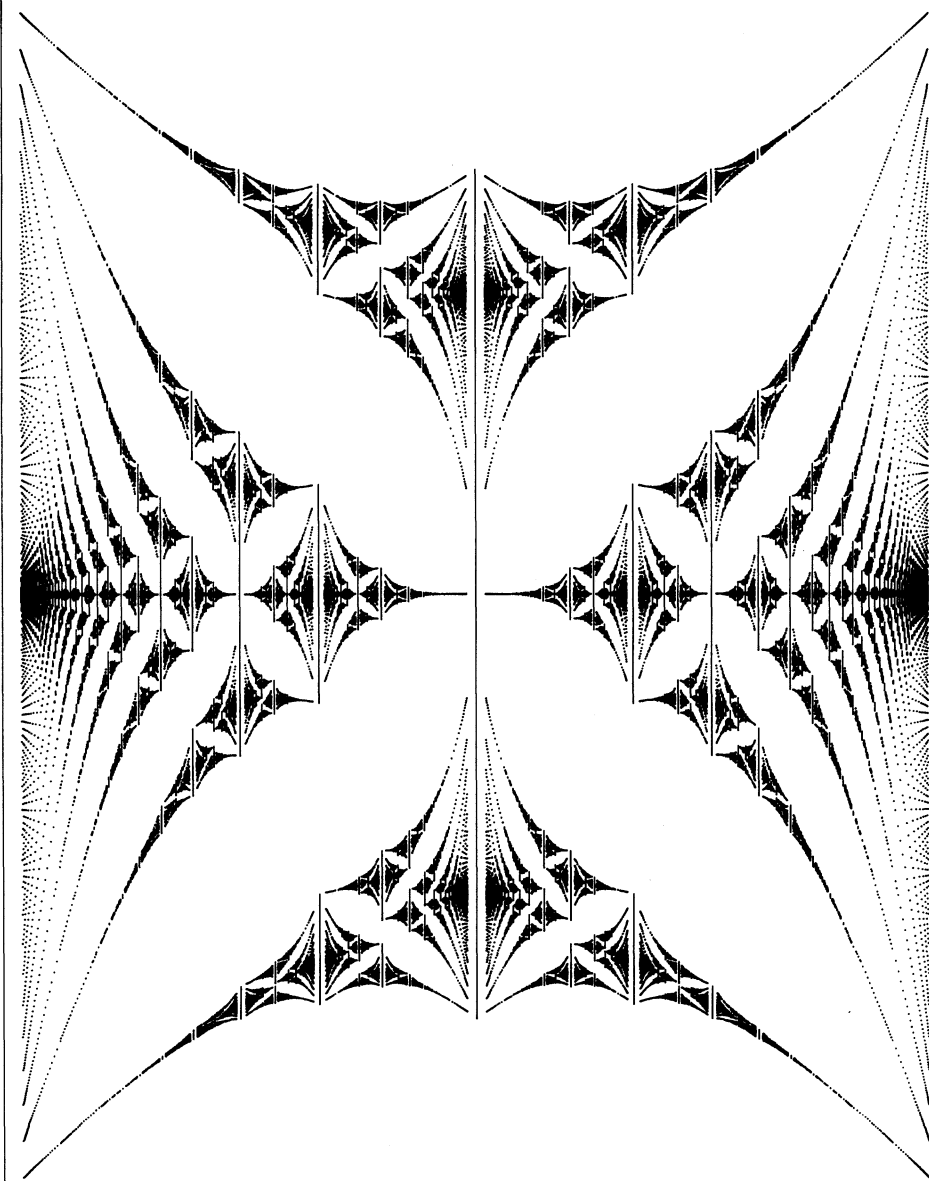
$(-2, 1)$

$(2, 0)$

$(0, 0)$

$(-2, 0)$

$h/2\pi$



## RÉFÉRENCES

- [A.A] S.Aubry,C.André :  
Proc.Israel Phys.Soc.  
Ed.C.G.Kuper 3 (Adam Hilger,Bristol,1979 ) , 133-
- [A.S] J.Avron-B.Simon :  
Stability of gaps for periodic potentials under variation of a  
magnetic field  
J.Phys.A:Math.Gen. 18 (1985) p2199-2205
- [AZ] Ya Azbel :  
Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic  
field  
Soviet Physics JETP vol.19 , n°3 Sept.1964
- [BEA] R.Beals :  
Characterization of P.D.O. and applications  
Duke Math.J.44(1977),p 45-57
- [BE] J.Bellissard :  
Schrodinger operators with almost periodic potentials  
Springer lecture notes in Physics 153
- [BE-SI]J.Bellissard-B.Simon :  
Cantor Spectrum for the Almost Mathieu Equation  
Journal of functional Analysis , vol.48 , N°3 , Oct 1982
- [BEN] F.Bentosela :  
[1]Magnetic Bloch Functions  
Il Nuovo Cimento Vol.16 B , N°1 , Juillet 1973  
[2] Electrons d'un solide cristallin soumis à un champ magnétique  
extérieur , Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle - Marseille Luminy-1970
- [CA-NO] B.Candelpergher,J.C.Nosmas :  
Propriétés spectrales d'opérateurs différentiels asymptotiques  
autoadjoints ; Comm.in PDE 9(1984),n°2 137-167
- [CAR] U.Carlsson :  
Travail en préparation
- [COL] E. Coleman :  
The use of instantons , conference d'Erice (1977)
- [DU] J.J.Duistermaat :  
Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of  
singularities ; Comm.Pure appl.Math.27 (1974),207-281

