

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOIS LALONDE

**Homologie de Shih d'une submersion (homologies
non singulières des variétés feuilletées)**

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 30 (1987)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1987_2_30__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION

ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.

Shih a introduit en [10], pour l'étude des sections d'une application différentiable $f: X_2 \rightarrow X_1$ où X_1 et X_2 sont des variétés lisses de classe C^∞ , une nouvelle "homologie", appelée homologie sectionnelle, permettant d'attacher à f des invariants algébriques (du type différentiable de f) tenant compte de la topologie des singularités de l'application. Cette homologie conduit également à définir, lorsque X_1 est connexe et orientée, un invariant numérique, appelé degré sectionnel, déterminant une obstruction plus fine que le degré classique à l'existence d'une section de f (voir [11] et [5]).

Soit le diagramme commutatif, noté $(f, f_0; g)_k$:

$$\begin{array}{ccc} Y_2 & \xrightarrow{g_2} & X_2 \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1} & X_1 \end{array}$$

d'applications différentiables de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) entre variétés lisses, où g_1 est un plongement. Pour étudier les sections de classe C^k de f prolongeant des sections données de f_0 , on définit de manière fonctorielle les groupes d'homologie sectionnelle k -fois différentiable absolue et relative $H_*(f)_k$ et $H_*(f, f_0; g)_k$. Cette homologie s'obtient à partir du complexe des chaînes finies de simplexes sectionnels k -fois différentiables à coefficients entiers, un simplexe sectionnel k -fois différentiable étant une section locale de classe C^k de f au-dessus d'un simplexe k -fois différentiable plongé.

Le principal objet de ce travail est d'établir le résultat fondamental sur l'homologie de Shih :

THÉORÈME S. Il existe un morphisme canonique $(p_2)_* : H_*(f)_k \rightarrow H_*(\lambda_2)$ qui,
pour toute submersion f , est un isomorphisme en dimensions $* < n = \dim X_1$
et une surjection pour $* = n$.

On en déduira (voir p. 15) que pour un feuilletage (V, \mathcal{F}) régulier d'une variété lisse V , c'est-à-dire un feuilletage donné par des submersions locales, les q -chaînes singulières de V sont représentables par les q -chaînes de simplexes plongés transverses à \mathcal{F} , pour tout $q \leq n = \text{codim } \mathcal{F}$.

Le théorème S exprime que l'homologie sectionnelle d'une application f n'est sensible qu'aux singularités de f , c'est-à-dire ne diffère de l'homologie ordinaire de l'espace source que si f présente des singularités. Et effectivement, l'homologie sectionnelle d'un fibré à singularités (et à plus forte raison celle des applications différentiables moins régulières) est bien différente de l'homologie singulière de l'espace source (voir [5], chap. I).

L'étude de l'homologie sectionnelle suppose, comme préalable, celle de l'homologie des chaînes de simplexes k -fois différentiables plongés d'une variété lisse V , appelée homologie de plongements k -fois différentiables de V : la première se réduit à la seconde quand $f = 1_V$. Désignons par $C(V)$ le complexe des chaînes finies de simplexes singuliers de V à coefficients entiers, et par $C(V)_{pk}$ le sous-complexe de $C(V)$ librement engendré par le sous-ensemble simplicial $S(V)_{pk} \subset S(V)$ des simplexes k -fois différentiables plongés ($1 \leq k \leq \infty$). Soit également $p \geq 1$ et désignons par $\text{supp} : V_p(TV) \rightarrow V$ la projection canonique sur V de la variété de Stiefel des p -repères. Notons $S_q^{(p)}(V)_{pk}$ l'ensemble des couples $(\lambda, \varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^p))$, où $\lambda \in S_q(V)_{pk}$ et $\varphi \in S_q(V_p(TV))_{pk}$, tels que $\text{supp} \circ \varphi = \lambda$ et $\dim [\text{Im } D\lambda(x), \varphi(x)] = q + p$ quel que soit $x \in \Delta_q$ (les crochets désignent l'espace vectoriel engendré). Les opérateurs de face naturels font de $S^{(p)}(V)_{pk}$ un ensemble simplicial dont l'homologie $H_*^{(p)}(V)_{pk}$ est appelée homologie des p -champs transverses de V . On montrera que :

THÉORÈME P. Quel que soit $1 \leq k \leq \infty$, l'inclusion $i : C(V)_{pk} \hookrightarrow C(V)$ induit, en homologie, un isomorphisme pour $q \neq n = \dim V$ et une surjection pour $q = n$.

et que les définitions qui précèdent conduisent à une bonne théorie des champs transverses.

THÉORÈME CT (champs transverses). Quels que soient $p \geq 1$ et $1 \leq k \leq \infty$,

$$\begin{array}{ccc} \text{le morphisme} & \text{supp} : S_q^{(p)}(V)_{P_k} & \longrightarrow S_q(V)_{P_k} \\ & (\lambda, \varphi) & \longmapsto \lambda \end{array}$$

induit en homologie un isomorphisme pour $q < n-p$ et une surjection pour $q = n-p$.

On en déduit, en particulier, que tout q -cycle singulier de V ($q \leq n-p$) est homologue à un cycle plongé "admettant" un p -champ transverse dans V .

Ces deux résultats (théorèmes P et CT) sont liés : nous allons utiliser le second dans la démonstration du premier.

APERCU DES DÉMONSTRATIONS ET SOMMAIRE DE L'ARTICLE.

Pour établir le théorème P et en particulier l'injectivité de $i_* : H_*(V)_{P_k} \rightarrow H_*(V)$, considérons un q -cycle z de simplexes plongés de V bordant une chaîne c de simplexes singuliers que l'on peut supposer de classe C^k (voir [2] ou [4]). Pour montrer qu'il borde également une chaîne de simplexes plongés, on pourrait d'abord mettre la chaîne c en position générale de manière à ce que le lieu singulier de chaque simplexe de c soit de codimension maximale, et subdiviser ensuite chaque simplexe suivant une stratification du lieu singulier. Ceci donnerait lieu à une chaîne c' , subdivision de c , constituée de simplexes sans singularités. Mais même dans le cas générique, le lieu singulier pourra rencontrer le bord z de la chaîne et l'on aurait au plus établi qu'il existe une subdivision de z qui borde une chaîne de simplexes plongés. Il resterait encore à montrer l'invariance par subdivision de l'homologie de plongements.

Effectivement, la difficulté principale dans la démonstration du théorème P consiste à établir l'invariance par subdivision linéaire (ISL) (voir définition 1.2) -et en particulier l'invariance par subdivision barycentrique- de l'homologie de plongements. En homologie singulière comme en homologie

différentiable , l'homotopie classique entre l'identité et tout morphisme de subdivision est "écrasée" sur le support des simplexes considérés. Pour s'assurer l'existence d'une homologie plongée entre un cycle plongé z et l'une de ses subdivisions, on se donne d'abord, pour chaque simplexe $\sigma \in z$, une section non-nulle du fibré normal trivial sur $\text{Im } \sigma$, c'est-à-dire un 1-champ transverse sur σ . Dès que la subdivision χz du cycle z ne subdivise pas seulement l'intérieur des simplexes mais également leurs faces, la chaîne $\sigma - \chi \sigma$ n'est pas un cycle, et le 1-champ transverse sur σ donne une $(q+1)$ -chaîne plongée $\Omega(\sigma)$ (obtenue après s'être donné une connexion riemannienne sur V) telle que : $\partial \Omega(\sigma) = \sigma - \chi \sigma - R$ où le reste $R = \Omega(\partial \sigma)$.

La définition d'un tel opérateur d'homotopie sur $S(z)$ n'est possible qu'à condition de pouvoir recoller les champs transverse provenant des hyperfaces de simplexes contigus de z . Or, même lorsque z réalise une triangulation d'une sous-variété W de V , il n'existe pas nécessairement de sous-fibré de dimension 1 du fibré normal de W dans V . A fortiori, si z est un q -cycle de \mathbb{R}^{q+1} contenant deux simplexes plongés σ et σ' s'enroulant autour de leur $(q-1)$ -face commune λ :

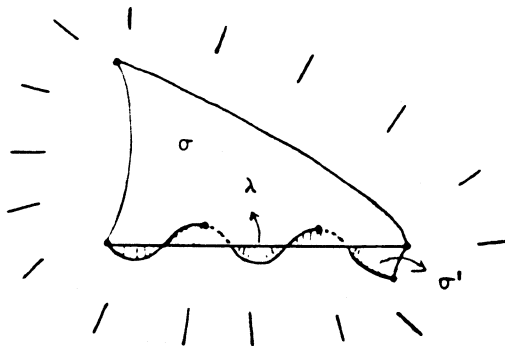


Figure 1

il ne sera pas possible de trouver deux champs transverses ψ sur σ et ψ' sur σ' qui coïncident sur λ .

On surmonte cette difficulté en montrant que la chaîne de simplexes de 1-champs transverses : $(\lambda, \varphi) - (\lambda, \varphi')$, où φ (resp. φ') est le champ transverse sur λ hérité du champ ψ (resp. ψ') est un bord en homologie de 1-champs transverses à supports algébriquement nuls (voici l'illustration, en dimension 0, de cette homologie entre (λ, φ) et (λ, φ') :

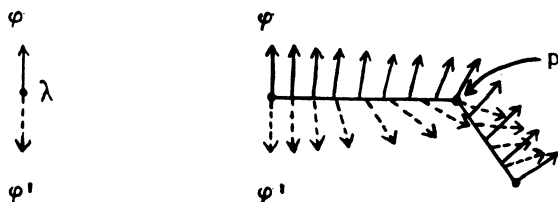


Figure 2

où la singularité en p permet de faire coïncider les deux champs sans rompre la transversalité).

La démonstration de l'invariance par subdivision linéaire de l'homologie de 1-champs transverses à supports algébriquement nuls conduit à son tour à introduire une homologie de 2-champs transverses, et ainsi de suite. Le problème de l'invariance par subdivision linéaire des cycles plongés est donc lié à celui du calcul des homologies de p -champs transverses (dont la $(n+1)$ -ème est triviale).

Ceci est la version "plongements" d'une situation "sectionnelle", plus générale, qui s'énonce de la même manière. On définit l'homologie des p -champs sectionnels transverses d'une application différentiable $f: X_2 \rightarrow X_1$, notée $H_{\star}^{(p)}(f)_k$, comme l'homologie des simplexes $s = (\lambda, \varphi) \in S^{(p)}(X_2)_{P_k}$ dont l'image par Df est un simplexe de $S^{(p)}(X_1)_{P_k}$. Le problème de l'invariance par subdivision linéaire des cycles sectionnels d'une submersion (et par conséquent, la démonstration du théorème S) dépend du calcul des homologies de p -champs sectionnels transverses. On retrouve la version "plongements" en posant $f = 1_V$; il nous suffira donc de considérer le cas sectionnel.

On procède de la façon suivante. On donne, au §1, la définition de l'homologie sectionnelle et de l'homologie des champs sectionnels transverses, ainsi que celle de subdivision linéaire.

On construit ensuite, au §2, la suite exacte des complexes de champs sectionnels transverses, dont il résulte que pour une submersion $f: X_2 \rightarrow X_1$:

$$\bar{H}_{* < n-(p+1)}^{(p+1)}(f)_k = 0 \implies \bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k \text{ ISL} \quad (1)$$

quel que soit $p \geq 0$. Ici $\bar{H}^{(p)}(f)_k$ est l'homologie du sous-complexe

$\bar{C}^{(p)}(f)_k \subset C^{(p)}(f)_k$ défini par : $c \in \bar{C}^{(p)}(f)_k \iff \pi_j(c) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$,

où $\pi_j: S^{(p)}(f)_k \rightarrow S^{(p-1)}(f)_k$ est le morphisme éliminant le j -ème champ de

vecteurs (on pose $H^{(0)}(f)_k = \bar{H}^{(0)}(f)_k = H(f)_k$). (On observera que

$\bar{H}^{(1)}(1_V)_k = \bar{H}^{(1)}(V)_{Pk}$ est l'homologie de 1-champs transverses à supports

algébriquement nuls mentionnée plus haut.) La démonstration de tous les résultats

se réduit donc à celle des deux implications suivantes :

$$\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k \text{ ISL} \implies \bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k = 0 \text{ pour tout } p \geq 1 \quad (2)$$

et $H_{* < n}^{(p)}(f)_k \text{ ISL} \implies p_2: H_q(f)_k \rightarrow H_q(X_2)$ est un isomorphisme (3)
pour $q < n$ et une surjection pour $q = n$.

En effet, il résulte de (1) et (2) que $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k = 0$ pour tout $p \geq 1$, et que $H_{* < n}^{(p)}(f)_k$ est ISL. L'implication (3) donne alors le théorème S (et P), tandis que le théorème CT se déduit aisément de la nullité des homologies tronquées $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(V)_{Pk}$ ($p \geq 1$).

Il reste à établir les implications (2) et (3) dans lesquelles l'invariance par subdivision linéaire est maintenant donnée. On les établit d'abord, au §3, dans le cas $f = 1_{\mathbb{R}^n}$. Elles s'écrivent alors :

$$\bar{H}_{* \neq n-p}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk} \text{ ISL} \implies \bar{H}_{* \neq n-p}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk} = 0 \text{ pour tout } p \geq 0.$$

La démonstration procède en trois étapes :

1) (Lemme 1, § 3) On montre d'abord que tout cycle $z \in \bar{Z}_{q \neq n-p}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk}$ est homologue dans $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk}$, à subdivision linéaire près, à un cycle à supports géodésiques (c'est-à-dire, dans \mathbb{R}^n : à supports linéaires affines) non-dégénérés.

2) (Lemme 2, § 3) On établit ensuite que tout cycle $z \in \bar{Z}_{q \neq n-p}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{pk}$ à supports géodésiques non-dégénérés est homologue, à subdivision linéaire près, à un cycle sans torsion (voir définition 3.1 : un cycle sans torsion est un cycle dont chaque simplexe est constitué d'un support géodésique non-dégénéré portant un champ transverse "plat").

3) (Lemme 3, § 3) On montre enfin que tout cycle sans torsion est un bord de $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{pk}$.

La troisième étape est la plus simple. L'idée qui dirige sa démonstration se lit sur la figure 2 : on se donne d'abord sans peine une $(q+1)$ -chaîne c de p -repères sur supports plongés telle que $\partial c = z$. Cette chaîne n'appartient pas, en général, à $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{pk}$, les p -repères n'étant pas nécessairement transverses aux supports. On récupère ensuite la transversalité en effectuant un froissement des supports de c (qui correspond à la singularité en p de la figure 2) et en transportant les p -repères de la chaîne initiale sur la chaîne froissée le long d'un feuilletage de \mathbb{R}^n choisi de façon appropriée.

La seconde étape est la plus délicate, la difficulté résidant dans une définition correcte du morphisme "sans torsion". C'est la partie technique de ce travail.

Enfin, la démonstration de la première étape dans le cas le plus simple $p = 0$, s'appuie sur l'observation naïve suivante : toute subdivision suffisamment fine χ d'un cycle plongé z transforme z en un cycle χz "presque linéaire", qui est alors homologue au cycle linéaire $L(\chi z)$ correspondant (L étant le morphisme associant à tout simplexe σ le simplexe linéaire déterminé par les sommets de σ). Ce procédé de démonstration présente deux problèmes assez délicats : le premier est de pouvoir s'assurer que $L(\chi z)$ est un cycle de simplexes non-dégénérés. Dans l'hypothèse où ce problème est réglé, le second consiste à s'assurer que $L(\chi z)$ converge vers χz à mesure

que χ s'affine, la convergence devant avoir lieu dans une topologie qui tienne compte des jets d'ordre 1 des simplexes, puisqu'il s'agit d'homologie de plongements et donc d'immersions.

Voici un exemple d'une suite $(\sigma^i)_{i \in \mathbb{N}}$ de subdivisions d'un 2-simplexe plongé σ de \mathbb{R}^3 devenant aussi fine que l'on veut, mais telle que $L(\sigma^i)$ ne converge vers σ^i dans aucune topologie C^1 raisonnable :

Soient S^2 la sphère-unité de \mathbb{R}^3 , $p' \in S^2$ un point quelconque, et σ le 2-simplexe plongé de \mathbb{R}^3 défini comme simplexe géodésique isocèle de S^2 :

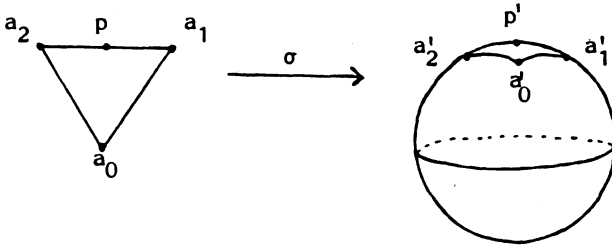


Figure 3

où p est le point milieu de $\overline{a_2a_1}$. Soit maintenant la suite $(\sigma^i)_{i \in \mathbb{N}}$ des composés $\sigma^i = \sigma \circ \beta^i$, où $\beta^i : \Delta_q \hookrightarrow \Delta_q$ est l'application linéaire affine non-dégénérée suivante :

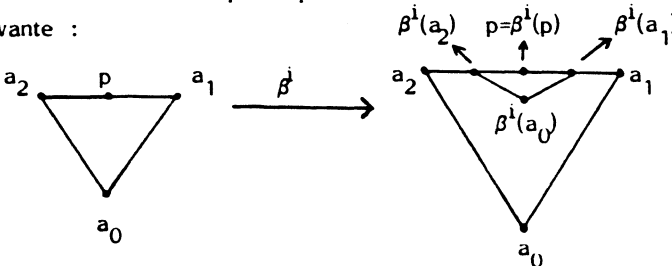


Figure 4

avec $\text{dist}(\beta^i(a_j), p) = \frac{\text{dist}(a_j, p)}{1}$ pour $j = 1, 2$, et $\text{dist}(\beta^i(a_0), p) = \frac{\text{dist}(a_0, p)}{2^i}$.

La suite $(\text{lm } \sigma^i)$ est donc une suite de triangles isocèles de S^2

dont les angles à la base s'écrasent rapidement quand i croît. Alors, $(\sigma^i)_{i \in \mathbb{N}}$

est une suite de simplexes "presque linéaires" de \mathbb{R}^3 devenant aussi linéaires

que l'on veut pour i suffisamment grand. Mais $T_p \sigma^i = T_p S^2$ pour tout $i \in \mathbb{N}$,

d'où :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_p \sigma^i = T_p S^2,$$

alors que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_p L(\sigma^i) = P$$

où P est le plan orthogonal à $T_p S^2$ passant par a'_2 , p' et a'_1 (figure 3).

Un simplexe "presque linéaire" n'est donc pas nécessairement proche du simplexe linéaire correspondant, et cela dès qu'on considère la proximité au sens C^1 . On évite ce genre de difficultés en introduisant deux objets :

- Les suites fines et régulières de subdivisions linéaires des simplexes types, qui permettent de contrôler l'écrasement des angles hypersolides en fonction du rayon, de manière à éviter les comportements indésirables au sens C^1 (voir définition 3.6 et proposition 3.7).

- Une topologie adaptée à ce genre de problèmes, donnée de telle sorte que si σ^i et $L(\sigma^i)$ sont suffisamment proches dans cette topologie, alors :

i) $L(\sigma^i)$ est non-dégénéré ;

et ii) il existe une chaîne plongée réalisant une homotopie entre σ^i et $L(\sigma^i)$.

C'est une topologie, provenant d'une métrique éclatée à l'origine, strictement plus fine que la topologie C^1 de Whitney au voisinage des 1-jets singuliers (voir topologie 0-fine, définition 3.3, proposition 3.4 et lemme 3.8).

Le cas $p = 0$ de l'étape 1 a été établi par J.H.C. Whitehead pour un C^1 -complexe non-singulier ([14], théorème 4). Il définit, pour cela, des subdivisions du C^1 -complexe, appelées (δ, σ) -subdivisions, semblables aux subdivisions induites par nos suites fines et régulières. De telles subdivisions ont également été définies par Whitney ([15], p. 358-360) et Thurston ([13], §5). La définition de Thurston est proche de la nôtre : elles ont toutes les deux la propriété d'être cristallines. Ces subdivisions ont toutes la même fonction : pour une telle subdivision suffisamment fine d'un simplexe plongé $\lambda : \Delta_q \hookrightarrow V \subset \mathbb{R}^N$, l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^N de tout simplexe $L(\sigma)$ de cette subdivision est un q -plan de \mathbb{R}^N aussi près que l'on veut du plan tangent à σ au barycentre de σ .

Nous avons construit nos subdivisions régulières avant d'avoir vu celles qui existaient déjà dans la littérature. Nous avons décidé de les laisser, elles nous semblent les plus simples d'un point de vue géométrique.

On établit ensuite, au §4, les implications (2) et (3) pour la projection sur le premier facteur $f = \text{pr} : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On plonge, pour cela, les complexes sectionnels dans des fibrations de Kan et on ramène la démonstration des implications (2) et (3) pour $f = \text{pr}$ aux résultats établis pour \mathbb{R}^n au §3 en utilisant une propriété générique dans les submersions, la régularité des chaînes sectionnelles (voir définition 1.8 et proposition 2.1 (ii)).

On généralise, aux §§ 5 et 6, les mêmes implications au cas des submersions en utilisant une méthode due à Milnor. Le contenu des §§ 4, 5 et 6 est algébrique, les problèmes de topologie différentielle ayant été résolus au §3. Le §7 donne la version relative du théorème S. Enfin, l'appendice contient les démonstrations de certains énoncés techniques.

Remarquons, en terminant, que toutes les difficultés pour établir les théorèmes P et S -et en particulier celles dues à l'invariance par subdivision linéaire et au caractère non-singulier des homologies considérées- apparaissent dans la démonstration de l'injectivité des morphismes i_* (théorème P) et $(p_2)_*$ (théorème S). En effet, la surjectivité de i_* est un corollaire immédiat de l'équivalence des complexes $C(V)$ et $C(\mathcal{J})$ pour une triangulation \mathcal{J} de classe C^∞ de V . Et la surjectivité de $(p_2)_*$ se déduit de l'équivalence de $C(X_2)$ et $C(\mathcal{J})$ (pour une triangulation \mathcal{J} de X_2) et de la propriété suivante : toute triangulation \mathcal{J} de X_2 admet une subdivision \mathcal{J}' qui peut être perturbée en une triangulation \mathcal{J}'' transverse au feuilletage \mathcal{F} , la perturbation devenant aussi faible que l'on veut à mesure que la subdivision \mathcal{J}' de \mathcal{J} s'affine : voir Thurston ([13], §5) pour une démonstration de cette propriété.

