MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOISE DELON

Idéaux et types sur les corps séparablement clos

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 33 (1988)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1988_2_33__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 33
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 116, 1988, fascicule 3

IDÉAUX ET TYPES
SUR LES CORPS SÉPARABLEMENT CLOS

Françoise Delon

On sait que la théorie des corps algébriquement séparablement clos de caractéristique et de degré d'imperfection fixés est complète et stable. Nous décrivons les types en termes d'idéaux de polynômes à une infinité de variables. Cela permet de déterminer le générique, de décrire la déviation et quelques rangs naturels, de montrer qu'il y a propriété de l'ordre dimensionnel, qu'il n'y a pas propriété du recouvrement fini, et que, dans le cas d'un degré d'imperfection fini, l'adjonction au langage d'un nombre fini de constantes permet l'élimination des imaginaires.

It is known that the theory of separably closed fields of fixed characteristic and degree of imperfection is complete and stable. We describe the types in terms of ideals of polynomial rings in infinitely many variables. This allows us to determine the generic type, to describe forking and to give natural notions of rank, to show that d.o.p. holds, and not f.c.p., and that, in the case of a finite degree of imperfection, the expansion of the language via finitely many constants admits elimination of imaginaries.

Texte reçu le 12 février 1986, révisé le 8 juillet 1987.

Françoise DELON, Université Paris VII, UA CNRS 753, Tour 45-55, 5ème étage, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

TABLE DES MATIÈRES

RAPPELS

Cet article manipule beaucoup de notions algébriques, nous avons rassemblé ci-dessous l'essentiel des résultats et définitions non triviaux qui seront utilisés. On trouvera des exposés détaillés sur la disjonction linéaire ou algébrique ("freeness" dans [Lang]) et les extensions régulières dans [Lang], sur la séparabilité et les p-bases dans [Bour].

Soit des corps $K \subset L$, $M \subset N$; L et M sont linéairement disjoints au-dessus de K lorsqu'ils satisfont une des propriétés équivalentes :

- des éléments de L linéairement indépendants sur K le restent sur M
- des éléments de M linéairement indépendants sur K le restent sur L
- l'anneau $L[M]$ est K-isomorphe au produit tensoriel $L \otimes_K M$ par l'homomorphisme canonique.

Pour des corps $K \subset L \subset M$ et $K \subset N$, sont équivalents :

- M et N sont linéairement disjoints au-dessus de K
- L et N sont linéairement disjoints au-dessus de K , et M et LN sont linéairement disjoints au-dessus de L .

Soit des corps $K \subset L$, $K \subset M$; L et M sont algébriquement disjoints sur K lorsque des éléments de L qui sont algébriquement indépendants sur K le restent sur M , ou, ce qui est équivalent, lorsque des éléments de M algébriquement indépendants sur K le restent sur L .

La disjonction linéaire implique la disjonction algébrique. Réciproquement soit $K \subset L \subset N$ et $m_1, \ldots m_n$ des éléments de N algébriquement indépendants sur L ; alors les corps L et $K(m_1, \ldots m_n)$ sont linéairement disjoints sur K .

Disjonctions linéaire et algébrique sont des propriétés de type fini : L et M sont disjoints au-dessus de K ssi, pour chaque sous-corps L'

(respectivement M') de L (respectivement M) finiment engendré sur K , L' et M' sont disjoints sur K .

Soit un corps K de caractéristique p , $A \subset K$ et $x \in K$; x est dit p-indépendant dans K au-dessus de A lorsque $x \notin K^p(A)$; une partie B de K est dite p-libre sur A , ou ses éléments p-indépendants sur A , lorsque, $\forall b \in B$, b est p-indépendant sur $A \cup (B - \{b\})$. Appelons p^n-monômes associés à $\{b_i \ ; \ i < i_0\}$ les monômes en les b_i d'exposant par rapport à chaque b_i strictement inférieur à p^n . Des éléments $b_1,\ldots b_n$ sont p-indépendants sur A dans K ssi les p-monômes $\{ \prod_{i=1}^{n} b_i^{j(i)} \ ; \ j \in \{0,1,\ldots p-1\}^n \}$ sont linéairement indépendants sur $K^p(A)$. On dira "p-indépendant" pour "p-indépendant sur $\emptyset$" , de même pour p-libre. Une partie A est dite p-génératrice de K lorsque $K \subset K^p(A)$. Une partie est p-génératrice minimale ssi elle est p-libre maximale, et elle est alors appelée p-base. Si B est une p-base de K , avec m_i les p-monômes associés, un élément x de K s'écrit de façon unique $x = \Sigma x_i^p m_i$ avec $x_i \in K$; les x_i sont les composantes de x sur B . Plus généralement, si les m_i sont les p^n-monômes associés à B , x s'écrit $x = \Sigma x_i^{p^n} m_i$ pour des uniques $x_i \in K$; on appellera ces x_i les composantes de profondeur n de x sur B . Remarquons la chose suivante:

0. Les produits $m_i m_j^p$ où m_i est un un p-monôme et m_j un p^n-monôme, sont des p^{n+1}-monômes, et chaque p^{n+1}-monôme admet une unique décomposition de ce type.

Toutes les p-bases de K ont le même cardinal. Si ce cardinal est fini, on l'appelle degré d'imperfection (ou, dans un contexte de théorie des modèles, invariant de Eršov) de K ; sinon on dit que le degré d'imperfection est infini. Si K est de degré d'imperfection fini e , on a $[K : K^p] = p^e$.

On connaît la notion d'extension algébrique séparable. Nous appellerons séparablement clos un corps sans extension algébrique séparable propre. On sait qu'un corps K admet une clôture algébrique séparable qui est unique à

K-automorphisme près; on la notera K^s .

La notion de séparabilité s'étend à des extensions arbitraires: une extension $K \subset L$ de corps est dite séparable lorsqu'elle satisfait une des propriétés équivalentes:

- $K^{p^{-1}}$ et L sont linéairement disjoints sur K
- $K^{p^{-\infty}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K^{p^n}$ et L sont linéairement disjoints sur K
- toute partie p-libre de K reste p-libre dans L .

Une propriété importante des extensions algébriques séparables finies est d'être monogène ; cela se généralise de la façon suivante: si $K \subset K(x_1,\dots x_n)$ est une extension séparable, alors L admet une base de transcendance séparante extraite des x_i , c'est-à-dire qu'il y a des $x_{i_1},\dots x_{i_r}$ tels que l'extension $K(x_{i_1},\dots x_{i_r}) \subset L$ soit algébrique séparable. Il y a transitivité de la séparabilité, et enfin, si l'extension $K \subset L$ est séparable et que M est une extension algébrique de K avec $K \subset M \subset L$, alors L reste séparable sur M .

Ainsi, dans une extension séparable, le degré d'imperfection ne peut qu'augmenter, il est conservé dans une extension algébrique séparable, et ne peut que diminuer dans une extension purement inséparable. En particulier, une partie p-libre sur K est nécessairement algébriquement libre sur K .

Une extension de corps $K \subset L$ est dite régulière lorsqu'elle est séparable et que K est relativement algébriquement clos dans L . L'extension $K \subset L$ est régulière ssi L est linéairement disjoint sur K de toute extension algébrique de K , ssi il l'est de la clôture algébrique de K . Enfin, si L et M sont linéairement disjoints sur K et que l'extension $K \subset L$ est régulière, alors l'extension $M \subset LM$ est aussi régulière.

On a vu que disjonction linéaire implique disjonction algébrique et indiqué un cas où la réciproque est vraie. Plus généralement, si L est une extension régulière de K , alors L et M sont linéairement disjoints sur K dès qu'ils sont algébriquement disjoints (ce résultat est dans [Lang], deux cas particuliers sont exposés dans [R]). On utilisera systématiquement ce résultat pour K

séparablement clos et des extensions L et M séparables, de même que le fait suivant: avec les mêmes hypothèses, L et M sont linéairement disjoints sur K ssi L^s et M^s le sont.

NOTATIONS

. Pour un anneau intègre A , $Q(A)$ est son corps de quotients ;

. pour un corps K , K^s est sa clôture algébrique séparable ;

. pour une extension de corps $K \subset L$, $tr(L;K)$ est le degré de transcendance de L sur K ;

. pour un ordinal α et un entier r

$$(p^r)^\alpha = \{ \text{ applications de l'ensemble des ordinaux } < \alpha \text{ dans } \{0,1,\dots p^r-1\} \} ;$$

si α est infini

$${}^{<\omega}(p^r)^\alpha = \{ j \in (p^r)^\alpha \text{ ; } j \text{ prend la valeur } 0 \text{ sauf sur un nombre fini de points } \}$$

$$(p^e)^{<\omega} = \{ \text{ suites finies à valeurs dans } \{0,1,\dots p^e-1\} \} ;$$

. si K et L sont deux structures d'un même langage, $K < L$ et $K > L$ désignent l'inclusion élémentaire.

PARTIE 1

IDÉAUX SÉPARABLES

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Dans cette partie on a choisi un corps K de caractéristique $p > 0$ et une p-base $B = \{ b_i \ ; \ i < e \}$ de K ; on note m_j , $j \in {}^{<\omega}p^e$ les p-monômes associés. La p-indépendance sera toujours considérée par rapport à K .

1. Définition. Soit une K-algèbre commutative unitaire C ; un idéal I de C est dit séparable lorsqu'on a, pour tous $r \in \mathbb{N}$, $j_1,\dots j_r$ distincts $\in p^e$, et $x_1,\dots x_r \in C$

$$x_1{}^p m_{j_1} + \dots + x_r{}^p m_{j_r} \in I \implies x_1,\dots x_r \in I \ .$$

2. Lemme. Cette propriété est indépendante du choix de la p-base.

La preuve se fait sans difficulté. Ce lemme et le fait que toute famille p-libre se complète en une p-base, ont la conséquence suivante.

3. Corollaire. Un idéal I est séparable ssi pour tous $r \in \mathbb{N}$, $y_1,\dots y_r$ p-indépendants $\in K$, on a

$$\sum_{j \in p^r} x_j{}^p \prod_i y_i{}^{j(i)} \in I \implies x_j \in I \ , \forall j \in p^r \ .$$

Remarquons qu'une intersection d'idéaux séparables reste séparable, et qu'on peut donc parler de l'idéal séparable Sép(A) engendré par une partie A de

C . Le lemme suivant décrit cet idéal.

4. Lemme. Posons

$$\text{Sép}_1(A) = \{ x \in C \;;\; \text{il existe un entier } s\,,\ j_1,\dots j_s \in {}^{<\omega}p^e \text{ non nuls partout, et } x_1,\dots x_s \in C \text{ tels que } x^p + \Sigma\, x_i{}^p m_{j_i} \in A \}$$

$$\text{Sép}_n(A) = \text{Sép}_1(\text{Sép}_{n-1}(A)) .$$

Alors $\text{Sép}_n(A)$ est indépendant du choix de la p-base, est un idéal si A en est un, vérifie

$$\text{Sép}_n(A) = \{ x \in C \;;\; \text{il existe un entier } s\,,\ j_1,\dots j_s \in {}^{<\omega}p^e \text{ non nuls partout, et } x_{i,k} \in C \text{ pour } i = 1,\dots s \text{ et } k = 1,\dots n \text{ tels que}$$
$$x^{p^n} + \sum_i x_{i,1}{}^{p^n} m_{j_i}{}^{p^{n-1}} + \dots + \sum_i x_{i,k}{}^{p^{n-k+1}} m_{j_i}{}^{p^{n-k}} + \dots + \sum_i x_{i,n-1}{}^{p} m_{j_i} \in A \}$$

et, pour un idéal I , on a:

$$\text{Sép}(I) = \cup\, \text{Sép}_n(I) .$$

La démonstration se fait sans difficulté.

5. Lemme. Un idéal séparable est radiciel.

Démonstration. Si $a^m \in I$, on a $a^{p^r} \in I$ dès que $p^r \geq m$, donc $a \in I$ si I est séparable. □

6. Proposition. Soit $I = \bigcap_{\alpha<\alpha_o} P_\alpha$, où les P_α sont des idéaux premiers de C , et où l'intersection est réduite, c'est-à-dire $I \notin \cap \{ P_\alpha \;;\; \alpha < \alpha_o \,,\ \alpha \neq \alpha_1 \}$ pour tout $\alpha_1 < \alpha_o$. Alors I est séparable ssi chaque P_α l'est.

Démonstration. Remarquons d'abord le fait suivant: si P est l'un quelconque des P_α , on a: $\forall q \in P\,,\ \exists\, a \in C\text{-}P\,,\ aq \in I$.

En effet,

- si $q \in I$, on prend $a = 1$;
- si $q \notin I$, alors $q \notin \cap \{ P_\alpha \;;\; P_\alpha \neq P \}$; on prend un élément

$a \in \cap \{ P_\alpha ; P_\alpha \neq P \} - P$. □

Dans l'énoncé de la proposition, la seule implication non triviale est que chaque P_α est séparable si I l'est; supposons donc, si P est l'un quelconque des P_α , $\sum_{k=1}^{r} x_k{}^p m_{i_k} \in P$; choisissons $a \in C-P$ tel que $a \sum x_k{}^p m_{i_k} \in I$, donc $\sum (ax_k)^p m_{i_k} \in I$, d'où $ax_1, \ldots ax_k \in I$ et enfin $x_1, \ldots x_k \in P$. □

La proposition suivante est évidente et nous ramène à la théorie des corps.

7. Proposition. Si I est premier et différent de C , I est séparable ssi l'inclusion de K dans le corps des quotients de C/I est séparable.

8. Proposition. Si $K \subset L$ est une extension régulière de corps, un idéal propre I de C est premier (respectivement premier et séparable) ssi l'idéal $I \otimes_K L$ l'est dans $C \otimes_K L$.

Démonstration. Supposons I premier. Parce que l'extension $K \subset L$ est régulière, il existe des plongements de L et du corps des quotients M de C/I linéairement disjoints au-dessus de K ; dans ce cas $M[L]$ est isomorphe à $C \otimes_K L / I \otimes_K L$ qui est donc intègre, d'où $I \otimes_K L$ est premier. Si de plus I est séparable, M et L sont des extensions linéairement disjointes et séparables de K , donc ML est séparable sur K .

L'autre direction des implications est évidente. □

2. TRADUCTION AU PREMIER ORDRE DANS K LORSQUE $C = K[X_1, \ldots X_n]$

Un idéal de C admet alors un nombre fini de générateurs, et chaque élément c de C est caractérisé par la suite $\bar{c}$ de ses coefficients dans K . Il est maintenant classique (voir par exemple [vdD] chapter IV) d'utiliser à des fins algébriques la possibilité de traduire au premier ordre dans K certaines propriétés des idéaux. En particulier, en étudiant la propriété de séparabilité, on obtient les résultats suivants:

9. Théorème. Les entiers p premier, m , n et d sont fixés.

1/ Il existe une formule E du langage des anneaux telle que, pour tout corps K de caractéristique p, pour tous $c_1,\dots c_m \in K[X_1,\dots X_n]$ de degré $\leq d$

$$K \models E(\bar{c}_1,\dots\bar{c}_m) \text{ ssi } (c_1,\dots c_m) \text{ est séparable.}$$

2/ Il existe une formule F du langage des anneaux telle que, pour tout corps K de caractéristique p , pour tous $x,c_1,\dots c_m \in K[X_1,\dots X_n]$ de degré $\leq d$,

$$K \models F(\bar{x},\bar{c}_1,\dots\bar{c}_m) \text{ ssi } x \in \text{Sép}(c_1,\dots c_m) .$$

10. Théorème. 1/ Il existe un entier $M = M(p,n,d)$ tel que, pour tout corps K de caractéristique p , pour tous $c_1,\dots c_m \in K[X_1,\dots X_n]$ de degré $\leq d$, l'idéal $(c_1,\dots c_m)$ est séparable ssi, pour tous $y_1,\dots y_M \in K$ p-indépendants, pour tous $(x_j)_{j\in p^M} \in K[X_1,\dots X_n]$ de degré $\leq M$, on a

$$\sum_j x_j^p \prod_i y^{j(i)} \in (c_1,\dots c_m) \implies [\ x_j \in (c_1,\dots c_m) \ ,\ \forall j \in p^M\ ] .$$

2/ il existe un entier $N = N(p,n,d)$ tel que, pour tout corps K de caractéristique p , pour tous $z,c_1,\dots c_m \in K[X_1,\dots X_n]$ de degré $\leq d$, $z \in \text{Sép}(c_1,\dots c_m)$ ssi il existe $y_1,\dots y_N \in K$ p-indépendants, et $(x_{j,k})_{j\in(p^N)^N,k=1,\dots N} \in K[X_1,\dots X_n]$ de degré $\leq N$ tels que

$$z^{p^N} + \sum_{j,k} x_{j,k}{}^{p^{N-k+1}} \Big(\prod_{i=1}^{N} y_i{}^{j(i)}\Big)^{p^{N-k}} \in (c_1,\dots c_m) .$$

Dans le cas d'un degré d'imperfection fini, l'énoncé est légèrement différent: les y_i sont indexés par $i \in \{\ 0,\ 1,\dots e-1\ \}$ et les x_j par $j \in p^e$ dans le 1/, et $j \in (p^N)^e\times N$ dans le 2/.

Les démonstrations pour l'essentiel reprennent et adaptent les idées du quatrième chapitre de [vdD].

11. Lemme. (Hermann). Les entiers m et d étant fixés, il existe un entier A

$= A(n,d)$ tel que, pour tout corps K, pour tous $c_1,\dots c_m, x \in K[X_1,\dots X_n]$ de degré $\leq d$, x est dans $(c_1,\dots c_m)$ ssi il existe $x_1,\dots x_m$ de degré $\leq A$ tels que $x = \Sigma\, x_i c_i$.

Démonstration. Voir [vdD] p.123 et suivantes. □

12. Lemme. Soit une théorie T d'un langage L arbitraire; si Γ et Δ sont des systèmes d'énoncés de L tels que $T \vdash \bigwedge\!\!\bigwedge \Gamma \longleftrightarrow \bigvee\!\!\bigvee \Delta$, il existe des sous-ensembles finis Γ_o de Γ et Δ_o de Δ tels que
$T \vdash \bigwedge\!\!\bigwedge \Gamma \longleftrightarrow \bigwedge\!\!\bigwedge \Gamma_o \longleftrightarrow \bigvee\!\!\bigvee \Delta_o \longleftrightarrow \bigvee\!\!\bigvee \Delta$.

Démonstration. C'est le lemme 3-2 p.134 de [vdD]. □

13. Lemme. "L'idéal $(c_1,\dots c_m)$ est premier (respectivement séparable)" se dit par une conjonction infinie d'énoncés (sans paramètre) en $\bar{c}_1,\dots \bar{c}_m$.

Démonstration. L'idéal $I = (c_1,\dots c_m)$ est premier ssi on a pour tout entier d

$$(\forall x,y \in K[X_1,\dots X_n] \text{ de degré } \leq d)\ [xy \in I \longrightarrow ((x \in I) \vee (y \in I))] .$$

Grâce à 11, l'appartenance d'un polynôme z de degré $\leq d$ à I équivaut à la satisfaction dans K d'une formule du langage des anneaux, à paramètres $\bar{z}, \bar{c}_1,\dots \bar{c}_m$; la caractérisation ci-dessus correspond donc à la conjonction d'une infinité d'énoncés du premier ordre.

Pour traduire "séparable", on utilise l'équivalence du corollaire 3: I est séparable ssi K satisfait pour tous d et r entiers

$$(\forall y_1,\dots y_r \in K)\ (\forall (x_j)_{j \in p^r} \in K[X_1,\dots X_n] \text{ de degré } \leq d)$$

$$[(\text{les } y_i \text{ sont p-indépendants}) \wedge (\sum_j x_j^p \prod_i y_i^{j(i)} \in I)] \longrightarrow \bigwedge\!\!\bigwedge_j (x_j \in I)$$

ce qui se dit au premier ordre en $\bar{c}_1,\dots \bar{c}_m$. □

14. Lemme. "L'idéal $(c_1,\dots c_m)$ est premier et séparable" se dit par une disjonction infinie d'énoncés en $\bar{c}_1,\dots \bar{c}_m$.

Démonstration. Van den Dries a remarqué (voir dans [vdD] l'énoncé 3-1 p.131 et la remarque consécutive à 3-12) qu'on peut déduire du théorème de la base de transcendance séparante et du fait qu'une extension algébrique séparable est monogène, l'équivalence suivante: si $c_1,\dots c_m$ sont de degré $\leq d$, l'idéal propre $I = (c_1,\dots c_m)$ est premier séparable ssi il existe un entier t, $0 \leq t \leq n$, un polynôme $P \in K[X_1,\dots X_t,Z]$ irréductible, séparable et non constant en Z, des polynômes $h_1,\dots h_n \in K[Y_1,\dots Y_t,Z]$, $h \in K[Y_1,\dots Y_t]$, $h \neq 0$, et $g,g_1,\dots g_t \in K[X_1,\dots X_n]$ vérifiant:

. $h^d c_i(h_1/h,\dots h_n/h) \in P.K[Y_1,\dots Y_t,Z]$, $1 \leq i \leq m$;

. $P(g_1,\dots g_t,g) \in I$;

. $I : (h(g_1,\dots g_t)) = I$ et $I \neq K[X_1,\dots X_n]$,

. $h(g_1,\dots g_t)X_j - h_j(g_1,\dots g_t,g) \in I$, $1 \leq j \leq n$.