- [GE-GRI] C.Gérard,A.Grigis :  
Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier ; journal of differential equations 1987
- [GE-SJ]C.Gérard,J.Sjöstrand :  
Semi-classical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type ;  
Comm.in Math.physics 108 , 391-421 (1987)
- [HA] E.Harrell :  
[1] Double Wells ,  
Comm.math. Physics75 (1980) , 239-261  
[2] The band structure of a one dimensional periodic system in the scaling limit  
Ann.of Physics 119 (1974) p.351-369
- [HE-RO] B.Helffer,D.Robert :  
[1]Calcul fonctionnel par la transformée de Mellin et applications  
Journal of functional Analysis , Vol.53, n°3, oct.1983  
[2]Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique  
Ann.del'IHP(Physiquethéorique) Vol.41,n°3, 1984,p..291-331
- [HE-SJ] B.Helffer,J.Sjostrand :  
[1] Multiple wells in the semi-classical limit I  
comm.in PDE , 9(4), p.337-408 (1984)  
[2] Puits multiples en limite semi-classique II  
-Interaction moléculaire-Symétries-Perturbations  
ann. de l'IHP (Physique théorique ) Vol.42,n°2,1985,p.127-212  
[3]Effet tunnel pour l'équation de Schrodinger avec champ magnétique  
à paraître : annales de l'école normale de Pise (1988)  
[4] Résonances en limite semi-classique  
Bulletin de la SMF 1986 Tome 114 , Fasc.3 (mémoire n°24-25)
- [HOF] D.Hofstadter :  
Energy Levels and Wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields  
Phys.Rev.B 14 (1976) , 2239-2249
- [HU] W.Hunziker :  
Schrödinger operators with Electric or Magnetic fields  
Lecture Notes in Physics 116 (1980)
- [LA-LI] Landau-Lifshitz :  
Mécanique quantique (mir)

- [LAU] P.Laubin :  
Asymptotic Solutions of Hyperbolic Boudary Value Problems with diffraction  
in Advances in Microlocal Analysis Reidel Publ.company (1986)
- [LE] J.Leray :  
Lagrangian analysis and quantum mechanics  
MIT press (1981)
- [MA] V.P.Maslov :  
Théorie des perturbations et Méthodes asymptotiques (Dunod )
- [ME-SJ] A.Melin-J.Sjostrand :  
Fourier integral operators with complex valued phase functions  
Springer Lecture Notes in Mathematics n°459,p 121-223
- [NOS] J.C.Nosmas :  
Approximation semi-classique du spectre de systèmes différentiels asymptotiques  
CRAS 295 (1982)n°3
- [NOV] S.P.Novikov :  
Two dimensional operators in periodic fields  
Journal of soviet Mathematics.Vol 28 , n°1,Janvier 1985
- [OU] A.Outassourt :  
Analyse semiclassique pour des opérateurs de Schrödinger avec potentiel pèriodique  
journal of functional analysis Vol.72 , n°1, May 1987
- [PH]F. Pham :  
Transformées de Laplace des microsolutions de systèmes holonomes  
Ens. Mathématique Tome 30 Fasc 1-2 (1984).
- [RE-SI] M.Reed-B.Simon :  
Methods of modern Mathematical Physics  
Academic press
- [SI] B.Simon :  
[ 1] Almost periodic Schrodinger operators : A review  
Advances in applied Mathematics 3 , 463-490 (1982)  
[2]Semiclassical Analysis of low lying eigenvalues I et II  
Ann.I.H.P.t 38,1983 p295-307;Ann.of Math n°120,p 89-118  
[3] Semi-classical Analysis of low lying eigenvalues III  
Width of the ground-state band in strongly coupled solids  
Ann. of Physics 158 (1984) p 415-420

[SJ] J.Sjöstrand :

- [1] Singularités analytiques microlocales  
Astérisque n°95 (1982)
- [2] Analytic singularities of solutions of boundary value problems  
Proceedings of the Nato Advanced Study Institute (1980)  
Reidel Publishing company

[SO] Sokoloff :

- Unusual band structure, Wave functions and electrical conductance  
in crystals with incommensurate periodic potentials  
Physics reports (review section of Physics letters) 126 , n°4  
(1985)p189-244

[WILC] C.Wilcox :

- Theory of Bloch Waves ,  
J.Analyse Math. 33(1978),146-167

[WILK] M.Wilkinson :

- [1] Critical properties of electron eigenstates in incommensurate  
systems  
Proc. R. Soc.London·A 391 , p.305-350 (1984)
- [2] An example of phase holonomy in WKB theory  
J.Phys.A:Math.gen.17 (1984) , p 3459-3476
- [3] Von Neumann lattices of Wannier functions for Bloch electrons  
in a magnetic field  
Proc. R.Soc.Lond.A 403 ,p 135-166(1986)
- [4] An exact Effective Hamiltonian For a perturbed Landau Level  
Journal of Physics A, vol 20 n°7, 11-May 1987 p.1761
- [5] An exact renormalisation Group for Bloch Electrons in a Magnetic  
fields  
A paraitre au Journal of Physics A

[ZA] J.Zak :

- Magnetic Translation Group  
Physical Review Volume 134 , N°6A ,Juin 1964