Néanmoins, nous établirons les théorèmes P et S en entier, ce qui ne sera pas plus long que de démontrer la seule injectivité.

1. DÉFINITIONS ET PRÉLIMINAIRES

Nous utiliserons les définitions et notations suivantes . Par "variété lisse", on entendra une variété paracompacte, différentiable réelle de classe C^∞ , que l'on munira au besoin d'une métrique riemannienne et de la connexion riemannienne associée.

On appellera ensemble simplicial, un ensemble gradué $S = \{S_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$, avec $S_q = \emptyset$ pour $q < 0$, muni d'opérateurs de face $F_i : S_q \rightarrow S_{q-1}$ vérifiant $F_i F_j = F_{j-1} F_i$ pour $i < j$ (on ne considère pas d'opérateurs de dégénérescence), et morphisme simplicial une application graduée de degré 0 commutant avec les opérateurs de face. Un complexe de chaînes géométrique (engendré par un ensemble simplicial S) est un complexe de chaînes $(\{C_q\}_{q \in \mathbb{Z}}, \partial)$ où C_q est le groupe abélien libre engendré par S_q et où $\partial = \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i F_i$; pour une chaîne quelconque $c \in C_q$, on désignera par $S(c)$ le sous-ensemble simplicial de S formé des simplexes de c et de toutes leurs faces, et par $C(c)$ le sous-complexe géométrique de C engendré par $S(c)$. L'homologie d'un ensemble simplicial S est par définition celle du complexe géométrique engendré par S . Enfin, les définitions de complexe de Kan et de fibration de Kan sont celles de [9], chapitres I et II.

HOMOLOGIE DE PLONGEMENTS ET HOMOLOGIE SECTIONNELLE.

Soit V une variété lisse de dimension n ; désignons par H_q l'hyperplan de \mathbb{R}^{q+1} contenant le simplexe type Δ_q . Pour $1 \leq k \leq \alpha$, l'homologie k -fois différentiable de V et l'homologie de plongements k -fois différentiables de V , notées $H_*(V)_{Dk}$ et $H_*(V)_{Pk}$, sont les homologies des sous-ensembles simpliciaux $S(V)_{Pk} \subset S(V)_{Dk}$ de $S(V)$ formés des simplexes $\lambda : \Delta_q \rightarrow V$ qui se

prolongent sur un voisinage ouvert de Δ_q dans H_q en une application (plongement) de classe C^k (on entendra par plongement une immersion injective ; tout plongement d'un espace compact dans une variété lisse (séparable) est donc également un homéomorphisme sur son image, c'est-à-dire un plongement régulier).

Remarque. L'homologie k -fois différentiable, en tant qu'homologie "singulière" (les simplexes admettent des singularités) satisfait aux axiomes d'une théorie ^{logique} homologique ; elle est canoniquement isomorphe à l'homologie singulière de V ([2], [4]). Par ailleurs, la démonstration du théorème P pose tous les problèmes de la suppression des singularités (et, malheureusement, ni les méthodes de [2] et [4], ni celles du cobordisme ne s'appliquent ici). Néanmoins, il est facile de voir que l'homologie de plongements vérifie également les axiomes d'une théorie homologique dans la catégorie naturelle (variétés lisses, morphismes et homotopies plongés). Seule la propriété d'invariance par subdivision n'est pas immédiate ; nous l'obtiendrons au théorème 2-P (§2).

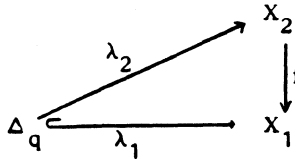
Voici maintenant une définition catégorique de l'homologie introduite par Shih ([10]). Soit $1 \leq k \leq \infty$. Un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y_2 & \xrightarrow{g_2} & X_2 \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1} & X_1 \end{array}$$

de variétés lisses et d'applications de classe C^k est appelé k -diagramme si g_1 est un plongement. On notera g le couple (g_1, g_2) et $(f, f_0; g)_k$ le k -diagramme. Si Y_1 et Y_2 sont vides, $(f, f_0; g)_k$ est noté $(f)_k$ ou simplement f . Un k -morphisme d'un k -diagramme $(f, f_0; g)_k$ dans un autre $(f', f'_0; g')_k$ est un quadruplet $h = (h_{X_1}, h_{X_2}, h_{Y_1}, h_{Y_2})$ d'applications de classe C^k , $h_{X_1} : X_1 \rightarrow X'_1$ et $h_{Y_i} : Y_i \rightarrow Y'_i$ ($i = 1, 2$), où h_{X_1} et h_{Y_1} sont des plongements, tel que h rende commutatif le cube correspondant.

Désignons par \mathcal{D}_k la catégorie dont les objets sont les k -diagrammes et les morphismes, les k -morphismes. On définit de la façon suivante le foncteur homologie sectionnelle $H_* : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{G}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens gradués. On commence par le cas absolu.

Soit $f : X_2 \rightarrow X_1$ un k -diagramme. Un q -simplexe sectionnel k -fois différentiable de f est un k -morphisme $\lambda : 1_{\Delta_q} \rightarrow f$. C'est donc un diagramme commutatif



d'applications de classe C^k où λ_1 est un plongement. Par conséquent, λ_1 et λ_2 sont des plongements réguliers et déterminent une section locale $\lambda_2 \circ \lambda_1^{-1}$ de f au-dessus de $\text{Im } \lambda_1$.

On désigne par $S(f)_k$ l'ensemble gradué de tels simplexes muni des opérateurs de face naturels : $F_i(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2) \circ V_i$ où $V_i : 1_{\Delta_{q-1}} \hookrightarrow 1_{\Delta_q}$ est l'injection habituelle sur la i -ème face de 1_{Δ_q} . On note $C(f)_k$ le complexe géométrique engendré par $S(f)_k$, dont l'homologie $H_*(f)_k$ est appelée homologie sectionnelle k -fois différentiable.

Soit $(f, f_0; g)_k$ un k -diagramme. En tant que k -morphisme de f_0 dans f , g induit un morphisme également noté $g : C(f_0)_k \rightarrow C(f)_k$. Alors, le groupe d'homologie sectionnelle relative $H_*(f, f_0; g)_k$ provient du complexe $C(f, f_0; g)_k$ défini par le mapping cone des complexes de chaînes $C(f)_k$ et $C(f_0)_k$: $C(f, f_0; g)_k = C(f)_k \oplus C(f_0)_k$ dont le q -ème groupe est $C_q(f)_k \oplus C_{q-1}(f_0)_k$ et dont le bord est donné par $\partial(c \oplus c_0) = (\partial c + g c_0) \oplus (-\partial c_0)$.

Par ailleurs, il est clair que tout k -morphisme $h : (f, f_0; g)_k \rightarrow (f', f'_0; g')_k$ induit un morphisme $h : C(f, f_0; g)_k \rightarrow C(f', f'_0; g')_k$ défini de façon naturelle. Ceci complète la définition du foncteur $H_* : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{G}$.

Enfin, notant ξ_k la catégorie dont les objets sont des applications de classe C^k , $g: Y \rightarrow X$, d'une variété lisse dans une autre, et dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs (h_X, h_Y)

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h_Y} & Y' \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ X & \xrightarrow{h_X} & X' \end{array}$$

d'applications de classe C^k , on définit les foncteurs $P_i: \mathcal{D}_k \rightarrow \xi_k$ ($i = 1, 2$) associant au k -diagramme $(f, f_0; g)_k$, l'application $g_i: Y_i \rightarrow X_i$, et au k -morphisme $(h_{X_1}, h_{X_2}, h_{Y_1}, h_{Y_2})$, le morphisme (h_{X_i}, h_{Y_i}) . Pour $i = 1, 2$, il existe une transformation naturelle p_i entre le foncteur d'homologie sectionnelle $H_*: \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{C}$ et le composé de P_i et du foncteur d'homologie singulière relative, $H_* \circ P_i: \mathcal{D}_k \rightarrow \xi_k \rightarrow \mathcal{C}$, définie sur les simplexes sectionnels par $p_i(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_i$.

Remarque. L'homologie sectionnelle satisfait à tous les axiomes d'une théorie homologique (interprétés de la façon naturelle dans la catégorie \mathcal{D}_k) sauf l'invariance par subdivision qui, cependant, est vérifiée dans les submersions (théorème 2-S, §2).

Le principal objet de cet article est la démonstration du théorème S. Si $1 \leq k \leq k_0 \leq \infty$, un k_0 -diagramme $(f)_{k_0}$ est à fortiori un k -diagramme, et l'homologie sectionnelle $H_*(f)_k$ est bien définie. Le théorème S s'écrit alors :

THÉORÈME S. Soit $f: X_2 \rightarrow X_1$ une submersion de classe C^{k_0} , $2 \leq k_0 \leq \infty$. Quel que soit $1 \leq k \leq k_0$, le morphisme injectif $p_2: C(f)_k \rightarrow C(X_2)$ induit un isomorphisme $(p_2)_*$ sur les groupes d'homologie en dimension $* < n = \dim X_1$ et une surjection en dimension n ($H_q(f)_k = 0$ pour $q > n$).

Identifiant $C(f)_k$ au sous-complexe $\text{Im } p_2 \subset C(X_2)$, le théorème S exprime que les q -chaînes singulières de X_2 sont représentables par les q -chaînes de $\text{Im } p_2$, quel que soit $q \leq n$ (une chaîne $c \in C(X_2)$ de bord $\partial c \in \text{Im } p_2$ est représentée par une chaîne $c' \in \text{Im } p_2$ si $\partial c' = \partial c$ et $c - c' \in B(X_2)$). En particulier, dans une variété lisse munie d'un feuilletage régulier (V, \mathcal{F}) , les q -chaînes singulières de V sont représentables par les q -chaînes de simplexes plongés transverses aux feuilles, en toutes dimensions $q \leq \text{codim } \mathcal{F}$: ceci s'obtient à partir du théorème S en utilisant l'invariance par subdivision de l'homologie des simplexes plongés transverses aux feuilles, invariance que l'on démontre de la même manière que l'invariance par subdivision de l'homologie sectionnelle d'une submersion établie plus loin.

L'une des difficultés essentielles dans la démonstration du théorème S consiste à établir l'invariance par subdivision linéaire (ISL) (voir définition plus bas) -et en particulier l'invariance par subdivision barycentrique- de l'homologie sectionnelle d'une submersion : on l'obtiendra comme résultat d'un procédé d'induction faisant apparaître des homologies plus générales, les homologies de p -champs sectionnels transverses. On suppose maintenant les cardinaux $2 \leq k_0 \leq \infty$, $1 \leq k \leq k_0 - 1$, $m = \dim X_2$, $n = \dim X_1$ ($m \geq n$) fixés une fois pour toutes jusqu'au § 6 où l'on établira le cas $k = k_0$ du théorème S.

On donne d'abord les définitions de subdivision linéaire et d'homologie de p -champs (sectionnels) transverses.

SUBDIVISIONS LINÉAIRES.

Pour l'étude de l'homologie de plongements, la suite des itérés successifs de la subdivision barycentrique des simplexes type ne constitue pas une catégorie de subdivisions suffisamment grande : on ne pourrait pas, dans cette catégorie, établir par exemple le lemme 3.8 plus loin. Par ailleurs, la catégorie des

subdivisions C^∞ des simplexes types, trop vaste, ne ferait que reporter dans Δ_q les problèmes posés par les homologies non-singulières dans la variété V . La bonne catégorie à considérer est une catégorie intermédiaire, celle des subdivisions linéaires.

DÉFINITION 1.1. Soit P un q -polyèdre homogène de \mathbb{R}^m . Un couple (K, h) est dit triangulation linéaire de P si K est un complexe simplicial et si h est un homéomorphisme de $|K|$ sur P dont la restriction à chaque simplexe de K est une application linéaire affine non-dégénérée. Si de plus P est orientable et si θ est une orientation de P , un triplet (K, h, θ_K) est dit triangulation linéaire de (P, θ) si (K, h) est une triangulation linéaire de P et si θ_K est l'ensemble $\{\theta_s\}_{s \in S_q(K)}$ des orientations de chaque simplexe s de dimension maximale q de K telles que la restriction de h à tout q -simplexe s conserve l'orientation.

Soient (K, h, θ_K) une triangulation linéaire de (P, θ) et ω un ordre total des sommets de K . On associe au couple $((K, h, \theta_K), \omega)$ la chaîne $c((K, h, \theta_K), \omega) \in C_q(P)$, appelée chaîne de triangulation linéaire de (P, θ) , définie par

$$c((K, h, \theta_K), \omega) = h \left(\sum_{s \in S_q(K)} \xi_s \hat{s} \right),$$

où \hat{s} est l'application simpliciale non-dégénérée appliquant Δ_q sur s respectant l'ordre des sommets de s induit par ω , et où $\xi_s = +1$ si l'orientation de s induite par ω est compatible avec θ_s , et -1 sinon. Notant $C(P)_L$ le sous-complexe de $C(P)$ engendré par le sous-ensemble $S(P)_L \subset S(P)$ des simplexes linéaires affines non-dégénérés, on a :

$$c((K, h, \theta_K), \omega) \in C_q(P)_L.$$

DÉFINITION 1.2. Soit θ_q l'orientation du simplexe type Δ_q induite par l'ordre des sommets de Δ_q . On appelle subdivision linéaire, $\gamma = (\gamma_q)_{q \geq 0}$, la donnée pour chaque entier $q \geq 0$, d'une chaîne γ_q de triangulation linéaire de (Δ_q, θ_q) telle que $\gamma_0 = 1_{\Delta_0}$ et $\partial \gamma_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i V_i(\gamma_{q-1})$ quel que soit $q \geq 1$.

Toute subdivision linéaire $\gamma = (\gamma_q)_{q \geq 0}$ induit naturellement un endomorphisme $\chi: C(T) \rightarrow C(T)$ pour tout espace topologique T , défini par $\chi(\lambda) = \lambda(\gamma_q)$ quel que soit $\lambda \in S_q(T)$. Si T est une variété lisse ou un espace linéaire, χ se restreint à un endomorphisme sur $C(T)_{P_k}$ et $C(T)_L$ respectivement.

L'invariance par subdivision linéaire (ISL) d'une homologie signifiera que, quelle que soit la subdivision linéaire γ , l'endomorphisme χ sur les groupes d'homologie induit par γ est l'identité.

COMPLEXES DES p -CHAMPS (SECTIONNELS) TRANSVERSES.

DÉFINITION 1.3-P. Soient V une variété lisse de dimension n et $p \geq 1$ un entier. Notons $\text{supp}: V_p(TV) \rightarrow V$ la projection canonique sur V du fibré de Stiefel des p -repères. On désigne par $S_q^{(p)}(V)_{P_k}$ l'ensemble des simplexes $\varphi \in S_q(V_p(TV))_{D_k}$ tels que : (i) $\lambda = \text{supp} \circ \varphi$ appartient à $S_q(V)_{P_k}$ et (ii) quel que soit $x \in \Delta_q$, le p -repère $\varphi(x)$ est transverse au support :

$$\dim [\text{Im} (D\lambda(x)), \varphi^1(x), \dots, \varphi^p(x)] = q + p.$$

(A moins d'indication contraire, "transversalité" sera entendu au sens d'indépendance linéaire.) Les opérateurs de face sont définis de façon naturelle

$(F_i(\varphi) = \varphi \circ V_i)$ et font de $S^{(p)}(V)_{P_k}$ un ensemble simplicial dont on note $C^{(p)}(V)_{P_k}$ et $H^{(p)}(V)_{P_k}$ le complexe et l'homologie correspondants, appelés

complexe (homologie) des p -champs transverses de V . On pose

$C^{(0)}(V)_{P_k} = C(V)_{P_k}$. On remarquera que $H_q^{(p)}(V)_{P_k} = 0$ pour $q < 0$ et $q > n-p$, et que $H_{n-p}^{(p)}(V)_{P_k} = Z_{n-p}^{(p)}(V)_{P_k}$, le groupe des cycles.

DÉFINITION 1.3-S. Notons $\tilde{V}_p(TV)$ le fibré sur V des p -vecteurs (pas nécessairement linéairement indépendants) et $\text{supp}: \tilde{V}_p(TV) \rightarrow V$ la projection canonique sur V . Soit $f: X_2 \rightarrow X_1$ une application de classe C^{k_0} , où $2 \leq k_0 \leq \infty$, $\dim X_2 = m$ et $\dim X_1 = n$. Pour $1 \leq k \leq k_0 - 1$, on désigne

par $S_q^{(p)}(f)_k$ l'ensemble des k -morphismes $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : 1_{\Delta_q} \rightarrow \tilde{V}_p^{(p)}(Df)$,
 où $\tilde{V}_p^{(p)}(Df) : \tilde{V}_p^{(p)}(TX_2) \rightarrow \tilde{V}_p^{(p)}(TX_1)$ est l'application de classe C^{k_0-1}
 induite par f , tels que $\varphi_1 \in S_q^{(p)}(X_1)_{Pk}$ (ceci implique que $\varphi_2 \in S_q^{(p)}(X_2)_{Pk}$
 et que $(\text{supp} \circ s_2, \text{supp} \circ s_1) \in S_q(f)_k$). Muni des opérateurs de face naturels,
 $S^{(p)}(f)_k$ est un ensemble simplicial dont on note $C^{(p)}(f)_k$ et $H^{(p)}(f)_k$ le
 complexe et l'homologie correspondants, appelés complexe (homologie) des
 p -champs sectionnels transverses. On pose $C^{(0)}(f)_k = C(f)_k$, et l'on remar-
 quera que $H_q^{(p)}(f)_k = 0$ pour $q < 0$ et $q > \min(m, n) - p$. La définition 1.3-S
 se réduit à la définition 1.3-P pour $f = 1_V$.

Soient $p \geq 0$ et φ un simplexe de $S^{(p)}(f)_k$, que l'on écrira explici-
 tement $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = ((\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^p), (\varphi_2^1, \dots, \varphi_2^p))$. Définissons les morphismes
 simpliciaux :

$$\begin{aligned} \text{supp} : S^{(p)}(f)_k &\longrightarrow S(f)_k & p_i : S^{(p)}(f)_k &\longrightarrow S^{(p)}(X_i)_{Pk} \\ \varphi &\longmapsto (\text{supp} \circ \varphi_1, \text{supp} \circ \varphi_2) & \varphi &\longmapsto \varphi_i \end{aligned}$$

et, si $p \geq 1$ et $1 \leq j \leq p$:

$$\begin{aligned} \mu_j : S^{(p)}(f)_k &\longrightarrow S^{(1)}(f)_k \subset S(Df)_k \\ \varphi &\longmapsto (\varphi_1^j, \varphi_2^j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \pi_j : S^{(p)}(f)_k &\longrightarrow S^{(p-1)}(f)_k \\ \varphi &\longmapsto ((\varphi_1^1, \dots, \widehat{\varphi_1^j}, \dots, \varphi_1^p), (\varphi_2^1, \dots, \widehat{\varphi_2^j}, \dots, \varphi_2^p)) \end{aligned}$$

où $\pi_1 : S^{(1)}(f)_k \rightarrow S(f)_k$ est défini par $\pi_1 = \text{supp}$.

NOTATIONS 1.4. Soit $c \in C^{(p)}(f)_k$; on désigne par $\bar{C}^{(p)}(f)_k$ et $\tilde{C}^{(p)}(f)_k$
 les sous-complexes de $C^{(p)}(f)_k$ déterminés par les contraintes :

$$c \in \bar{C}^{(p)}(f)_k \text{ (resp. } \tilde{C}^{(p)}(f)_k) \iff \pi_j(c) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq j \leq p \text{ (resp. } 1 \leq j \leq p-1).$$

PROPOSITION 1.5. Soit C un sous-complexe géométrique de $C^{(p)}(f)_k$, engendré par $S \subset S^{(p)}(f)_k$, et $A : C \rightarrow C^{(p')}(f)_k$ une application linéaire graduée de degré d . Quel que soit $1 \leq j \leq \min(p, p')$, les trois conditions suivantes

sont équivalentes :

- 1) A est stable pour la contrainte $\pi_j = 0$;
- 2) Quel que soit $s \in S$, $\pi_j A(s)$ ne dépend que de $\pi_j(s)$;
- 3) Il existe une application linéaire graduée de degré d ,

$$A_j^{(p-1)} : C^{(p-1)}(t)_k \rightarrow C^{(p-1)}(t)_k \text{ telle que } \pi_j A = A_j^{(p-1)} \pi_j .$$

Cette proposition, dont la démonstration ($1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$) est facile, justifie la définition suivante.

DÉFINITION 1.6. Une application linéaire graduée de degré d ,

$A : C \rightarrow C^{(p)}(t)_k$, définie sur un sous-complexe géométrique de $C^{(p)}(t)_k$, est appelée (r) -application ($1 \leq r \leq \min(p, p')$) s'il existe r applications linéaires graduées de degré d , $A_j^{(p-1)} : C^{(p-1)}(t)_k \rightarrow C^{(p-1)}(t)_k$, telles que $\pi_j A = A_j^{(p-1)} \pi_j$ quel que soit $1 \leq j \leq r$. Si les r applications $A_j^{(p-1)}$ sont égales à une même application $A^{(p-1)}$, A est une (r) -application forte.

Selon la proposition précédente, un endomorphisme M de $C^{(p)}(t)_k$ est stable pour toutes les contraintes $\pi_j = 0$ si et seulement si M est une (p) -application, et dans ce cas M induit un endomorphisme de $\bar{C}^{(p)}(t)_k$.

Remarque. Identifiant $S^{(p)}(1_V)_k$ à $S^{(p)}(V)_{P_k}$, les morphismes supp , μ_j et π_j définis plus haut s'identifient à des morphismes sur $S^{(p)}(V)_{P_k}$ que nous désignerons de la même manière. Ceci dit, les notations 1.4, proposition 1.5 et définition 1.6 se transportent au cas non-sectionnel en substituant $C^{(p)}(V)_{P_k}$ à $C^{(p)}(t)_k$.

La proposition 1.5 admet le corollaire suivant dont nous ne nous servirons que dans le cas sectionnel.