Il avait indiqué préalablement qu'on sait borner le degré des générateurs de $I : J$ en fonction de celui des générateurs de I et de J ; l'expression ci-dessus est donc du premier ordre en $\bar{c}_1,\dots\bar{c}_m$ si l'on a borné les degrés de P, $h_1,\dots h_n$, h, $g_1,\dots g_t$ et g. La disjonction infinie s'obtient en quantifiant sur ces degrés. □

<u>15. Corollaire</u>. "$(c_1,\dots c_m)$ est premier et séparable" se dit dans K au premier ordre sans paramètre sur $\bar{c}_1,\dots\bar{c}_m$.

Démonstration. Découle de 12, 13 et 14. □

<u>16. Lemme</u>. "$(c_1,\dots c_m)$ est séparable" se dit par une disjonction infinie de formules en $\bar{c}_1,\dots\bar{c}_m$.

Démonstration. Un idéal I de $K[X_1,\dots X_n]$ admet une décomposition primaire. On a vu en 5 que si I est séparable, il est radiciel, sa décomposition est alors première; donc, par 6, I est intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers séparables. Réciproquement une telle intersection est évidemment séparable. Autrement dit, I est séparable ssi K satisfait $\bigvee_{r\in\mathbb{N}}$ [(il existe des idéaux $P_1,\dots P_r$ engendrés par $\leq r$ polynômes de degré $\leq r$) $\bigwedge_i$ (P_i est premier et séparable) $\wedge$ ($I = \bigcap_i P_i$)] . L'expression entre crochets est du premier ordre par rapport aux coefficients des générateurs de I . □

17. Corollaire. "$(c_1,\ldots c_m)$ est séparable" se dit au premier ordre sans paramètre sur $\bar{c}_1,\ldots\bar{c}_m$.

Démonstration. Résulte de 12, 13 et 16. □

En appliquant 12 avec pour T la théorie des corps de caractéristique p dans le langage $\{0, 1, +, -, .\}$ enrichi de symboles de constantes pour $\bar{c}_1,\ldots\bar{c}_m$, on obtient plus précisément l'uniformité par rapport à K , c'est-à-dire la première partie du théorème 9 . □

Ce même lemme 12 et la forme des énoncés dont la conjonction infinie exprime la séparabilité de $(c_1,\ldots c_m)$, prouvent presque la première partie du théorème 10: ils prouvent l'existence d'une borne M dépendant non seulement de p , n et d , mais aussi de m . En fait, si p , n et d sont fixés et que m_o est la dimension de l'espace vectoriel des polynômes à n variables de degré $\leq d$, un idéal $(c_1,\ldots c_m)$ comme dans l'énoncé 10 admet un système de générateurs extrait des c_i à $\leq m_o$ éléments. On a donc $M(p,n,m,d) \leq M(p,n,m_o,d)$, ce qui prouve 10-1.

18. Lemme. "$z \in \text{Sép}(c_1,\ldots c_m)$" se dit par une disjonction infinie d'énoncés sans paramètre en $z,\bar{c}_1,\ldots\bar{c}_m$.

Démonstration. On utilise la caractérisation donnée en 4: $z \in \text{Sép}(I)$ ssi $\bigvee z \in \text{Sép}_n(I)$, et chaque $\text{Sép}_n(I)$ est lui-même défini par une disjonction infinie, correspondant à la quantification existentielle sur le s . □

19. Lemme. "$z \in \text{Sép}(c_1,\ldots c_m)$" se dit par une conjonction infinie d'énoncés sans paramètre en $\bar{z},\bar{c}_1,\ldots\bar{c}_m$.

Démonstration. On exprime que tout idéal séparable contenant $(c_1,\ldots c_m)$

contient z . □

Les secondes parties des théorèmes 9 et 10 découlent de 12, 18 et 19, avec la même remarque que ci-dessus pour obtenir l'uniformité par rapport à m .

Nous utiliserons aussi le résultat suivant de van den Dries :

<u>20. Proposition</u>. (1-4 p.123 dans [vdD]). Les entiers n et d étant fixés, il existe une formule E telle que, pour tout corps K , tous $c_1,..c_m \in K[X_1,...X_n]$ de degré $\leq d$, $K \models E(\bar{c}_1,...\bar{c}_m)$ ssi $(c_1,...c_m)$ est premier; plus précisément, il existe un entier $A = A(n,d)$ tel que, pour tout K et tous $c_1,...c_m \in K[X_1,...X_n]$ de degré $\leq d$, $(c_1,...c_m)$ est premier ssi, pour tous x et $y \in K[X_1,...X_n]$ de degré $\leq A$ tels que $xy \in (c_1,...c_m)$, alors x ou bien $y \in (c_1,...c_m)$.

Il y a au-dessus d'un idéal I de $K[X_1,...X_n]$ un nombre fini d'idéaux premiers séparables minimaux P_i : ce sont les premiers minimaux au-dessus de Sép(I) , qui doivent être séparables par 6. Puisque Sép(I) est radiciel, on a $\text{Sép}(I) = \cap P_i$ (Mc Kenna [M] a démontré, dans un contexte assez différent et très général, un résultat proche de celui-ci). Montrons qu'on peut borner, en fonction du degré des générateurs de I , le nombre des P_i et le degré de leurs générateurs.

<u>Proposition</u>. Si les entiers p premier, n , m et r sont fixés, il y a une formule G du langage des anneaux telle que, quel que soit le corps K de caractéristique p , quels que soient $c_1,...c_m,f_1,...f_r \in K[X_1,...X_n]$ de degré $\leq r$, on a l'équivalence:

$$(f_1,...f_r) = \text{Sép}(c_1,...c_m) \text{ ssi } K \models G(\bar{c}_1,...\bar{c}_m,\bar{f}_1,...\bar{f}_r) .$$

Démonstration. On a $J = \text{Sép}(I)$ ssi J est séparable, contient I et chaque générateur de J est dans Sép(I) . Le résultat découle donc de 17, 11 et 9. □

Corollaire. Il existe un entier $A = A(p,n,d)$ tel que, pour tout corps K de caractéristique p et tous polynômes $c_1,\dots c_m \in K[X_1,\dots X_n]$ de degré $\leq d$, $\mathrm{Sép}(c_1,\dots c_m)$ est engendré par $\leq r$ polynômes de degré $\leq r$.

Démonstration. La théorie des corps de caractéristique p dans le langage $\{0, 1, +, -, ., \bar{c}_1,\dots \bar{c}_m\}$ implique la disjonction d'énoncés du premier ordre

$$\bigvee_r (\exists f_1,\dots f_r \text{ polynômes de degré } \leq r)((f_1,\dots f_r) = \mathrm{Sép}(c_1,\dots c_m)) .$$

Par compacité, elle implique une sous-disjonction finie. Cela donne l'existence d'une borne A dépendant de p, n, d et m, on élimine m comme précédemment. □

Théorème. Il y a un entier $E = E(p,n,d)$ tel que, pour tout corps K de caractéristique p, si I est un idéal de $K[X_1,\dots X_n]$ engendré par des polynômes de degré $\leq d$, les idéaux premiers séparables minimaux au-dessus de I sont en nombre $\leq E$ et engendrés par des polynômes de degré $\leq E$.

Démonstration. Les idéaux premiers séparables minimaux au-dessus de I sont les premiers minimaux au-dessus de $\mathrm{Sép}(I)$. Le théorème découle donc du corollaire précédent et du théorème analogue pour les idéaux premiers minimaux (voir par exemple [vdD] 1.5 p.123). □

3. CONDITIONS DE CHAÎNES.

On étend la notion classique de profondeur d'un idéal. Les relations $P(I) \geq \alpha$ et $PS(I) \geq \alpha$, où I est un idéal premier (ou premier et séparable) de $C = K[X_i \ ; \ i \in \omega]$, sont définies par induction:

$$P(I) \geq 0 \text{ et } PS(I) \geq 0 \text{ si } I \subsetneq C$$

si λ est limite, $P(I) \geq \lambda$ ssi $\forall\beta < \lambda \ P(I) \geq \beta$

$$PS(I) \geq \lambda \text{ ssi } \forall\beta < \lambda \ PS(I) \geq \beta$$

$$P(I) \geq \alpha + 1 \text{ ssi il existe un idéal premier } J \text{ de } C$$

vérifiant $I \subsetneq J$ et $P(J) \geq \alpha$

$PS(I) \geq \alpha + 1$ ssi il existe J premier et séparable

vérifiant $I \subsetneq J$ et $PS(J) \geq \alpha$.

S'il existe, le premier ordinal α ne vérifiant pas $P(I) \geq \alpha$ (ou $PS(I) \geq \alpha$) est successeur; son prédécesseur est appelé profondeur de I et noté $P(I)$ (ou profondeur séparable et noté $PS(I)$). Sinon on dit que $P(I)$ (ou $PS(I)$) est infini, ou n'est pas défini.

Fait (Christian U. Jensen). Si K est dénombrable, tout ordinal dénombrable est profondeur d'un idéal de C .

Démonstration. Pour un ordinal α , $-\alpha$ est l'ordre inverse de α , et $\mathbf{Z}^{(-\alpha)}$ la somme lexicographique de $(-\alpha)$ copies du groupe ordonné $(\mathbf{Z},+)$. Soit sur l'anneau de polynômes $K[\ \mathbf{Z}^{(-\alpha)}\ ]$ la valuation canonique v à valeurs dans $\mathbf{Z}^{(-\alpha)}$, L la clôture henselienne de $Q(\ K[\ \mathbf{Z}^{(-\alpha)}\ ]\ )$ pour v , et A l'anneau de valuation de L . Les sous-groupes convexes de vL sont exactement:

$$0 \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbf{Z}^{(-\beta)} \subsetneq \ldots , \text{ pour } \beta < \alpha .$$

Les idéaux premiers de A constituent une chaîne isomorphe. Si K et α sont dénombrables, L peut être présenté comme $A \simeq C/I$ pour un idéal I de C et les idéaux premiers entre I et C sont en bijection avec les idéaux premiers de A , d'où $P(I) = \alpha$. □

Question. Existe-til des idéaux de profondeur et profondeur séparable distinctes? Nous étudierons des questions proches en III-5 et V.

21. Lemme. Si L est une extension régulière de K et I un idéal premier de C , on a $P(I) \leq P(I \otimes_K L)$, et si I est de plus séparable, $PS(I) \leq PS(I \otimes_K L)$.

Démonstration. Parce que l'extension $K \subset L$ est régulière, $I \otimes_K L$ reste premier, éventuellement séparable, dès que I l'est. Un idéal entre I et C fournit donc un idéal de même nature entre $I \otimes_K L$ et $C \otimes_K L$, et le résultat s'obtient par induction. □

22. Lemme. Le degré de transcendance $tr(Q(C/I);K)$ est au moins égal à $P(I)$ si $P(I)$ est fini, et infini sinon.

Démonstration. Par induction il suffit de montrer que, si on a $I \subsetneq J \subsetneq C$ avec $P(J)$ fini, alors $tr(Q(C/I);K) > tr(Q(C/J);K)$. Prenons un entier n pour lequel $I_n \subsetneq J_n$ si $I_n = I \cap K[X_1,\dots,X_n]$. Grâce à l'égalité, en dimension finie, entre profondeur d'un idéal et degré de transcendance du corps correspondant, on a

$$tr(Q(K[X_1,\dots,X_n]/I_n);K) > tr(Q(K[X_1,\dots,X_n]/J_n);K)$$

et il existe un entier i , $1 \leq i \leq n$, tel que X_i est algébrique sur $K[X_j ; 1 \leq j \leq n , i \neq j]$ modulo J_n et non modulo I_n ; X_i reste algébrique modulo J et transcendant modulo I . □

Un travail plus précis demande le recours à des hypothèses supplémentaires sur K et L . Rappelons préalablement ce qu'est le corps de définition d'un idéal.

23. Proposition et définition. Soit un idéal I de C .

1/ On appelle corps de définition de I un corps $K_o \subset K$ tel que I admet un système de générateurs à coefficients dans K_o .

2/ I admet un corps de définition minimal K_o .

3/ Si σ est un automorphisme de K , alors $\sigma(I) = I$ ssi $\sigma \restriction K_o$ est l'identité de K_o .

4/ K_o est dénombrablement engendré.

Démonstration. Voir [Lang] p.62 ; le fait que nous soyons en dimension infinie ne change rien. □

24. Proposition. Si K est ω_1-saturé et l'extension $K \subset L$ élémentaire on a, pour un idéal I premier de C , $P(I) = P(I \otimes_K L)$, et si I est de plus

séparable, $PS(I) = PS(I \otimes_K L)$.

Démonstration. Après 21, il reste à prouver que $P(I \otimes_K L) \geq \alpha$ implique $P(I) \geq \alpha$. L'induction ne pose un problème que lorsque α est successeur. Supposons donc $P(I \otimes_K L) \geq \alpha + 1$; il existe alors un idéal J premier de $C \otimes_K L$ vérifiant $I \otimes_K L \subsetneq J \subsetneq C \otimes_K L$ et $P(J) \geq \alpha$. Soit K_o le corps de définition de I , $(a_{n,j})_{j=1,\dots,j_n}$ des générateurs de J_n et $\bar{a}_{n,j}$ la suite des coefficients de $a_{n,j}$. Le type de $(\bar{a}_{n,j})_{n,j}$ sur K_o contient les propriétés suivantes: pour tout n , les polynômes $(a_{n,j})_{j=1,\dots,j_n}$ engendrent un idéal premier contenant I_n , et le contenant strictement à partir d'un certain rang fixé. Ce type est réalisé dans L donc consistant donc réalisé dans K par des $(\bar{b}_{n,j})_{n,j}$; soit J' l'idéal correspondant de C . Considérons une extension élémentaire saturée M de L . Les $(\bar{a}_{n,j})_{n,j}$ et les $(\bar{b}_{n,j})_{n,j}$ ont même type sur K_o et se correspondent donc par un K_o-automorphisme de M ; les idéaux qu'ils engendrent, c'est-à-dire $J \otimes_L M$ et $J' \otimes_K M$, aussi; $J \otimes_L M$ et $J' \otimes_K M$ ont donc même profondeur. On a $P(J) \geq \alpha$ donc $P(J \otimes_L M) \geq \alpha$ d'après 21, $P(J' \otimes_K M) \geq \alpha$ d'après ce qui précède, et $P(J') \geq \alpha$ par hypothèse d'induction. Or J' est un idéal premier de C contenant strictement I .

Même chose pour PS. □

<u>Proposition</u>. Supposons le corps K ω_1-saturé. Quand elle est définie, la profondeur (éventellement séparable) d'un idéal de $K[X_i ; i \in \omega]$ est un ordinal dénombrable.

Démonstration. La profondeur d'un idéal est son rang de fondation pour l'ordre inverse de l'inclusion à l'intérieur d'une certaine famille d'idéaux. Nous copions dans [P1] la preuve de ce que tout point de l'ordre fondamental a un rang de fondation au plus dénombrable. Nous utilisons pour cela un "ultraproduit" d'idéaux qui coïncide avec l'ultraproduit des types lorqu'on assimile un idéal I au ω-type $\{P(\bar{X}) = 0 \ ; \ P \in I\} \cup \{P(\bar{X}) \neq 0 \ ; \ P \notin I\}$. Plus précisément, si les $(I_j)_{j\in\omega}$ sont des idéaux de $C = K[X_i ; i \in \omega]$ et U un ultrafiltre sur ω , $(I_j)^U$ est l'idéal de $K^U[X_i ; i \in \omega]$ défini comme suit: pour $P \in \mathbb{F}_p[\bar{Y},\bar{X}]$ et $\bar{a}_j \in K$, $j\in\omega$, on a $P((\bar{a}_j)^U,\bar{X}) \in (I_j)^U$ ssi $\{j \in \omega ; P(\bar{a}_j,\bar{X}) \in I_j\} \in U$. On voit facilement que $(I_j)^U$ est un idéal, et est premier ou séparable si les I_j le sont; si tous les I_j contiennent un idéal J de C , alors $(I_j)^U$ contient $J \otimes K^U$.

Soit donc un idéal I de C ; on suppose que pour tout ordinal dénombrable α il existe J vérifiant $I \subsetneq J \subsetneq C$ et $P(J) \geq \alpha$. Par induction sur $n \in \omega$ on construit une suite décroissante d'ensembles X_n d'ordinaux cofinaux dans ω_1 , pour $i \in \omega$ des polynômes $P_i = \Sigma\, Y_k \bar{X}^k \in \mathbb{F}_p[Y_k, X_j ; k \in \omega^{<\omega}, j \in \omega]$, et pour $\alpha \in X_n$ et $i=1,\ldots n$ des idéaux $I_{n,i,\alpha}$ de C vérifiant:

- $I \subset I_{n,1,\alpha} \subsetneq I_{n,2,\alpha} \cdots \subsetneq I_{n,n,\alpha}$;
- $I_{n,i+1,\alpha}$ contient un polynôme $P_i(\bar{a}_{n,i,\alpha},\bar{X})$ alors que $I_{n,i,\alpha}$ ne contient aucun $P_i(\bar{a},\bar{X})$, $\bar{a} \in K$;
- $P(I_{n,n,\alpha}) \geq \alpha$.

On part avec $I_{1,1,\alpha} = I$ et $X_n = \omega_1$; puis pour $1 \leq i \leq n$ on pose $I_{n+1,i,\alpha} = I_{n,i,\beta}$ où β est le successeur de α dans X_n ; puisque $P(I_{n,n,\beta}) \geq \beta \geq \alpha+1$, il y a un idéal J_α vérifiant $I_{n,n,\beta} \subsetneq J_\alpha$ et $P(J_\alpha) \geq \alpha$; donc il y a un polynôme $Q_\alpha(\bar{a}_\alpha,\bar{X}) \in J_\alpha - I_{n,n,\beta}$; pour une partie X_{n+1} cofinale de X_n , Q_α est égal à un même polynôme, qu'on prend comme P_{n+1} ; puis on pose $I_{n+1,n+1,\alpha} = J_\alpha$. Les $I_{n,i}$ définis en posant $I_{n,i} = I_{n,i,\alpha}$ où α est le premier élément de X_n , vérifient

- $I \subset I_{n,1} \subset I_{n,2} \cdots \subset I_{n,n}$
- $I_{n,i+1}$ contient un polynôme $P_i(\bar{a}_{n,i},\bar{X})$ alors que $I_{n,i}$ ne contient aucun $P_i(\bar{a},\bar{X})$, $\bar{a} \in K$.

Les ultraproduits $(I_{n,i})^U$ pour un ultrafiltre non trivial U sur les n , constituent une chaîne strictement croissante infinie entre $I \otimes K^U$ et $C \otimes K^U$; $I \otimes K^U$ a donc une profondeur infinie, et I aussi grâce à 24. □

la proposition suivante est à rapprocher de l'identité entre dimension et profondeur d'un idéal de $K[X_1,\dots X_n]$: elle établit un rapport entre les corps intermédiaires entre K et $Q(K[X_i\ ;\ i<\alpha]/I)$ et les idéaux entre I et $K[X_i\ ;\ i<\alpha]$.

25. Proposition. Soit $L>K$, K ω_1-saturé , $(x_i)_{i\in\lambda}$ des éléments de L engendrant L sur K . S'il existe des corps intermédiaires $(K_\beta)_{\beta<\alpha}$ tels qu'on ait des inclusions régulières $K \subsetneq K_\beta \subset L$ et $K_\gamma \subsetneq K_\beta$ pour tous $\beta<\gamma<\alpha$, alors on a, si I est l'annulateur de $(x_i)_{i\in\lambda}$ sur K , $PS(I)\geq\alpha$.

Démonstration. Soit I_β l'annulateur de $(x_i)_{i\in\lambda}$ sur K_β ; parce que l'extension $K_\beta\subset L$ est séparable, I_β est séparable, et parce que cette extension est régulière, $I_\beta \otimes_{K_\beta} L$ reste premier séparable. L'inclusion $I_\beta \otimes_{K_\beta} L \subset I_{\beta+1} \otimes_{K_{\beta+1}} L$ est stricte puisque $K_\beta \subsetneq K_{\beta+1}$. La chaîne des $I_\beta \otimes_{K_\beta} L$ impose $PS(L\otimes_K L)\geq\alpha$ et donc $PS(I)\geq\alpha$ par 24. □

La proposition suivante dit que la profondeur d'un idéal de $K[X_1,\dots X_n]$ s'exprime au premier ordre sur les coefficients des générateurs. Comme nous montrerons plus tard (partie V) que profondeur et profondeur séparable coïncident dans $K[X_1,\dots X_n]$, la même formule donne évidemment la profondeur séparable.

26. Proposition. Les entiers p premier, n, m, d, et r sont fixés. Alors il existe une formule E du langage des anneaux telle que, quel que soit le corps K de caractéristique p , quels que soient $c_1,\dots c_m \in K[X_1,\dots X_n]$ de degré $\leq d$, l'idéal engendré par $c_1,\dots c_m$ est premier et de hauteur r ssi $K \models E(\bar c_1,\dots \bar c_m)$. En conséquence, il existe un entier D tel que, quels que soient K et $c_1,\dots c_m \in K[X_1,\dots X_n]$ de degré $\leq d$ et engendrant un idéal I premier, $P(I)\geq r$ ssi il y a une chaîne première

$$I \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \ \dots\ P_r \subsetneq K[X_1,\dots X_n] ,$$

où les P_i sont engendrés par $\leq D$ polynômes de degré $\leq D$.

Démonstration. On utilise le lemme 12. On a $P(I)\geq r$ ssi le degré de transcendance de $K[X_1,\dots X_n]$ sur K est $\geq r$ ssi K satisfait

$$\bigvee_{1<i_1<\dots<i_r<n} \bigwedge_s \text{(il n'y a pas de relation algébrique de degré } \leq s \text{ entre } X_{i_1}/I,\dots X_{i_r}/I)$$

ou encore, ssi K satisfait

$$\bigvee \bigwedge_s (\forall P \in K[X_1,\dots X_n],\ P\neq 0 \text{ et de degré } \leq s)\ (P(X_{i_1},\dots X_{i_r}) \notin I)$$

ce qui est une conjonction infinie d'énoncés du premier ordre en $\bar{c}_1,\dots\bar{c}_m$. La disjonction, pour chaque s , des énoncés traduisant l'existence d'une chaîne première

$$I \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \dots \subsetneq P_r \subsetneq K[X_1,\dots X_n]$$

où les P_i sont engendrés par $\leq s$ polynômes de degré $\leq s$, lui est équivalente. □

PARTIE II

THÉORIES COMPLÈTES DE CORPS SÉPARABLEMENT CLOS

Considérons dans le langage des anneaux la théorie $S_{p,e}$ des corps séparablement clos de caractéristique p et de degré d'imperfection $e \in \omega \cup \{\infty\}$. Eršov [E] a montré que $S_{p,e}$ est complète. La preuve est la suivante:

1) $S_{p,e}$ admet $\mathbb{F}_p(X_i ; i\in e)^S$ comme modèle premier, où, si K est un corps, K^S désigne sa clôture algébrique séparable;

2) si on enrichit le langage avec les prédicats de p-indépendance, c'est-à-dire

- si e est fini, un prédicat Q d'arité e ,
- si e est infini, des prédicats Q_n d'arité n , pour $n \in \omega$,

alors les extensions par définition de $S_{p,e}$ obtenues en ajoutant, si e est fini, l'axiome

$$Q(x_1,\ldots x_e) \longleftrightarrow \forall(y_j)_{j\in p^e} \{ [\bigwedge y_j=0] \vee \sum_j y_j^p \prod_i x^{j(i)} \neq 0 \}$$

et, si e est infini, les axiomes suivants, pour $n \in \omega$,

$$Q_n(x_1,\ldots x_n) \longleftrightarrow \forall(y_j)_{j\in p^n} \{ [\bigwedge y_j=0] \vee \sum y_j^p \prod x^{j(i)} \neq 0 \} ,$$

sont modèle-complètes, donc complètes grâce au 1).

A fortiori, $S_{p,e}$ est complète.

On a vu que $S_{p,e}$ admet un modèle premier. Plus généralement il y a un modèle premier au-dessus de tout ensemble de paramètres A : on prend une partie B de A p-libre dans un modèle contenant A , ce qui peut être strictement plus fort que p-libre dans A , et maximale; on prend le corps A_1 engendré par les composantes des éléments de A sur B ; puis on choisit dans A_1 une partie B_1 p-libre dans un modèle, contenant B et maximale, et on prend le corps A_2

engendré par les composantes des points de A_1 sur B_1, etc. ...; soit $K = \cup A_n$; si le degré d'imperfection de K est strictement inférieur à e, on ajoute des points p-indépendants en quantité adéquate, on prend le corps engendré, puis la clôture algébrique séparable.

Remarquons que si $\mathbb{F}_p(A)$ a un degré d'imperfection égal à e, le modèle premier sur A est algébrique, au sens de la théorie des modèles -- nous dirons modèle-algébrique pour éviter les confusions, -- sur A. Grâce à cela, on a les faits suivants:

- si $K < L$ et $K < M$ sont des modèles de $S_{p,e}$, $L \cap M$ est aussi un modèle, quel que soit le plongement commun considéré de L et M ;
- pour $K < L \models S_{p,e}$ et $A \subset L$, le modèle premier sur $K \cup A$ est modèle-algébrique sur $K \cup A$;
- pour $K \subset A \subset L$, $K < L \models S_{p,e}$, alors $A \models S_{p,e}$ ssi A est modèle-algébriquement clos dans L.

La conservation de la p-indépendance lors d'une extension $K \subset L$ est équivalente au fait que l'extension est séparable. Le 2) de la preuve d'Eršov peut donc ainsi s'exprimer: pour $K \subset L$, K et L modèles de $S_{p,e}$, on a $K < L$ ssi l'extension est séparable.

<u>27. Proposition</u>. Si e est fini, dans le langage $\{ 0, 1, +, -, . \} \cup \{ f_i ; i \in p^e \}$ où les f_i sont des symboles de fonction à $n+1$ variables, l'extension par définition de $S_{p,e}$ obtenue en ajoutant les axiomes suivants, pour $i \in p^e$:

$$z = f_i(x,y_1,\dots y_e) \leftrightarrow$$

$$\{ [(y_1,\dots y_e \text{ sont p-indépendants}) \wedge (z \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ p-composante de } x \text{ sur } y_1,\dots y_e)] \vee [(y_1,\dots y_e \text{ ne sont pas p-indépendants}) \wedge (z = 0)] \}$$

admet l'élimination des quantificateurs.

Si e est infini, on obtient l'élimination des quantificateurs en ajoutant à $S_{p,e}$ les symboles de fonction $f_{n,i}$, $n \in \omega$, $i \in p^n$, d'arité $n+1$, et les axiomes:

$$z = f_{n,i}(x,y_1,\dots y_n) \leftrightarrow$$

$$\{ [(y_1,\dots y_n \text{ sont p-indépendants}) \wedge (x \in K^p(y_1,\dots y_n)) \wedge$$

$$z \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ composante de } x \text{ sur } y_1,\dots y_n] \vee$$

$$[[(y_1,\dots y_n \text{ ne sont pas p-indépendants}) \vee (x \notin K^p(y_1,\dots y_n))]$$

$$\wedge (z = 0)] \} .$$

Démonstration. On utilise le test de Shoenfield: une théorie T d'un langage L admet l'élimination des quantificateurs lorsque, quels que soient les modèles M ω_1-saturé et K dénombrable de T, et les L-sous-structures A et B respectivement de K et M, avec un L-isomorphisme σ entre A et B, σ se prolonge en un L-plongement de K dans M. Dans le cas présent A est un anneau, le prolongement des $f_{n,i}$ sur $Q(A)$ est imposé et interne, car $ab^{-1} = (ab^{p-1}).b^p$. Dès lors, les modèles premiers au-dessus de A et de B sont isomorphes, par un isomorphisme prolongeant σ, et cet isomorphisme se prolonge à K tout entier. □

PARTIE III

TYPES DANS LE CAS D'UN DEGRÉ D'IMPERFECTION FINI

Dans le cas d'un degré d'imperfection nul, on retrouve des théories de corps algébriquement clos, dont on sait qu'elles sont ω-stables. Nous supposerons donc désormais p et e strictement positifs. Nous allons travailler dans un langage enrichi d'une p-base: dans cette partie, le langage est $\{ 0, 1, +, -, ., b_o,\dots b_{e-1} \}$ et la théorie est $T_{p,e} = S_{p,e} \cup \{$"$b_o,\dots b_{e-1}$ sont p-indépendants"$\}$. Comme $S_{p,e}$, $T_{p,e}$ est complète et, si $K \subset L$ sont deux modèles, on a $K < L$ ssi l'extension est séparable. De plus le modèle premier au-dessus d'un ensemble de paramètres A est maintenant la clôture modèle-algébrique de A .

1. DESCRIPTION DES TYPES

Soit $K \models T_{p,e}$, $B = \{ b_i ; i < e \}$ et m_j , $j \in (p^n)^e$, les p^n-monômes associés; considérons l'anneau C des polynômes à une infinité d'indéterminées sur K , qu'on indexe comme suit:

$$C = K[X, X_0, X_1,\dots X_{p^e-1}, X_{0,0},\dots] = K[X_i ; i \in (p^e)^{<\omega}]$$

où $(p^e)^{<\omega}$ est l'ensemble des suites de longueur finie à valeurs dans p^e ; on met en outre un ordre quelconque sur p^e de façon à pouvoir parler des "r premières composantes" d'un point sur la p-base, si $r \leq p^e$. Soit I' l'idéal de C engendré par les polynômes

$$X - \sum_{j \in p^e} X_j^p m_j$$, et plus généralement

$$X_i - \sum_{j\in p^e} X_{i\frown j}{}^p m_j \text{ , pour } i \in (p^e)^{<\omega} .$$

On pose $C_n = K[X_i \; ; \; i \in \bigcup_{m\leq n} (p^e)^m]$ (les indices varient parmi les suites de longueur $\leq n$) . Si I est un idéal de C et si on pose $I_n = I \cap C_n$, I est premier, ou séparable, ssi chaque I_n l'est.

Comme usuellement, $S_n(K)$ désigne l'espace de Stone des types à n variables sur K et, si φ est une formule à n variables libres, $<\varphi> = \{p \in S_n(K) \; ; \; \varphi \in p\}$.

28. Proposition. Il y a bijection entre $S_1(K)$ et $\mathcal{I} = \{I$ idéal de C ; I propre, premier, séparable et contenant $I^*\}$.

Démonstration. 1) Soit $q \in S_1(K)$ réalisé par $x \in M > K$; appelons x_i , $i \in p^e$, les composantes de x sur B , $x_{j\frown i}$, $i \in p^e$, les composantes de x_j sur B , pour $j \in p^{en}$; $x_\emptyset = x$. A q on associe l'idéal $I = I_K(x)$ de C des liaisons algébriques entre x et ses composantes successives; on a donc $K[x_i \; ; \; i \in (p^e)^{<\omega}] \simeq_K K[X_i \; ; \; i \in (p^e)^{<\omega}]/I$. L'extension $K \subset M$ est séparable, donc a fortiori l'extension $K \subset K(x_i;i\ldots)$, ce qui prouve que I est séparable. il est premier puisque c'est un annulateur, et contient I^* par définition de la décomposition sur B . La clôture algébrique séparable du corps des quotients de C/I est modèle premier au-dessus de K et q .
2) Réciproquement, soit $I \in \mathcal{I}$. Soit x_i la classe de X_i dans C/I et $L = Q(C/I)$. Parce que I est séparable, L est une extension séparable de K , B reste donc p-libre dans L ; elle reste p-génératrice parce que L contient les composantes de toute profondeur des x_i sur B et que les x_i engendrent L sur K ; on a donc $K < L^s$ et $I = I_K(x)$.
3) On a défini entre $S_1(K)$ et $\mathcal{I}$ deux applications qui sont clairement réciproques l'une de l'autre. □

29. Corollaire ([W], et [Sh2] p.71). $T_{p,e}$ est stable.

Démonstration. Dénombrons les éléments de $\mathcal{I}$. Pour tout entier n , I_n est un idéal d'un anneau noetherien, il admet donc un nombre fini de générateurs, et I un nombre dénombrable; ces générateurs sont des polynômes sur K , donc $|\mathcal{I}| \leq |K|^{\omega}$; or $|S_1(K)| \leq |\mathcal{I}|$ d'après 28. □

<u>Remarque</u>. $T_{p,e}$ n'est pas superstable pour $e > 0$, à cause de la suite de sous-corps $K \supset K^p \supset K^{p^2} \ldots$, car, dès que K est infini et non parfait, le groupe, additif par exemple, $K^{p^{i+1}}$ est d'indice infini dans K^{p^i} .

<u>Notations</u>. Pour $K < M$, $x \in M$ et $A \subset M$, $t(x,K)$ est le type de x sur K , $K\langle x \rangle$ le modèle premier au-dessus de K et x , $K\langle A \rangle$ au-dessus de K et A , $\langle A \rangle$ au-dessus de A . Pour $q \in S_1(K)$, $K\langle q \rangle$ est le modèle premier, défini à K-isomorphisme près, au dessus de K et q ; $I_K(q)$ est l'idéal $I_K(a)$ pour une réalisation quelconque a de q .

<u>Définition</u> (cf. [Sh3] et [P3]). On appelle <u>corps de définition d'un type</u> $q \in S_1(K)$ un corps $L \subset K$ tel que, pour tout automorphisme σ de K , on a $\sigma(q) = q$ ssi $\sigma \restriction L = Id_L$.

<u>30. Proposition</u>. Le corps de définition minimal (cf. 23) de l'idéal $I_K(q)$ est un corps de définition de q .

Démonstration. Evident d'après 23 et 28. □

<u>31. Remarque</u>. Pour tout entier n , on a une injection définissable f : $S_n(K) \longrightarrow S_1(K)$. En effet, si $q \in S_n(K)$ est réalisé en $a_o,\ldots a_{n-1}$, choisissons un entier r vérifiant $n \leq p^{er}$, et complétons $a_i = 0$, pour $n \leq i < p^{er}$. On prend alors pour $f(q)$ le type de $\sum_{j \in p^{er}} a_j^{p^r} m_j$ sur K . De la même façon, on a une injection $\bar{f}$ des formules à n variables dans les formules à une variable: $\bar{f}(\varphi(x_o,\ldots x_{n-1}))$ est la formule en x

$$\exists (y_j)_{0 \leq j < n} [\varphi(y_o,\ldots y_{n-1}) \wedge x = \sum y_j^{p^r} m_j] .$$

Il est clair qu'on a $q \in \langle \mathfrak{p} \rangle$ ssi $f(q) \in \langle \bar{f}(\mathfrak{p}) \rangle$; l'injection f de $S_n(K)$ dans $S_1(K)$ est donc un plongement continu d'espaces de Stone.

Si q est un type sur un ensemble de paramètres A, du fait que le modèle premier $\langle A \rangle$ est modèle-algébrique sur A, toutes les extensions de q à $\langle A \rangle$ sont non déviantes. En revanche, les types ne se ramènent pas aux idéaux, car en général, $I_A(x) = I_{\langle A \rangle}(x) \cap A[X_i \ ; \ i \in (p^e)^{<\omega}]$ ne détermine pas $t(x,A)$; on donne un contre-exemple à la fin de III 3. Comme nous allons le voir, cela redevient correct dès que A est définissablement clos.

<u>32. Lemme</u>. Soit un corps A et un idéal premier P de $A[X_i \ ; \ i \in \omega]$. Les idéaux premiers minimaux au-dessus de $P \otimes A^s$ sont conjugués au-dessus de A et coupent $A[X_i \ ; \ i \in \omega]$ en P. Si P est séparable, $P \otimes A^s$ est séparable.

Démonstration. Si Q est un idéal de $A^s[X_i \ ; \ i \in \omega]$, l'idéal $Q_o = \cap \{ \sigma(Q) \ ; \ \sigma$ A-automorphisme de $A^s \}$ est invariant par A-automorphisme et admet A pour corps de définition, d'où $Q_o = (Q_o \cap A[X_i \ ; \ i \in \omega]) \otimes A^s$. Revenons à P. Il existe un idéal Q de $A^s[X_i \ ; \ i \in \omega]$ premier et vérifiant $Q \cap A[X_i \ ; \ i \in \omega] = P$: il suffit de prendre un plongement commun quelconque au-dessus de A de $L = Q(A[X_i \ ; \ i \in \omega]/P)$ et A^s, et Q l'annulateur de $(X_i/P)_{i\in\omega}$ sur A^s. Appliquons ce qui précède à cet idéal Q ; certainement $Q \cap A[X_i \ ; \ i \in \omega] = Q_o \cap A[X_i \ ; \ i \in \omega] = P$, donc les idéaux premiers minimaux au-dessus de $P \otimes A^s$ sont les A-conjugués de Q, ce qui prouve la première assertion.

Si on suppose P séparable, un idéal premier R de $A^s[X_i \ ; \ i \in \omega]$ vérifiant $R \cap A[X_i \ ; \ i \in \omega] = P$ est séparable: il correspond, on l'a vu, à un plongement commun de A^s et L au-dessus de A ; A^s algébrique séparable au-dessus de A le reste sur L, donc A^sL est séparable sur L et sur A par transitivité, donc sur A^s. □

<u>33. Proposition</u>. Si A est définissablement clos, il y a bijection entre $S_1(A)$

et $\mathcal{I}(A) = \{ I$ idéal propre de $A[X_i ; i \in (p^e)^{<\omega}]$; I est premier, séparable et contient $I^\circ \}$.

Démonstration. 1) Un type q sur A est la restriction d'un type r sur $\langle A \rangle = A^s$; à q on associe $I_{\langle A\rangle}(r) \cap A[X_i ; i \in (p^e)^{<\omega}]$, qui ne dépend évidemment pas du choix de r , et appartient à $\mathcal{I}(A)$.

2) Réciproquement soit $I \in \mathcal{I}(A)$. On a vu en montrant 32 qu'il existe un idéal P premier de $\langle A \rangle[X_i ; i \in (p^e)^{<\omega}]$ vérifiant $P \cap A[X_i ; i \in (p^e)^{<\omega}] = I$, et qu'un tel P est certainement séparable. En conséquence P appartient à $\mathcal{I}(\langle A \rangle)$ et il lui est associé un type sur $\langle A \rangle$. □

<u>34. Corollaire</u>. Si A est définissablement clos, un type $q \in S_1(A)$ est stationnaire ssi il a une seule extension à $\langle A \rangle$ ssi $J = I_A(q) \otimes_A \langle A \rangle$ est premier.

Démonstration. 1) Si J est premier, aucun autre idéal P premier de $\langle A \rangle[X_i ; i \in (p^e)^{<\omega}]$ ne vérifie $P \cap A[X_i ; i \in (p^e)^{<\omega}] = I_A(q)$ (pour des raisons de dimension).

2) Inversement, si J n'est pas premier, un idéal premier P vérifiant $P \cap A[X_i ; i \in (p^e)^{<\omega}] = I_A(q)$ n'admet pas de corps de définition inclus dans A et a donc un conjugué Q distinct de lui-même au-dessus de A . A P et Q correspondent deux extensions distinctes de q à $\langle A \rangle$. □

<u>35. Proposition</u>. Dans le langage $\{ 0, 1, -, +, ., b_0, \dots b_{e-1} \} \cup \{f_i ; i \in p^e\}$, où les f_i sont des symboles de fonction unaires, l'extension par définition

$$T_{p,e} \cup \{ y = f_i(x) \longleftrightarrow y \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ composante de } x \text{ sur } B ; i \in p^e \}$$

admet l'élimination des quantificateurs. Plus précisément toute formule en $x^1, \dots x^r$ est équivalente modulo $T_{p,e}$ à une combinaison booléenne de formules

$$P(x^i_j ; 1 \leq i \leq r , j \in (p^e)^{<\omega}) = 0$$

ou de leur négation, où $P \in \mathbb{F}_p(b_0, \dots b_{e-1})[X^i_j ; 1 \leq i \leq r , j \in (p^e)^{<\omega}]$ et, selon la notation antérieure, si $j = (j_0, \dots j_n)$ avec $j_0, \dots j_n \in p^e$,

$$x_j = f_{j_n} \circ f_{j_{n-1}} \circ \ldots f_{j_o}(x) \ .$$

Démonstration. On pourrait déduire ce résultat de 27, mais il découle aussi de l'étude des types par une astuce classique. Appelons "bonnes formules" les formules décrites dans l'énoncé. On a vu qu'elles suffisent pour axiomatiser les 1-types, et donc n'importe quel type grâce à 31. Soit une formule $F(\bar{x})$ où $\bar{x} = (x^1, \ldots x^r)$; considérons

$$\Gamma = \{ G(\bar{x}) \ ; \ G \text{ est une bonne formule consistante et } T_{p,e} \vdash F \longrightarrow G \} \ .$$

On a alors $T_{p,e} \vdash F \longleftrightarrow \Gamma$: $\longrightarrow$ est clair ; si on suppose $\longleftarrow$ faux, $\neg F \wedge \Gamma$ peut être complété en un r-type, donc il existe un ensemble Σ de bonnes formules consistant avec $T_{p,e}$ et impliquant $\neg F \wedge \Gamma$; par compacité il y a un $\sigma \in \Sigma$ tel que $T_{p,e} \wedge \sigma \vdash \neg F$; mais alors $\neg\sigma \in \Gamma$, contradiction. Par compacité, F est équivalente à une partie finie de Γ . □

2. DÉVIATION

Cette sous-partie s'est beaucoup inspirée de [B] et [Las2], et est assez proche de l'analyse de la relation de dépendance faite indépendamment par G. Srour [Sr1].