COROLLAIRE 1.7. Soient C un sous-complexe géométrique de $C^{(p)}(t)_k$, engendré par $S \subset S^{(p)}(t)_k$, et $A : C \rightarrow C^{(p)}(t)_k$ une application linéaire graduée, avec $p \geq p'$, s'exprimant sous la forme $A(s) = a_1 s_1 + \dots + a_\ell s_\ell$,

où ℓ, a_1, \dots, a_ℓ ne dépendent que de $\mu_{p'+1}(s), \dots, \mu_p(s)$. Si $\mu_j(s_i)$ ne dépend que de $\mu_j(s), \mu_{p'+1}(s), \dots, \mu_p(s)$ quels que soient $1 \leq j \leq p', s \in S$ et $1 \leq i \leq \ell$, alors A est stable pour les contraintes $\pi_j = 0, 1 \leq j \leq p'$. En particulier, si $A = M$ est un morphisme provenant d'un morphisme simplicial, M est stable pour les contraintes $\pi_j = 0$ ($1 \leq j \leq p'$) dès que $\mu_j(M(s))$ ne dépend que de $\mu_j(s), \mu_{p'+1}(s), \dots, \mu_p(s)$.

DÉFINITION 1.8. Pour $p \geq 0$, une chaîne $c \in C^{(p)}(t)_k$ est dite q-régulière ($q \in \mathbb{Z}$) si, quels que soient $s, s' \in S_q(c)$:

$$p_2(\text{supp}(s)) \neq p_2(\text{supp}(s')) \Rightarrow p_1(\text{supp}(s)) \neq p_1(\text{supp}(s'))$$

$$\text{et } p_2(\mu_j(s)) \neq p_2(\mu_j(s')) \Rightarrow p_1(\mu_j(s)) \neq p_1(\mu_j(s'))$$

pour tout $1 \leq j \leq p$ (si $p = 0$, seule la première implication est retenue).

Une chaîne est régulière si elle est q-régulière pour tout $q \in \mathbb{Z}$.

2. SUITE EXACTE DES COMPLEXES DE CHAMPS SECTIONNELS TRANSVERSES ET RÉDUCTION DU PROBLÈME ISL.

Le morphisme $\pi_{p+1} : C^{(p+1)}(t)_k \rightarrow C^{(p)}(t)_k$ est une (p)-application forte (il suffit de poser $A^{(p)} = \pi_p : C^{(p)}(t)_k \rightarrow C^{(p-1)}(t)_k$) et induit donc un morphisme $\pi_{p+1} : \tilde{C}^{(p+1)}(t)_k \rightarrow \tilde{C}^{(p)}(t)_k$. Dorénavant, on notera simplement π le morphisme éliminant le dernier champ, ainsi que le morphisme qu'il induit en homologie. On a la :

PROPOSITION 2.1. Soit $f : X_2 \rightarrow X_1$ une application différentiable de classe C^{k_0} . Si $\pi : \tilde{H}_q^{(p+1)}(t)_k \rightarrow \tilde{H}_q^{(p)}(t)_k$ est surjectif, alors :

(i) $\tilde{H}_q^{(p)}(t)_k$ est invariant par subdivision linéaire, ce qu'on écrira : $\tilde{H}_q^{(p)}(t)_k$ ISL (pour $p = 0$, ceci exprime l'invariance par subdivision linéaire de $H_q(t)_k$) ;

(ii) Tout élément de $\bar{Z}_q^{(p)}(t)_k$ est représentable par un cycle régulier,
ce qu'on notera : $\bar{H}_q^{(p)}(t)_k \mathbb{R}$.

Démonstration. (i) Il est clair, d'abord, que toute subdivision linéaire
 $\chi : C^{(p)}(t)_k \rightarrow C^{(p)}(t)_k$ induit un morphisme $\chi : \bar{C}^{(p)}(t)_k \rightarrow \bar{C}^{(p)}(t)_k$, χ étant
 une (p)-application forte. L'énoncé (i) a donc un sens.

Soient $c \in \tilde{C}^{(p+1)}(t)_k$ et χ une subdivision linéaire sur $\bar{C}^{(p)}(t)_k$.
 Considérant c comme élément de $C^{(p+1)}(t)_k$, $C(c)$ est un sous-complexe de
 $C^{(p+1)}(t)_k$. Désignons par $\tilde{C}(c)$ le sous-complexe $C(c) \cap \tilde{C}^{(p+1)}(t)_k$. On va
 définir sur $\tilde{C}(c)$ une homotopie :

$$\Lambda, \chi\pi, \pi : \tilde{C}(c) \longrightarrow \bar{C}^{(p)}(t)_k \text{ entre } \chi\pi \text{ et } \pi,$$

ce qui établira (i). On commence par définir une homotopie

$$\Lambda, \chi\pi, \pi : C(c) \longrightarrow C^{(p)}(t)_k \text{ entre } \chi\pi \text{ et } \pi$$

en intégrant, dans la variété X_2 munie d'une connexion riemannienne, le
 (p+1)-ème champ le long du support par l'application exponentielle.

Soit $s = (s_1, s_2) = ((\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^{p+1}), (\varphi_2^1, \dots, \varphi_2^{p+1})) \in S(c)$, et désignons
 par $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ le support de s . Notons d la dimension du simplexe s et
 définissons l'application de classe C^k :

$$G_2^{\text{supp}} : \Delta_d \times (-\eta_{\text{supp}}, \eta_{\text{supp}}) \longrightarrow X_2$$

par $G_2^{\text{supp}}(x, t) = \text{Exp}(t\varphi_2^{p+1}(x))$, où le réel $\eta_{\text{supp}} > 0$ est suffisamment petit
 pour que cette application soit bien définie. Désignons par

$$G_1^{\text{supp}} : \Delta_d \times (-\eta_{\text{supp}}, \eta_{\text{supp}}) \longrightarrow X_1$$

l'application $f \circ G_2^{\text{supp}}$. C'est une immersion en tout point $(x, 0)$ car

$\varphi_1^{p+1}(x) = Df(\varphi_2^{p+1}(x))$ est transverse à $\text{Im } D\lambda_1(x)$. Puisque $G_1^{\text{supp}}|_{\Delta_d \times \{0\}} = \lambda_1$
 est un plongement, on en déduit l'existence de $0 < \epsilon_{\text{supp}} \leq \eta_{\text{supp}}$ tel que la
 restriction de G_1^{supp} à $\Delta_d \times (-\epsilon_{\text{supp}}, \epsilon_{\text{supp}})$ soit un plongement de classe C^k .

Pour $1 \leq j \leq p$, on définit l'application de classe C^k

$$G_2^j : \Delta_d \times (-\epsilon_j, \epsilon_j) \longrightarrow TX_2$$

par $G_2^j(x, t) = D \text{Exp}_{|t\varphi_2^{p+1}(x)(A(\varphi_2^j(x)))}$, où $A(\varphi_2^j(x))$ est le transport parallèle euclidien dans l'espace $T_{\lambda_2(x)}X_2$, portant $\varphi_2^j(x)$ du point $0 \in T_{\lambda_2(x)}X_2$ au point $t\varphi_2^{p+1}(x) \in T_{\lambda_2(x)}X_2$ (en toute rigueur, c'est le vecteur $\tilde{\varphi}_2^j(x) \in T_0(T_{\lambda_2(x)}X_2)$ identifié à $\varphi_2^j(x)$, qui est transporté). Comme auparavant, $G_2^j|_{\Delta_d \times \{0\}} = \varphi_2^j$ et $\epsilon_j > 0$ est choisi suffisamment petit pour que l'application G_2^j soit bien définie.

Désignons par $G_1^j : \Delta_d \times (-\epsilon_j, \epsilon_j) \longrightarrow TX_1$

l'application $Df \circ G_2^j$. Puisque $1 \leq k \leq k_0 - 1$, Df est de classe C^k , d'où G_1^j est également de classe C^k . On a, en $t = 0$:

$$\begin{aligned} \dim [\text{Im } DG_1^{\text{supp}}(x, t), G_1^1(x, t), \dots, G_1^p(x, t)] &= \\ = \dim [\text{Im } D\lambda_1(x), \varphi_1^{p+1}(x), \varphi_1^1(x), \dots, \varphi_1^p(x)] &= (d+1) + p, \end{aligned} \quad (2.1)$$

car $D_x G_1^{\text{supp}}(x, 0) = D\lambda_1(x)$ et $D_t G_1^{\text{supp}}(x, 0) = \varphi_1^{p+1}(x)$. Soit alors

$0 < \epsilon_s \leq \min(\epsilon_{\text{supp}}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ suffisamment petit pour que la relation (2.1)

soit vérifiée quels que soient $x \in \Delta_d$ et $-\epsilon_s \leq t \leq \epsilon_s$. Posant $\epsilon = \min_{s \in S(c)} \epsilon_s$,

on définit enfin, pour chaque $s \in S(c)$, les applications :

$$\begin{aligned} g_1^{\text{supp}} : \Delta_d \times \mathbb{R} &\xrightarrow{1_{\Delta_d} \times \delta_\epsilon} \Delta_d \times (-\epsilon, \epsilon) \xrightarrow{G_1^{\text{supp}}|_{\Delta_d \times (-\epsilon, \epsilon)}} X_i \\ g_1^j : \Delta_d \times \mathbb{R} &\xrightarrow{1_{\Delta_d} \times \delta_\epsilon} \Delta_d \times (-\epsilon, \epsilon) \xrightarrow{G_1^j|_{\Delta_d \times (-\epsilon, \epsilon)}} TX_i, \end{aligned}$$

où $\delta_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$ est le difféomorphisme $\delta_\epsilon(t) = t / \sqrt{(1+t^2)/\epsilon^2}$.

Notons $PS^{(p)}(t)_k = \{PS_{q+1}^{(p)}(t)_k\}_{q \in \mathbb{Z}}$ l'ensemble gradué des $(q+1)$ -prismes de p -champ sectionnel transverse k -fois différentiable de f (même définition que $S^{(p)}(t)_k$ en remplaçant 1_{Δ_q} par $1_{\Delta_q} \times 1_{\mathbb{R}}$), muni des opérateurs de face induits par ceux de $S^{(p)}(t)_k$ (pour $0 \leq i \leq q$, $F_i : PS_{q+1}^{(p)}(t)_k \rightarrow PS_q^{(p)}(t)_k$ est défini par $F_i(p) = p \circ (V_i \times 1_{\mathbb{R}})$), et désignons par $PC^{(p)}(t)_k$ le complexe de chaînes géométrique engendré par $PS^{(p)}(t)_k$. Alors, l'application

$$P : S(c) \longrightarrow PS^{(p)}(t)_k$$

définie par $P(s) = ((g_1^1, \dots, g_1^p), (g_2^1, \dots, g_2^p))$ commute avec les opérateurs de face et induit un morphisme sur les complexes de chaînes correspondant. Par ailleurs, chaque prisme sectionnel $P(s)$, pour $s \in S(c)$, induit un morphisme naturel

$$P(s) : C(\Delta_d \times \mathbb{R})_{Pk} \longrightarrow C^{(p)}(t)_k.$$

Alors, $\Lambda : C(c) \rightarrow C^{(p)}(t)_k$ est donné sur $s \in S(c)$ par $\Lambda(s) = P(s)(\Omega^d(1_{\Delta_d}))$, où Ω^d est l'homotopie du lemme suivant :

LEMME 2.2. Soient $\chi^d : C(\Delta_d)_L \rightarrow C(\Delta_d)_L$ une subdivision linéaire, et $j_0^d : C(\Delta_d)_L \rightarrow C(\Delta_d \times \mathbb{R})_L$ induit par l'identification de Δ_d à $\Delta_d \times \{0\}$. Il existe une homotopie canoniquement définie $\Omega^d : C(\Delta_d)_L \rightarrow C(\Delta_d \times \mathbb{R})_L$ entre $j_0^d \chi^d$ et j_0^d , telle que la chaîne $\Omega^d(v_i) \in C_d(\Delta_d \times \mathbb{R})_L$ soit égale à $(v_i \times 1_{\mathbb{R}})(\Omega^{d-1}(1_{\Delta_{d-1}}))$, v_i étant l'inclusion habituelle de Δ_{d-1} sur la i -ème face de Δ_d .

Démonstration. On définit inductivement Ω^d par :

$$\Omega_0^d = 0 ; \quad \Omega_i^d(\sigma) = C_{(b^\sigma, 1)}((j_0^d \chi^d - j_0^d - \Omega_{i-1}^d \partial)\sigma),$$

où σ est un i -simplexe de $S(\Delta_d)_L$, $b^\sigma \in \Delta_d$ est le barycentre de $\text{Im } \sigma$, et $C_{(b^\sigma, 1)}$ le cône de sommet $(b^\sigma, 1) \in \Delta_d \times \mathbb{R}$.

Revenant à la démonstration de la proposition 2.1, Λ réalise bien une homotopie entre $\chi\pi$ et π . En effet :

$$\begin{aligned} \partial \Lambda(s) &= \partial P(s)(\Omega^d(1_{\Delta_d})) \\ &= P(s) j_0^d \chi^d(1_{\Delta_d}) - P(s) j_0^d(1_{\Delta_d}) - P(s) \Omega^d \partial(1_{\Delta_d}). \end{aligned}$$

Or,

(a) $P(s) j_0^d \chi^d(1_{\Delta_d}) = \chi \pi(s)$ et $P(s) j_0^d(1_{\Delta_d}) = \pi(s)$, car $P(s) j_0^d$ coïncide avec $\pi(s)$ sur Δ_d ;

$$\begin{aligned}
 (b) \quad P(s) \Omega^d \partial(1_{\Delta_d}) &= P(s) \Omega^d \left(\sum_{0 \leq i \leq d} (-1)^i V_i \right) \\
 &= \sum_{0 \leq i \leq d} (-1)^i P(s)(V_i \times 1_{\mathbb{R}}) \Omega^{d-1}(1_{\Delta_{d-1}})
 \end{aligned}$$

en vertu du lemme 2.2. Or, $P(s)(V_i \times 1_{\mathbb{R}}) = F_i(P(s)) = P(F_i(s))$ car P commute avec les opérateurs de face, d'où

$$\begin{aligned}
 P(s) \Omega^d \partial(1_{\Delta_d}) &= \sum_{0 \leq i \leq d} (-1)^i P(F_i(s)) \Omega^{d-1}(1_{\Delta_{d-1}}) \\
 &= \sum_{0 \leq i \leq d} (-1)^i \Lambda(F_i(s)) = \Lambda \partial(s) .
 \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que cette homotopie $\Lambda : C(c) \rightarrow C^{(p)}(f)_k$ induit bien une homotopie $\Lambda : \tilde{C}(c) \rightarrow \tilde{C}^{(p)}(f)_k$; il suffit d'établir que Λ est une (p)-application forte. Notons $S^{(p)}(c) = \bigcup_{1 \leq j \leq p} \text{Im}(\pi_j : S(c) \rightarrow S^{(p)}(f)_k)$ et posons $\Lambda^{(p)} : C^{(p)}(f)_k \rightarrow C^{(p-1)}(f)_k$ défini sur $s \notin S^{(p)}(c)$ par 0, et sur $s \in S^{(p)}(c)$ par $\Lambda^{(p)}(s) = P(s) \Omega^d(1_{\Delta_d})$ où la définition de $P(s)$ provient de l'intégration du dernier champ φ_2^D le long du support dans X_2 , avec la même fonction δ_ϵ utilisée pour Λ . Il est clair que ce même choix du réel ϵ fait à fortiori l'affaire, et que $\pi_j \Lambda = \Lambda^{(p)} \pi_j$ quel que soit $1 \leq j \leq p$.

(ii) Nous allons démontrer l'énoncé (ii) en supposant vrai le théorème P pour les espaces euclidiens : en effet, nous n'utiliserons pas cet énoncé dans la démonstration du théorème P (§3), mais seulement au §4.

Sous l'hypothèse de la proposition, la propriété de régularité est "générique". Soit $z \in \tilde{Z}_q^{(p+1)}(f)_k$. On va montrer que $\pi(z)$ est homologue, dans $\tilde{C}_q^{(p)}(f)_k$, à un cycle régulier en perturbant convenablement $\pi(z)$ le long de la "bande" $P(z)$ de (q+1)-prismes définis en (i). Il nous suffira de définir un morphisme $M : C(z) \rightarrow C^{(p)}(f)_k$ appliquant z sur un cycle régulier, et une homotopie $\Theta : C(z) \rightarrow C^{(p)}(f)_k$ entre M et π , tels que M et Θ soient stables pour les contraintes $\pi_j = 0$, $1 \leq j \leq p$.

Soit $P : S(z) \rightarrow PS^{(p)}_d(f)_k$ le morphisme simplicial défini en (i) .

Pour un simplexe $s \in S_d(z)$ quelconque et un p -uplet quelconque

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ d'applications $\alpha_j : \Delta_d \rightarrow \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ de classe C^k , on définit la α -perturbation $P_\alpha(s) \in PS^{(p)}_{d+1}(f)_k$ de $P(s)$ de la même manière que $P(s)$, à la seule différence que $(G_2^j)_\alpha$ est ici donné par

$$G_2^j(x, t) = D \text{Exp}_{|t\varphi_2^{p+1}(x)} (A((1-t)\varphi_2^j(x) + t\alpha_j(x)\varphi_2^j(x))) .$$

Pour une application $\hat{\beta} : \Delta_d \rightarrow \Delta_d \times \mathbb{R}$, graphe d'une application

$\beta : \Delta_d \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^k , $P_\alpha(s)(\hat{\beta}) \in S^{(p)}_d(f)_k$ car $\hat{\beta} \in S_d(\Delta_d \times \mathbb{R})_{P_k}$.

Alors, tout couple (α, β) de morphismes $\alpha : S(z) \rightarrow (S(\mathbb{R}^+)_k)^p$ et

$\beta : S(z) \rightarrow S(\mathbb{R}^+)_k$, induit un morphisme $M_{(\alpha, \beta)} : S(z) \rightarrow S^{(p)}(f)_k$ défini par

$$M_{(\alpha, \beta)}(s) = P_{\alpha(s)}(s)(\hat{\beta}(s)) .$$

De même, (α, β) induit une application linéaire graduée de degré 1 ,

$\Theta_{(\alpha, \beta)} : C(z) \rightarrow C^{(p)}(f)_k$ définie sur $S_d(z)$ par $\Theta_{(\alpha, \beta)}(s) = P_{\alpha(s)}(s)(\Gamma_{\beta(s)}^d(1_{\Delta_d}))$

où $\Gamma_{\beta(s)}^d$ est une homotopie entre les morphismes $\hat{\beta}(s), j_0^d : C(\Delta_d)_{P_k} \rightarrow C(\Delta_d \times \mathbb{R})_{P_k}$ induits par les plongements $\hat{\beta}(s)$ et $j_0^d : \Delta_d \rightarrow \Delta_d \times \mathbb{R}$.

Puisque le théorème P est supposé vrai pour les espaces euclidiens, une telle

homotopie existe. En particulier, on peut définir $\Gamma_{\beta(s)}^d$ par induction sur d ,

de sorte que Γ^d vérifie la même relation que l'homotopie Ω^d du lemme 2.2 :

$$\Gamma_{\beta(s)}^d(V_i) = (V_i \times 1_{\mathbb{R}})(\Gamma_{\beta(F_i(s))}^{d-1}(1_{\Delta_{d-1}})) .$$

Comme dans la preuve de (i), cette relation assure que $\Theta_{(\alpha, \beta)}$ réalise bien une homotopie entre $M_{(\alpha, \beta)}$ et π ,

quels que soient les morphismes α et β .

Il reste à définir les morphismes α et β de manière à ce que

$M_{(\alpha, \beta)}(z)$ soit régulier et que $M_{(\alpha, \beta)}$ et $\Theta_{(\alpha, \beta)}$ soient stables pour les

contraintes $\pi_j = 0$, $1 \leq j \leq p$. Remarquons d'abord que $\text{supp } M_{(\alpha, \beta)} : S(z) \rightarrow S(f)_k$

ne dépend que de β . On commence donc par définir β (par induction sur d)

de sorte que, quels que soient $s, s' \in S(z)$:

$$1\beta) \mu_{p+1}(s) = \mu_{p+1}(s') \Rightarrow \beta(s) = \beta(s')$$

$$2\beta) p_2 \text{ supp } M_{(\alpha, \beta)}(s) \neq p_2 \text{ supp } M_{(\alpha, \beta)}(s') \Rightarrow p_1 \text{ supp } M_{(\alpha, \beta)}(s) \neq p_1 \text{ supp } M_{(\alpha, \beta)}(s')$$

Ces deux conditions sont compatibles car, pour $\mu_{p+1}(s) = \mu_{p+1}(s')$, la première condition entraîne : $\text{supp } M_{(\alpha, \beta)}(s) = \text{supp } M_{(\alpha, \beta)}(s')$. Selon [2], lemme 4a), toute application continue $F : B\Delta_d \rightarrow W$, du bord de Δ_d dans une variété W , dont la restriction à chaque $d-1$ face est de classe C^k , est globalement de classe C^k sur $B\Delta_d$. Et selon [2], lemme 3a), toute application $F : B\Delta_d \rightarrow W$ de classe C^k qui se prolonge à une application continue sur Δ_d , admet une extension de classe C^k à Δ_d . La définition inductive de β est donc possible.

Enfin, on définit les morphismes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ de sorte que, quels que soient $s, s' \in S(z)$ et $1 \leq j \leq p$:

$$1\alpha) \mu_{p+1}(s) = \mu_{p+1}(s') \text{ et } \mu_j(s) = \mu_j(s') \Rightarrow \alpha_j(s) = \alpha_j(s')$$

$$2\alpha) p_2 \mu_j M_{(\alpha, \beta)}(s) \neq p_2 \mu_j M_{(\alpha, \beta)}(s') \Rightarrow p_1 \mu_j M_{(\alpha, \beta)}(s) \neq p_1 \mu_j M_{(\alpha, \beta)}(s') .$$

Ces deux conditions sont également compatibles. Les conditions 2 β) et 2 α) assurent que le cycle $M_{(\alpha, \beta)}(z)$ est régulier. Par le corollaire 1.7, les conditions 1 β) et 1 α) assurent que $M_{(\alpha, \beta)}$ et $\Theta_{(\alpha, \beta)}$ sont stables sous les contraintes $\pi_j = 0$, $1 \leq j \leq p$; montrons-le, par exemple, pour $\Theta_{(\alpha, \beta)}$. Soit $s \in S_d(z)$ et écrivons $\Gamma_{\beta(s)}^d(1_{\Delta_d}) = a_1 s_1 + \dots + a_\ell s_\ell$, qui ne dépend que de $\mu_{p+1}(s)$ en vertu de 1 β). Donc $\Theta_{(\alpha, \beta)}(s) = a_1 P_{\alpha(s)}(s)(s_1) + \dots + a_\ell P_{\alpha(s)}(s)(s_\ell)$, où ℓ, a_1, \dots, a_ℓ ne dépendent que de $\mu_{p+1}(s)$. La première hypothèse du corollaire 1.7 est vérifiée. Soient maintenant $s, s' \in S_d(z)$ tels que $\mu_j(s) = \mu_j(s')$ et $\mu_{p+1}(s) = \mu_{p+1}(s')$. Alors

$$\Theta_{(\alpha, \beta)}(s) = a_1 P_{\alpha(s)}(s)(s_1) + \dots + a_\ell P_{\alpha(s)}(s)(s_\ell)$$

$$\text{et } \Theta_{(\alpha, \beta)}(s') = a_1 P_{\alpha(s')}(s')(s_1) + \dots + a_\ell P_{\alpha(s')}(s')(s_\ell) .$$

Par la condition 1a), $\alpha_j(s) = \alpha_j(s')$, et par hypothèse $\mu_j(s) = \mu_j(s')$ et $\mu_{p+1}(s) = \mu_{p+1}(s')$. On en déduit, par définition de P_α , que $\mu_j(P_\alpha(s)(s_i)) = \mu_j(P_\alpha(s')(s'_i))$ quel que soit $1 \leq i \leq \ell$. La seconde hypothèse du corollaire 1.7 est vérifiée, et $\Theta_{(\alpha, \beta)}$ est donc stable pour les contraintes $\pi_j = 0$, $1 \leq j \leq p$. Cqfd.