36. Proposition. Soit $K < M \models T_{p,e}$, $r \in S_1(M)$, $q = r{\restriction}K$, x une réalisation de r . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) $I_M(r) = I_K(q) \otimes_K M$;

2) $L_M(r)$ a un corps de définition inclus dans K ;

3) $K(x_i ; i \in (p^e)^{<\omega})$ et M sont linéairement disjoints au-dessus de K ;

4) $K(x_i ; i \in (p^e)^{<\omega})$ et M sont algébriquement disjoints au-dessus de K ;

5) r hérite de q ;

6) $K\langle q \rangle$ et M sont linéairement disjoints au-dessus de K ;

7) $K\langle q \rangle$ et M sont algébriquement disjoints au-dessus de K .

Dans les deux lemmes qui suivent, K et M ne sont pas nécessairement modèles de $T_{p,e}$.

<u>37. Lemme</u>. Si I est un idéal de C et $M > K$, I est premier (ou séparable) ssi $I \otimes_K M$ l'est dans $C \otimes_K M$.

Démonstration. On a déjà traité le cas I premier en 8. Par ailleurs I est séparable ssi chaque I_n l'est, et 17 permet de conclure. □

<u>38. Lemme</u>. Soit des corps $N \supset M \supset K$ tels que l'extension $K \subset M$ soit régulière, $y = (y_1,\ldots y_n) \in N^n$, $\mathrm{Ann}(y,K)$ l'annulateur de y sur K . Sont alors équivalents :

1) $\mathrm{Ann}(y,M) = \mathrm{Ann}(y,K) \otimes_K M$;

2) $\mathrm{Ann}(y,M)$ a un corps de définition inclus dans K ;

3) $K(y)$ et M sont linéairement disjoints au-dessus de K ;

4) $K(y)$ et M sont algébriquement disjoints au-dessus de K .

Démonstration. L'hypothèse de régularité n'est utilisée que pour prouver $4 \Rightarrow 1$; $1 \Rightarrow 2$ et $3 \Rightarrow 4$ sont triviaux.

$2 \Rightarrow 3$. Soit, pour $0 \leq i \leq m$, des $f_i \in K[X_1,\ldots X_n]$ et des a_i non tous nuls $\in M$ vérifiant $\Sigma\, a_i f_i(y) = 0$, c'est-à-dire $\Sigma\, a_i f_i \in \mathrm{Ann}(y,M)$. En renumérotant éventuellement les f_i , on peut choisir $a_0 = 1$. D'après 2 , $\mathrm{Ann}(y,M)$ admet un système de générateurs $g_j \in K[X_1,\ldots X_n]$, donc $\Sigma\, a_i f_i = \Sigma\, b_j g_j$ pour des $b_j \in M[X_1,\ldots X_n]$ de degré $\leq d$. Alors M satisfait l'énoncé

$$\exists (a_i)_{0 \leq i \leq m}\ \exists (b_j \text{ polynôme de degré } \leq d \text{ en } X_1,\ldots X_n)_j$$
$$(a_0 = 1) \wedge (\Sigma\, a_i f_i = \Sigma\, b_j g_j) .$$

Cela signifie l'existence de solutions à un système d'équations linéaires dont les paramètres sont les coefficients des f_i et des g_j , donc dans K ; si ce système admet des solutions dans M , il est consistant et admet donc des solutions dans tout corps contenant les coefficients, en particulier dans K . Il existe donc des a'_i dans K et des b'_j dans $K[X_1,\dots X_n]$ vérifiant $a'_0 = 1$ et $\Sigma\, a'_i f_i = \Sigma\, b'_j g_j$, d'où $\Sigma\, a'_i f_i(y) = 0$. On a ainsi montré que des points de $K[y]$ linéairement dépendants sur M le restent sur K .

$4 \Rightarrow 1$. On a $\mathrm{Ann}(y,M) \supset \mathrm{Ann}(y,K) \otimes_K M$. D'après l'hypothèse de régularité, $\mathrm{Ann}(y,K) \otimes_K M$ est premier. D'après 4 , le degré de trancendance de $M(y)$ sur M ou de $K(y)$ sur K est le même, donc la dimension de Krull de $\mathrm{Ann}(y,M)$ dans $M[X_1,\dots X_n]$ ou de $\mathrm{Ann}(y,K)$ dans $K[X_1,\dots X_n]$ est la même. Comme par ailleurs $\mathrm{Ann}(y,K)$ et $\mathrm{Ann}(y,K) \otimes_K M$ ont même dimension, l'inclusion $\mathrm{Ann}(y,M) \supset \mathrm{Ann}(y,K) \otimes_K M$ implique l'égalité de ces idéaux. □

Démonstration de 36. L'équivalence entre 1, 3 et 4 découle de 38 car les propriétés considérées sont de type fini. Trivialement $1 \Rightarrow 2$. $2 \Rightarrow 3$ se montre comme dans 38, la seule différence est qu'a priori les g_j font intervenir d'autres indéterminées que $X_1,\dots X_n$. On a clairement $6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 4$, nous allons montrer $1 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6$.

$5 \Rightarrow 6$. Si r hérite de q , $t(K\langle r\rangle,M)$ ne dévie pas sur K , et donc dans $K\langle r\rangle$ l'indépendance linéaire au-dessus de M ou de K doit être la même.

$1 \Rightarrow 5$. D'après ce qui précède, un héritier q' de q sur M doit vérifier $I_M(q') = I_k(q) \otimes_K M$; or le type ainsi défini est unique. □

Remarque. On ne peut dans 6 et 7 remplacer $K\langle x\rangle$ par $K(x)$, voir la fin de III 3.

3. LE GÉNÉRIQUE

Dans une théorie de groupe stable, Poizat [P2] a défini un type générique sur un modèle G comme un type q tel que, pour tout héritier q' de q sur $G' > G$ et tout $a \in G'$, aq' ne dévie pas sur $\emptyset$. Dans le cas d'une théorie de corps stable, il a montré qu'il y a un seul générique pour chacune des deux lois d'addition et de multiplication, et que ces deux génériques coïncident. Nous utiliserons également dans ce qui suit, l'ordre de Rudin Keisler [Las1] : si q et r sont deux types sur un modèle K, on posera $q \leq_{RK} r$ ssi $K\langle q\rangle$ se K-plonge dans $K\langle r\rangle$; c'est en fait un préordre et on appelle RK-équivalence la relation d'équivalence associée.

39. Lemme. L'idéal $I^{\bullet}$ est premier et séparable.

Démonstration. Soit J^n l'idéal de C engendré par les polynômes

$$Q_j = X_j - \sum_{i \in p^e} X_{j^\frown i}{}^{p} m_i \text{ , pour } j \in \bigcup_{m \leq n-1} (p^e)^m .$$

1. On a $K[\, X_i ;\ i \in \bigcup_{m \leq n} (p^e)^m\,]/J^n \simeq K[\, X_i ;\ i \in (p^e)^n\,]$ et donc les X_i, $i \in (p^e)^n$, sont algébriquement indépendants modulo J^n.

2. Ils le restent modulo J^{n+r} pour tout entier r. En effet, pour chaque $i \in (p^e)^n$, $X_{i^\frown 0}$ est algébrique (purement inséparable) modulo J^{n+r} sur $K[\, X_i , X_{i^\frown j} ;\ j \in p^e$ et $j \neq 0\,]$, d'où l'inégalité

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(\, K[\, X_{i^\frown j} ;\ i \in (p^e)^n,\ j \in p^e\,]/J^{n+r} \ ;\ K\,) \\ &\leq \mathrm{tr}(\, K[\, X_i ;\ i \in (p^e)^n\,]/J^{n+r} \ ;\ K\,) + p^{en}(p^e-1); \end{aligned}$$

en conséquence les X_i, $i \in (p^e)^{n+1}$, sont algébriquement liés modulo J^{n+r} si les X_i, $i \in (p^e)^n$, le sont, donc par induction les X_i, $i \in (p^e)^{n+r}$, le sont, ce qui contredirait 1. □

40. Proposition. Le type associé à $I^{\bullet}$ est le générique.

Démonstration. Ce type est conservé par l'addition d'un élément du modèle, de même son héritier sur n'importe quelle extension. □

Remarques. 1) Toute composante du générique est générique. Plus précisément, les p^{en} composantes du générique sont des réalisations indépendantes du générique (x et y sont indépendants sur K lorsque $t(x,K\langle y\rangle)$ ne dévie pas sur K). On peut encore exprimer cela ainsi: appelons produit de deux types q et r

sur K le type sur K d'un couple (x,y) , où x et y réalisent de façon indépendante respectivement q et r ; alors le générique est égal à sa puissance p^{en} pour tout entier n .

2) Le générique peut faire dévier $\aleph_o$ réalisations indépendantes de lui-même: un point a réalisant le générique sur un modèle, fait dévier $a_0, a_{1,0}, a_{1,1,0},\ldots$ $a_{1,\ldots 1,0},\ldots$. Cela nous redonne une preuve de la non-superstabilité du générique, qu'on connaît a priori, puisque la théorie n'est pas superstable.

41. Proposition. Le générique est RK-minimal.

Cette proposition découle du lemme suivant.

42. Lemme. Si q est générique sur K , tout point de $K\langle q\rangle - K$ a une composante générique.

Démonstration. Soit x générique sur K et $y \in K\langle x\rangle - K$. Considérons le premier entier n tel que y soit algébrique séparable sur $K(x_i ; i \in (p^e)^n)$ et un polynôme minimal P de y sur ce corps, qu'on prend à coefficients dans $K[x_i ; i \in (p^e)^n]$ et irréductible sur cet anneau.

1er cas : un des x_i intervient dans P de façon séparable. Si x_{i_o} est algébrique séparable sur $L = K(y, x_i ; i \in (p^e)^n, i \neq i_o)$, on a $L[x_{i_o}] = L[x_{i_o}{}^{p^m}]$ pour tout entier m ; et comme $L \subset [\, K(y_k, x_{i\frown k} ; i \in (p^e)^n, i \neq i_o, k \in (p^e)^m)\,]^{p^m} (b_o,\ldots,b_{e-1})$, on a $L[x_{i_o}] \subset [\, K(y_k, x_{i\frown k} ; i$ et k comme ci-dessus$)[x_{i_o}]\,]^{p^m} (b_o,\ldots,b_{e-1})$, ce qui prouve que les composantes $x_{i_o\frown j}$, $j \in (p^e)^m$, sont algébriques séparables sur $K(y_k, x_{i\frown k} ; i$ et $k \ldots)$; cela oblige les y_k à être algébriquement indépendants sur $K(x_{i\frown k} ; i$ et $k \ldots)$ donc a fortiori sur K .

2ème cas. Sinon on prend le plus grand entier m tel que y soit algébrique séparable sur $K(x_i{}^{p^m} ; i \in (p^e)^n)$; tous les y_j , $j \in (p^e)^m$, sont alors algébriques séparables sur $K(x_i ; i \in (p^e)^n)$ et l'un d'entre eux, y_{j_o} , ne l'est pas sur $K(x_i^p ; i \in (p^e)^n)$; y_{j_o} rentre dans le premier cas. □

Nous pouvons maintenant donner deux contre-exemples évoqués précédemment.
1) Un point x peut dévier entre K et $L > K$, alors que $K(x)$ et L sont linéairement disjoints au-dessus de K : prendre x générique sur K et $L = K\langle x_0 \rangle$, où x_0 est la première p-composante de x.
2) Si A n'est pas un modèle, $I_A(x)$ ne détermine en général pas le type de x sur A : considérons g générique sur un modèle K, $A = K(g)$, $x = g_0$ et y générique sur A ; on a alors $I_A(x) = I_A(y) = I^{\cdot}$.

4. ÉLIMINATION DES IMAGINAIRES

Cette partie s'inspire fortement de [P3].

Définitions. 1) On appelle ensemble de définition d'une formule $f(\bar{x},\bar{a})$, $\bar{a} \in M$, un ensemble A tel que, pour tout automorphisme σ de $M' > M$, σ conserve $\{ \bar{x} \in M' ; M' \models f(\bar{x},\bar{a}) \}$ (on dira alors que σ conserve $f(\bar{x},\bar{a})$) ssi $\sigma | A$ est l'identité de A.
2) On dit qu'une théorie de corps élimine les imaginaires lorsque toute formule admet un plus petit ensemble de définition définissablement clos.

43. Proposition. $T_{p,e}$ élimine les imaginaires.

Remarquons d'abord que, pour $e > 0$, la théorie $S_{p,e}$ ne les élimine pas. En effet, considérons un élément a qui ne soit pas une puissance p, et la formule $f(x,a) = \exists y\ (a=y^p x)$. Conserver $f(x,a)$ équivaut à conserver la classe de a dans le groupe multiplicatif K^*/K^{*p} ; pour tout b congru à a modulo K^{*p}, $\mathbb{F}_p(b)$ est donc un ensemble de définition définissablement clos de $f(x,a)$; or, pour b et c algébriquement indépendants sur $\mathbb{F}_p$ -- et dans un modèle assez gros, il existe de tels b et c congrus à a modulo K^{*p} -- $\mathbb{F}_b(b) \cap \mathbb{F}_p(c) = \mathbb{F}_p$ n'est pas un ensemble de définition de $f(x,a)$. On peut voir à quoi correspond l'adjonction de la p-base $\{b_o, b_1, \ldots\}$ dans le langage: la relation d'équivalence E_o associée à la partition d'un modèle K en K^p et $\neg K^p$ est définissable sans paramètre et admet deux classes; la première contient la constante 1 et la deuxième b_o ; puis on considère la relation d'équivalence E_1 plus fine que E_o qui découpe $\neg K^p$ en $(\neg K^p) \cap K^p(b_o)$ et $\neg(K^p(b_o))$; la première classe contient b_o , la seconde b_1 , etc. ... .

Revenons maintenant à $T_{p,e}$. Pour la démonstration de 43, nous introduisons un ordre partiel sur les types, qu'on utilisera comme on utilise le rang dans les théories superstables.

Définition. Si q et r sont deux types sur un même modèle K , $q \leq r$ ssi $I_K(q) \supset I_K(r)$. C'est en ce sens qu'on parlera de type maximal.

44. Proposition. Il y a un nombre fini de types maximaux contenant une formule donnée.

Démonstration. En vertu de 31 et 35, il suffit de considérer des formules à une variable de la forme $f = \bigvee_j f_j$ où $f_j = [\bigwedge P_{ij} = 0 \wedge Q_j \neq 0]$, les P_{ij} et les Q_j sont des polynômes dont les coefficients sont définissables en les paramètres et les variables sont des composantes de x . Un type contenant f contient une des f_j , les types maximaux contenant f sont donc à prendre dans l'union des types maximaux contenant une des f_j . Enfin un type maximal contenant $\bigwedge P_{ij} = 0$ et ne contenant pas $Q_j = 0$ est a fortiori un type maximal contenant $\bigwedge P_{ij} = 0$. En conclusion, il suffit de prouver le résultat pour une formule $\bigwedge P_{ij} = 0$, ce qui découle immédiatement du lemme suivant.

45. Lemme. Si I est un idéal finiment engendré de C , il y a un nombre fini d'idéaux premiers séparables minimaux contenant I et $I^{\bullet}$.

Démonstration. On a $I = I_n.C$ pour un entier n. On a vu qu'il y a un nombre fini d'idéaux premiers séparables minimaux de C_n contenant I_n, qui sont les premiers minimaux au-dessus de $\text{Sép}(I_n)$. Le lemme suivant achèvera la démonstration.

<u>46. Lemme</u>. Si P est un idéal de C_n, premier, séparable et contenant $I^\bullet_n$, alors l'idéal de C engendré par P et $I^\bullet$ est premier, sa clôture séparable reste première et coupe C_n en P.

Démonstration. Il suffit de montrer cet énoncé avec C_{n+1} et $I^\bullet_{n+1}$ à la place de C et $I^\bullet$. Renommons les X_i, $i\in p^{en}$, en $\bar{Y} = (Y_1,\dots Y_r)$ et $\bar{Z} = (Z_1,\dots Z_s)$ tels que, si $\bar{y} = \bar{Y}/P$ et $\bar{z} = \bar{Z}/P$, les $\bar{y}$ sont une base de transcendance séparante de $K(\bar{y},\bar{z})$ sur K. Soit I l'idéal de $K[\bar{Y},\bar{Y}_j,\bar{Z}\ ;\ j\in p^e]$ engendré par P et les polynômes $(Y_i - \Sigma\, Y_{i,j}{}^p m_j)_{1\leq i\leq r}$, et $y_{i,j} = Y_{i,j}/I$. Pour tout i_o, $1 \leq i_o \leq r$, les $(y_{i,j})_{i\neq i_o, j\in p^e}$, y_{i_o}, et les $(y_{i_o,j})_{j\in p^e, j\neq 0}$ sont algébriquement indépendants sur K. En conséquence, si L est le corps qu'ils engendrent avec K, $y_{i_o} - \Sigma_{j\neq 0}\, y_{i_o,j}{}^p m_j$ n'est pas une puissance p dans L, et il ne le devient pas dans $L(\bar{z})$ (qui est une extension algébrique séparable de L). L'idéal I est donc premier, et il est aussi séparable: $Q(K[\bar{Y},\bar{Y}_j,\bar{Z}\ ;\ j\in p^e]/I) \simeq K(\bar{y}_j;\ j\in p^e)[\bar{z}]$, où les $\bar{y}_j$, $j\in p^e$, sont algébriquement indépendants sur K, et donc par transitivité ce corps est une extension séparable de K. Considérons de même l'idéal J de $K[\bar{Y},\bar{Y}_j,\bar{Z},\bar{Z}_j\ ;\ j\in p^e]$ engendré par I' et les $(Z_i - \Sigma_{j\in p^e}\, Z_{i,j}{}^p m_j)_{1\leq i\leq s}$, et $z_{i,j} = Z_{i,j}/J$. Les $(z_{i_o,j})_{j\neq 0}$ sont algébriquement indépendants sur $K(\bar{y}_j\ ;\ j\in p^e)(z_{i,j})_{i\neq i_o, j\in p^e}$, donc $z_{i_o} - \Sigma_{j\neq 0}\, z_{i_o,j}{}^p m_j$ n'est pas une puissance p dans $K(\bar{y}_j;\ j\in p^e)(z_{i,j})_{i\neq i_o \text{ ou } j\neq 0}[\bar{z}]$ et J est premier. Dans ce cas, les $(z_{i_o,j})_j$ s'interprètent comme les p-composantes de z_{i_o} sur les m_j, dont on a vu qu'elles sont dans $K(\bar{y}_j,\ z_{i_o}\ ;\ j\in p^e)$; cela veut dire qu'il y a des $f_{i_o,k} \in K[\bar{Y}_j, Z_{i_o}\ ;\ j\in p^e]$ de degré en Z_{i_o} < degré de z_{i_o} sur $K(\bar{y}_j;\ j\in p^e)$, et des $g_{i_o,k} \in K[\ \bar{Y}_j\ ;\ j \in p^e\ ]$ tels que $Z_{i_o,k} \cdot g_{i_o,k}(\bar{Y}_j) - f_{i_o,j}(\bar{Y}_j, Z_{i_o})$ $\in$ Sép(J) . Réciproquement l'idéal engendré par J et les $Z_{i_o,j} \cdot g_{i_o,j}(\bar{Y}_j) - f_{i_o,j}(\bar{Y}_j, Z_{i_o})$ est premier, séparable et coupe C_n en P .

Au total nous avons montré la chose suivante: si on plonge $K(y_1,\dots y_r)$ dans une extension élémentaire de K où $y_1,\dots y_r$ réalisent des génériques indépendants, et si J_∞ est l'idéal de C pour lequel $K\langle y_1,\dots y_r\rangle = Q(C/J_\infty)^s$, alors J_∞ est l'idéal premier séparable engendré par P et I^* . □□□

Démonstration de 43. Cette preuve suit celle du théorème 7 dans [P3] . Soit une formule $f(\bar{x},\bar{a})$ à paramètres $\bar{a} \in K \models T_{p,e}$; considérons la relation d'équivalence: $E(\bar{y},\bar{z})$ ssi $\forall \bar{x}\ [f(\bar{x},\bar{y}) \longleftrightarrow f(\bar{x},\bar{z})]$.