En présence de la proposition 2.1, on voudra montrer que le morphisme $\pi : \tilde{H}_q^{(p+1)}(t)_k \rightarrow \bar{H}_q^{(p)}(t)_k$ est surjectif en dimensions $q \neq n-p$, dès que f est une submersion. Mais, même au niveau des chaînes et pour le cas $f = 1_V$, la surjectivité de $\pi : \tilde{C}_q^{(p+1)}(V)_{P_k} \rightarrow \bar{C}_q^{(p)}(V)_{P_k}$ ($q \neq n-p$) n'est pas immédiate : il suffit de considérer le cas où $p = q = 1$ et $V = \mathbb{R}^3$, et de prendre $\bar{c} \in \bar{C}_1^{(1)}(\mathbb{R}^3)_{P_k}$ définie par $\bar{c} = \varphi - \varphi'$, où $\text{supp}(\varphi) = \text{supp}(\varphi') = \lambda \in S^1(\mathbb{R}^3)_L$, φ est le transport parallèle du vecteur $\varphi(b)$ le long de λ ($b = \text{barycentre de } \Delta_1$), et φ' décrit deux tours complets autour de λ dans l'espace orthogonal à λ (figure 1). Alors, les chaînes de la forme $\tilde{c} = (\varphi, \psi) - (\varphi', \psi')$ vérifient $\pi_2(\tilde{c}) = c$, mais ne peuvent appartenir à $\tilde{C}_1^{(2)}(\mathbb{R}^3)_{P_k}$ car si $\psi = \psi'$, l'un au moins des deux simplexes de \tilde{c} ne vérifie pas la condition de transversalité de la définition 1.3-P, et si $\psi \neq \psi'$, $\pi_1(\tilde{c}) \neq 0$. On pourra définir une chaîne $\tilde{c} \in \tilde{C}_1^{(2)}(\mathbb{R}^3)_{P_k}$ telle que $\pi_2(\tilde{c}) = c$ en cassant en morceaux suffisamment petits une homotopie F_t ($0 \leq t \leq 1$) entre φ et φ' : on pose $\tilde{c} = \sum_{0 \leq i \leq \ell-1} (F_{t_i}, \psi_i) - (F_{t_{i+1}}, \psi_i)$ où $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{\ell-1} < t_\ell = 1$ sont choisis de manière à ce que $t_{i+1} - t_i$ soit assez petit pour qu'il existe un champ de vecteurs ψ_i sur λ qui soit transverse à la fois à F_{t_i} et $F_{t_{i+1}}$. On vérifie directement que $\pi_2(\tilde{c}) = \bar{c}$ et $\pi_1(\tilde{c}) = 0$.

On a reporté en appendice la démonstration de la surjectivité de $\pi : \tilde{C}_q^{(p+1)}(V)_{P_k} \rightarrow \bar{C}_q^{(p)}(V)_{P_k}$ ($q \neq n-p$) qui s'appuie sur cette idée et sur la définition d'un complexe $C_p^{(q)}(V)_{P_k}$ dual à $\tilde{C}_q^{(p)}(V)_{P_k}$, dont le bord est π . On y établit ensuite le cas sectionnel en ramenant sa démonstration à celle du cas non-sectionnel :

LEMME 2.3. Si $f: X_2 \rightarrow X_1$ est une submersion de classe C^{k_0} , le morphisme $\pi: \tilde{C}_q^{(p+1)}(f)_k \rightarrow \tilde{C}_q^{(p)}(f)_k$ est surjectif pour $q \neq n-p$.

Alors, la suite $0 \rightarrow \tilde{C}^{(p+1)}(f)_k \xrightarrow{\pi} \tilde{C}^{(p)}(f)_k \rightarrow 0$ est exacte pour $q < n-p$. Fixons $0 \leq q < n-p$ et tronquons-la en dimensions supérieures à q . Elle devient exacte en toutes dimensions et induit la suite exacte longue :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bar{Z}_q^{(p+1)}(f)_k \rightarrow \tilde{Z}_q^{(p+1)}(f)_k \xrightarrow{\pi} \bar{Z}_q^{(p)}(f)_k \rightarrow \bar{H}_{q-1}^{(p+1)}(f)_k \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \bar{H}_{q'}^{(p+1)}(f)_k \rightarrow \tilde{H}_{q'}^{(p+1)}(f)_k \xrightarrow{\pi} \bar{H}_{q'}^{(p)}(f)_k \rightarrow \bar{H}_{q'-1}^{(p+1)}(f)_k \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

PROPOSITION 2.4. Soit $f: X_2 \rightarrow X_1$ une submersion de classe C^{k_0} .

Quel que soit $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} \bar{H}_{* < n-(p+1)}^{(p+1)}(f)_k = 0 \Rightarrow \pi: \tilde{Z}_{q < n-p}^{(p+1)}(f)_k \rightarrow \bar{Z}_{q < n-p}^{(p)}(f)_k \text{ est surjectif} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k \text{ ISL et R} \end{aligned} \quad (2.3)$$

La première implication découle de l'exactitude de la suite (2.2), la seconde de la proposition 2.1.

Supposons maintenant que l'on ait l'énoncé suivant que l'on notera (*):

Quels que soient la submersion $f: X_2 \rightarrow X_1$ de classe C^{k_0} et l'entier $p \geq 1$:

$$\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k \text{ ISL et R} \Rightarrow \bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k = 0.$$

Puisque $\bar{H}_{* < 0}^{(n)}(f)_k$ est trivialement nul, les énoncés (2.3) et (*)

donnent alors, par induction, les :

THÉORÈME 1-S. Quels que soient la

submersion $f: X_2 \rightarrow X_1$ de classe C^{k_0} et l'entier $p \geq 1$, $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k = 0$.

THÉORÈME 2-S (ISL et R). Quelle que soit la submersion $f: X_2 \rightarrow X_1$ de classe C^{k_0} , $H_{* < n}^{(n)}(f)_k$ est ISL et R.

Afin d'obtenir le théorème S pour le cas $1 \leq k \leq k_0 - 1$ fixé, il reste donc à établir l'énoncé (*) et le suivant que l'on notera (**): quelle que soit la submersion $f: X_2 \rightarrow X_1$ de classe C^{k_0} ,

$$H_{* < n}(f)_k \text{ ISL et } R \Rightarrow p_2: H_q(f)_k \rightarrow H_q(X_2) \text{ est un isomorphisme pour } q < n \text{ et une surjection pour } q = n$$

dans lesquels ISL et R sont maintenant donnés en hypothèse.

Les théorèmes 1-S, 2-S et S ont pour corollaires, outre le théorème P, les :

THÉORÈME 1-P. Quels que soient la variété lisse V^n et l'entier $p \geq 1$,
 $\bar{H}_{* \neq n-p}^{(p)}(V)_{Pk} = 0$.

THÉORÈME 2-P (ISL). Quelle que soit la variété lisse V^n , $H_{* \neq n}^{(p)}(V)_{Pk}$
est ISL.

On déduit enfin aisément des théorèmes 1-P, 2-P et P, le théorème suivant (on se borne ici à la version "P" ; la version S du théorème 3 pour les submersions est également vraie et s'interprète de la façon évidente dans les variétés feuilletées) :

THÉORÈME 3-P (champs transverses). Quels que soient la variété lisse V^n
et l'entier $p \geq 1$, le morphisme $\text{supp}_*: H_q^{(p)}(V)_{Pk} \rightarrow H_q(V)_{Pk}$ est un isomor-
phisme pour $q < n-p$ et une surjection pour $q = n-p$.

Le théorème 3-P exprime essentiellement qu'il n'existe pas d'obstruction à la déformation homologique de "champs tordus" en "champs plats". Composant les théorèmes P et 3-P, on obtient en particulier : tout q -cycle singulier d'une variété lisse est homologue à un q -cycle plongé "admettant" un p -champ transverse (dès que les dimensions le permettent : $q+p \leq n$). Evidemment, un tel énoncé est faux dans la version géométrique où les q -cycles plongés sont remplacés par les sous-variétés de dimension q : d'abord parce que les cycles

singuliers (à coefficients entiers) ne sont pas représentables par les sous-variétés ([12]), et ensuite parce qu'une sous-variété n'admet pas en général de p -champ transverse. La généralité provient de ce que l'on a considéré le mot "admet" dans le sens algébrique que lui donne le morphisme supp .

Voici le plan des prochains numéros. On démontre d'abord au §3 les théorèmes P, 1-P et 2-P pour $V = \mathbb{R}^n$: il suffit d'établir les énoncés (*) et (**) sous leur version P avec $V = \mathbb{R}^n$. Cela nous permet, au §4, de démontrer les théorèmes S, 1-S et 2-S pour la submersion donnée comme projection sur le premier facteur $\text{pr} : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ce qui revient à établir les énoncés (*) et (**) pour $f = \text{pr}$. On établit ensuite complètement au §5 les énoncés (*) et (**), ce qui démontre tous les théorèmes sauf le cas $k = k_0$ du théorème S réglé au §6.

3. HOMOLOGIE DES p -CHAMPS TRANSVERSES DANS LES ESPACES EUCLIDIENS

PLAN DE LA DÉMONSTRATION.

Nous allons établir les énoncés (*) et (**) sous leur version P dans le cas $V = \mathbb{R}^n$, avec la métrique et la connexion canoniques. Puisque (**) est évident pour $q = 0$, il suffit de montrer que :

$$\bar{H}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{\text{PK}} \text{ ISL} \Rightarrow \bar{H}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{\text{PK}} = 0 \text{ quels que soient} \quad (3.1)$$

$$p \text{ et } q \text{ tels que } 0 \leq p, 0 \leq q \text{ et } 0 < q+p < n$$

Désignant par $\tau : T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ l'identification naturelle, par $\tau_2 : T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ le composé $\text{pr}_2 \circ \tau$ où pr_2 est la projection sur le second facteur, et par \mathbb{R}_0^n l'espace $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on notera

$\varphi_j : S^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k} \rightarrow S(\mathbb{R}_0^n)_{D_k}$ le morphisme simplicial défini par $\varphi_j(s) = \tau_2(\mu_j(s))$ pour $1 \leq j \leq p$. Alors, $S^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ s'identifie à un sous-ensemble simplicial de $S(\mathbb{R}^n)_{D_k} \times (S(\mathbb{R}_0^n)_{D_k})^p$ par l'application qui à s associe le simplexe $(\text{supp}(s), \varphi_1(s), \dots, \varphi_p(s))$ que l'on notera simplement $(\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

Pour $\lambda \in S_q(\mathbb{R}^n)_{D_k}$, $D\lambda$ sera considéré comme application de classe C^{k-1} , $D\lambda : \Delta_q \rightarrow L(H^q, \mathbb{R}^n)$, où H^q est l'hyperplan vectoriel de \mathbb{R}^{q+1} parallèle à $H_q \supset \Delta_q$. Si λ est linéaire affine, $D\lambda$ désignera l'application linéaire $D\lambda(x) \in L(H^q, \mathbb{R}^n)$ pour x quelconque dans Δ_q .

DÉFINITION 3.1. Un simplexe $s = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in S_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ est dit à support linéaire si λ est linéaire affine non-dégénéré. Si s est à support linéaire, on désigne par $[s]_a$ le plus petit sous-espace linéaire affine E de \mathbb{R}^n tel que (i) $\text{Im } \lambda \subset E$ et (ii) le vecteur tangent $(\lambda(x), \varphi_j(x)) \in T_{\lambda(x)}E$ quels que soient $x \in \Delta_q$ et $1 \leq j \leq p$, et par $[s]$ l'espace vectoriel parallèle à $[s]_a$ (si $p = 0$, seule la condition (i) est retenue). Alors s est dit sans torsion si s est à support linéaire et si $\dim[s] = q+p$.

Une chaîne est sans torsion ou à supports linéaires si chacun de ses simplexes l'est.

Pour $s = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in S_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$, désignons par $L(s)$ le simplexe $(L(\lambda), \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ où $L(\lambda) : \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'application linéaire affine (pas nécessairement non-dégénérée) déterminée par $L(\lambda)(a_i) = \lambda(a_i)$ quel que soit le sommet a_i ($0 \leq i \leq q$) de Δ_q . On établit (3.1) en trois étapes, en supposant fixés q et p tels que $0 \leq p$, $0 \leq q$ et $0 < q+p < n$:

LEMME 1. Tout cycle de $\bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ est homologue, à subdivision près, à un cycle à supports linéaires : soit $z \in \bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$; il existe deux subdivisions linéaires $x, x' : \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k} \rightarrow \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ telles que $L(x(z)) \in \bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ et $x'x(z) - x'x(z) \in \bar{B}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$.

LEMME 2. Tout cycle de $\bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ à supports linéaires est homologue, à subdivision près, à un cycle sans torsion : soit $z \in \bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ à supports linéaires ; il existe une subdivision linéaire $\chi : \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k} \rightarrow \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ et un cycle $z' \in \bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ sans torsion tels que $\chi(z) - z' \in \bar{B}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$.

La définition de z' proviendra d'un morphisme ST (sans torsion) d'un sous-complexe de $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ à valeurs dans $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$: on posera $z' = ST(\chi(z))$.

LEMME 3. Tout cycle sans torsion de $\bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ appartient à $\bar{B}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$.

L'énoncé (3.1) est un corollaire immédiat de ces trois lemmes.

Les difficultés, dans les démonstrations de ces lemmes, proviennent du caractère non-dégénéré des simplexes de $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$, à savoir

1) le support $\text{supp}(s)$ d'un élément $s \in S_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ est immergé (3.2)

et

2) le p -champ $\varphi(s) = (\varphi_1(s), \dots, \varphi_p(s))$ d'un élément $s \in S_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ (3.3)

est un p -repère, et est transverse au support :

$$\dim[\text{Im } D\lambda(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)] = q+p.$$

Nous devons, pour établir les lemmes 1, 2 et 3, considérer un complexe de chaînes plus vaste que $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$, dans lequel les simplexes n'auront pas à vérifier les conditions de non-dégénérescence 1 et 2. On récupérera ensuite la non-dégénérescence par le moyen de contrôles uniformes : contrôle uniforme sur la condition 1 par la métrique 0-fine (Définition 3.3) et contrôle uniforme sur la condition 2 par le volume des simplexes (Définition 3.10).

DÉFINITION 3.2. On note $S^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Dk}$ l'ensemble simplicial $S(\mathbb{R}^n)_{Dk} \times (S(\mathbb{R}^n)_{0Dk})^p$ qui diffère de $S^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ par la suppression des conditions (3.2) et (3.3). On considérera également les sous-ensembles

simpliciaux suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} \$^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Dk} & \supset & \$^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Ik} & \supset & \$^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk} & \supset & \$^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk} \\ & & \cup & & \cup & & \cup \\ & & S^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Ik} & \supset & S^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk} & \supset & S^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk} \end{array}$$

où I signifie "immergé". Ici, pour $X = I, P$ ou L ,

$\$^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Xk} = S(\mathbb{R}^n)_{Xk} \times (S(\mathbb{R}^n_{0Dk}))^p$ tandis que $S^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Xk}$ est le sous-ensemble simplicial de $\$^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Xk}$ déterminé par : $s = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in S^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Xk}$ si $\dim [\text{Im } D\lambda(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)] = q+p$ quel que soit x .

Il sera commode d'étendre la définition 3.1.

DÉFINITION 3.1bis. Un simplexe $s \in \$^{(p)}_q(\mathbb{R}^n)_{Dk}$ est à support linéaire si $s \in \$^{(p)}_q(\mathbb{R}^n)_{Lk}$. Si s est à support linéaire, s est sans torsion si $\dim [s] \leq q+p$.

TOPOLOGIE 0-FINE.

Considérons le cas $p = 0$ du lemme 1 : l'existence d'une subdivision χ , telle que $L(\chi z)$ soit non-dégénéré et homologue à χz (à une subdivision χ' près) suppose que chaque simplexe λ' de χz converge uniformément, dans une certaine métrique sur $C^1(\Delta_q, \mathbb{R}^n)$, vers $L(\lambda')$ quand χ devient de plus en plus fine; on voudra, en particulier, que cette convergence entraîne la convergence du plan tangent $\text{Im } D\lambda'(x)$ vers le plan tangent $\text{Im } DL(\lambda')(x)$ uniformément par rapport à $x \in \Delta_q$. La topologie C^1 de Whitney ne convient pas pour ce genre de problèmes, toutes les dérivées des simplexes de χz et de $L(\chi z)$ tendant trivialement vers 0 dans cette topologie à mesure que χ s'affine. Nous aurons besoin d'une topologie sur les 1-jets d'applications différentiables strictement plus fine que la topologie C^1 de Whitney au voisinage des 1-jets singuliers.

DÉFINITION 3.3. Soit F un espace vectoriel réel. Tout norme $\| \cdot \|$ sur F induit une métrique $d_0 : F \times F \longrightarrow [0,2]$, éclatée à l'origine, définie par

$$d_0(y, y') = \begin{cases} \frac{|y - y'|}{\max(|y|, |y'|)} & \text{si } (y, y') \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (y, y') = (0, 0) \end{cases}$$

appelée métrique 0-fine induite par la norme $\| \cdot \|$. On notera $d(y, y') = |y - y'|$ la métrique usuelle induite par $\| \cdot \|$.

La démonstration de l'inégalité du triangle pour cette métrique n'est pas immédiate : on la trouvera en appendice.

Remarquons que la topologie induite par la métrique 0-fine contient l'ensemble $\{0\}$ comme ouvert, car $d_0(y, 0) = 1$ quel que soit $y \neq 0$.

L'application :

$\text{id} : (F, d_0) \longrightarrow (F, d)$ est continue sans être bicontinue et, sur tout borné $B \subset (F, d)$, l'application $\text{id} : (B, d_0) \longrightarrow (B, d)$ est uniformément continue.

La métrique 0-fine sur $(F, \| \cdot \|)$ induit une métrique 0-fine sur l'ensemble $L(E, F)$ des applications linéaires d'un espace vectoriel quelconque E dans F :

$$d_0(A, B) = \sup_{x \in E} d_0(A(x), B(x)) \in [0, 2] \quad (= \sup_{\|x\|=1} d_0(A(x), B(x)) \text{ si } E \text{ est normé}).$$

Si $(E, \| \cdot \|)$ et $(F, \| \cdot \|)$ sont des espaces de Banach (ou des sous-espaces linéaires affines d'espaces de Banach), la métrique 0-fine sur $L(E, F)$ induit une métrique 0-fine sur l'ensemble des 1-jets $J^1(E, F)$:

$$d_0(j^1(f)(x), j^1(g)(x')) = \max(|x - x'|, |f(x) - g(x')|, d_0(Df(x), Dg(x')))$$

où Df et Dg sont considérés comme applications de E dans $L(E, F)$.

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach et Y une variété différentiable, on donne à $J^1(E, Y)$ la topologie 0-fine induite par la topologie 0-fine des ensembles $J^1(E, \psi_U(U))$ où U parcourt l'ensemble des domaines des cartes ψ_U de Y , deux cartes définissant des topologies compatibles sur l'intersection de leur domaine (mais ceci est faux si E est remplacé par une variété différentiable, même si Y est un espace de Banach : les changements de cartes au but définissent des topologies 0-fines compatibles, mais pas les changements de cartes à la source).

Enfin, on peut définir une topologie 0-fine sur $C^1(X, Y)$ dès que le domaine ou le codomaine est un espace de Banach. Si $X = E$ est un espace de Banach, la topologie 0-fine sur $J^1(E, Y)$ induit une topologie 0-fine sur $C^1(E, Y)$ en prenant pour ouverts les ensembles $\{f \in C^1(E, Y) : j^1 f(x) \in V \text{ pour tout } x \in E\}$ pour V un ouvert de $J^1(E, Y)$. Inversement, si $Y = F$ est un espace de Banach, $C^1(X, F)$ admet une topologie 0-fine dont une base de voisinages ouverts est donnée par :

$$B_\delta(f) = \{g \in C^1(X, F) : \max \{|f(x) - g(x)|, d_0(Df(x), Dg(x))\} < \delta(x) \text{ pour tout } x \in X\}$$

pour $\delta \in C^\infty(X, \mathbb{R}^+)$. Cette topologie est métrisable si X est compact.

On a la

PROPOSITION 3.4. (i) Soient E un espace vectoriel, $(F, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et d_0 la métrique 0-fine sur $L(E, F)$. Alors, pour $A, B \in L(E, F)$:

$$d_0(A, B) < 1 \Rightarrow \ker A = \ker B.$$

En particulier, si A est non-dégénérée, B est non-dégénérée.

(ii) Soient X une variété compacte, $(F, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et d_0 la métrique 0-fine sur $C^1(X, F)$. Alors, pour $f, g \in C^1(X, F)$:

$d_0(f,g) < 1 \Rightarrow \ker Df(x) = \ker Dg(x)$ quel que soit $x \in X$.

En particulier, si f est une immersion, g est une immersion.

(iii) Soient E un espace vectoriel, $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ avec sa norme usuelle, et
désignons par $L_k(E, \mathbb{R}^n)$ le sous-espace de $L(E, \mathbb{R}^n)$ des applications de
rang k . La métrique d_0 sur $L(E, \mathbb{R}^n)$ induit naturellement, pour chaque
entier $1 \leq k \leq \min(\dim E, n)$, une métrique d_G sur le grassmannien
 $G_k(\mathbb{R}^n)$ compatible avec la topologie usuelle de $G_k(\mathbb{R}^n)$, telle que l'appli-
cation "image"

$$\text{Im} : (L_k(E, \mathbb{R}^n), d_0) \longrightarrow (G_k(\mathbb{R}^n), d_G)$$

est uniformément continue. On peut dire davantage : quel que soit $\varepsilon > 0$,
il existe $\delta > 0$ tel que si $A, B \in L(E, \mathbb{R}^n)$ avec $d_0(A, B) < \delta$, A et B
appartiennent à un même sous-espace $L_k(E, \mathbb{R}^n)$ et $d_G(\text{Im } A, \text{Im } B) < \varepsilon$.

Démonstration. (i) Si $d_0(A, B) < 1$, alors $d_0(A(x), B(x)) < 1$ quel que
 soit $x \in E$. Donc si $A(x) = 0$, $B(x) = 0$ car $d_0(y, y') = 1$ pour $y = 0$
 et $y' \neq 0$. D'où $\ker A \subset \ker B$. Et inversement. L'énoncé (ii) est une
 conséquence de (i).

(iii) Remarquons d'abord que l'énoncé (iii), comme les deux premiers, est
 évidemment faux pour la métrique usuelle sur $L(E, \mathbb{R}^n)$: il suffit de consi-
 dérer deux applications $A, A' \in L_k(E, \mathbb{R}^n)$ avec $\text{Im } A \neq \text{Im } A'$. Les deux
 suites $\{\frac{1}{j}A\}_{j \in \mathbb{N}}$ et $\{\frac{1}{j}A'\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergent vers l'application nulle dans
 la topologie usuelle de $L(E, \mathbb{R}^n)$, et convergent donc l'une vers l'autre,
 mais $\text{Im}(\frac{1}{j}A) = \text{Im } A \neq \text{Im } A' = \text{Im}(\frac{1}{j}A')$ quel que soit $j \in \mathbb{N}$.

Démontrons (iii). D'abord, il suffit de choisir $\delta < 1$ pour que A
 et B appartiennent à un même $L_k(E, \mathbb{R}^n)$ dès que $d_0(A, B) < \delta$. On définit

la métrique d_G sur $G_k(\mathbb{R}^n)$ par

$$d_G(P, P') = \inf_{\substack{A, B \in L(E, \mathbb{R}^n) \\ \text{Im } A = P \text{ et } \text{Im } B = P'}} d_0(A, B)$$

Vérifions l'inégalité du triangle :

$$d_G(P, P'') \leq d_G(P, P') + d_G(P', P'')$$

quels que soient $P, P', P'' \in G_k(\mathbb{R}^n)$. Remarquons d'abord que

$$\inf_{\substack{A, B \in L(E, \mathbb{R}^n) \\ \text{Im } A = P, \text{Im } B = P'}} d_0(A, B) = \inf_{\substack{B \in L(E, \mathbb{R}^n) \\ \text{Im } B = P'}} d_0(A_0, B) \quad (3.4)$$

quel que soit $A_0 \in L(E, \mathbb{R}^n)$ tel que $\text{Im } A_0 = P$. En effet, soient A_0 tel que $\text{Im } A_0 = P$, et $A, B \in L(E, \mathbb{R}^n)$ tels que $\text{Im } A = P$ et $\text{Im } B = P'$. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E tel que les restrictions A_1 et B_1 de A et B à E_1 soient des isomorphismes sur P et P' respectivement. Alors l'application $B_0 \in L(E, \mathbb{R}^n)$ définie par $B_0 = B(A_1)^{-1}A_0$ a pour image $\text{Im } B_0 = \text{Im } B = P'$ et

$$d_0(A_0, B_0) = d_0(A(A_1)^{-1}A_0, B(A_1)^{-1}A_0) \leq d_0(A, B),$$

car $d_0(A \circ \varphi, B \circ \varphi) \leq d_0(A, B)$ où $\varphi: D \rightarrow E$ est une application linéaire quelconque (et $d_0(A \circ \varphi, B \circ \varphi) = d_0(A, B)$ si φ est surjective ; en particulier, la métrique 0-fine est invariante par isomorphisme du domaine). Ceci établit (3.4).

On obtient par symétrie

$$\inf_{\substack{A, B \in L(E, \mathbb{R}^n) \\ \text{Im } A = P \text{ et } \text{Im } B = P'}} d_0(A, B) = \inf_{\substack{A \in L(E, \mathbb{R}^n) \\ \text{Im } A = P}} d_0(A, B_0)$$

quel que soit $B_0 \in L(E, \mathbb{R}^n)$ tel que $\text{Im } B_0 = P'$. Ainsi pour un tel B_0 , on a

$$\begin{aligned}
d_G(P, P') + d_G(P', P'') &= \inf_{\substack{A \in L(E, \mathbb{R}^n) \\ \text{Im } A = P}} d_0(A, B_0) + \inf_{\substack{C \in L(E, \mathbb{R}^n) \\ \text{Im } C = P''}} d_0(B_0, C) \\
&= \inf_{\substack{A, C \in L(E, \mathbb{R}^n) \\ \text{Im } A = P \text{ et } \text{Im } C = P''}} (d_0(A, B_0) + d_0(B_0, C)) \\
&\geq \inf_{\substack{A, C \in L(E, \mathbb{R}^n) \\ \text{Im } A = P \text{ et } \text{Im } C = P''}} d_0(A, C) = d_G(P, P'') ,
\end{aligned}$$

ce qui montre que d_G est une métrique. Il est clair que l'application :

$$\text{Im} : (L_k(E, \mathbb{R}^n), d_0) \rightarrow (G_k(\mathbb{R}^n), d_G)$$

est alors uniformément continue : il suffit de choisir $\delta < \min(\epsilon, 1)$. Enfin, il est facile de voir que la métrique d_G induit sur $G_k(\mathbb{R}^n)$ la topologie usuelle ; il suffit, pour cela, de remarquer que $d_G(P, P')$ est le sinus de l'angle au sommet du plus petit cône fermé de \mathbb{R}^n centré en P , de sommet 0 , et contenant P' . Soit en effet $d_G(P, P') < 1$; alors $P' \cap P^\perp = \{0\}$, d'où la projection orthogonale p_\perp de P sur P' est un isomorphisme. Si $A_0 \in L(E, \mathbb{R}^n)$ est tel que $\text{Im } A_0 = P$, on a :

$$\begin{aligned}
d_G(P, P') &= \inf_{\substack{B \in L(E, \mathbb{R}^n) \\ \text{Im } B = P'}} d_0(A_0, B) \quad \text{par (3.4)} \\
&= d_0(A_0, p_\perp \circ A_0)
\end{aligned}$$

car, pour $A_0(x) \in P$:

$$\inf_{y \in P'} d_0(A_0(x), y) = \inf_{y \in P'} \frac{|A_0(x) - y|}{\max(|A_0(x)|, |y|)}$$

est atteint en $y = p_\perp \circ A_0(x)$. Or, pour $x \notin \ker A_0$,

$$d_0(A_0(x), p_\perp \circ A_0(x)) = \sin \angle (D(A_0(x)), D(p_\perp \circ A_0(x))) ,$$

où $D(z)$ est la droite vectorielle passant par z . Cqfd.

L'énoncé (iii) ne caractérise pas la métrique 0-fine, qu'il ne conviendrait pas d'appeler "métrique grassmannienne" : pour que deux applications $A, B \in L(E, \mathbb{R}^n)$ soient proches dans la métrique 0-fine, il faut non seulement que les plans $\text{Im } A$ et $\text{Im } B$ soient proches, mais également que A et B paramétrisent correctement ces plans.

De fait, la réciproque de l'énoncé (iii) est fautive : aucune métrique compatible avec la topologie de $G_k(\mathbb{R}^n)$ n'induit, par $\text{Im} : L_k(E, \mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$, une pseudo-métrique sur $L(E, \mathbb{R}^n)$ vérifiant l'énoncé (i) de la même proposition.

SUITES FINES ET RÉGULIÈRES DE SUBDIVISIONS LINÉAIRES.

DÉFINITION 3.5. Soit $P = P(y_0, \dots, y_q) \subset \mathbb{R}^m$ un q -polytope simplicial, c'est-à-dire la fermeture convexe de ses $q+1$ sommets y_0, \dots, y_q linéairement indépendants. Pour $q \geq 1$, le type de P , noté $T(P)$, est le supremum des nombres réels T vérifiant

$$\left| \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ i \neq l}} a_i (y_i - y_l) \right| \geq T |a_{i_0} (y_{i_0} - y_l)|$$

quel que soient $a_0, \dots, a_q \in \mathbb{R}$, $0 \leq i_0 \leq q$ avec $i_0 \neq l$, et $0 \leq l \leq q$. Ainsi, $T(P)$ est une mesure du plus petit angle hypersolide de P . Notons, pour $c \in C_q(\mathbb{R}^m)_L$,

$$T(c) = \min_{\lambda \in c} T(\text{Im } \lambda) \quad \text{et} \quad d(c) = \max_{\lambda \in c} \text{diam}(\text{Im } \lambda).$$

DÉFINITION 3.6. Soit $(\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de subdivisions linéaires. La suite est fine si, pour tout q , $d(\gamma_q^j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Elle est régulière si, pour tout q , $\inf_{j \in \mathbb{N}} T(\gamma_q^j) = b_q > 0$.

Puisque Δ_3 , par exemple, n'admet pas de subdivision en tétraèdres réguliers autre que la subdivision triviale 1_{Δ_3} , on ne peut obtenir de suite

fine et régulière par itération d'une même subdivision linéaire. On peut néanmoins en construire par une méthode géométrique simple.

PROPOSITION 3.7 (voir également [13], §5, [14] et [15], p. 358). Il existe des suites fines et régulières de subdivisions linéaires.

La démonstration se trouve en appendice.

Le lemme suivant établit le rapport entre les suites fines et régulières et la métrique 0-fine.

LEMME 3.8. Soit $\{\chi^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ une suite fine et régulière de subdivisions linéaires.

Quelle que soit $c \in C(\mathbb{R}^n)_{P_k}$: $d_0(\chi^j(c), L\chi^j(c)) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$,

où $d_0(\chi^j(c), L\chi^j(c)) = \max_{\lambda \in \chi^j(c)} d_0(\lambda, L(\lambda))$.

Démonstration. Il suffit de démontrer que $d_0(\chi^j(\lambda), L\chi^j(\lambda)) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ pour un simplexe quelconque $\lambda \in S_q(\mathbb{R}^n)_{P_1}$, c'est-à-dire pour un plongement de classe C^1 , $\lambda : \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Soient $\{\gamma^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ une suite fine et régulière de subdivisions linéaires, avec $\inf_{j \in \mathbb{N}} T(\gamma^j_q) = b_q > 0$, et $\{\chi^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ la suite induite par $\{\gamma^j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. Nous devons montrer qu'il existe $j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, quels que soient $j \geq j(\varepsilon)$ et $\lambda' \in \chi^j(\lambda)$, $d_0(\lambda', L(\lambda')) \leq \varepsilon$ où d_0 est la métrique 0-fine sur $C^1(\Delta_q, \mathbb{R}^n)$.

Soient d et d_0 les métriques usuelle et 0-fine sur $J^1(\Delta_q, \mathbb{R}^n)$ et $C^1(\Delta_q, \mathbb{R}^n)$:

$$d(j^1(f)(y), j^1(g)(y')) = \max(|y-y'|, |f(y)-g(y')|, |Df(y)-Dg(y')|)$$

$$d_0(j^1(f)(y), j^1(g)(y')) = \max(|y-y'|, |f(y)-g(y')|, d_0(Df(y), Dg(y')))$$

$$d(f, g) = \sup_{y \in \Delta_q} d(j^1(f)(y), j^1(g)(y)) \quad d_0(f, g) = \sup_{y \in \Delta_q} d_0(j^1(f)(y), j^1(g)(y)) .$$

Dans la métrique usuelle, $\text{Im } j^1(\lambda)$ est un compact de $J^1(\Delta_q, \mathbb{R}^n)$. Soit alors $\eta > 0$ tel que le η -voisinage de $\text{Im } j^1(\lambda)$ dans la métrique usuelle :

$$W_\eta = \bigcup_{j \in \text{Im } j^1(\lambda)} B_\eta(j)$$

soit constitué uniquement de jets non-singuliers. Alors, sur W_η , l'application $\text{id} : (W_\eta, d) \rightarrow (W_\eta, d_0)$ est continue. Donc sur le compact $\bar{W}_{\eta/2}$, où $\bar{W}_{\eta/2}$ est la fermeture de $W_{\eta/2}$ dans la métrique usuelle, l'application $\text{id} : (\bar{W}_{\eta/2}, d) \rightarrow (\bar{W}_{\eta/2}, d_0)$ est uniformément continue. Soit $0 < \delta < \eta/2$ tel que $d(j_1, j_2) \leq \delta \Rightarrow d_0(j_1, j_2) \leq \varepsilon$ quels que soient $j_1, j_2 \in \bar{W}_{\eta/2}$.

Désignons par $\rho > 0$ un réel positif tel que, quels que soient $y, y' \in \Delta_q$, $|y - y'| \leq \rho \Rightarrow |D\lambda(y) - D\lambda(y')| \leq \delta/2$. Pour établir la partie essentielle de la démonstration, définissons, pour un q -polytope simplicial $P = P(y_0, \dots, y_q) \subset \Delta_q$ et un simplexe $\sigma \in S_q(\mathbb{R}^n)$, le simplexe linéaire affine $P_\sigma : \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}^n$ déterminé par $P_\sigma(y_i) = \sigma(y_i)$ quel que soit $0 \leq i \leq q$. Montrons maintenant l'énoncé (3.5) suivant :

Il existe $0 < \rho' \leq \rho$ tel que, quel que soit le q -polytope simplicial $P = P(y_0, \dots, y_q)$ de sommets $y_0, \dots, y_q \in \Delta_q$, de type $T(P) \geq b_q$ et de diamètre inférieur ou égal à ρ' , $|D\lambda(y_0) - DP_\lambda(y_0)| \leq \delta/2$.

Démonstration. Puisque λ est de classe C^1 , on a

$$\lambda(y_0 + \Delta y) - \lambda(y_0) = D\lambda(y_0)(\Delta y) + R(\Delta y),$$

où $\frac{|R(\Delta y)|}{|\Delta y|} \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} 0$ uniformément par rapport à $y_0 \in \Delta_q$.

On peut donc choisir $0 < \rho' \leq \rho$ tel que

$$\frac{|R(\Delta y)|}{|\Delta y|} \leq \frac{b_q}{2q} \delta \quad (3.6)$$

quels que soient le point $y_0 \in \Delta_q$ et le vecteur Δy de norme $|\Delta y| \leq \rho'$.

Si $P(y_0, \dots, y_q)$ est de type $T(P) \geq b_q$ et de diamètre inférieur ou égal à ρ' , on a alors en notant $v_{oi} = y_i - y_0$ ($1 \leq i \leq q$) :

$$\frac{|D\lambda(y_0)(v_{oi}) - (\lambda(y_i) - \lambda(y_0))|}{|v_{oi}|} \leq \frac{b_q}{2q} \delta \quad \text{par (3.6)} ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{|D\lambda(y_0)(v_{oi}) - DP_\lambda(v_{oi})|}{|v_{oi}|} \leq \frac{b_q}{2q} \delta \quad (3.7)$$

Or, pour $v \in H^q$:

$$\begin{aligned} \frac{|D\lambda(y_0)(v) - DP_\lambda(v)|}{|v|} &= \frac{|D\lambda(y_0)(\sum_{i=1}^q a_i v_{oi}) - DP_\lambda(\sum_{i=1}^q a_i v_{oi})|}{|\sum_{i=1}^q a_i v_{oi}|} \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^q |a_i| |D\lambda(y_0)(v_{oi}) - DP_\lambda(v_{oi})|}{|\sum_{i=1}^q a_i v_{oi}|} \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^q |D\lambda(y_0)(v_{oi}) - DP_\lambda(v_{oi})|}{b_q |v_{oi}|} \quad \text{car } P \text{ est de type } T(P) \geq b_q \\ &\leq q \frac{1}{b_q} \frac{b_q}{2q} \delta \quad \text{par (3.7)} \\ &\leq \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Donc $|D\lambda(y_0) - DP_\lambda| \leq \delta/2$, ce qui établit l'énoncé (3.5).

Enfin, il existe par la continuité de λ , un réel $0 < \rho'' \leq \rho'$ tel que, quel que soit le q -polytope simplicial P de Δ_q de diamètre ne dépassant pas ρ'' , $|\lambda(y) - P_\lambda(y)| \leq \delta$ pour tout $y \in P$. Ainsi, pour un q -polytope simplicial $P(y_0, \dots, y_q)$ de Δ_q de type $T(P) \geq b_q$ et de diamètre ne dépassant pas ρ'' , on a pour tout $y \in P$:

$$\begin{aligned} d(j^1 \lambda(y), j^1 P_\lambda(y)) &= \max \{ |\lambda(y) - P_\lambda(y)|, |D\lambda(y) - DP_\lambda(y)| \} \\ &\leq \max(\delta, \delta) \leq \delta \end{aligned}$$

car DP_λ étant constant sur Δ_q ,

$$\begin{aligned} |D\lambda(y) - DP_\lambda(y)| &= |D\lambda(y) - DP_\lambda(y_0)| \\ &\leq |D\lambda(y) - D\lambda(y_0)| + |D\lambda(y_0) - DP_\lambda(y_0)| \leq \delta/2 + \delta/2 \leq \delta. \end{aligned}$$

Donc

$$d_0(j^1 \lambda(y), j^1 P_\lambda(y)) \leq \varepsilon. \quad (3.8)$$

Soit $j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $d(\gamma_q^j) \leq \rho''$ pour tout $j \geq j(\varepsilon)$. Alors quels que soient $j \geq j(\varepsilon)$ et $\lambda' \in \chi^j(\lambda)$, $d_0(\lambda', L(\lambda')) \leq \varepsilon$. En effet, λ' s'exprime comme composé :

$$\Delta_q \xrightarrow{i} \Delta_q \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}^n$$

où $i \in \gamma_q^j$ applique Δ_q linéairement sur un q -polytope simplicial P de Δ_q de type $T(P) \geq b_q$ et de diamètre n'excédant pas ρ'' car $T(\gamma_q^j) \geq b_q$ et $d(\gamma_q^j) \leq \rho''$. Ainsi

$$\begin{aligned} d_0(j^1 \lambda'(x), j^1 (L\lambda')(x)) &= d_0(j^1 (\lambda \circ i)(x), j^1 (L(\lambda \circ i))(x)) \\ &= d_0(j^1 (\lambda \circ i)(x), j^1 (P_\lambda \circ i)(x)) \quad \text{où } P = \text{Im } i \\ &= \max \{ |\lambda(i(x)) - P_\lambda(i(x))|, d_0(D\lambda(i(x)) \circ Di(x), DP_\lambda(i(x)) \circ Di(x)) \} \\ &= \max \{ |\lambda(i(x)) - P_\lambda(i(x))|, d_0(D\lambda(i(x)), DP_\lambda(i(x))) \} \end{aligned}$$

car la métrique 0-fine est invariante par isomorphisme du domaine

$$\begin{aligned} &= d_0(j^1 \lambda(y), j^1 P_\lambda(y)) \quad \text{où } y = i(x) \in P \\ &\leq \varepsilon \quad \text{par (3.8).} \end{aligned}$$

Donc

$$d_0(\lambda', L(\lambda')) = \sup_{x \in \mathcal{L}_q} d_0(j^1 \lambda'(x), j^1 (L\lambda')(x)) \leq \varepsilon.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la première partie du lemme 1.

LEMME 3.9. Soient $\{\chi^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ une suite fine et régulière et $z \in \bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$.

Il existe $j_0(z) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$L(\chi^j(z)) \in \bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$$

quel que soit $j \geq j_0(z)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 3.8 et de la proposition 3.4 (ii) qu'il existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tel que $L\chi^j(z)$ est à supports linéaires affines non-dégénérés pour tout $j \geq j_1$.

Soit $\epsilon > 0$ tel que, quels que soient $s = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in z$ et $x \in \Delta_q$:

$$\dim [P, \varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)] = q + p$$

pour tout P tel que $d_G(P, \text{Im } D\lambda(x)) < \epsilon$. Puisque

$\text{Im} : (L_q(H^q, \mathbb{R}^n), d_0) \rightarrow (G_q(\mathbb{R}^n), d_G)$ est uniformément continue, soit $\delta > 0$

tel que $d_0(A, B) < \delta \Rightarrow d_G(\text{Im } A, \text{Im } B) < \epsilon$. Le lemme 3.8 assure l'existence de $j_0(z) \geq j_1$ tel que $d_0(\lambda, L(\lambda)) < \delta$ pour tout $\lambda \in \chi^j(z)$ et $j \geq j_0(z)$. Cet entier $j_0(z)$ fait l'affaire. Enfin, on vérifie sans peine que L est une (p) -application forte. Donc, $L(\chi^j(z)) \in \bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ pour tout $j \geq j_0(z)$.

UNE NOTION DE VOLUME.

La métrique 0-fine donne lieu à un contrôle uniforme sur la condition (3.2). Il nous faut encore, pour établir les lemmes 1 et 2, se donner un contrôle uniforme sur la condition (3.3), c'est-à-dire une mesure de la transversalité d'une suite de sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n pas nécessairement de même dimension. C'est l'objet de la définition 3.10 (ii) :

DÉFINITION 3.10. (i) Soit $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in (\mathbb{R}_0^n)^p$ un p -vecteur. Le volume de φ est le p -volume de l'hyperparallélépipède (éventuellement dégénéré) engendré par φ .

(ii) Soit $E = (E_1, \dots, E_\ell)$ une suite d'espaces vectoriels non-nuls de \mathbb{R}^n . Posons $d_j = \dim E_j$ et donnons-nous, pour chaque $1 \leq j \leq \ell$, une base orthonormée $B_j = \{b_j^i\}_{1 \leq i \leq d_j}$ de E_j . On définit le volume de E par

$$\text{vol } E = \text{vol}(b_1^1, b_1^2, \dots, b_1^{d_1}, b_2^1, \dots, b_2^{d_2}, \dots, b_\ell^1, \dots, b_\ell^{d_\ell})$$

où le membre de droite est le volume d'un p -vecteur, $p = \sum_{1 \leq j \leq \ell} d_j$.