Un automorphisme σ de K conserve E puisque cette relation est définissable sans paramètre, mais peut en permuter les classes; σ conserve $f(\bar{x},\bar{a})$ ssi il fixe la classe modulo E de $\bar{a}$. Si σ fixe cette classe, il conserve l'ensemble des types maximaux contenant $\bar{a}/E$. Réciproquement si σ bouge $\bar{a}/E$, il l'envoie sur une classe $\bar{b}/E$ disjointe de $\bar{a}/E$, et il n'y a aucun type contenant à la fois $\bar{a}/E$ et $\bar{b}/E$. Donc si σ conserve l'ensemble des types maximaux contenant $\bar{a}/E$, il conserve cette classe. A ces types maximaux sont associés des idéaux $P_1 \dots P_n$ de C . Conserver $\{P_1,\dots P_n\}$ équivaut à conserver $P_1 \cap \dots \cap P_n$ (d'après par exemple le théorème 7 p. 211 dans [ZS]). Alors σ conserve $\bar{a}/E$ ssi il fixe le corps de définition minimal de $P_1 \cap \dots \cap P_n$ ssi il fixe la clôture définissable de ce corps. □

5. QUELQUES RANGS

47. Proposition. Soit $K \models T_{p,e}$, $q \in S_1(K)$ et M une extension élémentaire ω_1-saturée de K ; posons

$$RP(q) = P(\ I_K(q) \underset{K}{\otimes} M\ )$$

$$RS(q) = PS(\ I_K(q) \underset{K}{\otimes} M\ ) \ ;$$

$$RT(q) = tr(\ K\langle q \rangle \ ; K\ ) \text{ à valeurs dans } \omega \cup \{\infty\} \ ;$$

alors RP et RS sont indépendants du choix de M, et RP, RS, et RT sont des rangs.

Démonstration. Utiliser 24, 36 et la description du modèle premier. □

Exemples. 1) le type "puissance p^∞ non réalisé" est de RP, RS et RT égaux à 1. En effet si $M > K$ et $x \in M^{p^\infty} - K$, $K\langle x \rangle = K(x^{p^{-n}} \ ; n \in \omega)^s$ est de degré de transcendance 1 sur K, et donc $RP(x,K) = 1$ d'après 22.

2) Si n est un entier quelconque, considérons $x_o,\dots x_{n-1}$ des réalisations indépendantes du type précédent (ici "indépendantes" se réduit à "algébriquement indépendantes"); prenons un entier r vérifiant $n \leq p^{er}$ et complétons $x_i = 0$ pour $n \leq i < p^{er}$; alors, pour $x = \sum_{i\in p^{er}} x_i m_i$, on a $RP(x,K) = RS(x,K) = RT(x,K) = n$.

On trouvera une étude détaillée des types de RP fini dans [Sr2].

Remarque. Un type de RT égal à 1 n'est pas nécessairement RK-équivalent au type " p^∞ non réalisé". Soit en effet $M > K$, $x \in M^{p^\infty} - K$ et $y \in K\langle x \rangle$; y est algébrique séparable sur $K(x^{p^{-n}})$ pour un certain entier n, donc, comme on a déjà vu, pour tout $j \in p^{er}$, on a $y_j \in K(x^{p^{-n-r}})[y]$. En conséquence $[K(y_j;\ j \in p^{er}):K(y)] \leq [K(x^{p^{-n-r}},y):K(y)] = [K(x^{p^{-n-r}},y):K(x,y)].[K(x,y):K(y)] = kp^{n+r}$ pour des constantes k et r. Grâce à la correspondance entre types et idéaux, il est facile de construire un y dont toutes les composantes soient algébriques sur lui-même sans vérifier les inégalités ci-dessus. Un type de RT égal à 1 n'est en général pas non plus équivalent au type " p^∞ non réalisé" pour l'ordre de domination, également introduit par Lascar, dans [Las1] ; il existe en effet des types orthogonaux (voir la définition avant 50) de RT égal à 1 [CCShSrW].

A l'inverse de cette remarque, on a le résultat suivant.

48. Proposition. Soit $K \models T_{p,e}$ ω_1-saturé, $M > K$, $x \in M - K$ réalisant $q \in S_1(K)$, d et r des entiers fixés. Si pour toute profondeur n , x admet des composantes $y_1,\dots y_r$ telles que toute autre composante s'écrive comme un polynôme sur K de degré $\leq d$ en $y_1,\dots y_r$, alors q est RK-supérieur ou égal au type " p^∞ non réalisé".

Démonstration. On a

$$x = \sum_{i\in p^{en}} x_i(y_1,\dots y_r)^{p^n} m_i = u(y_1^{p^n},\dots y_r^{p^n})$$

pour un polynôme $u \in K[Y_1,\dots Y_r]$ de degré $\leq d$. Donc q contient la formule ci-dessous, les paramètres étant les coefficients $\bar{u}^{\cdot}$ de u ,

$$\exists z_1,\dots z_r\ [x = u(z_1,\dots z_r) \wedge \bigwedge \exists z'_i(z_i = z'^{\,p^n}_i)]\ .$$

Par stabilité de $T_{p,e}$, cela équivaut à la satisfaction dans K d'une formule $F_n(\bar{u},\bar{c}_n)$; par saturation, K contient $\bar{u}_o$ satisfaisant simultanément toutes les $F_n(-,\bar{c}_n)$, donc $x = u_o(z_1,\dots z_r)$ pour des $z_1,\dots z_r \in M^{p^\infty}$; x n'est pas dans K , donc un des z_i n'y est pas non plus. □

Les problèmes soulevés lors de la définition des profondeurs réapparaissent ici: on contrôle mal les rangs RP , RS et RT (en particulier, la construction indiquée en I-3 d'idéaux de profondeur dénombrable arbitraire exigeait que K soit dénombrable, alors que nous le voudrions maintenant ω_1-saturé). S'il y a entre K et $K\langle q\rangle$ une suite de modèles $K = K_o < K_1 < \dots < K_{n+1} = K\langle q\rangle$ avec $n\in\omega$ et $tr(K_{i+1};K_i) = 1$ pour $0\leq i \leq n$, il est clair que $RT(q) = RP(q) = RS(q) = RU(q) = n$. On a une réciproque partielle:

49. Proposition. Soit K ω_1-saturé $\models T_{p,e}$ et $q \in S_1(K)$. Si $RU(q)$ est fini, alors $RU(q)$ est égal au nombre maximal $N(q)$ de sous-structures élémentaires strictement emboîtées entre K et $K\langle q\rangle$.

Démonstration. 1) On a $N(q) \leq RU(q)$ indépendamment de la saturation de K et de la finitude de $RU(q)$.

2) L'inégalité inverse est moins simple à prouver, la preuve suivante est de

Lascar. Supposons $RU(q) = n < \omega$ et soit x une réalisation de q . D'après les propriétés de rang U , il existe $L > K$ tel que $RU(x,L) = n-1$. Nous allons montrer qu'il existe une telle extension vérifiant de plus $K \subsetneq K\langle x \rangle \cap L$; à cause de l'inclusion stricte, on aura $RU(x,L \cap K\langle x \rangle) < n$, et, puisque $L \cap K\langle x \rangle \subset L$, $RU(x,L \cap K\langle x \rangle) = n-1$. Un raisonnement par induction achèvera la démonstration.

a) Il existe trois réalisations x, y et z de q , indiscernables et vérifiant $RU(x,K\langle y,z \rangle) = RU(y,K\langle x \rangle) = n-1$.

Preuve. Soit une réalisation a de q et $L > K$ tels que $RU(a,L) = n-1$. Considérons une suite de Morley $(a_i)_{i\in\omega}$ de $t(a,L)$; cette suite n'est pas de Morley sur K , sinon son type moyen sur L serait l'héritier de son type moyen sur K , or le premier est de RU $n-1$ et le second serait de RU n . Soit donc i_o le premier indice où le rang diminue, c'est-à-dire

$$RU(a_{i_o+1},K\langle a_o,\ldots a_{i_o} \rangle) < RU(a_{i_o},K\langle a_o,\ldots a_{i_o-1} \rangle) = \ldots$$
$$= RU(a_1,K\langle a_o \rangle) = RU(a_o,K)= n .$$

Par ailleurs on a

$$RU(a_{i+1},K\langle a_o,\ldots a_i \rangle) \geq RU(a_{i+1},L\langle a_o,\ldots a_i \rangle) = n-1$$

et donc, pour tout indice $i \geq i_o$

$$RU(a_{i+1},K\langle a_o,\ldots a_i \rangle) = n-1 .$$

Soit $K_o < K$ dénombrable tel que $(a_i)_{i\in\omega}$ ne dévie pas entre K_o et K ; par saturation de K , il existe $b_o,\ldots b_{i_o-1} \in K$ de même type sur K_o que $a_o,\ldots a_{i_o-1}$, puis $(b_i)_{i_o\leq i<\omega}$ tels que $t((b_i)_{i\in\omega},K_o) = t((a_i)_{i\in\omega},K_o)$ et que $t((b_i)_{i_o\leq i<\omega},K)$ ne dévie pas au-dessus de $K_o\langle b_o,\ldots b_{i_o-1} \rangle$. Alors, pour $i \geq i_o$, $t(b_i,K)$ hérite de $t(b_i,K_o\langle b_o,\ldots b_{i_o-1} \rangle$ donc de $t(b_i,K_o)$, donc $t(b_i,K) = q$. On a $RU(b_{i_o};K) = n$ et, si $i > i_o$:

$$RU(b_i,K\langle b_{i_o},\ldots b_{i-1} \rangle) = RU(b_i,K_o\langle b_o,b_1,\ldots b_{i-1} \rangle) = RU(a_i,K_o\langle a_o,a_1,\ldots a_{i-1} \rangle)$$
$$= RU(a_i,K\langle a_o,a_1,\ldots a_{i-1} \rangle) = n-1 .$$

Les trois réalisations b_{i_o} , b_{i_o+1} et b_{i_o+2} de q ont donc la propriété cherchée.

b) Par indiscernabilité de x , y et z , les égalités sur les RU restent vraies lorsqu'on permute x , y et z . Considérons le type de x au-dessus de $K\langle y,z\rangle$; il ne dévie ni au-dessus de $K\langle y\rangle$ ni au-dessus de $K\langle z\rangle$; il admet donc un corps de définition inclus dans $K\langle y\rangle \cap K\langle z\rangle$, par ailleurs ce corps ne peut être inclus dans K car $t(x,K\langle y,z\rangle)$ dévie au-dessus de K . On a donc $K \subsetneq K\langle y\rangle \cap K\langle z\rangle$ et trivialement $K\langle y\rangle \cap K\langle z\rangle \subsetneq K\langle z\rangle$. □

On aimerait évidemment étendre cette égalité à des ordinaux $\geq \omega$ (penser à 25). Mais on ne voit guère,

- si $RU(q) \geq \omega$, comment construire une sous-structure élémentaire strictement comprise entre K et $K\langle q\rangle$,
- pourquoi, si q' est une extension de q sur $K' > K$, il devrait y avoir au moins autant de modèles entre K et $K\langle q\rangle$ qu'entre K' et $K'\langle q'\rangle$.

Dans [CCShSrW] une très jolie construction est faite, celle d'un type q de RS = RU = 1 et de RT = 2 (vérifions $RS(q) = 1$: à un idéal premier séparable $I \supseteq I_K(q)$ est asocié un type q' ; notons x' une réalisation de q' et, selon [CCShSrW], $x' = y' + z'u$; si on suppose $I_K(q) \subsetneq I$, z' est algébrique sur $K(y')$ et y' sur $K(z')$, et si $tr(K\langle r\rangle;K) \geq 1$, $t(y',K)$ continue à coïncider avec p_A sur des parties infiniment longues, ce qui aboutit à la même contradiction que dans [CCShSrW]). Cela veut dire qu'il n'y a pas d'extension intermédiaire propre M entre K et $K\langle q\rangle$ telle que les extensions $K \subset M$ et $M \subset K\langle q\rangle$ soient régulières. Toujours dans [CCShSrW] il est construit des types de $RU = RS = \omega$, ce qui fournit des types de tout rang $< \omega^2$, grâce à 31. Y a-t-il des types de RU défini $\geq \omega^2$? Remarquons que si q est le type de RU ω de [CCShSrW], l'inclusion $K \subset K\langle q\rangle$ a la propriété de contenir une chaîne décroissante de sous-structures élémentaires intermédiaires de type ω et aucune chaîne croissante de même type.

<u>Définitions.</u> 1) Deux types q et $r \in S_1(K)$ sont dits <u>faiblement orthogonaux</u>

lorsque le seul 2-type complet contenant $q(x) \wedge r(y)$ est le produit de q par r .

2) q et r sont dits <u>orthogonaux</u> lorsque, pour tout $L > K$, leurs héritiers sur L sont faiblement orthogonaux.

<u>Proposition</u>. Si K est ω_1-saturé, q et $r \in S_1(K)$ sont faiblement orthogonaux ssi ils sont orthogonaux.

Démonstration. Voir [P5], p. 503. □

<u>50. Proposition</u>. Le générique est orthogonal à tous les types de RU fini.

Démonstration. Il suffit de montrer cette assertion pour l'orthogonalité faible, car l'héritier d'un générique reste générique, et l'héritier d'un type rangé conserve le même rang. On montre par induction sur n que, si $q \in S_1(K)$ est de RU égal à n , alors un point générique sur K le reste sur $K\langle q \rangle$. C'est trivial pour $n = 1$ car dans ce cas la seule façon de faire dévier q consiste à le réaliser, or on a vu que, si g est générique, $K\langle g \rangle$ ne contient aucun point rangé. Si maintenant q est de RU n et que x réalise q , d'après 49 il existe un modèle M vérifiant $K < M < K\langle q \rangle$, $RU(x,M) = 1$ et $RU(M,K) = n-1$. Grâce à 31, M est de la forme $M = K\langle r \rangle$ pour un $r \in S_1(K)$ et donc l'hypothèse d'induction s'applique: un point générique sur K le reste sur M , puis sur $K\langle q \rangle$ par le cas $n = 1$. □

<u>51. Corollaire</u>. Soit K ω_1-saturé $\models T_{p,e}$. Alors

1) le corps K^{p^∞} est algébriquement clos et ω_1-saturé,

2) $[K:K^{p^\infty}] \geq \omega_1$.

Démonstration. K doit réaliser au moins ω_1 fois de façon indépendante le type " p^∞ non réalisé", ce qui donne le 1). En construisant $\langle K^{p^\infty} \rangle = \bigcup_{\alpha<\alpha_o} K_\alpha$, où K_o est le modèle premier $\langle \emptyset \rangle$, $K_{\alpha+1}$ est de RU 1 sur K_α et l'union est continue, on voit par induction que le générique sur K_o admet le générique pour seule extension à $< K^{p^\infty} >$. Comme ce type doit être réalisé ω_1 fois de façon indépendante, on obtient 2). □

Remarquons que dans un modèle K , le degré de transcendance de K^{p^∞} est la dimension par rapport au type "puissance p^∞ non réalisé", qui est de $RU = 1$ donc régulier.

Question. Appelons antigénérique un type dont aucune composante n'est générique (en particulier un type superstable est antigénérique, la réciproque n'est pas vraie). Le générique est-il orthogonal à tout type antigénérique?

52. Lemme. Tout type non réalisé est limite de types RK-supérieurs au générique.

Démonstration. Soit $q \in S_1(K)$, $I = I_K(q)$. On a vu en 46 qu'il y a un unique type maximal q_n contenant I_n et que ce type vérifie $I_K(q_n)_n = I_n$; q est donc limite des q_n , or si q n'est pas réalisé, aucun q_n n'est maximal, et la démonstration de 46 montre qu'alors q_n a au moins une composante générique. □

53. Proposition. Un rang continu ne prend que deux valeurs, 0 et ω .

Démonstration. D'après la démonstration précédente, un type non réalisé est limite de types non rangés. □

Finissons cette sous-partie par quelques remarques.

54. Remarques. 1) On a utilisé 31 pour remarquer que tout modèle $K< a_1,\dots a_n >$ est monogène sur K . Ca n'est plus vrai si L est dénombrablement engendré sur K , en particulier si L est une union croissante stricte de modèles. Pourtant il existe M monogène sur K , vérifiant $K < L < M$ et de degré de transcendance 1 sur L . En effet, si $L = K< a_i ; i \in \omega >$, considérons le type q sur

L :

. q n'est pas réalisé

. $x_{\underbrace{1,1,\dots 1}_{i \text{ fois}},0} = a_i$

. $x_{1,1,\dots 1,j} = 0$ pour $j \neq 0, 1$;

on a $RP(q) = 1$ et $K < L < K\langle q \rangle$.

2) On peut avoir des types q et $r \in S_1(K)$ RK-équivalents et vérifiant $I_K(q) \subsetneq I_K(r)$: prendre par exemple q générique et r le type de x^p si x réalise q . Cela est impossible si les types sont RS-rangés: du fait que les modèles premiers sont modèle-algébriques, $q \underset{RK}{\leq} r$ implique $R(q) \leq R(r)$ pour tout rang R , donc en particulier $RS(q) \leq RS(r)$.

3) Une inclusion stricte $I_K(q) \subsetneq I_K(r)$ interdit que q et r soient comparables dans l'ordre fondamental, voir le lemme suivant.

<u>55. Lemme</u>. Si q et r sont comparables dans l'ordre fondamental, alors pour tout entier n , $I_K(q)_n$ et $I_K(r)_n$ ont même dimension.

Démonstration. Supposons $q \geq r$ dans l'ordre fondamental. Soit $c_1,\dots c_m$ des générateurs de $I_K(q)_n$ de degré $\leq d$. Alors, pour tout entier s , si $I_K(q)_n$ est de profondeur h , q satisfait (cf. 26)

$$c_1(x) = 0 \wedge \dots \wedge c_m(x) = 0 \wedge \text{Profondeur } (c_1,\dots c_m) = h$$
$$\wedge \ (\forall c \text{ de degré } \leq s)\ [\, c(x) = 0 \longrightarrow c \in (c_1,\dots c_m)\,] ,$$

où x est la suite des composantes d'ordre n de la variable de type de q . C'est-à-dire que q représente cette formule, les paramètres étant les coefficients des $c_1,\dots c_m$; r doit représenter la même formule pour tout s , d'où $P(I_K(r)) = h$. □

6. <u>LES PAIRES ET L'ABSENCE DE P. R. F.</u>

On appelle $C_{p,e}$ la théorie des paires élémentaires $(K < L)$, où K est modèle de $S_{p,e}$, considérées dans le langage $\{ 0, 1, +, -, ., E \}$, où E est un symbole de prédicat unaire exprimant l'appartenance au petit modèle, et $D_{p,e}$ la théorie des paires élémentaires $(K < L)$, où K est modèle de $T_{p,e}$, considérées dans le langage $\{ 0, 1, +, -, ., E, b_o,\dots b_{e-1} \}$.

<u>56. Proposition</u>. $C_{p,e}$ et $D_{p,e}$ sont complètes.

Démonstration. On fait la preuve pour $C_{p,e}$, elle est identique pour $D_{p,e}$. On établit un va-et-vient infini entre deux modèles ω_1-saturés arbitraires $(K \subset L)$ et $(K' \subset L')$ de $C_{p,e}$. Les isomorphismes partiels ont pour domaines les couples $(K_o \subset L_o)$ ayant les propriétés $(*)$ suivantes:

. L_o est dénombrable

. $K_o < K$ et $L_o < L$ tous modèles de $S_{p,e}$,

. K et L_o sont linéairement disjoints au-dessus de K_o ,

et pour images les couples ayant les propriétés analogues dans $(K' \subset L')$.

1) Cette famille $\mathcal{J}$ d'isomorphismes partiels n'est pas vide.

Preuve. Nous allons décrire une structure $(K_o \subset L_o)$ se plongeant avec les propriétés $(*)$ dans tout modèle $(K \subset L)$ ω_1-saturé de $C_{p,e}$. K_o est le modèle premier de $S_{p,e}$; considérons le type t suivant de $C_{p,e}$: " x est puissance p^{∞} non réalisé $\wedge \neg E(x)$ " ; t est consistant (car $\neg E$ contient pour tout n des puissances p^n), donc réalisé en un $a \in L$; $(K_o \subset K_o< a >)$ est la structure annoncée.

2) Propriété de va . Soit $f \in \mathcal{J}$, $f: (K_o \subset L_o) \dashrightarrow (K'_o \subset L'_o)$; on veut prolonger f sur un domaine contenant un certain point a de L ; on commence par plonger $L(a)$ dans $(K_1 \subset L_1)$ sous-structure élémentaire dénombrable de $(K \subset L)$ contenant $L_o(a)$, ainsi $(K_1 \subset L_1)$ a les propriétés $(*)$. On construit, en utilisant la complétude de $S_{p,e}$, K'_1 isomorphe à K_1 par un isomorphisme g prolongeant $f \restriction K_o$. D'après l'indépendance linéaire de K et L_o sur K_o , et de K' et L'_o sur K'_o , il y a un isomorphisme h prolongeant f et g qui envoie K_1L_o sur $K'_1L'_o$, donc $< K_1L_o>$ sur $< K'_1L'_o >$. Considérons le type suivant de $C_{p,e}$, où les variables de type

$(x_i)_{i\in\omega}$ énumèrent L'_1 (ci-desssous t_S et $< >$ désignent les types et modèles premiers au sens de $S_{p,e}$):

$$t_S(L'_1,\{ h(m);\ m \in < K_1L_o > \}) = t_S(L_1,\{ m;\ m \in < K_1L_o > \}) \cup$$
$$\{ \forall e_1,\dots e_n\ [(\bigvee e_i \neq 0) \wedge \bigwedge E(e_i)] \longrightarrow \Sigma x_{j_i} e_i \neq 0 ;$$
$$l_{j_1},\dots l_{j_n} \in L_1 \text{ linéairement indépendants sur } K_1 \} .$$

Sa satisfaction dans $(K' \subset L')$ assurera exactement l'existence de L'_1 avec les propriétés voulues. Ce type reste le même si on affaiblit la première ligne en demandant seulement que les corps L_1 et L'_1 soient isomorphes par un isomorphisme prologeant h ; en effet, une p-base de K_o reste p-base de L et L_1 est stable par passage aux composantes sur cette base; L'_1 est donc stable par passage aux composantes sur la base image, cela impose que l'extension $L'_1 \subset L'$ soit séparable; par ailleurs le type de corps de L'_1 lui impose d'être séparablement clos, d'où $L'_1 < L'$. Il nous reste à prouver la consistance de ce type ainsi simplifié. Pour cela, il suffit qu'on sache reproduire dans $(K' \subset L')$ toute partie de L'_1 finiment engendrée sur $< L_oK_1 >$, en gardant la disjonction linéaire. Une telle partie admet une base de transcendance séparante $a_1,\dots a_r$. Le degré de transcendance de L' sur K' est au moins ω_1 , d'où $tr(L', < K'L'_o >) \geq \omega_1$ puisque L'_o est dénombrable et $< K'L'_o >$ algébrique sur $K'L'_o$. Il existe donc $a' ,\dots a'$ dans L' algébriquement indépendants sur $< K'L'_o >$; ces éléments vérifient:

. $< K_1L_o >(a_1,\dots a_r)$ et $< K'_1L'_o >(a'_1,\dots a'_r)$ sont isomorphes par un isomorphisme prolongeant h

. $< K'_1L'_o > (a'_1,\dots a'_r)$ et K' sont linéairement disjoints au-dessus de K'_1 ,

et ces propriétés sont conservées quand on passe aux clôtures algébriques séparables. □

57. Proposition. Soit $(K \subset L) \subset (K' \subset L')$ deux modèles de $C_{p,e}$ ou $D_{p,e}$. Alors l'inclusion est élémentaire ssi L et K' sont linéairement

disjoints au-dessus de K .

Démonstration. Même preuve que 56. □

Il n'y a pas dans $C_{p,e}$ ou $D_{p,e}$ de modèle premier au-dessus d'un ensemble de paramètres ne contenant que des points de E , mais c'est la seule restriction:

58. Proposition. Dans $C_{p,e}$ et $D_{p,e}$, il y a des modèles premiers au-dessus de tout ensemble de paramètres contenant des points de $\neg E$. En particulier, pour $(K \subset L) \models C_{p,e}$ ou $D_{p,e}$ et x dans une extension élémentaire, il y a un modèle premier au-dessus de $(K \subset L)$ et x .

Démonstration. Soit $(A \subset B) \subset (K \subset L)$; l'annulateur de B au-desus de K admet un corps de définition minimal K_o (qui certainement contient A) ; $(\langle K_o \rangle \subset \langle K_o B \rangle)$ est le modèle premier au-dessus de $(A \subset B)$. □

Shelah donne dans [Sh1] les définitions suivantes: une formule $f(\bar{x},\bar{y})$ d'une théorie T a la propriété du recouvrement fini (p. r. f.) lorsque, pour tout entier n , il existe $\bar{a}_1,\ldots\bar{a}_n$ vérifiant

$$\neg\,[\exists\bar{x} \bigwedge_{i=1}^{n} f(\bar{x},\bar{a}_i)]$$

$$\exists\bar{x} \bigwedge_{\substack{i=1\\ i\neq i_k}}^{n} f(\bar{x},\bar{a}_i) \text{ , pour tout } k = 1,\ldots n \text{ ,}$$

et T a la p. r. f. lorsqu'une de ses formules l'a. Dans [P4] , Poizat a prouvé deux résultats (les théorèmes 6 et 9) ayant les conséquences suivantes.

59. Théorème. Supposons T stable et telle que la théorie T' des paires $(K < L)$ avec $K \models T$ est complète. Alors on a équivalence entre les deux propriétés

- T n'a pas la p. r. f. ,
- si $(K \subset L) \models T'$ et $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont dans K , alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type au sens de T' dans $(K \subset L)$ ssi ils ont même type au sens de T .

60. Théorème. Soit T telle que T' est complète. Alors si T est stable sans p. r. f. , T' est stable sans p. r. f. .

61. Proposition. $S_{p,e}$ et $T_{p,e}$ n'ont pas la p. r. f. .

Démonstration. On utilise la caractérisation 59. Soit $(K \subset L) \models T'$ qu'on peut supposer ω_1-saturé, et $\bar{a}$ et $\bar{b} \in K$ ayant même type au sens de T. Considérons un point $c \in L^{p^{\infty}} - K$; alors, si K_o est un sous-modèle quelconque de K , c ne dévie pas entre K_o et K . En conséquence, $(< \bar{a} > \subset < \bar{a},c >)$ et $(< \bar{b} > \subset < \bar{b},c >)$ sont deux sous-structures élémentaires de $(K \subset L)$; comme elles sont isomorphes, $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type au sens de T' . □

62. Proposition. $C_{p,e}$ et $D_{p,e}$ sont stables.

Démonstration. Corollaire de 60 et 61. □

On aurait pu voir cela directement en dénombrant les types; se donner le type (au sens de $C_{p,e}!$) d'un élément x au-dessus de $(K \subset L)$ consiste exactement à se donner son type au sens de $S_{p,e}$ si x est dans E , et sinon à décrire le modèle premier au-dessus de $(K \subset L)$ et x ; on utilise l'existence du corps de définition minimal de l'annulateur des composantes de x sur E , et le fait que ce corps est dénombrable, pour borner le nombre de types en fonction de la seule cardinalité de L .

Indiquons quelques autres théories complètes de paires de corps, qui ne sont plus des paires élémentaires.

63. Proposition. La théorie des paires de corps $(K \subset L)$, où L est algébriquement clos et $K \models S_{p,e}$, est complète.

Démonstration. Voir [K]. □

64. Proposition. La théorie des paires de corps $(K \subset L)$, où K est algébriquement clos et $L \models S_{p,e}$ ou $T_{p,e}$, est complète.

Et même, plus généralement:

65. Proposition. La théorie des paires de corps $(K \subset L)$, où $K \models S_{p,e}$, $L \models S_{p,f}$ et l'extension $K \subset L$ est séparable (donc $f \geq e$), est complète.

Démonstration. Corollaire de 66. □

66. Proposition. Dans le langage $\mathcal{L} = \{ 0, 1, +, -, ., b_o, \dots b_{f-1}, E \}$ la théorie $T_{p,e,f}$ des paires $(K \subset L)$, où $b_o, \dots b_{e-1} \in K$, $\langle K, b_o, \dots b_{e-1} \rangle \models T_{p,e}$, et $\langle L, b_o, \dots b_{e-1}, \dots b_{f-1} \rangle \models T_{p,f}$, est complète.

Démonstration. Soit $(K \subset L) \models T_{p,e,f}$; posons $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} KL^{p^n}$; alors A est séparablement clos (car chaque $KL^{p^n} = K_oL^{p^n}$ l'est) , $\langle A, b_o, \dots b_{e-1} \rangle$ est modèle de $T_{p,e}$, l'extension $A \subset L$ est séparable, et, si $e < f$ comme on va le supposer désormais, $\langle K \subset A, b_o, \dots b_{e-1} \rangle$ est modèle de $D_{p,e}$. Soit maintenant $(K_o \subset L_o) \subset (K \subset L)$ vérifiant $K_o < K$ et $L_o < L$; posons $A_o = A \cap L_o$; on a alors $A_o = \bigcap K_oL_o^{p^n}$ ($\supset$ est trivial; si réciproquement $x \in L_o$, on a, parce que l'extension $L_o \subset L$ est séparable, pour chaque entier n , $x = \sum_{i \in p^{fn}} x_i^{p^n} m_i$, avec des $x_i \in L_o$; si de plus $x \in A$, alors les m_i faisant intervenir un b_j avec $e \leq j < f$, ont un coefficient nul, d'où $x \in L_o^{p^n} K_o$) .
La preuve de 66 se fait par va-et-vient entre deux modèles ω_1-saturés $(K \subset L)$ et $(K' \subset L')$ de $T_{p,e,f}$. Les domaines des isomorphismes partiels sont les structures $(K_o \subset L_o) \subset (K \subset L)$ vérifiant:

- L_o est dénombrable;
- $K_o < K$ et $L_o < L$, ce qui permet de définir $A_o = \bigcap K_oL_o^{p^n} = A \cap L_o$;
- $(K_o \subset A_o) < (K \subset A)$;
- A et L_o sont linéairement disjoints sur A_o ;

et les images ont les propriétés équivalentes dans $(K' \subset L')$.

1) De tels isomorphismes partiels existent, car la paire

$$\mathbb{F}_p(b_o,\dots b_{e-1})^s \subset \mathbb{F}_p(b_o,\dots b_{f-1})^s\langle a\rangle$$

pour un $a \in L^{p^\infty} - K$, se plonge comme voulu dans tout modèle ω_1-saturé de $T_{p,e,f}$.

2) Soit $(K_o \subset L_o)$ une telle sous-structure de $(K \subset L)$ et $x \in L$. Si $x \in A$, prenons $(K_1 \subset A_1)$ dénombrable, $(K_o \subset A_o) < (K_1 \subset A_1) < (K \subset A)$ et $A_1 \in x$; alors $(K_1 \subset \langle A_1 L_o\rangle)$ a les propriétés voulues. Si $x \in L-A$, on prend $(K_1 \subset L_1)$ dénombrable, $(K_o \subset L_o) < (K_1 \subset L_1) < (K \subset L)$ et $L_1 \in x$, puis $(K_2 \subset A_2)$ dénombrable $< (K_o \subset L_o)$ et A_2 contenant le corps de définition minimal de L_1 sur A ; alors $(K_2 \subset \langle L_1 A_2\rangle)$ a les propriétés voulues et contient x.

3) Pour la propriété de va, soit un isomorphisme g entre $(K_o \subset L_o)$ et $(K'_o \subset L'_o)$ à prolonger sur $(K_1 \subset L_1)$. Soit $A_1 = A \cap L_1$; on prolonge d'abord g sur A_1 en utilisant 56.

Il faut maintenant prolonger de façon commune sur L_1 les isomorphismes existant entre L_o et L'_o d'une part, et entre A_1 et A'_1 d'autre part.

<u>Lemme</u>. Si $(K \subset L) \models T_{p,e,f}$ est ω_1-saturé, alors $tr(L,A) \geq \omega_1$.

Démonstration. Parce que $(K \subset L)$ est ω_1-saturé et $b = b_e$ transcendant sur A, pour tout entier d, il existe un entier $m = m(d)$ tel qu'aucun polynôme non nul de KL^{p^m} de degré $n < p^{d^2+d}$ ne s'annule sur b. Grâce au fait qu'un entier $n < p^{d^2+d}$ s'écrit de façon unique

$$n = n_o + n_1 p^d + n_2 p^{2d} + \dots n_d p^{d^2}$$

avec $n_o, n_1, \dots n_d < p^d$, cela implique qu'aucun polynôme sur KL^{p^m} non nul et de degré $< p^d$ par rapport à chaque variable, ne s'annule sur $b, b^{p^d}, \dots b^{p^{d^2}}$. Le type en $(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$

$$\{\, P(x_{i_o},\dots x_{i_\alpha}) \neq 0 \ ;\ P \in KL^{p^{m(d)}}[X_o,\dots X_d],\ P \neq 0$$
$$\text{et de degré} < p^d,\ d \in \mathbb{N},\ i_o,\dots i_\alpha \in \omega_1 \,\}$$

est donc consistant et réalisé dans $(K \subset L)$, d'où le résultat. □

Revenons à 66. Grâce à la disjonction linéaire de A et L_o sur A_o , et A' et L'_o sur A'_o , il y a, entre $\langle A_1L_o \rangle$ et $\langle A'_1L'_o \rangle$ un isomorphisme h prolongeant g . Grâce à la disjonction linéaire de A et L_1 sur A_1 , L_1 et AL_o sont linéairement disjoints sur A_1L_o , d'où en particulier $L_1 \cap AL_o = A_1L_o$, et, si $(l_i)_{i\in\omega}$ est une base de transcendance de L_1 sur A_1L_o , elle reste algébriquement libre sur AL_o .

Grâce au lemme précédent, $\langle AL_o \rangle$ est distinct de L et $\langle A'L'_o \rangle$ de L' , donc $(\langle AL_o \rangle \subset L)$ et $(\langle A'L'_o \rangle \subset L')$ sont deux modèles de $D_{p,f}$ et sont élémentairement équivalents d'après 56 ; de plus, dans chacune de ces paires, $\langle A_1L_o \rangle$ et $\langle A'_1L'_o \rangle$ sont deux parties du petit modèle ayant même type au sens de $T_{p,f}$, elles ont donc même type au sens de $D_{p,f}$ d'après l'absence de p. r. f. ; c'est-à-dire qu'on a (**) :

$$(\langle AL_o \rangle \subset L\ ,\ a)_{a\in\langle A_1L_o \rangle} \equiv (\langle A'L'_o \rangle \subset L'\ ,\ h(a))_{a\in\langle A_1L_o \rangle}\ .$$

Considérons le fragment suivant θ du type de L_1 sur $\langle A_1L_o \rangle$ dans la paire $(\langle AL_o \rangle \subset L)$, où les variables de type énumèrent X et où en particulier x_i est la variable correspondant à l_i (t_T désigne le type au sens de $T_{p,f}$)

$$t_T(X,\langle A_1L_o \rangle) = t_T(L_1,\langle A_1L_o \rangle) \cup$$

{ Pas de liaison algébrique à coefficients dans AL_o entre les x_i } .

Ce type est à paramètres dans $\langle A_1L_o \rangle$, il est consistant puisque réalisé par L_1 , et cette consistance se transmet à son image par h grâce à l'équivalence (**) . En utilisant la consistance de $h(\theta)$ et la saturation de $(K' \subset L')$, on voit que, pour tous d et n entiers, pour tout $\bar{b} \in L_o$ et pour toute formule F , tels que $t_T(L_1,\leq A_1L_o \rangle) \vdash F(\bar{x},\bar{b})$, il existe un entier $m = m(d,n,\bar{b})$ tel que $(K' \subset L')$ satisfait l'énoncé

$$\exists x_1,\ldots x_n\ \ (\forall P \in K'L'^{p^m}[\bar{B},X_1,\ldots X_n]\ \text{ de degré } \leq d)$$
$$(P(h(\bar{b}),x_1,\ldots x_n) \neq 0) \wedge F(\bar{x},h(\bar{b}))\ .$$

En conséquence, le type ci-dessous de $T_{p,e,f}$

$$t_T(X,\langle A'_1L'_o \rangle) = h(t_T(L_1,\langle A_1L_o \rangle)) \cup$$

$\{ P(h(\bar{b}),\bar{x}) \neq 0 \ ; \ P \in K'L'^{p^{m(d,n,\bar{b})}}[\bar{B},\bar{X}]$ de degré $\leq d$, $\bar{b} \in L_o$, m et $d \in \mathbb{N} \}$ est consistant et réalisé dans la paire $(K' \subset L')$. □

67. Proposition. $S_{p,e}$ n'a pas de paire de Vaught.

Démonstration. Cela se déduit du fait que la théorie n'a pas la p. r. f. et qu'elle a une seule théorie de paires. Supposons que $S_{p,e}$ a une paire de Vaught $(K \subset L)$ pour la formule $f(\bar{x},\bar{l})$ avec $\bar{l} \in L$; on a alors, pour tout entier n

$$(K \subset L) \models \exists \bar{a} \ \{ [\exists^{\geq n} \bar{x} \ \ f(\bar{x},\bar{a})] \ \wedge \ \forall \bar{z} \ [f(\bar{z},\bar{a}) \longrightarrow \bar{z} \in E] \} .$$

Une paire quelconque $(K' < L')$ doit satisfaire ces mêmes énoncés, ce qui fournit pour chaque n , des $\bar{a}_n \in L'$ vérifiant

$$(K' \subset L') \models [\exists^{\geq n} \bar{x} \ \ f(\bar{x},\bar{a}_n)] \ \wedge \ \forall \bar{z} \ [f(\bar{z},\bar{a}_n) \longrightarrow \bar{z} \in E] .$$

Si l'ensemble $\{ \bar{x} \in K' \ ; \ L' \models f(\bar{x},\bar{a}_n) \}$ était fini pour chaque n , alors la formule (de $C_{p,e}$) $f(\bar{x},\bar{z}) \wedge \bar{x} \neq \bar{y}$ en $\bar{x}$ aurait la p. r. f. , contradiction avec 60. Donc la paire arbitraire $(K' \subset L')$ est aussi une paire de Vaught, ce qui est absurde. □

Corollaire. Il n'y a pas de type fortement régulier.

Démonstration. Pour toutes les notions utilisées ici, voir par exemple [P5]. La régularité forte étant conservée par héritage, on se place au-dessus d'un modèle ω_1-saturé K ; soit $q \in S_1(K)$ non réalisé et une formule f à paramètres dans K , avec $q \vdash f(x)$. Puisqu'il n'y a pas de rang continu non trivial, f n'est pas fortement minimale, et, grâce à la saturation de K , il y a une formule g de K la coupant en deux parties infinies; q contient g ou $\neg g$, par exemple g . La formule $h = f \wedge \neg g$ est infinie, donc augmentée entre K et $K\langle q \rangle$. Un point de $h(K\langle q \rangle) - K$ vérifie f et ne réalise pas q . □

7. PROPRIÉTÉ DE L'ORDRE DIMENSIONNEL

Dans sa théorie de la classification, Shelah a défini la "propriété de l'ordre dimensionnel" (en abrégé d. o. p.). Il a donné plusieurs formes équivalentes de cette propriété [Sh4, 1-2 et 2-2], qui est une propriété de complexité d'une théorie; nous choisissons la formulation suivante.

Définitions.

1) On appelle modèle ω_1-premier sur un ensemble de paramètres A , un modèle ω_1-saturé contenant A et se plongeant au-dessus de A dans tout modèle ω_1-saturé contenant A . Dans une théorie stable il y a des modèles ω_1-premiers, et un modèle ω_1-premier sur A est unique à A-isomorphisme près (voir [Sh3] ou [Las2]).

2) On dit qu'un type $q \in S(M)$ est (faiblement) orthogonal à un ensemble de paramètres $A \subset M$ lorsqu'il est (faiblement) orthogonal à tout type sur M ne déviant pas sur A .

3) Une théorie stable n'a pas la d. o. p. lorsque, quels que soient les modèles ω_1-saturés $M < M_1$, M_2 , M_1 et M_2 indépendants au-dessus de M , un modèle N ω_1-premier sur $M_1 \cup M_2$ est minimal; ou, ce qui est équivalent, un type $q \in S(N)$ ne peut être orthogonal à la fois à M_1 et M_2 .

Nous allons montrer que $T_{p,e}$ a la d. o. p. . C'est un résultat que Shelah avait déclaré probable dans [Sh2], c'est-à-dire à une époque où il n'avait pas encore défini la d. o. p. dans la forme ci-dessus, mais il n'en a jamais indiqué de preuve. Pour la terminologie et les notations du lemme suivant, se reporter à 23 et 38.

68. Lemme. Soit des extensions régulières $K \subset L \subset M$, $\bar{l} \in L$, $\bar{x}$ et $\bar{y} \in M$ tels que K est un corps de définition de $\mathrm{Ann}(\bar{y},L)$ et que $\bar{x}$ est algébrique séparable sur $K(\bar{l},\bar{y})$. Alors la clôture algébrique relative C de $K(\bar{l})$ dans L est un corps de définition de $\mathrm{Ann}(\bar{x},L)$.

Démonstration. Dans ce qui suit, on note $tr(\bar{a};A)$ au lieu de $tr(A(\bar{a});A)$.