(iii) Soit (E_1, \dots, E_ℓ) une suite comme en (ii). Le type de E est défini par :

$$T(E) = \sup \{ T \in \mathbb{R} : \left| \sum_{1 \leq j \leq \ell} v_j \right| \geq T |v_{j_0}| \text{ quels que soient } v_j \in E_j \text{ et } 1 \leq j_0 \leq \ell \}.$$

Le volume et le type de E sont deux mesures équivalentes. Remarquons que la définition (ii) est indépendante du choix des bases orthonormées ainsi que de l'ordre des espaces E_j . Elle présente les propriétés suivantes, dont on aura besoin dans la démonstration du lemme 2.

PROPOSITION 3.11. (i) Soient $E = (E_1, \dots, E_\ell)$ comme à la définition 3.10, $P = \{P_i\}_{1 \leq i \leq h}$ une partition de $\{1, \dots, \ell\}$ et $Q = \{Q_i\}_{1 \leq i \leq h}$ la partition correspondante sur les espaces E_j : $Q_i = (E_j)_{j \in P_i}$. Alors :

$$\text{vol } E = \text{vol}([Q_1], \dots, [Q_h]) \prod_{1 \leq i \leq h} \text{vol } Q_i$$

où $[Q_i]$ est l'espace vectoriel engendré par les espaces E_j , $j \in P_i$. En particulier, $\text{vol } E \leq \text{vol}([Q_1], \dots, [Q_h])$.

(ii) Soient $E = (E_j)_{1 \leq j \leq \ell}$ et $E' = (E'_j)_{1 \leq j \leq \ell}$ avec $E_j \subset E'_j$ pour tout $1 \leq j \leq \ell$. Alors, $\text{vol } E \geq \text{vol } E'$.

(iii) Si E' est une sous-suite de E , $\text{vol } E' \geq \text{vol } E$.

Soit $s = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \Delta_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{1k}$. Le volume de s au point $x \in \Delta_q$ est défini par :

$$\text{vol}(s; x) = \begin{cases} \text{vol}(\text{Im } D\lambda(x), [\varphi_1(x)], \dots, [\varphi_p(x)]) & \text{si } q \neq 0 \\ \text{vol}([\varphi_1(x)], \dots, [\varphi_p(x)]) & \text{si } q = 0 \text{ et } p \neq 0 \\ 1 & \text{si } q = p = 0 \end{cases}$$

(par la suite, pour simplifier l'écriture, on omettra les crochets autour des champs φ_j dans l'expression des volumes ; ou encore, on écrira simplement $\varphi(x)$ au lieu de la suite $[\varphi_1(x)], \dots, [\varphi_p(x)]$). On pose $\text{vol}(s) = \inf_{x \in \Delta_q} \text{vol}(s; x)$, et pour $c \in \mathcal{C}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{\text{Ik}}$, $\text{vol}(c) = \min \text{vol}(s)$. Bien sûr, pour $c \in \mathcal{C}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{\text{Ik}}$, $\text{vol}(c) > 0 \iff c \in \overset{s \in c}{\mathcal{C}}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{\text{Ik}}$.

CÔNES RÉGULIERS DANS LES ESPACES EUCLIDIENS.

Soient $\lambda \in S_q(\mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathbb{R}^n$. Le cône ordinaire $C_u \lambda : \Delta_{q+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de sommet u et de base λ est défini par $C_u \lambda(x) = t \lambda(y) + (1-t)u$, où $x = t V_0(y) + (1-t)a_0$, $y \in \Delta_q$, $t \in [0, 1]$ et $a_0 = 0$ -ème sommet de Δ_{q+1} . Notons $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application régularisante de classe C^∞ $r(t) = e^{1-1/t^2}$. Elle vaut 1 en $t = 1$ et s'annule comme toutes ses dérivées en $t = 0$. Il est connu que la substitution de $r(t)$ à t dans la définition de C_u permet d'éliminer la non-différentiabilité au sommet du cône : si $\lambda \in S_q(\mathbb{R}^n)_{\text{Dk}}$, $\hat{C}_u \lambda \in S_{q+1}(\mathbb{R}^n)_{\text{Dk}}$, où \hat{C} est le cône différentiable :

$$\hat{C}_u \lambda(x) = r(t) \lambda(y) + (1-r(t))u$$

avec $x = t V_0(y) + (1-t)a_0$. Ce cône a même image que le cône ordinaire : il présente donc une singularité en u . On considère, pour éviter cette chute de rang, le cône régulier suivant, qu'on appellera cône tildé :

$$\tilde{C}_u \lambda(x) = r(t) C_u \lambda(x) + (1-r(t))C_u(L(\lambda))(x) .$$

Ce cône est également différentiable. De plus, $\tilde{C}_u \lambda$ est régulier au sommet dès que $L(\lambda)$ est non-dégénéré et que $u \notin \text{Im } L(\lambda)$.

Soient enfin $u \in \mathbb{R}^n$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_p) \in (\mathbb{R}_0^n)^p$, et $s = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \mathcal{S}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{\text{Dk}}$. Le cône tildé de sommet u et de base s

est défini par : $\tilde{C}_{(u, \psi)}^s = (\tilde{C}_u^\lambda, \hat{C}_{\psi_1}^{\varphi_1}, \dots, \hat{C}_{\psi_p}^{\varphi_p})$
 qui appartient à $\mathcal{F}_{q+1}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Dk}$ dès que ψ_j n'est antipodal à aucun des points de $\text{Im } \varphi_j$, $1 \leq j \leq p$.

UN LEMME DE PORTÉE GÉNÉRALE.

Nous allons établir un résultat général (lemme 3.13) dont découleront immédiatement les homologies mentionnées aux lemmes 1 et 2. On aura besoin des notations suivantes :

NOTATIONS 3.12. Soient $x_0 \in \mathbb{R}_0^n$ et $\theta > 0$. On désigne par

$K_\theta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}_0^n : \angle(\vec{x}, \vec{x}_0) < \theta\}$ le cône ouvert de \mathbb{R}_0^n de sommet $0 \in \mathbb{R}^n$, de centre le vecteur \vec{x}_0 , et de rayon angulaire θ , et par $\bar{K}_\theta(x_0)$ la fermeture de $K_\theta(x_0)$ relativement à \mathbb{R}_0^n . Si $s = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \mathcal{F}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Dk}$, on note $\bar{K}(s; j)$ le plus petit cône fermé de \mathbb{R}_0^n contenant $\text{Im } \varphi_j$, et $k(s; j)$ son diamètre angulaire ; pour une chaîne $c \in \mathcal{F}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Dk}$, on pose $k(c; j) = \max_{s \in c} k(s; j)$, $k(c) = \max_{1 \leq j \leq p} k(c; j)$, et $\bar{K}(c; j)$ le plus petit cône fermé de \mathbb{R}_0^n contenant $\bigcup_{s \in c} \text{Im } \varphi_j(s)$.

Soit M un endomorphisme de $\mathcal{F}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Dk}$; on note $k_M(s; j)$ le diamètre angulaire de $\bar{K}(s+M(s); j)$, $k_M(c; j) = \max_{s \in c} k_M(s; j)$, et $k_M(c) = \max_{1 \leq j \leq p} k_M(c; j)$. Si M est un endomorphisme de $\mathcal{F}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Ik}$, on désigne par $\text{vol}_M(s)$ et $\text{vol}_M(c)$ les réels $\text{vol}(s+M(s))$ et $\min_{s \in c} \text{vol}_M(s)$ respectivement.

LEMME 3.13. Soient $w \in \bar{\mathcal{Z}}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk}$ et $M : C(w) \rightarrow C^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ une (p)-application induisant, par conséquent, un morphisme $M : \bar{C}(w) \rightarrow \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$.

On suppose que :

- (i) Quel que soit $s \in w$, $L(\text{supp}(s))$ est non-dégénéré ;
- (ii) L 'image par M de tout 0-simplexe est une chaîne constituée

d'un seul 0-simplexe ;

et (iii) Quels que soient $s \in w$ et $1 \leq j \leq p$, $\bar{K}(s+M(s);j)$ ne contient aucune paire de points antipodaux.

Posons $b(M) = \max_{s \in S(w)} |M(s)|$ où $|M(s)|$ est le nombre de simplexes distincts dans la chaîne $M(s)$. Pour $s \in S(w)$, notons $E(s)$ l'ensemble des simplexes de $S(w)$ ayant même support que s , et \mathcal{E}_ℓ la partition $\{E(s) : s \in S_\ell(w)\}$ de $S_\ell(w)$, et $b(w) = \max_{s \in S(w)} |E(s)|$. Posons enfin
 $d_0(w, L(w)) = \max_{s \in w} d_0(\text{supp}(s), L(\text{supp}(s)))$ la distance 0-fine entre les chaînes
 w et $L(w)$.

Alors, il existe deux fonctions réelles positives (c'est-à-dire à valeurs dans $[0, \infty)$) et continues :

$$f(q, b(M), b(w), k_M(w), \text{vol}_M(w), d_0(w, L(w)))$$

$$\text{et } g(q, b(M), b(w), k_M(w), \text{vol}_M(w), d_0(w, L(w)))$$

telles que f est croissante en fonction de $\text{vol}_M(w)$ et décroissante en fonction de $b(M)$, $b(w)$, $k_M(w)$ et $d_0(w, L(w))$, avec

$$f(q, b(M), b(w), 0, \text{vol}_M(w) > 0, 0) > 0,$$

g est décroissante en fonction de $\text{vol}_M(w)$ et croissante en fonction de $b(M)$, $b(w)$, $k_M(w)$ et $d_0(w, L(w))$, avec

$$g(q, b(M), b(w), 0, \text{vol}_M(w) > 0, 0) = 0;$$

et il existe une homotopie Λ entre l'inclusion i et M :

$$\Lambda, i, M : \bar{C}(w) \longrightarrow \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{D_k}$$

vérifiant, pour tout $t = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \Lambda(w)$:

1) $L(\lambda)$ est non-dégénéré ;

$$2) \text{vol}(L(t)) \geq f(q, b(M), b(w), k_M(w), \text{vol}_M(w), d_0(w, L(w))) ;$$

$$\text{et } 3) d_0(\lambda, L(\lambda)) \leq g(q, b(M), b(w), k_M(w), \text{vol}_M(w), d_0(w, L(w))) .$$

Ce lemme est fondamental. Il permet d'obtenir une homotopie Λ à valeurs dans $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{I_k}$ entre i et M .

L'homotopie est d'abord définie, à priori, dans le complexe plus vaste $\bar{\mathcal{C}}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Dk}$. En présence de la conclusion 1 du lemme, les contrôles uniformes exprimés dans les conclusions 2 et 3 permettront de ramener cette homotopie dans le sous-complexe $\bar{\mathcal{C}}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Ik}$ de $\bar{\mathcal{C}}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Dk}$. On trouvera, de cette façon, une homologie $\Lambda(w) \in \bar{\mathcal{C}}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Ik}$ entre w et $M(w)$, qu'il suffira de subdiviser pour obtenir une homologie à valeurs dans $\bar{\mathcal{C}}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk}$.

Nous aurons besoin, pour établir le lemme 3.13, des deux lemmes suivants dont le premier exprime une propriété de continuité uniforme de \tilde{C}_u dans la métrique 0-fine.

LEMME 3.14. Soient $T \in (0, 1]$ et $a > 0$ réel. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $d_0(\lambda, L(\lambda)) < \delta \Rightarrow d_0(\tilde{C}_u \lambda, \tilde{C}_u(L(\lambda))) < \epsilon$ quels que soient le simplexe $\lambda \in S(\mathbb{R}^n)_{Dk}$ avec $L(\lambda)$ non-dégénéré, et le point $u \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$(i) \quad d(u, \bar{B}(\lambda)) = \inf_{z \in \bar{B}(\lambda)} |u - z| \geq a,$$

où $\bar{B}(\lambda)$ est la plus petite boule fermée de \mathbb{R}^n , dans la métrique usuelle, contenant $\text{Im } \lambda$;

$$\text{et} \quad (ii) \quad T(u, L(\lambda)) = \inf_{y \in \Delta_i} T([u - L(\lambda)(y)], [L(\lambda)]) \geq T,$$

où i est la dimension du simplexe λ , et $[L(\lambda)]$ est défini au cas $p = 0$ de la définition 3.1.

En fait, ϵ est une fonction continue positive $\epsilon(a, T, \delta)$ décroissante en fonction de T et croissante en fonction de δ . Pour a et T fixés, $\epsilon(a, T, \delta)$ décroît vers 0 quand δ décroît vers 0.

Démonstration du lemme 3.14. Soient $i \in \mathbb{N}$, $\lambda \in S_i(\mathbb{R}^n)_{Dk}$ et $u \in \mathbb{R}^n$ tels que $L(\lambda)$ est non-dégénéré, $d(u, \bar{B}(\lambda)) \geq a$ et $T(u, L(\lambda)) \geq T$. On a, pour $\Delta_{i+1} \ni \lambda = (y, t) \in \Delta_i \times I$:

$$|\tilde{C}_u \lambda(x) - \tilde{C}_u L(\lambda)(x)| = |\tilde{C}_u \lambda(x) - C_u L(\lambda)(x)| \leq |C_u \lambda(x) - C_u L(\lambda)(x)|$$

car $\tilde{C}_u \lambda(x)$ se trouve sur le segment joignant $C_u \lambda(x)$ à $C_u L(\lambda)(x)$. Alors

$$\begin{aligned} |\tilde{C}_u \lambda(x) - \tilde{C}_u L(\lambda)(x)| &\leq |t\lambda(y) + (1-t)u - tL(\lambda)(y) - (1-t)u| \\ &\leq |\lambda(y) - L(\lambda)(y)| \leq d_0(\lambda, L(\lambda)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Evaluons maintenant $d_0(D\tilde{C}_u \lambda(x), D\tilde{C}_u L(\lambda)(x))$. Pour $x = a_0$, c'est-à-dire pour $t = 0$, on a : $D\tilde{C}_u L(\lambda)(a_0) = DC_u L(\lambda)(a_0) = D\tilde{C}_u \lambda(a_0)$, d'où :

$$d_0(D\tilde{C}_u \lambda(a_0), D\tilde{C}_u L(\lambda)(a_0)) = 0 \quad (3.10)$$

Pour $x \neq a_0$ ($\Leftrightarrow t \neq 0$), considérons d'abord séparément les dérivées partielles par rapport à y et t :

$$\begin{aligned} D_y \tilde{C}_u \lambda(y, t) &= t(r(t)D\lambda(y) + (1-r(t))DL(\lambda)(y)) \\ D_y \tilde{C}_u L(\lambda)(y, t) &= tDL(\lambda)(y) \\ D_t \tilde{C}_u \lambda(y, t) &= t r'(t)(\lambda(y) - L(\lambda)(y)) + r(t)(\lambda(y) - u) + (1-r(t))(L(\lambda)(y) - u) \\ D_t \tilde{C}_u L(\lambda)(y, t) &= L(\lambda)(y) - u \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} d_0(D_y \tilde{C}_u \lambda(y, t), D_y \tilde{C}_u L(\lambda)(y, t)) &= d_0(r(t)D\lambda(y) + (1-r(t))DL(\lambda)(y), DL(\lambda)(y)) \\ &\leq 2 d_0(D\lambda(y), DL(\lambda)(y)) \end{aligned}$$

car, dans \mathbb{R}^n , $d_0(z', z) \leq 2 d_0(z'', z)$ si z' est sur le segment joignant z à z'' . Donc

$$d_0(D_y \tilde{C}_u \lambda(y, t), D_y \tilde{C}_u L(\lambda)(y, t)) \leq 2 d_0(\lambda, L(\lambda))$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} d_0(D_t \tilde{C}_u \lambda(y, t), D_t \tilde{C}_u L(\lambda)(y, t)) &= d_0(v(y, t) + w(y, t), L(\lambda)(y) - u) \\ &= \frac{|v(y, t) + w(y, t) - (L(\lambda)(y) - u)|}{\max(|v(y, t) + w(y, t)|, |L(\lambda)(y) - u|)} \end{aligned}$$

où $v(y, t) = t r'(t)(\lambda(y) - L(\lambda)(y))$ et $w(y, t) = r(t)(\lambda(y) - u) + (1-r(t))(L(\lambda)(y) - u)$,

$$\leq \frac{|v(y, t)| + |w(y, t) - (L(\lambda)(y) - u)|}{a}$$

car $a \leq |L(\lambda)(y) - u|$ puisque $L(\lambda)(y) \in \bar{B}(\lambda)$. Or $|tr'(t)| \leq 3$, d'où

$|v(y, t)| \leq 3 d_0(\lambda, L(\lambda))$. Et

$$|w(y,t) - (L(\lambda)(y)-u)| = |r(t)| |\lambda(y) - L(\lambda)(y)| \leq |\lambda(y) - L(\lambda)(y)| \leq d_0(\lambda, L(\lambda)) .$$

On obtient donc :

$$d_0(D_t \tilde{C}_u \lambda(y,t), D_t \tilde{C}_u L(\lambda)(y,t)) \leq \frac{4}{a} d_0(\lambda, L(\lambda)) .$$

On a ainsi des bornes supérieures pour les distances 0-fines entre les dérivées partielles par rapport à y et t . L'hypothèse sur le type $T(u, L(\lambda)) \geq T$ nous permet d'en déduire, de la façon suivante, une borne supérieure pour la distance 0-fine entre les dérivées totales.

Soient $A, B : V \rightarrow (W, ||)$ deux applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre muni d'une norme et de la métrique 0-fine induite. Soit $V = V_1 \oplus V_2$ une décomposition de V et notons A_i et B_i les restrictions de A et B à V_i . Supposons que $d_0(A_1, B_1) \leq d_1 < 1$ et $d_0(A_2, B_2) \leq d_2 < 1$, et que $T(\text{Im } B_1, \text{Im } B_2) \geq T_B \in (0, 1]$. Alors, pour $v = v_1 + v_2$, $v_i \in V_i$, on a :

$$\begin{aligned} d_0(A(v), B(v)) &= \frac{|A(v) - B(v)|}{\max\{|A(v)|, |B(v)|\}} \\ &\leq \frac{|A(v_1) - B(v_1)|}{|B(v)|} + \frac{|A(v_2) - B(v_2)|}{|B(v)|} \leq \frac{|A(v_1) - B(v_1)|}{T_B |B(v_1)|} + \frac{|A(v_2) - B(v_2)|}{T_B |B(v_2)|} \\ &\leq \frac{1}{T_B} (d_1 \frac{\max\{|A(v_1)|, |B(v_1)|\}}{|B(v_1)|} + d_2 \frac{\max\{|A(v_2)|, |B(v_2)|\}}{|B(v_2)|}) \\ &\leq \frac{1}{T_B} \left(\frac{d_1}{1-d_1} + \frac{d_2}{1-d_2} \right) \end{aligned}$$

car on vérifie aisément que $\frac{|A(v_i)|}{|B(v_i)|} \leq \frac{1}{1-d_i}$ en se servant du fait que

$$d_0(A_i, B_i) \leq d_i \quad (i = 1, 2) . \text{ Donc, } d_0(A, B) \leq \frac{1}{T_B} \left(\sum_{i=1,2} \frac{d_i}{1-d_i} \right) .$$

Posons maintenant :

$$\begin{aligned} A &= D \tilde{C}_u \lambda(y,t) , \quad A_1 = D_y \tilde{C}_u \lambda(y,t) , \quad A_2 = D_t \tilde{C}_u \lambda(y,t) \\ B &= D \tilde{C}_u L(\lambda)(y,t) , \quad B_1 = D_y \tilde{C}_u L(\lambda)(y,t) , \quad B_2 = D_t \tilde{C}_u L(\lambda)(y,t) \end{aligned}$$

$$d_1 = 2 d_0(\lambda, L(\lambda)) , \quad d_2 = \frac{4}{a} d_0(\lambda, L(\lambda)) ,$$

et $T_B = T$ car

$$\begin{aligned} T(\operatorname{Im} B_1, \operatorname{Im} B_2) &= T(\operatorname{Im}(tDL(\lambda)(y)), [L(\lambda)(y) - u]) \\ &= T([u - L(\lambda)(y)], \operatorname{Im} DL(\lambda)(y)) \quad \text{car } t \neq 0 \\ &= T([u - L(\lambda)(y)], [L(\lambda)]) \end{aligned}$$

Donc

$$d_0(D\tilde{C}_u \lambda(y, t), D\tilde{C}_u L(\lambda)(y, t)) \leq \frac{d_0(\lambda, L(\lambda))}{T} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - d_0(\lambda, L(\lambda))} + \frac{1}{\frac{a}{4} - d_0(\lambda, L(\lambda))} \right) \quad (3.11)$$

si $d_1 < 1$ et $d_2 < 1$, c'est-à-dire si $d_0(\lambda, L(\lambda)) < \min \{\frac{1}{2}, \frac{a}{4}\}$.

Compte tenu des lignes (3.9), (3.10) et (3.11), on pose :

$$\epsilon'(a, T, \delta) = \begin{cases} \max \left\{ \delta, \frac{\delta}{T} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - \delta} + \frac{1}{\frac{a}{4} - \delta} \right) \right\} & \text{si } \delta < \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a}{4} \right\} \\ 2 & \text{si } \delta \geq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a}{4} \right\} \end{cases}$$

et $\epsilon(a, T, \delta) = \min \{2, \epsilon'(a, T, \delta)\}$. Alors ϵ vérifie bien toutes les conclusions du lemme.

La démonstration du prochain lemme, tout à fait technique, est reportée en appendice.

LEMME 3.15. Soient ξ cycles $z_1, \dots, z_\xi \in \mathcal{Z}_\ell^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{DK}$ ($0 \leq \ell \leq n-p$) ; posons $\eta_i = \max_{1 \leq i \leq \xi} |z_i|$. On suppose que $L(\lambda)$ soit non-dégénéré quel que soit $\lambda = \operatorname{supp}(r)$, $r \in z_i$. Donnons-nous, pour chaque entier $1 \leq i \leq \xi$, un simplexe distingué r_i de z_i . Posons enfin :

$$v_i = \begin{cases} \min_{\substack{\lambda = \operatorname{supp} r \\ r \in z_i}} \operatorname{vol}([L(\lambda)], \varphi(r_i)(b)) & \text{si } \ell > 0 \\ \operatorname{vol}(\varphi(r_i)(b)) & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$

et $v = \min_{1 \leq i \leq \xi} v_i$, où $\varphi(r_i)(b)$ est le p -champ de r_i évalué au barycentre de Δ_ℓ .

Alors, il existe $u \in \mathbb{R}^n$ à distance au moins 1 de la plus petite boule fermée de \mathbb{R}^n contenant les images des supports de tous les simplexes de z_i .

pour tout $1 \leq i \leq \xi$, tel que quels que soient $r = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in z_i$ et
 $1 \leq i \leq \xi$:

- a) $C_u L(\lambda)$ est non dégénéré ;
- b) $T(u, L(\lambda)) \geq h(\ell, \xi, \eta, v)$;
- c) $\text{vol}([C_u L(\lambda)], \varphi(r_i)(b)) \geq h(\ell, \xi, \eta, v)$

où h est une fonction réelle positive continue, croissante en fonction de v et
décroissante en fonction de ξ et η , avec $h(\ell, \xi, \eta, v > 0) > 0$.

Démonstration du lemme 3.13. On va définir, par induction sur ℓ ($0 \leq \ell \leq q$),
 l'homotopie Λ entre i et M :

$$\Lambda, i, M : \bar{C}_\ell(w) \longrightarrow \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Dk}$$

de sorte que, quels que soient $s \in S_\ell(w)$ et $t \in \Lambda_\ell(s)$:

- 1) $L(\text{supp } t)$ est non dégénéré ;
- 2) $\text{Im } \varphi_j(t) \subset \bar{K}(s + M(s); j)$ quel que soit $1 \leq j \leq p$;
- 3) $\text{vol}(L(t)) \geq \bar{f}(q, \ell, b(M), b(w), k_M(w), \text{vol}_M(w), d_0(w, L(w)))$;
- 4) $d_0(\text{supp } t, L(\text{supp } t)) \leq \bar{g}(q, \ell, b(M), b(w), k_M(w), \text{vol}_M(w), d_0(w, L(w)))$;
- et 5) Λ_ℓ est une (p) -application : $\pi_j \Lambda_\ell(s)$ ne dépend que de $\pi_j s$.

Ici, \bar{f} et \bar{g} sont des fonctions réelles positives et continues se comportant de la même manière que les fonctions f et g mentionnées dans l'énoncé du lemme. On aura donc simplement à poser :

$$f(q, \dots, d_0(w, L(w))) = \bar{f}(q, q, \dots, d_0(w, L(w)))$$

$$\text{et } g(q, \dots, d_0(w, L(w))) = \bar{g}(q, q, \dots, d_0(w, L(w)))$$

pour établir le lemme 3.13.

On définit l'homotopie Λ_ℓ par induction sur la dimension ℓ des simplexes, par la formule $\Lambda_\ell(s) = \tilde{C}_{(u(s), \varphi(s)(b))}^{(p)}(s - M(s) - \Lambda_{\ell-1} \partial s)$. Il suffit donc de définir l'application $u : S_\ell(w) \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnant le sommet du cône, qui proviendra d'une application $u : \ell_\ell \rightarrow \mathbb{R}^n$ (on aura donc $u(s) = u(s')$ si $\text{supp } (s) = \text{supp } (s')$).

$\ell = 0$. Soit $E \in \mathcal{E}_0$ un ensemble de simplexes de $S_0(w)$ ayant même support, et considérons les 0-cycles $z_s = s - M(s)$ pour $s \in E$. Appliquons le lemme 3.15 avec $\ell = 0$, $\xi \leq b(w)$, $\eta \leq b(M) + 1$ et $v \geq \text{vol}_M(w)$, et $s \in z_s$ le simplexe distingué de z_s . Il existe donc $u(E)$ tel que, quels que soient $s \in E$ et $r = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in z_s$, $C_u L(\lambda)$ est non-dégénéré et :

$$\text{vol}([C_u L(\lambda)], \varphi(s)(b)) \geq h(0, b(w), b(M)+1, \text{vol}_M(w)) . \quad (3.12)$$

Cette fonction u sur \mathcal{E}_0 induit une fonction u sur $S_0(w)$. Alors $\Lambda_0(s) = \tilde{C}_{(u(s), \varphi(s)(b))}(z_s)$ est bien défini car $\varphi_j(s)(b) \in \bar{K}(s+M(s); j)$ qui ne contient aucune paire de points antipodaux (hypothèse (iii)). Ainsi $\Lambda_0(s) \in \mathcal{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{D_K}$, et $\partial \Lambda_0(s) = s - M(s)$ car, par hypothèse (ii), $s - M(s)$ est le bord du cône.

Il est clair que Λ_0 vérifie les conclusions 1 et 2. Etablissons

l'énoncé 3. Pour $s \in S_0(w)$, $r = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in z_s$ et

$$t = \tilde{C}_{(u(s), \varphi(s)(b))} r \in \Lambda_0(s) :$$

$$\text{vol}([L(\text{supp } t)], \varphi(s)(b)) = \text{vol}([C_{u(s)} L(\lambda)], \varphi(s)(b)) \geq h(0, b(w), b(M)+1, \text{vol}_M(w)) \quad (3.13)$$

par (3.12). Or $\text{vol}(L(t)) = \inf_{x \in \Delta_{i+1}^{p+1}} \text{vol}([L(\text{supp } t)], \varphi(t)(x)) = \text{vol}([L(\text{supp } t)], \varphi(t)(x_0))$ pour un certain $x_0 \in \Delta_{i+1}^{p+1}$. Mais, $\varphi_j(t)(x_0)$ et $\varphi_j(s)(b)$ appartiennent à $\bar{K}(s+M(s); j)$ quel que soit $1 \leq j \leq p$. Ainsi $\text{vol}(L(t))$ ne diffère de $\text{vol}([L(\text{supp } t)], \varphi(s)(b))$ que par une variation d'angle de chacun des champs φ_j d'au plus $k_M(w)$, ce qui permet d'écrire :

$$\text{vol}(L(t)) \geq \text{vol}([L(\text{supp } t)], \varphi(s)(b)) - \alpha_1(i+1 = 1, k_M(w)) ,$$

α_1 étant définie par :

$$\alpha_1(k, \theta) = \sup_{\substack{V \subset \mathbb{C}_k(\mathbb{R}^n) \text{ et } \varphi, \varphi' \in (S^{n-1})^p \\ \text{tels que } \varphi'_j \in \bar{K}_\theta(\varphi_j) \cap S^{n-1}}} |\text{vol}(V, \varphi) - \text{vol}(V, \varphi')| \quad (3.14)$$

Il est clair que $\alpha_1(k, \theta)$ est une fonction positive continue, croissante en fonction

de Θ , avec $\alpha_1(k, 0) = 0$. Compte tenu de (3.13), on a donc :

$$\text{vol}(L(t)) \geq h(0, b(w), b(M)+1, \text{vol}_M(w)) - \alpha_1(\ell+1 = 1, k_M(w)) ;$$

ce qu'on écrit :

$$\text{vol}(L(t)) \geq \bar{f}(q, \ell = 0, b(M), b(w), k_M(w), \text{vol}_M(w), -)$$

en posant $\bar{f}(q, \dots, \text{vol}_M(w), -)$ égal au maximum entre 0 et $h - \alpha_1$, c'est-à-dire égal à la partie positive de $h - \alpha_1$. On vérifie directement que \bar{f} satisfait à

à toutes les propriétés voulues.

La quatrième conclusion est trivialement satisfaite : $d_0(\text{supp } t, L(\text{supp } t)) = 0$.

Enfin,

$$\begin{aligned} \pi_j \Lambda_0(s) &= \tilde{C}_{(u(s), \varphi(\pi_j s)(b))}(\pi_j s - \pi_j M(s)) \\ &= \tilde{C}_{(u(E(s)), \varphi(\pi_j s)(b))}(\pi_j s - \pi_j M(s)) \end{aligned}$$

Or M est une (p) -

application et $\pi_j M(s)$ ne dépend donc que de $\pi_j s$. Donc $\pi_j \Lambda_0(s)$ ne dépend que de $\pi_j s$.

$\ell-1 = \ell$. Soit $E \in \mathcal{E}_\ell$ et considérons les chaînes $z_s = s - M(s) - \Lambda_{\ell-1} \partial s$ pour $s \in E$. Par hypothèse d'induction, on a, quels que soient $s \in E$ et $r \in z_s$: $z_s \in \mathcal{Z}_\ell^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{D_k}$, $L(\text{supp } r)$ est non-dégénéré, et $\text{Im } \varphi(r) \subset \bar{K}(s+M(s); j)$ dont le diamètre angulaire n n'excède pas $k_M(w)$.

On va appliquer le lemme 3.15 avec $\xi \leq b(w)$ et $\eta \leq \#(\ell, b(M))$ où $\#(\ell, b(M))$ est une borne supérieure pour $|z_s|$ qui ne dépend que de $\ell, b(M)$ et du procédé de construction par cônes de l'homotopie Λ . On choisit, comme en $\ell = 0$, $s \in z_s$ comme simplexe distingué de z_s . Il reste à trouver une borne inférieure pour les réels $\text{vol}([L(\text{supp } r)], \varphi(s)(b))$ quand $s \in E$ et $r \in z_s = s - M(s) - \Lambda_{\ell-1} \partial s$.

Si $r = s$, $\text{vol}([L(\text{supp } s)], \varphi(s)(b))$ ne diffère de $\text{vol}(s; b)$ que par le changement de $\text{Im } DL(\lambda)$ pour $\text{Im } D\lambda(b)$. On a :

$$\text{vol}([L(\text{supp } s)], \varphi(s)(b)) \geq \text{vol}(s; b) - \alpha_2(\ell, d_0(w, L(w)))$$

$$\text{où } \alpha_2(k, d) = \sup_{\substack{V, V' \in G_k(\mathbb{R}^n) \text{ et } \varphi \in (S^{n-1})^p \\ \text{tels que } d_G(V, V') \leq d}} |\text{vol}(V, \varphi) - \text{vol}(V', \varphi)| \quad (3.15)$$

Il est clair que $\alpha_2(k, d)$ est continue, positive, croissante en fonction de d , avec $\alpha_2(k, 0) = 0$. Or, par définition de la métrique d_G , $d_0(A, B) \geq d_G(\text{im} A, \text{im} B)$ quels que soient $A, B \in L_\ell(H^\ell, \mathbb{R}^n)$, d'où la dernière inégalité est bien valable.

Donc

$$\text{vol}([L(\text{supp } s)], \varphi(s)(b)) \geq \text{vol}_M(w) - \alpha_2(\ell, d_0(w, L(w))) \quad (3.16)$$

Si $r \in M(s)$, $L(\text{supp } r) = \text{supp } r$ car M est à valeurs dans $C^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$, et alors $\text{vol}([L(\text{supp } r)], \varphi(s)(b)) = \text{vol}([\text{supp } r], \varphi(s)(b))$ ne diffère de $\text{vol}(r; b)$ que par les changements de $\varphi_j(s)(b)$ pour $\varphi_j(r)(b)$ d'un angle n excédant pas $k_M(w)$. Ainsi

$$\text{vol}([L(\text{supp } r)], \varphi(s)(b)) \geq \text{vol}_M(w) - \alpha_1(\ell, k_M(w)) \quad (3.17)$$

Enfin, si $r \in \Lambda_{\ell-1} \partial s$, on a :

$$\begin{aligned} \text{vol}([L(\text{supp } r)], \varphi(s)(b)) &\geq \text{vol}(L(r)) - \alpha_1(\ell, k_M(w)) \\ &\geq \bar{f}(q, \ell-1, \dots) - \alpha_1(\ell, k_M(w)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

par hypothèse d'induction.

Désignons par $\bar{f}_1(q, \ell, \dots)$ la partie positive du minimum des trois expressions (3.16), (3.17) et (3.18). Alors, \bar{f}_1 se comporte de la même manière que \bar{f} . Appliquons le lemme 3.15 en prenant \bar{f}_1 comme borne inférieure de v : il existe donc $u(E) \in \mathbb{R}^n$ à distance au moins 1 de la plus petite boule fermée contenant les images des supports des simplexes de z_1 quel que soit $s \in E$, tel que pour $s \in E$ et $r = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in z_s$:

- a) $C_u L(\lambda)$ est non-dégénéré ;
- b) $T(u, L(\lambda)) \leq h(\iota, b(w), \#(\iota, b(M)), \bar{f}_1)$;
- c) $\text{vol}([C_u L(\lambda)], \varphi(s)(b)) \geq h(\iota, b(w), \#(\iota, b(M)), \bar{f}_1)$.

Cette fonction u sur E_ℓ induit une fonction u sur $S_\ell(w)$. Alors

$\Lambda_\ell(s) = \tilde{C}_{(u(s), \varphi(s)(b))}(z_s)$ définit bien une homotopie entre

$i_\ell, M_\ell : C(w) \rightarrow \mathcal{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Dk}$. Les conclusions 1, 2 et 5 se vérifient sans peine.

Etablissons la troisième conclusion. Soit $t \in \Lambda_\ell(s)$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{vol}(L(t)) &\geq \text{vol}([L(\text{supp } t)], \varphi(s)(b)) - \alpha_1(\ell+1, k_M(w)) \\ &\geq h(\ell, b(w), \#(\ell, b(M)), \bar{f}_1) - \alpha_1(\ell+1, k_M(w)) \end{aligned}$$

par la condition c) plus haut. On pose $\bar{f}(q, \ell, \dots)$ égal à la partie positive de cette dernière expression, qui vérifie bien les propriétés voulues.

Vérifions enfin la quatrième conclusion. Pour $t \in \Lambda_\ell(s)$:

$$d_0(\text{supp } t, L(\text{supp } t)) = d_0(\tilde{C}_{u(s)}(\text{supp } r), \tilde{C}_{u(s)}L(\text{supp } r))$$

pour $t = \tilde{C}_{(u(s), \varphi(s)(b))}r$ et $r \in s - M(s) - \Lambda_{\ell-1}\partial s$. On utilisera ici la propriété de continuité uniforme de $\tilde{C}_{u(s)}$ dans la métrique 0-fine (lemme 3.14). On cherche d'abord une borne supérieure pour $d_0(\text{supp } r, L(\text{supp } r))$ quand $r \in z_s$.

Si $r = s$, $d_0(\text{supp } r, L(\text{supp } r)) \leq d_0(w, L(w))$. Si $r \in M(s)$,

$d_0(\text{supp } r, L(\text{supp } r)) = 0$. Enfin, si $r \in \Lambda_{\ell-1}\partial s$, $d_0(\text{supp } r, L(\text{supp } r)) \leq \bar{g}(q, \ell-1, \dots)$

par hypothèse d'induction. Donc, pour $r \in z_s$:

$$d_0(\text{supp } r, L(\text{supp } r)) \leq \bar{g}_1(q, \ell, \dots)$$

où $\bar{g}_1(q, \ell, \dots) = \max \{d_0(w, L(w)), \bar{g}(q, \ell-1, \dots)\}$ se comporte de la même manière que \bar{g} .

On utilise le lemme 3.14 en posant $a = 1$, $T = h(\ell, b(w), \#(\ell, b(M)), \bar{f}_1)$

(en vertu de la condition b) plus haut), $\lambda = \text{supp } r$, $u = u(s)$ et $\delta = \bar{g}_1$. On obtient :

$$d_0(\tilde{C}_{u(s)}(\text{supp } r), \tilde{C}_{u(s)}L(\text{supp } r)) \leq \epsilon(1, h, \bar{g}_1)$$

que l'on prend comme définition de $\bar{g}(q, \ell, \dots)$ qui vérifie bien les propriétés désirées. Cqfd.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.

Soient $z \in \bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk}$ et $\{\chi^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ une suite fine et régulière de subdivisions linéaires. On a déjà établi au lemme 3.9 l'existence de $j_0(z) \in \mathbb{N}$ tel que $L(\chi^j(z)) \in \bar{Z}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ quel que soit $j \geq j_0(z)$. Nous allons montrer qu'il existe $j(z) \geq j_0(z)$ tel que $\chi^{j(z)}(z) - L(\chi^{j(z)}(z)) \in \bar{B}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Ik}$ en se servant du lemme 3.13.

Puisque $\{\chi^j\}$ est fine, il existe $j_1 \geq j_0(z)$ tel que pour $j \geq j_1$, l'hypothèse (iii) du lemme 3.13 est vérifiée en posant $w = \chi^j(z)$ et $M = L : \bar{C}(\chi^j(z)) \rightarrow \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$. Alors, toutes les hypothèses de ce lemme sont vérifiées. De plus, dans ce cas-ci, $b(L) = 1$ et $b(w = \chi^j(z))$ est borné supérieurement par $|z|$. En effet, soient $t \in z$ et $j \in \mathbb{N}$. Puisque $\text{supp } t$ est injectif et que χ^j est une subdivision, on a pour $t_1^i, t_2^i \in S(\chi^j(t))$: $\text{supp } t_1^i = \text{supp } t_2^i \Rightarrow t_1^i = t_2^i$.

Soient maintenant $s, t \in z$, $s^i \in S(\chi^j(s))$ et $t_1^i, t_2^i \in S(\chi^j(t))$. Si $\text{supp } s^i = \text{supp } t_1^i = \text{supp } t_2^i$, alors $t_1^i = t_2^i$, d'où

$$|E(s^i) \cap S(\chi^j(t))| \leq 1$$

quel que soit $t \in z$. Donc $|E(s^i)| \leq |z|$. Enfin, quel que soit $j \in \mathbb{N}$,

$\text{vol}(\chi^j z) \geq \text{vol}(z) > 0$. Or $d_0(\chi^j z, L(\chi^j z)) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ par le lemme 3.8, d'où il résulte que $\text{vol}_L(\chi^j z) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \text{vol}(\chi^j z) > 0$. Soient $v_L > 0$ et $j_2 \geq j_1$ tels que $v_L(\chi^j z) \geq v_L$ pour tout $j \geq j_2$.

On a donc des bornes supérieures pour $b(L)$ et $b(\chi^j z)$ et une borne inférieure strictement positive v_L pour $\text{vol}_L(\chi^j z)$. Par le lemme 3.13, il existe alors pour tout $j \geq j_2$, une homotopie Λ entre i et L :

$$\Lambda, i, L : \bar{C}(\chi^j z) \longrightarrow \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Dk}$$

vérifiant, pour tout $t = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \Lambda(\chi^j z)$:

- 1) $L(\lambda)$ est non-dégénéré ;
- 2) $\text{vol}(L(t)) \geq f(q, 1, |z|, k_L(\chi^j z), v_L, d_0(\chi^j z, L(\chi^j z)))$;
- 3) $d_0(\lambda, L(\lambda)) \leq g(q, 1, |z|, k_L(\chi^j z), v_L, d_0(\chi^j z, L(\chi^j z)))$.

Les arguments de f et g sont des constantes (indépendantes de j) sauf $b_L(x^j z)$ et $d_0(x^j z, L(x^j z))$ qui tendent vers 0 quand j tend vers l'infini. Les propriétés de la fonction f permettent alors de borner inférieurement $\text{vol}(L(t))$ par un réel $v > 0$, pour tout $t \in \Lambda(x^j z)$ et tout $j \geq j_3$, où $j_3 \geq j_2$ est suffisamment grand. Celles de la fonction g permettent de borner supérieurement $d_0(\lambda, L(\lambda))$ par un réel positif inférieur à 1 pour $j \geq j_4$; donc λ est une immersion, car $L(\lambda)$ en est une, et " $\text{vol}(t)$ " a bien un sens. On utilise à nouveau les propriétés de g pour borner supérieurement $d_0(\lambda, L(\lambda))$ par un réel positif suffisamment petit pour que $|\text{vol}(t) - \text{vol}(L(t))| \leq v/2$ quel que soit $j \geq j_5 = j(z)$. Alors, $\Lambda(x^{j(z)} z) \in \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{I_k}$. Soit enfin $\alpha \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $\beta^{(\alpha)}$, le α -ème itéré de l'opérateur de subdivision barycentrique, transforme $\Lambda(x^{j(z)} z)$ en une chaîne de $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$.

On a alors :

$$\partial(\beta^{(\alpha)} \Lambda(x^{j(z)} z)) = \beta^{(\alpha)} \chi^{j(z)}(z) - \beta^{(\alpha)} L(x^{j(z)} z) \in \bar{B}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$$

et le lemme 1 est établi en posant $\chi = \chi^{j(z)}$ et $\chi' = \beta^{(\alpha)}$.

DÉFINITION DU MORPHISME "SANS TORSION".

Par le lemme 1, un cycle $z \in \bar{Z}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{P_k}$ est homologue, à subdivision linéaire près, à un cycle $z' \in \bar{Z}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{L_k}$ à supports linéaires non-dégénérés. Mais ceci ne suffit pas à construire une chaîne $c' \in \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{L_k}$ ayant z' pour bord, même dans les cas les plus simples : par exemple, celui du cycle $z' = (\lambda, \varphi) - (\lambda, \varphi')$ de la figure 1 pour lequel il n'est pas possible de définir une telle chaîne $c' \in \bar{C}_2^{(1)}(\mathbb{R}^3)_{L_k}$ par épaississement des supports de z' (voir démonstration du lemme 3).

On doit encore représenter z' par un cycle $z'' \in \bar{Z}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{L_k}$ sans torsion, qu'on obtiendra comme image de z' par un morphisme ST dont voici l'illustration sur un simplexe $s = (\lambda, \varphi) \in S_1^{(1)}(\mathbb{R}^3)_{L_k}$:

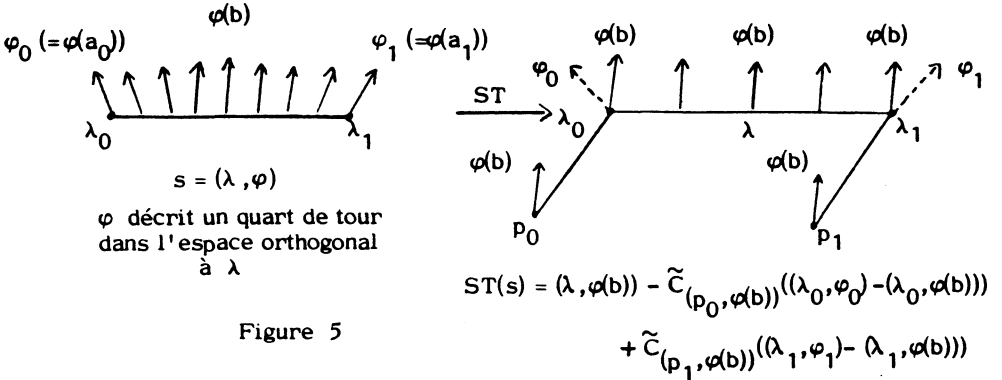


Figure 5

où p_i appartient au plan affine de \mathbb{R}^3 , passant par λ_i , engendré par $\varphi(b)$ et φ_i . Posant $ST = \text{identité}$ sur $S(\mathbb{R}^n)_L$ et $S_0^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$, on remarquera sur cet exemple que $\partial ST(s) = ST \partial(s)$ et que $\pi_1 ST(s) = ST \pi_1(s)$, ce qui fait de ST un morphisme et une $(p=1)$ -application.