Soit $\bar{a}$ quelconque dans L ; on a, en utilisant 38,

$$tr(\bar{a};K(\bar{l},\bar{x})) \geq tr(\bar{a};K(\bar{l},\bar{x},\bar{y})) = tr(\bar{a};K(\bar{l},\bar{y})) = tr(\bar{a};K(\bar{l})) \geq tr(\bar{a};K(\bar{l},\bar{x})) ,$$

tous ces degrés sont donc égaux, en particulier les deux derniers, ce qui signifie l'indépendance algébrique de $\bar{a}$ et $\bar{x}$ au-dessus de $K(\bar{l})$, donc aussi au-dessus de C . Comme $\bar{a}$ est quelconque dans L , L et $C(\bar{x})$ sont algébriquement disjoints au-dessus de C . Il ne nous reste plus qu'à monter que l'extension $C \subset C(\bar{x})$ est régulière: dans ce cas la disjonction algébrique de $C(\bar{x})$ et L implique leur disjonction linéaire, d'où le résultat, grâce au lemme 69 . Or

a. C est relativement algébriquement clos (en abrégé r. a. c.) dans L qui est r. a. c. dans M , donc C est r. a. c. dans $C(\bar{x})$;

b. $K(\bar{l})$ et $K(\bar{y})$ sont linéairement disjoints au-dessus de K , donc la régularité de l'extension $K \subset K(\bar{y})$ se transfère à $K(\bar{l}) \subset K(\bar{l},\bar{y})$; par ailleurs, $\bar{x}$ est algébrique séparable sur $K(\bar{l},\bar{y})$, donc par transitivité l'extension $K(\bar{l}) \subset K(\bar{l},\bar{y},\bar{x})$ est séparable; comme elle est de plus finiment engendrée, elle se décompose en une extension transcendante pure et une extension algébrique séparable; soit D le corps intermédiaire ainsi introduit. On a alors le schéma

$$\begin{tikzcd}
K(\bar{l},\bar{x},\bar{y}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & CD(\bar{x},\bar{y}) \arrow[d, dash] \\
D \arrow[d, dash, "\text{transc. pure}"'] & CD \arrow[d, dash] \\
K(\bar{l}) \arrow[r, dash, "\text{alg.}"'] & C
\end{tikzcd}$$

D et C sont linéairement disjoints sur $K(\bar{l})$ donc la régularité de $K(\bar{l}) \subset D$ se transfère à $C \subset CD$; enfin, si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont algébrique séparables sur D , ils le sont a fortiori sur CD . En conséquence $C \subset CD(\bar{x},\bar{y})$ est séparable, ainsi que la sous-extension $C \subset C(\bar{x})$. □

<u>69. Lemme</u>. Si les corps $C(\bar{x})$ et L sont linéairement disjoints au-dessus de C , on a alors $Ann(\bar{x},L) = L \otimes_C Ann(\bar{x},C)$.

Démonstration. Soit $\Sigma\, l_i \bar{X}^i \in \mathrm{Ann}(\bar{x},L)$; on extrait des l_i une partie linéairement libre sur C , et on décompose les autres au-dessus, c'est-à-dire qu'on écrit
$$\sum_i l_i \bar{X}^i = \sum_{i,j} c_{i,j} l_j \bar{X}^i$$
avec $c_{i,j} \in C$ et les $l_j \in L$ linéairement indépendants sur C , donc aussi sur $C(\bar{x})$; on a $\sum_i l_i \bar{x}^i = 0 = \sum_j (\sum_i c_{i,j} \bar{x}^i)\, l_j$, donc $\Sigma\, c_{i,j} \bar{x}^i = 0$ pour chaque j , d'où $\Sigma\, c_{i,j} \bar{X}^i \in \mathrm{Ann}(\bar{x},C)$ et enfin $\sum_i l_i \bar{X}^i = \sum_j l_j \sum_i c_{i,j} \bar{X}^i \in \mathrm{Ann}(\bar{x},C) \otimes_C L$, cqfd . □

<u>70. Lemme.</u> Soit $K < L < M \models T_{p,e}$, $y \in M$ ne déviant pas entre K et L , et $x \in L\langle y \rangle$. Alors il existe un entier n tel que, pour tout entier i , l'idéal $I_i = I_L(x) \cap L[X_j \ ; \ j \in p^{ei}]$ a un corps de définition de degré de transcendance $\leq np^{ei}$ sur K .

Démonstration. Par définition, on a $L\langle y \rangle = L(y_j ;\ j \in (p^e)^{<\omega})^s$; donc il existe un entier i_o et $\bar{l} \in L$ tels que x soit algébrique séparable sur $K(\bar{l},\bar{y}_{i_o})$, où $\bar{y}_{i_o}$ est la suite des composantes de profondeur i_o de y . En conséquence, pour tout entier i , les composantes $\bar{x}_i$ de profondeur i de x sont algébriques séparables sur $K(\bar{l}_i,\bar{y}_{i_o-i})$. Puisque y ne dévie pas entre K et L , a fortiori $\bar{y}_{i_o-i}$ non plus; donc, d'après 68 , $\mathrm{Ann}(\bar{x}_i,L)$ a un corps de définition algébrique sur $K(\bar{l}_i)$; or $\mathrm{Ann}(\bar{x}_i,L) = I_i$. On obtient ainsi le résultat avec n égal à la longueur de $\bar{l}$. □

<u>71. Lemme</u>. Soit $K < L \models T_{p,e}$ tels que $\mathrm{tr}(L;K) \geq \omega$; alors il existe $q \in S_1(L)$ faiblement orthogonal à K .

Démonstration. On construit par induction sur i un idéal I de $L[X_j ;\ j \in (p^e)^{<\omega}]$ qui contienne $I^{\bullet}$, soit premier séparable de RP égal à 1 , et tel que, quel que soit l'entier n , pour i assez grand, tout corps de définition de I_i ait un degré de transcendance $> np^{ei}$ sur K . Choisissons une infinité dénombrable de points de L algébriquement indépendants sur K , qu'on repère avec un double indice, soit $(l_{j,i})_{j<i!,i\in\omega}$, et définissons les I_i : I_o est l'idéal 0

I_{i+1} est engendré par I_i , $(I^{\cdot})_{i+1}$ et les polynômes $X_{\bar{0}^\frown j}$ pour $j \neq 0$, 1,

$$\text{et } P_i(X_{\bar{0}^\frown 0}, X_{\bar{0}^\frown 1}) = X_{\bar{0}^\frown 1} - \sum_j l_{j,i} X_{\bar{0}^\frown 0}{}^j ,$$

où $\bar{0}$ désigne le multiplet $(0,\ldots0)$ de longueur i .

On vérifie par induction, avec les mêmes techniques qu'en 39, que $X_{\bar{0}}/I_i$ est transcendant sur L , donc aussi $X_{\bar{0}}/I$, ce qui prouve que I est premier séparable de RP = 1 . De plus un corps de définition de I_{i+1} contient nécessairement les $l_{i,j}$; en effet I_{i+1} contient le polynôme $P_i(X_{\bar{0}^\frown 0}, X_{\bar{0}^\frown 1})$ et aucun autre polynôme de la forme ($X_{\bar{0}^\frown 1}$ - un polynôme en $X_{\bar{0}^\frown 0}$) , sinon $X_{\bar{0}^\frown 0}$ serait algébrique sur L modulo I_{i+1} ; en conséquence un automorphisme de L laissant I globalement invariant doit laisser les P_i fixes, et donc aussi chaque $l_{j,i}$. Le type $q \in S_1(L)$ vérifiant $I_L(q) = I$ est de RP égal à 1 ; le faire dévier consiste donc à le réaliser. D'après le lemme 70 aucun type sur L ne déviant pas sur K ne saurait le faire dévier, q est donc faiblement orthogonal à K . □

<u>Conventions.</u>

1. En particulier, dès que L contient un point a générique sur K , on peut choisir les $l_{j,i}$ parmi les composantes de a ; par exemple, on range les $l_{j,i}$ selon l'ordre lexicographique, on les renomme $(l_i)_{i<\omega}$ et on choisit $l_i = a_{\bar{0}^\frown 1}$, où $\bar{0}$ est le multiplet de longueur i . On appellera $q_a(L)$ le type ainsi obtenu.

2. On dira qu'un idéal I de $L[X_j;\ j \in (p^e)^{<\omega}]$ a une <u>croissance faible</u> sur un sous-corps K de L lorsqu'il existe un entier n tel que $I_i = I \cap L[X_j;\ j \in (p^e)^{\leq i}]$ admette un corps de définition de degré de transcendance $\leq np^{ei}$ sur K . On dira que $q \in S(L)$ a une croissance faible sur K si c'est le cas pour $I_L(q)$.

<u>72. Théorème</u>. $T_{p,e}$ a la d. o. p. .

Démonstration. Considérons la situation suivante:

K est un modèle ω_1-saturé;

a et b sont deux réalisations indépendantes du générique de K ;

K_a et K_b sont deux modèles ω_1-saturés contenant K et indépendants sur K, $a \in K_a$, $b \in K_b$;

L est ω_1-saturé et contient $K_a \cup K_b$;

$q = q_{a+b}(L)$.

On va montrer que q est orthogonal à K_a ; sinon q serait réalisé par un $x \in L\langle y \rangle$ pour un y ne déviant pas entre K_a et L ; d'après 70 appliqué avec $K = K_a$, q devrait avoir une croissance faible sur K_a. Or $a+b$ ne dévie pas entre K et K_a, donc $K\langle a+b \rangle$ et K_a sont algébriquement indépendants sur K, et des points de $K\langle a+b \rangle$ ont même degré de transcendance sur K ou K_a. Par construction, q n'a pas une croissance faible sur K, et sa croissance reste la même sur K_a. Ainsi q est orthogonal à K_a, et par symétrie, à K_b aussi. Si on a pris pour L le modèle ω_1-premier au-dessus de $K_a \cup K_b$, cette situation prouve la d. o. p. . □

Cette construction permet aussi de réaliser les situations suivantes, plus ou moins liées à la ω-Didip et la ω-Dop [Sh4].

1. Soit K ω_1-saturé; pour $i \in \omega$, K_{i+1} ω_1-premier sur $K_i(x_i)$, $x_i \notin K_i$, L ω_1-saturé $\supset \cup K_i$, q le type sur L construit comme précédemment, où les l_{ij}, réordonnés en une suite de type ω, sont égaux aux x_i. Alors q est orthogonal à chaque K_i.

2. Soit K ω_1-saturé, $(x_i)_{i\in\omega}$ des points $\notin K$ indépendants sur K, K_i ω_1-premier sur $K(x_i)$, L ω_1-premier sur $K(x_i;\ i \in \omega)$, q le même type que ci-dessus. Alors q est orthogonal à chaque K_i.

Une autre preuve de la d. o. p. a été trouvée indépendamment par Z. Chatzidakis, G. Cherlin, S. Shelah, G. Srour et C. Wood. Elle consiste à construire beaucoup de types qui soient isomorphes et néanmoins fortement orthogonaux, voir [CCShSrW].

Shelah a montré qu'une théorie non superstable admet 2^{κ} modèles en toute cardinalité $\kappa \geq \aleph_1$ [Sh3], et que la d. o. p. impose qu'il y a 2^{κ} modèles ω_1-saturés en toute cardinalité $\kappa \geq (2^{\aleph_o})^+$ [Sh4]. Par ailleurs il est facile de voir qu'il y a $2^{\aleph_o}$ modèles dénobrables (il y a en effet $2^{\aleph_o}$ types sur le vide). La situation est donc aussi compliquée qu'il est possible, et on s'accorde généralement pour considérer que, dans ce cas, il n'y a pas de classification satisfaisante des modèles.

Ainsi qu'on l'a vu, $T_{p,e}$ a la d. o. p. et la théorie de ses paires élémentaires strictes est complète et stable. Une telle situation n'est possible que parce que la théorie n'est pas superstable: E. Bouscaren a en effet prouvé que, si une théorie est superstable avec la d. o. p. , alors sa théorie de paires admet au moins une complétion instable [Bous]; l'exemple de $T_{p,e}$ montre que ce résultat n'est plus vrai si on affaiblit l'hypothèse de superstabilité en stabilité.

PARTIE IV

DEGRÉ D'IMPERFECTION INFINI

1. LES TYPES

Pour décrire les types, on utilise des arbres. Si $K < M \models T_{p,\infty}$ et $x \in M$, on associe à $t(x,M)$ un arbre correspondant aux décompositions successives de x et de ses composantes sur une p-base, qui est d'abord une p-base de K, puis s'enrichit peu à peu des composantes p-indépendantes de x. Dans le cas d'un invariant e fini, il y avait un arbre unique: l'arbre à une seule racine, dont chaque branche est de longueur ω et chaque noeud branche p^e fois. Ici il y a toute une famille d'arbres possibles.

Définition. Un arbre T est dit acceptable sur un ensemble d'indices J ordonné lorsque:
- la racine est unique
- les branches sont de longueur $\leq \omega$
- chaque noeud branche finiment,

et que, de plus, T est étiqueté en respectant les propriétés suivantes: repérons chaque point s de T par un couple (n,i), où n est la distance de s à la racine (ou profondeur) et i un indice qui détermine s parmi les points de même profondeur; on suppose que, à n fixé, les indices i sont totalement ordonnés, et qu'ainsi T est totalement ordonné par l'ordre lexicographique; alors:
- ou bien s est une extrémité de T
- ou bien s branche en $\{ (n+1,j) \ ; \ j \in J_{n,i} \}$ où $J_{n,i}$ est l'ensemble des

applications d'une partie finie $A_{n,i}$ de $J \cup \{ t \in T ; t$ extrémité de T et $t < s \}$ dans p , et l'ordre est tel que, si on a placé tous les éléments de J avant les extrémités de T , alors l'ordre sur $J_{n,i}$ est lexicographique;
- si s et s' sont deux points de même profondeur de T vérifiant $s < s'$, et si t et t' sont de même profondeur, t majoré par s et t' par s' dans T , alors $t < t'$.

Si K admet une p-base $B = \{ b_j ; j \in J \}$ et que T est un arbre acceptable sur J , on définit:
- l'anneau $C(T) = K[X_s ; s \in T]$;
- les p-monômes m_j , pour j appartenant à un des $J_{n,i}$; si $a \in J$, b_a est déjà défini, c'est un élément de B ; si $a \in T$, on pose $b_a = X_a$; alors $m_j = \prod_{a \in A_{n,i}} b_a^{j(a)}$;
- l'idéal $I^{\bullet}(T)$ de $C(T)$ engendré par les polynômes $\{ X_{(n,i)} - \sum_{j \in J_{n,i}} X_{(n+1,j)}{}^p m_j ; (n,i) \in T$ et (n,i) n'est pas une extrémité de $T \}$;
- si C est l'anneau $C(T)$, I un idéal de C et $s \in T$, on note $C_s = K[X_t ; t \in T , t \leq s]$, $C_{<s} = K[X_t ; t \in T , t < s]$, $I_s = I \cap C_s$ et $I_{<s} = I \cap C_{<s}$.

Une fois choisis B et un ordre sur B , on associe de façon évidente à $x \in L > K$, un arbre T acceptable, puis l'idéal $I = I(x,T)$ de $C(T)$ annulateur sur K des composantes successives de x ; I est un idéal ayant les propriétés suivantes * : I est premier, séparable, contient $I^{\bullet}(T)$, ne contient pas 1 et est tel que, si s est une extrémité de T , on a $I_s = I_{<s}.C_s(T)$ (donc X_s/I est transcendant sur K). On peut associer à x plusieurs arbres différents (on peut toujours ajouter des composantes nulles sur de nouveaux p-monômes), mais parmi eux il y a en a un qui est minimal pour l'inclusion; de plus, si T et T' sont tous deux associés à x , ils ont les mêmes extrêmités, $T \cap T'$ est aussi associé à x , et si $T \subset T'$, alors $I(x,T')$ est engendré par $I(x,T)$ et les X_s pour $s \in T' - T$, d'où $C(T)/I(x,T) \simeq C(T')/I(x,T')$.

Réciproquement, si T est un arbre acceptable pour J et I un idéal de $C(T)$ ayant les propriétés $*$, considérons $L = Q(C(T)/I)^s$ et l'injection canonique de K dans L ; alors $I = I(X_\emptyset/I,K)$.

Cette étude des types prouve la stabilité de $S_{p,\infty}$: il y a au plus $|J|^\omega \leq |K|^\omega$ arbres acceptables sur J , et au plus $|K|^\omega$ idéaux dans $C(T)$.

On voit qu'il y a toujours des modèles premiers uniques (mais en général non minimaux), et que, pour $K < L \models S_{p,\infty}$ et $x \in L$, le modèle premier au-dessus de K et x est modèle-algébrique sur $K(x)$.

On peut montrer avec exactement les mêmes techniques que dans le cas fini, que chaque $I^\bullet(T)$ a les propriétés $*$.

2. DÉVIATION

Soit $K \leq L \models S_{p,\infty}$, $r \in S_1(L)$ et $q = r \upharpoonright K$. Un arbre de décomposition de q ne reste pas nécessairement un arbre de décomposition pour r , et inversement un arbre de décomposition de r n'en est pas nécessairement un pour q (par exemple si x est p-libre sur K et non sur L). La caractérisation de la déviation est la suivante: r ne dévie pas sur K lorsque q et r ont les mêmes arbres, et qu'on a, pour chaque tel arbre T , $I(r,T) = I(q,T) \otimes_K L$, ou une des propriétés équivalentes de la proposition 36.

3. LE GÉNÉRIQUE

Le générique est le type p-libre; il correspond à l'arbre réduit à sa racine, et à l'idéal 0 . Il n'est pas superstable.

Pour ce qui suit, voir [P5] 19.c.

<u>Proposition</u>. Le générique est de poids 1 .

Démonstration. Soit M l'univers, $K < M$, $b_1, b_2 \in M$ indépendants sur K et g générique sur $K\langle b_1, b_2\rangle$. Il faut vérifier que g ne peut pas faire dévier à la fois b_1 et b_2 sur K. Si g fait dévier b_i, b_i a nécessairement une composante c_i qui est générique sur K et telle que $g \in M^p(K \cup \{c_i\})$. Mais c_1 et c_2 sont indépendants donc p-indépendants sur K, d'où $g \in M^p(K)$, contradiction. □

En conséquence, il y a une notion de dimension liée au générique: on retrouve le degré d'imperfection. La situation était tout-à-fait différente en invariant fini: on avait remarqué que le générique pouvait faire dévier ω réalisations indépendantes de lui-même, ce qui exclut qu'il ait un poids fini.

4. <u>DIVERS</u>

Appelons <u>complètement lié</u> un type dont aucune composante n'est p-libre, c'est-à-dire le type sur K d'un élément $x \in \bigcap_n M^{p^n} K$. Un type qui n'est pas complètement lié est RK-supérieur ou égal au générique, et donc n'est pas superstable. De cela résultent plusieurs choses. D'abord <u>le générique est orthogonal à tout type superstable</u>, et même fortement orthogonal. Ensuite on peut réutiliser la définition des rangs RP, RS et RT, à condition d'ajouter l'hypothèse de superstabilité: si p est superstable, alors la profondeur de $I(p)$ est une notion de rang, etc...; sinon le générique sur K, dont le modèle premier est de degré de transcendance 1 sur K, fournirait un contre-exemple.

Le fait qu'une infinité de b_i interviennent dans la décomposition d'un type n'interdit pas qu'il soit rangé: ainsi le type en x défini par les équations

$$x = b_o + x_1{}^p b_1$$

$$x_i = b_i + x_{i+1}{}^p b_{i+1}, \quad 0 < i < \omega,$$

a un RT égal à 1.

Il n'y a pas de rang continu non trivial, parce que tout type non réalisé est RK-supérieur ou égal au générique: si q n'est pas réalisé, l'idéal associé I n'est pas maximal, donc aucun I_n pour n assez grand; pour tout tel n, il y a un $s \in T$ de profondeur n, tel que X_s/I soit transcendant sur les autres X_t/I de profondeur au plus n ; si on remplace x_s par le générique, le type ainsi obtenu et x coïncident jusqu'à la profondeur $n-1$.

Du fait qu'on n'a plus la p-base dans le langage,

- il n'y a plus d'injection définissable sans paramètre de $S_n(K)$ dans $S_1(K)$
- il n'y a plus de plus petit ensemble de définition d'une formule ou d'un type.

Néanmoins l'interprétation du RU , losqu'il est fini, comme nombre maximal de modèles intermédiaires emboîtés, reste vraie: il suffit dans la preuve de 49 (partie 2-b) d'utiliser la notion de corps de définition minimal de l'idéal au lieu du corps de définition du type.

5. LES PAIRES ET L'ABSENCE DE P. R. F.

73. Théorème. La théorie $C_{p,\infty}$ des paires $(K \subset L)$ où $K \models S_{p,\infty}$ et $K \prec L$, est complète.

La preuve va se faire par va-et-vient et utilise, outre les disjonctions linéaire et algébrique, une autre notion d'indépendance.

Définition. Soit des inclusions de corps $K \subset L$, $M \subset N$, toutes séparables; L et M sont dits p-indépendants sur K lorsqu'ils vérifient une des trois propriétés équivalentes:

- dans N , la p-indépendance entre éléments de L au-dessus de K et au-dessus de M est la même;
- dans N , la p-indépendance entre éléments de M au-dessus de K et au-dessus de L est la même;
- si A est une p-base de K , B une partie de L telle que $A \cup B$ soit p-libre dans L et C une partie de M telle que $A \cup C$ soit p-libre dans

M , alors $A \cup B \cup C$ est p-libre dans N .

L'équivalence entre les trois propriétés est claire, de même le point suivant:

Lemme. Si les inclusions $K \subset L$, $M \subset N$ sont toutes séparables et que L et M sont p-indépendants dans N au-dessus de K , alors l'extension $LM \subset N$ est séparable.

La preuve de 73 va utiliser les faits suivants:

74. Lemme. Soit une extension séparable $K \subset L$, avec $[K:K^p] \geq \omega$ et $tr(L,K) \geq \omega$; alors il n'existe pas d'entier n tel que

$$(K \subset L) \models \forall x \ \exists k_1,\dots k_n \in K \ \exists l_1,\dots l_n \ (x = \Sigma \, l_i{}^p k_i) \ .$$

Démonstration. La conclusion est vraie lorsque L contient des points p-indépendants sur K . Supposons donc $L = L^p K$; dans ce cas, un point $x \in L$ s'écrit $x = \sum_{i \in I} x_i{}^p m_i$, où les $\{m_i \ ; \ i \in I\}$ sont les p-monômes associés à une p-base B de K , et le corps $K(x_i ; i \in I)$ ne dépend pas du choix de B . Prenons une suite d'éléments $(l_i)_{i \in \omega}$ de L algébriquement indépendants sur K , et des points $(b_i)_{i \in \omega}$ de K p-indépendants. D'après ce qui précède, $\sum^m l_i{}^p b_i$ ne saurait s'écrire $\sum^n x_i{}^p a_i$ avec $x_i \in L$, $a_i \in K$ et $n < m$. □

75. Corollaire. Si la paire $(K \subset L) \models C_{p,\infty}$ est ω_1-saturée, L réalise des points p-indépendants sur K .

Le lemme 74 peut être renforcé comme suit:

76. Lemme. Les hypothèses sont les mêmes qu'en 74 et $A = \{a_1,\dots a_r\} \subset L$. Alors il n'existe pas d'entier n tel que $(K \subset L)$ satisfasse

$$\forall x \ \exists k_1,\dots k_n \in K \ \exists (y_j)_{j \in p^{n+r}} \ [x = \Sigma \, y_j{}^p \prod_1^r a_i{}^{j(i)} \prod_{r+1}^{r+n} k_i{}^{j(i)}] \ .$$

Démonstration. C'est trivial si $L \neq L^p(K,A)$. Sinon, on remplace éventuellement A par une sous-partie, de façon à se ramener au cas où A est p-libre sur K . Comme précédemment, si on choisit une p-base B de K et qu'on décompose un point x de L sur $B \cup A$, $x = \sum_{i \in I} x_i^p m_i$, le corps $K(A, x_i ; i \in I)$ ne dépend pas du choix de B ; on conclut de la même façon. □

77. Corollaire. Si $(K \subset L) \models C_{p,\infty}$ est ω_1-saturé et si L_o est un sous-corps dénombrable de L, alors L réalise ω_1 points p-indépendants sur KL_o.

Démonstration de 73. On fait un va-et-vient entre deux modèles ω_1-saturés $(K \subset L)$ et $(K' \subset L')$. Les domaines des isomorphismes partiels sont les sous-structures $(K_o \subset L_o)$ de $(K \subset L)$ vérifiant:

- L_o est dénombrable;
- $K_o < K$ et $L_o < L$;
- K et L_o sont linéairement disjoints au-dessus de K_o ;
- K et L_o sont p-indépendants au-dessus de K_o ;

et leurs images sont les sous-structures de $(K' \subset L')$ ayant les propriétés correspondantes. Remarquons qu'une sous-structure élémentaire dénombrable a ces propriétés.

1) On démarre le va-et-vient en prenant pour K_o le modèle premier de $S_{p,\infty}$ et $L_o = K_o\langle x \rangle$, où $x \in L^{p^\infty} - K$.

2) Pour la propriété de va, soit à reproduire $(K_1 \subset L_1)$ au-dessus de $(K_o \subset L_o)$; on reproduit K_1 en K'_1 en utilisant la complétude de $S_{p,\infty}$; $K'_1L'^s_o$ et $K_1L_o^s$ sont isomorphes grâce à la disjonction linéaire de K et L_o sur K_o, et de K' et L'_o sur K'_o. Grâce à la p-indépendance de L'_o et K' sur K_o, l'extension $\langle L'_oK' \rangle \subset L'$ est séparable, et 77 permet de reproduire dans L' une p-base B de L_1 au-dessus de $\langle K_1L_o \rangle$, qui soit de plus p-libre sur $K'L'_o$; si B' est cette p-base, nécessairement elle est algébriquement libre sur $K'L'_o$, donc $\langle K_1L_o(B) \rangle$ et $\langle K'_1L'_o(B') \rangle$ sont linéairement disjoints sur K. On finit comme dans le cas d'un invariant fini. □

Les conséquences du théorème 73 et de sa preuve sont les mêmes que dans le cas d'un invariant fini.

Corollaire. Soit $(K \subset L) \subset (K' \subset L')$ deux modèles de $C_{p,\infty}$; alors on a $(K \subset L) < (K' \subset L')$ ssi L et K' sont linéairement indépendants et p-indépendants au-dessus de K dans L' .

Corollaire. $S_{p,\infty}$ n'a pas la p. r. f. .

Corollaire. $C_{p,\infty}$ est stable sans p. r. f. .

Enfin sur les paires en général: 63 et 64 restent vrais si e est infini, de même 65 pour f infini.

6. LA D. O. P.

78. Théorème. $S_{p,\infty}$ a la d. o. p. .

La preuve est la même que dans le cas d'un degré d'imperfection fini, mais elle nécessite un argument supplémentaire de théorie des modèles:

79. Proposition. Soit $K < M$ des modèles, K ω_1-saturé, d'une théorie stable, K_o dénombrable $< K$ et q régulier $\in S_1(M)$. Alors q est orthogonal à K ssi il est orthogonal à tout type $r \in S_1(M)$ ne déviant pas entre K et M , et contenant $q \restriction K_o$.

La direction "seulement si" est triviale; la preuve de "si" repose sur deux lemmes.

80. Lemme. Soit un type régulier q sur un modèle M et $K < M$ tel que $q \not\perp K$. Alors la classe $\bar{q}$ de q pour l'ordre de domination est stable par tout K-automorphisme de M .

Démonstration. On peut supposer M saturé de cardinalité $> |K|$, le cas général se réduit trivialement à ce cas-là. Raisonnons par l'absurde: soit un K-automorphisme α de M ne conservant pas $\bar{q}$. Par régularité de q, on a $q \perp \alpha(q)$. Puisque $q \not\perp K$, il y a un type r sur M ne déviant pas sur K et non orthogonal à q. Par isomorphisme $\alpha(q) \not\perp \alpha(r)$, or $\alpha(r) = r$. Soit A dénombrable $< M$ sur lequel q ne dévie pas.

1. Supposons d'abord A et $\alpha(A)$ indépendants sur K ; on prend une suite de Morley $(A_i)_{i\in\omega_1}$ de A sur K, avec $A_o = A$, $A_1 = \alpha(A)$, et q_i les types isomorphes à q correspondants. D'après l'hypothèse de saturation de M, deux paires quelconques de q_i se correspondent par un K-automorphisme, donc $r \not\perp q_i$ et les q_i sont tous orthogonaux entre eux, parce que q et $\alpha(q)$ le sont. Réalisons r en b, et q_i en a_i faisant dévier b. Alors b fait dévier ω_1 points indépendants, ce qui contredit la stabilité.

2. Si A et $\alpha(A)$ ne sont pas indépendants, on prend $A' < M$ indépendant sur K à la fois de A et $\alpha(A)$, β un K-automorphisme de M envoyant A' sur A, et $\gamma = \alpha \circ \beta$. Au moins un des automorphismes β et γ déplace $\bar{q}$, et on est ramené au cas 1. □

<u>81. Lemme</u>. Soit $K_o < A$, $K < M$, A et K indépendants sur K_o et $q \in S_1(M)$. Si $\bar{q}$ est stable par tout A-automorphisme et tout K-automorphisme de M, alors il est stable par tout K_o-automorphisme de M.

Démonstration. C'est un cas particulier du corollaire X.1.3.2. de [Las2], dont la preuve n'utilise pas l'hypothèse de superstabilité qui est faite dans tout ce chapitre. □

<u>Démonstration de 79</u>. On se ramène au cas où M est saturé. Soit une partie dénombrable A de M sur laquelle q ne dévie pas; en l'agrandissant éventuellement, on peut choisir cette partie en sorte que

- A soit un modèle,
- si $K_1 = A \cap K$, K_1 soit lui-même un modèle,
- $K_o \subset K_1$,

- A et K soient indépendants au-dessus de K_1 .

On prend alors une partie A' de K isomorphe à A au-dessus de K_1 ; cet isomorphisme se prolonge en un K_1-automorphisme α de M . Le type $\alpha(q)$ ne dévie pas au-dessus de A', donc a fortiori pas au-dessus de K . Par ailleurs, puisque α est un K_1-automorphisme, on a $\alpha(q) \upharpoonright K_o = q \upharpoonright K_o$. Si on suppose que q est orthogonal à tout type ne déviant pas sur K et contenant $q \upharpoonright K_o$, alors $q \perp \alpha(q)$. Or q est laissé fixe par tout A-automorphisme de M , donc aussi $\bar{q}$, et si on suppose $q \not\perp K$, $\bar{q}$ est laissé fixe par tout K-automorphisme, d'après 80. Mais alors il est laissé fixe par tout K_1-automorphisme d'après 81. Cela contredit $q \perp \alpha(q)$. En conséquence, on a $q \perp K$. □

<u>Démonstration de 78</u>. Soit K ω_1-saturé, $b \in K^p - K$, c et d deux réalisations indépendantes du générique de $\cap K^{p^n}(b)$, sous-groupe infiniment définissable de K (ce type correspond, sur une base de K commençant par b , à l'arbre $T = (p^e)^{<\omega}$ et l'idéal $I^\bullet(T)$), $K_c \supset K(c)$ et $K_d \supset K(d)$ deux modèles ω_1-saturés indépendants sur K , $L \supset K_c \cup K_d$ un modèle ω_1-saturé et $q = q_{c+d}(L)$, comme en 72. Il faut vérifier $q \perp K_c$ et $q \perp K_d$; la symétrie entre c et d , et 79, permettent de se contenter de prouver $q \perp r$ pour tout $r \in S_1(L)$, ne déviant pas entre K_c et L , et vérifiant $r \in \cap M^{p^n}(b)$, si M est l'univers. Sinon q est réalisé par un $x \in L\langle y \rangle$ pour un y réalisant r ; c'est-à-dire, si on a choisi une base B' de L contenant B , que x est algébrique séparable sur $K_c(\bar{l},\bar{y}_{i_o})$ pour des paramètres $\bar{l} \in L$ et un entier i_o , donc $\bar{x}_i$ algébrique séparable sur $K_c(\bar{l}_i,\bar{y}_{i_o{}^\frown i})$. La preuve faite dans le cas d'un degré fini (plus précisément $e = 1$) permettra de conclure, si on sait que $\bar{l}$ peut être choisi dans $\cap L^{p^n}(b)$. Si x et $\bar{z} = \bar{y}_{i_o}$ vérifient (e) : $\Sigma\, l_{ij} x^i \bar{z}^j = 0$, décomposons-les sur B' ; x et $\bar{z}$ ont des composantes nulles sur tout p-monôme $\neq 1, b, \ldots b^{p-1}$; et $\bar{l}$ s'écrit $\bar{l} = \bar{l}' + \bar{l}''$ où $\bar{l}' \in L^p(b)$, et $\bar{l}''$ a des composantes nulles sur $1, b, \ldots b^{p-1}$. Alors (e) implique $\Sigma\, l'_{ij} x^i \bar{z}^j = 0$. En itérant ce raisonnement, on voit que, pour tout

n , on peut choisir dans (e) , $\bar{1} \in L^{p^n}(b)$; grâce à la ω_1-saturation de L et à la définissabilité du type de $x\bar{~}\bar{z}$ sur L , on peut choisir $\bar{1} \in \cap L^{p^n}(b)$ (cf. le raisonnement fait en 48). □

PARTIE V

RETOUR SUR LES IDÉAUX

Nous revenons à l'esprit de la première partie et donnons en vrac quelques résultats qui se démontrent aisément, une fois étudiées les propriétés des théories $S_{p,e}$.

82. Lemme. Soit un corps K séparablement clos et I , $J_1, \ldots J_r$ des idéaux de $K[X_1, \ldots X_n]$, I premier séparable propre ne contenant aucun des J_i . Alors il existe $x \in K$ annulant I et aucun des $J_1, \ldots J_r$.

Démonstration. On plonge $K[X_1, \ldots X_n]/I$ dans une extension élémentaire L de K (si le degré d'imperfection de K est fini, on utilise la construction faite en 46; si le degré est infini, on envoie une base de transcendance séparante $x_{i_1}, \ldots x_{i_r}$ de $Q(K[X_1, \ldots X_r]/I)$ sur K sur des réalisations indépendantes du générique, ce qui signifie alors $L = K(x_{i_1}, \ldots x_{i_r})^s$). Dans L , $(X_1/I, \ldots X_n/I)$ est un zéro de I et d'aucun des J_i ; l'existence d'un tel zéro se transmet à K par inclusion élémentaire. □

83. Lemme. Soit un idéal I de $K[X_1, \ldots X_n]$. Alors les idéaux premiers (respectivement premiers séparables) minimaux au-dessus de I sont la trace sur $K[X_1, \ldots X_n]$ des premiers (resp. premiers séparables) minimaux au-dessus de $I \otimes_K K^s$ dans $K^s[X_1, \ldots X_n]$.

Démonstration. Découle de 32. □

<u>84. Proposition</u>. Soit un corps K , un idéal I de $K[X_1,\dots X_n]$ et une famille $\{ P_i \ ; \ 1 \leq i \leq r \}$ d'idéaux premiers séparables vérifiant $P_i \not\subset P_j$ pour $i \neq j$. Les P_i sont les idéaux premiers séparables minimaux au-dessus de I ssi, quel que soit $\bar{x} = (x_1,\dots x_n) \in K^s$, $\bar{x}$ annule I ssi il annule un des P_i .

Démonstration. 1) Supposons d'abord que les P_i sont les premiers séparables minimaux au-dessus de I . Trivialement, si $\bar{x}$ dans n'importe quelle extension de K annule un des P_i , il annule I . Réciproquement, soit $\bar{x} \in K^s$ annulant I ; parce que l'extension $K \subset K^s$ est séparable, $\bar{x}$ doit annuler $\text{Sép}(I)$; par I-2 , $\text{Sép}(I) = \cap P_i$, et $\bar{x}$ annule donc un des P_i .
2) Supposons réciproquement que, quel que soit $\bar{x} \in K^s$, $\bar{x}$ annule I ssi il annule un des P_i . Supposons d'abord $K = K^s$; on applique alors trois fois 82 pour montrer, d'abord que chaque P_i contient I , puis qu'il est minimal, et enfin qu'on obtient ainsi tous les minimaux. Si K n'est pas séparablement clos, on passe par K^s : $\bar{x} \in K^s$ annule $I \otimes_K K^s$ ssi il annule un des $P_i \otimes_K K^s$ ssi il annule un des premiers (séparables) minimaux Q_{ij} au-dessus d'un $P_i \otimes_K K^s$; les Q_{ij} sont donc les premiers séparables minimaux au-dessus de $I \otimes_K K^s$ et d'après 83, les $Q_{ij} \cap K[X_1,\dots X_n]$, c'est-à-dire les P_i , sont les premiers séparables minimaux au-dessus de I . □

<u>85. Proposition</u>. Profondeur et profondeur séparable d'un idéal premier séparable de $K[X_1,\dots X_n]$ coïncident.

Démonstration. 1) On suppose d'abord K séparablement clos. Soit un idéal I premier séparable de $K[X_1,\dots X_n]$, $L = Q(K[X_1,\dots X_n]/I)$ et $x_i = X_i/I$. On prend une base de transcendance séparante de L sur K , $\{ x_{i_1},\dots x_{i_r} \}$ extraite des x_i , et on plonge L dans une extension élémentaire de K dans laquelle $x_{i_1},\dots x_{i_r}$ sont des réalisations indépendantes du générique. On considère les corps

$$K < K\langle x_{i_1}\rangle < K\langle x_{i_1}, x_{i_2}\rangle \ldots < K\langle x_{i_1},\ldots x_{i_r}\rangle = M$$

et les idéaux premiers séparables de $M[X_1,\ldots X_n]$

$$I_j = \mathrm{Ann}((x_1,\ldots x_n)\ ,\ K\langle x_{i_1},\ldots x_{i_j}\rangle) \underset{K\langle x_{i_1},\ldots x_{i_j}\rangle}{\otimes} M\ ;$$

ils vérifient $I \subsetneq I_1 \subsetneq \ldots I_r \subsetneq M[X_1,\ldots X_n]$. Alors M satisfait un énoncé du premier ordre exprimant l'existence de cette chaîne (le nombre de générateurs de I_j , leur degré et le degré d'un polynôme appartenant à $I_{j+1} - I_j$ sont fixés), dont les paramètres sont les coefficients des générateurs de I ; K satisfait le même énoncé, ce qui implique $PS(I) \geq r = P(I)$ et donc $PS(I) = P(I)$.

2) Le corps K est maintenant quelconque ; $I \otimes K^s$ n'est en général pas premier, mais si Q est un premier minimal au-dessus de $I \underset{K}{\otimes} K^s$, il est séparable, sa dimension reste celle de P , et par le 1), $PS(Q) = P(Q)$; parce que l'extension $K \subset K^s$ est algébrique, la trace sur $K[X_1,\ldots X_n]$ d'une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de $K^s[X_1,\ldots X_n]$ reste strictement croissante ce qui prouve le résultat. □

BIBLIOGRAPHIE

[B] C. Berline, Déviation des types dans les corps algébriquement clos, dans Théories stables 3 (1980-82), Ed. B. Poizat, Université P. et M. Curie - I. H. P., Paris, 1983.

[Bour] N. Bourbaki, XI, Algèbre chapitre 5, Corps commutatifs, Hermann, Paris, 1959.

[Bous] E. Bouscaren, Dimensional order property and pairs of models, Ann. of pure and applied Logic, to appear.

[CCShSrW] Z. Chatzidakis, G. Cherlin, S. Shelah, G. Srour et C. Wood, Orthogonality of types in separably closed fields, dans Classification Theory (Proceedings of Chicago, 1985), Springer Verlag, LNM 1292, Berlin, 1987.

[vdD] L. van den Dries, Model Theory of Fields, Thèse, Utrecht, 1978.

[E] J. Eršov, Fields with a solvable theory, English translation, Sov. Math. Dokl. 8 (1967), pp. 575-576.

[K] J. Keisler, Complete theories of algebraically closed fields with distinguished subfields, Michigan Math. J. 11 (1964), pp. 71-81.

[Lang] S. Lang, Introduction to algebraic Geometry, Interscience Publishers Inc., New York, 1958.

[Las1] D. Lascar, Ordre de Rudin-Keisler et poids dans les théories stables, Zeitschr. für math. Logik und Grundl. der Math. 28 (1982), pp. 413-430.

[Las2] D. Lascar, Stabilité en théorie des modèles, Monographies de Mathématique 2, Cabay, Louvain-la-Neuve, 1986.

[M] K. Mc Kenna, Some diophantine Nullstellensätze, Model Theory of Algebra and Arithmetic, (Proceedings of Karpacz 1979), Springer Verlag, LNM 834, pp. 228-247.

[P1] B. Poizat, Déviation des types, Doctorat d'état, Paris 6, 1977.

[P2] B. Poizat, Groupes stables avec types génériques réguliers, J. S. L. 48 (1983), pp. 339-355.

[P3] B. Poizat, Une théorie de Galois imaginaire, J. S. L. 48 (1983), pp. 1161-1170.

[P4] B. Poizat, Paires de structures stables, J. S. L. 48, (1983), pp. 239-249.

[P5] B. Poizat, Cours de théorie des modèles, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1985.

[R] A. Robinson, Solution of a problem of Tarski, Fund. Math., XLVII (1959), pp. 179-204.

[Sh1] S. Shelah, Stability, the f. c. p. , and superstability ..., Ann. Math. Logic 3 (1971), pp. 271-362.

[Sh2] S. Shelah, The lazy model-theoretician's guide to stability, dans Six Days of Model Theory, Ed. P. Henrard, Castella, Albeuve, 1977.

[Sh3] S. Shelah, Classification Theory and the Number of non-isomorphic Models, North Holland, Amsterdam, 1978.

[Sh4] S. Shelah, The Spectrum Problem I : $\aleph_\varepsilon$-saturated models, the Main Gap, Israel J. Math. 43 (1982), pp. 324-336.

[Sr1] G. Srour, The independance relation in separably closed fields, J. S. L. 51 (1986), pp. 715-725.

[Sr2] G. Srour, Types of rank 1 in the theory of separably closed fields preprint.

[W] C. Wood, Notes on the stability of separably closed fields, J. S. L. 44 (1979), pp. 412-416.

[ZS] O. Zariski et P. Samuel, Commutative Algebra I , Van Nostrand Company, Princeton, 1958.