Soit $c \in \mathcal{C}^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ pour un entier $1 \leq h \leq n$. On dira que c n'a pas de points antipodaux si $\bar{K}(s; j)$ ne contient aucune paire de points antipodaux quels que soient $s \in c$ et $1 \leq j \leq h$. Un simplexe $s \in \mathcal{S}_\ell^{(1)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ n'est pas écrasé si $\dim [t] \geq i + 1$ quels que soient la i -face t de s et $0 \leq i \leq \ell$ (la notation $[t]$ est celle de la définition 3.1).

Soit $\psi \in \mathbb{R}_0^n$. On note $\psi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ le sous-complexe de $\mathcal{C}^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ engendré par les simplexes $s \in \mathcal{S}^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ satisfaisant aux conditions :

- (i) s n'a pas de points antipodaux ;
- (ii) le plus petit cône fermé de \mathbb{R}_0^n contenant ψ et $\bar{K}(s; h)$ ne contient pas de paire de points antipodaux ;
- (iii) $\mu_h(s)$ n'est pas écrasé ;
- (iv) ψ est transverse à $[\mu_h(s)]$.

Le lemme suivant prépare la définition du morphisme ST .

LEMME 3.16. Soient $\psi \in \mathbb{R}_0^n$ et $\alpha_\psi^{(h)} : \psi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk} \rightarrow \phi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$

le morphisme défini par : $\alpha_\psi^{(h)}(\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_h) = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_{h-1}, \psi)$ où on a

identifié ψ à l'application constante $\psi : \Delta_\ell \rightarrow \mathbb{R}_0^n$ dont l'image est ψ .

Quel que soit $1 \leq h \leq n$, il existe une homotopie $\Lambda_\psi^{(h)}$ entre l'inclusion i et $\alpha_\psi^{(h)}$

$$\Lambda_\psi^{(h)}, i, \alpha_\psi^{(h)} : \psi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk} \longrightarrow \phi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$$

telle que, quels que soient $s \in \psi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ et $t \in \Lambda_\psi^{(h)}(s)$:

1) $[\mu_h t]_a \subset [[\mu_h s]_a, \psi]_a$ et $[t]_a \subset [[s]_a, \psi]_a$, où $[[s]_a, \psi]_a$ est l'espace affine $y + [[s], \psi]$ pour $y \in [s]_a$;

2) $\bar{K}(t; j) \subset \bar{K}(s; j)$ quel que soit $1 \leq j < h$, et $\bar{K}(t; h)$ est inclus dans le plus petit cône fermé contenant $\bar{K}(s; h)$ et ψ ;

3) $\pi_h \Lambda_\psi^{(h)} = 0$ et $\pi_j \Lambda_\psi^{(h)} = \Lambda_\psi^{(h-1)} \pi_j$ quel que soit $1 \leq j < h$, ce qui a bien un sens car $\pi_j(s) \in \psi^{(h-1)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ si $s \in \psi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$;

et 4) $\mu_h(t)$ n'est pas écrasé et

$$\text{vol}([\text{supp } t], \psi) \geq \hat{f}(\ell, \text{vol}([\text{supp } s], \psi))$$

où ℓ est la dimension de s , et \hat{f} est une fonction continue positive, croissante en fonction du second argument avec $\hat{f}(\ell, \text{vol}([\text{supp } s], \psi) > 0) > 0$.

Démonstration. L'homotopie sera définie, par induction sur la dimension ℓ des simplexes de $\psi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$, par la formule :

$$\Lambda_\psi^{(h)}(s) = \tilde{C}_{(p(s), \varphi_1(s)(b), \dots, \varphi_{h-1}(s)(b), \psi)}(s - \alpha_\psi^{(h)}(s) - \Lambda_\psi^{(h)} \circ s) \quad (3.19)$$

La définition est déterminée dès que la fonction $p(s)$ est donnée.

Remarquons que ce cône tilde est différentiable sur les champs mais ordinaire sur les supports car les supports sont linéaires. On aura besoin du lemme suivant dont la démonstration est reportée en appendice.

LEMME 3.17. Soient $\ell \geq 0$, $\psi \in \mathbb{R}_0^n$ et $w \in \mathbb{Z}_\ell^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$. Notons

$$\text{vol}(w, \psi) = \begin{cases} \min_{r \in w} \text{vol}([\text{supp } r], \psi) & \text{si } \ell > 0 \\ 1 & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$

Alors, quel que soit le sous-espace affine A de \mathbb{R}^n de dimension au moins $\ell + 2$ contenant les espaces affines $[\text{supp } r]_a$ pour tout $r \in w$ et admettant ψ comme vecteur tangent, il existe un point

$\bar{p} = p(\{\text{supp } r : r \in w\}, [\psi], A) \in A$ ne dépendant que de ces trois arguments,

tel que : (i) $C_p(\text{supp } r)$ est non-dégénéré ;

et (ii) $\text{vol}([C_p(\text{supp } r)], \psi) \geq \tilde{f}(\ell, |w|, \text{vol}(w, \psi))$ quel que soit $r \in w$,

où \tilde{f} est une fonction positive continue, croissante en fonction du dernier

argument , avec $\tilde{f}(\ell, |w|, \text{vol}(w, \psi) > 0) > 0$.

On définit maintenant $p(s)$, pour $s \in \psi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$, par induction sur ℓ , en supposant $1 \leq h \leq n$ fixé.

$\ell = 0$. Soit s un 0-simplexe de $\psi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$. Associons à s l'espace affine $A(s) = [[\mu_h s]_a, \psi]_a$ et la chaîne $z_s = s - \alpha_\psi^{(h)}(s)$. Par définition de $\psi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$, $\mu_h s$ n'est pas écrasé et ψ est transverse à $[\mu_h s]$. Donc $\dim A(s) \geq \ell + 2 = 2$. Appliquons le lemme 3.17 et posons :

$$p(s) = p(\{\text{supp } r : r \in z_s\}, [\psi], A(s)) \in A(s) \text{ donné par le lemme.}$$

Ceci détermine $\Lambda_\psi^{(h)}(s)$ par la formule (3.19). Les quatre conclusions du lemme se vérifient de la même manière qu'à l'étape $\ell - 1 \Rightarrow \ell$ qui suit.

$\ell - 1 \Rightarrow \ell$. Soit s un ℓ -simplexe de $\psi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$. Associons à s l'espace $A(s) = [[\mu_h s]_a, \psi]_a$ et la chaîne $z_s = s - \alpha_\psi^{(h)}(s) - \Lambda_\psi^{(h)}(s)$. Alors, par hypothèse d'induction sur la conclusion 1 , $A(s)$ contient $[\text{supp } r]_a$ pour tout $r \in z_s$, et $\dim A(s) \geq \ell + 2$ par définition de $\psi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$. Appliquons le lemme 3.17 avec $w = z_s$ et $A = A(s)$, et posons

$$p(s) = p(\{\text{supp } r : r \in z_s\}, [\psi], A(s)) \in A(s) . \text{ On a alors :}$$

$$\Lambda_\psi^{(h)}(s) = \tilde{C}_{(p(s), \varphi_1(s)(b), \dots, \varphi_{h-1}(s)(b), \psi)(z_s)} .$$

Par définition du complexe $\psi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$, par celle du sommet du cône, et par le fait que $p(s) \in A(s)$, on établit aisément les conclusions 1 et 2 en se servant de l'hypothèse d'induction sur ces mêmes conclusions. Vérifions la

troisième conclusion :

$$\pi_h \Lambda_\psi^{(h)}(s) = \tilde{C}_{(p(s), \varphi_1(s)(b), \dots, \varphi_{h-1}(s)(b))}(\pi_h s - \pi_h \alpha_\psi^{(h)} s - \pi_h \Lambda_\psi^{(h)} \partial s) = 0$$

car $\pi_h = \pi_h \alpha_\psi^{(h)}$ et $\pi_h \Lambda_\psi^{(h)} \partial s = 0$ par hypothèse d'induction.

Pour $1 \leq j < h$, on a, en utilisant l'hypothèse d'induction :

$$\begin{aligned} \pi_j \Lambda_\psi^{(h)}(s) &= \tilde{C}_{(p(s), \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_j(s)(b)}, \dots, \psi)}(\pi_j s - \pi_j \alpha_\psi^{(h)} s - \pi_j \Lambda_\psi^{(h)} \partial s) \\ &= \tilde{C}_{(p(\pi_j s), \varphi_1(\pi_j s)(b), \dots, \varphi_{h-2}(\pi_j s)(b), \psi)}(\pi_j s - \alpha_\psi^{(h-1)} \pi_j s - \Lambda_\psi^{(h-1)} \partial \pi_j s) \\ &= \Lambda_\psi^{(h-1)} \pi_j(s) . \end{aligned}$$

Etablissons enfin la dernière condition. Par le lemme 3.17, $\text{supp } t$ est non-dégénéré pour $t \in \Lambda_\psi^{(h)}(s)$, et $\text{vol}([\text{supp } t], \psi) \geq \tilde{f}(\ell, |z_s|, \text{vol}(z_s, \psi))$. Or, $\text{vol}(z_s, \psi) \geq \min\{\text{vol}([\text{supp } s], \psi), \text{vol}(\Lambda_\psi^{(h)} \partial s, \psi)\}$, et pour $t' \in \Lambda_\psi^{(h)} s'$ où s' est une $(\ell-1)$ -face de s , on a :

$$\begin{aligned} \text{vol}([\text{supp } t'], \psi) &\geq \hat{f}(\ell-1, \text{vol}([\text{supp } s'], \psi)) \text{ par hypothèse d'induction} \\ &\geq \hat{f}(\ell-1, \text{vol}([\text{supp } s], \psi)) \end{aligned}$$

car s' est une face de s et \hat{f} est croissante en fonction du dernier argument.

Ainsi :

$$\text{vol}([\text{supp } t], \psi) \geq \tilde{f}(\ell, |z_s|, \min\{\text{vol}([\text{supp } s], \psi), \hat{f}(\ell-1, \text{vol}([\text{supp } s], \psi))\}) .$$

On pose $\hat{f}(\ell, \text{vol}([\text{supp } s], \psi))$ égal au membre de droite de cette inégalité, $|z_s|$ étant déterminé implicitement par la dimension ℓ et le processus de construction par cônes de l'homotopie. Alors \hat{f} vérifie bien les propriétés voulues.

Il reste à voir que $\mu_h t$ n'est pas écrasé pour $t \in \Lambda_\psi^{(h)}(s)$. Puisque ψ est transverse à $[\mu_h s]$, ψ est a fortiori transverse à $[\text{supp } s]$. Donc $\text{vol}([\text{supp } s], \psi) > 0$ et

$$\text{vol}([\text{supp } t], \psi) \leq \hat{f}(\ell, \text{vol}([\text{supp } s], \psi) > 0) > 0 \quad (3.20)$$

Or t est un cône non-dégénéré dont le h -ème champ au sommet est ψ et dont la

base $r \in z_s$ est un simplexe tel que $\mu_h r$ n'est pas écrasé. Si t' est la i -face de t , on a bien $\dim [\mu_h t'] \geq i + 1$ car t' est soit une face de r , soit une face adjacente au sommet du cône et dans ce cas ψ est transverse à $[\text{supp } t']$ par (3.20). Cqfd.

Soit $w \in \bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ un cycle sans points antipodaux. On va définir le morphisme $ST: \bar{C}(w) \rightarrow \bar{\Phi}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ associant à toute chaîne c une chaîne $ST(c)$ sans torsion dont le volume sera contrôlé en fonction de $\text{vol}(w)$. On l'obtiendra comme dernier terme d'une suite $ST^{(0)}, \dots, ST^{(p)}$ où, pour $0 \leq h \leq p$, $ST^{(h)}: \bar{C}(w) \rightarrow \bar{\Phi}^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ est le morphisme annulant la torsion des h premiers champs de vecteurs.

Soit $\hat{\alpha}_\psi^{(h)}: \Phi^{(h-1)}(\mathbb{R}^n)_{Lk} \rightarrow \Phi^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ défini par $\hat{\alpha}_\psi^{(h)}(\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_{h-1}) = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_{h-1}, \psi)$, qui est clairement une $(h-1)$ -application. On définit $ST^{(h)}$ sur $S(w)$ par la formule :

$$ST^{(h)}(s) = \begin{cases} \text{supp}(s) & \text{si } h = 0 \\ \hat{\alpha}_{\psi_h}^{(h)} ST^{(h-1)}(s) + \Lambda_{\psi_h}^{(h)} ST^{(h)}(\partial s), & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$$

où Λ est l'homotopie du lemme 3.16, et où $\psi_h: S(w) \rightarrow \mathbb{R}_0^n$ est une fonction ne dépendant que de h et $\mu_h(s)$. Il suffit donc de définir convenablement cette fonction.

Soit $k(w)$ le réel défini aux notations 3.12. Si $k(w) = 0$, la chaîne w est sans torsion. On suppose donc $k(w) > 0$. On considère, pour $s \in S(w)$ et $1 \leq j \leq p$, le cône fermé $\bar{K}'(s; j)$ de \mathbb{R}_0^n de même centre que $\bar{K}(s; j)$ mais de diamètre angulaire $k'(s; j) = k(s; j) + \epsilon(w)$, où $0 < \epsilon(w) < k(w)$ est choisi de sorte que $\bar{K}'(s; j)$ ne contienne aucune paire de points antipodaux, quels que soient $s \in S(w)$ et $1 \leq j \leq p$. Cet artifice a pour seul but d'avoir des cônes fermés ne se réduisant pas à une demi-droite. Observons que $k'(w) = \max_{\substack{s \in w \\ 1 \leq j \leq p}} k'(s; j) < 2k(w)$, et que $\bar{K}'(s'; j) \subset \bar{K}'(s; j)$ si s' est une face de s .

On définit la fonction ψ_h sur $S_\ell(w)$ par induction sur $1 \leq h \leq p$ et $0 \leq \ell \leq q$, de sorte que, quel que soit $s \in S_\ell(w)$:

- 1) $ST^{(h)}(s)$ et $\mu_h(ST^{(h)}(s))$ sont sans torsion ;
- 2) Quel que soit $t \in ST^{(h)}(s)$, $\mu_h t$ n'est pas écrasé et

$R(t;j) \subset K^j(s;j)$ pour tout $1 \leq j \leq h$;

- 3) $\pi_h ST^{(h)} = ST^{(h-1)}$ et $ST^{(h)}$ est une (h) -application ;

et 4) Quel que soit $t \in ST^{(h)}(s)$,

$$\text{vol}([\text{supp } t], \varphi(s)(b)) \leq \check{f}(h, \ell, b(w), k(w), \text{vol}(w))$$

où \check{f} est une fonction positive continue, décroissante en fonction de $b(w)$ et $k(w)$, croissante en fonction de $\text{vol}(w)$, avec $\check{f}(h, \ell, b(w), 0, \text{vol}(w) > 0) > 0$.

$h = 0$. On pose $ST^{(0)} = \text{supp}$ et $\check{f}(0, \ell, b(w), k(w), \text{vol}(w)) = \text{vol}(w)$.

$h-1 \Rightarrow h$. Soit $\sim_{h, \ell}$ la relation d'équivalence sur $S_\ell(w)$ définie par

$s \sim_{h, \ell} s' \Leftrightarrow \mu_h(s) = \mu_h(s')$, et désignons par $\tilde{\mathcal{S}}_{h, \ell}$ la partition de $S_\ell(w)$ induite par cette relation. On définit $\psi_h : \tilde{\mathcal{S}}_{h, \ell} \rightarrow \mathbb{R}_0^n$ par induction sur ℓ .

$\ell = 0$. Soit $s \in S_0(w)$. On pose $\psi_h(s) = \varphi_h(s)(b)$, d'où

$ST^{(h)}(\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_h)$. Les propriétés 1 à 4 sont trivialement vérifiées en posant $\check{f}(h, 0, \dots) = \text{vol}(w)$.

$\ell-1 \Rightarrow \ell$. Soit $F \in \tilde{\mathcal{S}}_{h, \ell}$ et désignons par $\bar{K}^1(F)$ le cône $\bar{K}^1(s; h)$ pour $s \in F$. On va définir $\psi_h(F) \in \bar{K}^1(F)$ tel que, quels que soient $s \in F$ et $r \in ST^{(h)}(\partial s)$, le volume

$$\text{vol}([\mu_h r], \psi_h(F), \varphi_1(s)(b), \dots, \varphi_h(s)(b), \dots, \varphi_p(s)(b)) \quad (3.21)$$

soit borné inférieurement par une fonction $\check{f}_1(h, \ell, b(w), k(w), \text{vol}(w))$ se comportant comme \check{f} . C'est le point essentiel de la preuve. On a besoin du lemme suivant dont la démonstration se trouve en appendice :

LEMME 3.18. Soit \bar{B} une boule de S^{n-1} de rayon angulaire strictement positif, et soient des sous-espaces vectoriels E_1, \dots, E_ξ de \mathbb{R}^n passant par cette boule tels que $d = \max_{1 \leq i \leq \xi} \dim E_i < n$. Donnons-nous ξ points x_1, \dots, x_ξ tels que $x_i \in E_i \cap \bar{B}$. Il existe alors $x \in \bar{B} - \bigcup_{1 \leq i \leq \xi} E_i$ tel que pour tout $1 \leq i \leq \xi$:

$$\text{vol}([x - x_i], E_i) \geq g(d, \xi) ,$$

où g est une fonction strictement positive, décroissante en fonction de chacun des deux arguments.

Pour chaque simplexe $r \in ST^{(h)}(\partial s)$, $s \in F$, désignons par $\varphi_{h,r}$ un vecteur de $\text{Im } \varphi_h(r)$ tel que $\varphi_{h,r}$ soit transverse à $[\text{supp } r]$ si $\text{supp } r$ est de dimension supérieure à 0, c'est-à-dire si $\ell > 1$. Alors $[\mu_{h,r}] = [[\text{supp } r], \varphi_{h,r}]$ car, par hypothèse d'induction, $\mu_{h,r}$ est sans torsion et n'est pas écrasé.

Appliquons le lemme 3.18 avec $\bar{B} = \bar{K}'(F) \cap S^{n-1}$, $\xi = |F| |ST^{(h)}(\partial s)|$, $d \leq \ell + p - 1 < n$, E_i les sous-espaces vectoriels $[[\mu_{h,r}], \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b)]$ quand $s \in F$ et $r \in ST^{(h)}(\partial s)$, et $x_i = \frac{\varphi_{h,r}}{|\varphi_{h,r}|} \in \bar{B}$. Il existe donc $x \in \bar{K}'(F)$ n'appartenant à aucun de ces sous-espaces, tel que pour tous $s \in F$ et $r \in ST^{(h)}(\partial s)$:

$$\begin{aligned} \text{vol}([x - \varphi_{h,r}], [\mu_{h,r}], \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b)) \\ \geq g(\ell + p - 1, b(w) |ST^{(h)}(\partial s)|) \end{aligned} \quad (3.22)$$

car $b(w) \leq |F|$. Déterminons maintenant la borne inférieure pour (3.21).

On a :

$$\begin{aligned} \text{vol}([\mu_{h,r}], x, \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b)) \\ = \text{vol}([x - \varphi_{h,r}], [\mu_{h,r}], \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b)) \\ \quad \text{car } \varphi_{h,r} \in [\mu_{h,r}] \\ \geq \text{vol}([x - \varphi_{h,r}], [\mu_{h,r}], \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b)) \\ \quad \text{par la proposition 3.11 (i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{vol} ([x - \varphi_{h,r}], [\mu_{h,r}], \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b)) \\
 &\quad \times \text{vol} ([\mu_{h,r}], \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b))
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

par la proposition 3.11 (i) .

Le premier facteur est minoré par $g(\ell+p-1, b(w) \mid ST^{(h)}(\partial s))$ (ligne (3.22)) ,
tandis que le second est minoré, en utilisant la même proposition, par :

$$\begin{aligned}
 &\text{vol} ([\text{supp } r], \varphi_{h,r}, \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b)) \\
 &\geq \text{vol} ([\text{supp } r], \varphi(s')(b)) - \alpha_1(\ell-1, 2k(w))
 \end{aligned}$$

où s' est la $(\ell-1)$ -face de s telle que $r \in ST^{(h)}(s')$

$$\geq \check{f}(h, \ell-1, b(w), k(w), \text{vol}(w)) - \alpha_1(\ell-1, 2k(w)) .$$

Substituant ces deux minoration dans l'inégalité (3.23), on obtient enfin :

$$\begin{aligned}
 &\text{vol} ([[\mu_{h,r}], x], \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b)) \\
 &\geq g(\ell+p-1, b(w) \mid ST^{(h)}(\partial s)) (\check{f}(h, \ell-1, \dots) - \alpha_1(\ell-1, 2k(w))) .
 \end{aligned}$$

On pose $\check{f}_1(h, \ell, b(w), k(w), \text{vol}(w))$ égal à la partie positive de cette dernière expression , dont les arguments p et $|ST^{(h)}(\partial s)|$ sont implicitement déterminés.

On vérifie directement que \check{f}_1 se comporte comme \check{f} .

Le cône $\bar{K}^1(F)$ étant de diamètre non nul, soit $\psi_h(F) \in \bar{K}^1(F)$ un vecteur transverse aux espaces $[\mu_{h,r}]$ et $[\text{supp } r']$ pour $r \in ST^{(h)}(\partial s)$, $r' \in ST^{(h-1)}(s)$ et $s \in F$, et suffisamment proche de x pour que :

$$\begin{aligned}
 &\text{vol} ([[\mu_{h,r}], \psi_h(F)], \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b)) \\
 &\geq \frac{1}{2} \check{f}_1(h, \ell, b(w), k(w), \text{vol}(w)) .
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

On pose $\psi_h(s) = \psi_h(F)$ pour $s \in F$. La définition de $ST^{(h)}(s)$ est alors complète :

$$ST^{(h)}(s) = \hat{\alpha}_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h-1)}(s) + \hat{\alpha}_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h)}(us)$$

et a un sens car, par hypothèse d'induction sur la propriété 2 et par définition

de $\bar{K}^1(s; j)$ et de $\psi_h(s)$, $ST^{(h)}(\partial s)$ appartient à $\psi_h^{(h)}(s)(\mathbb{R}^n)_{Lk}$, d'où

$\wedge_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h)}(\partial s)$ est bien défini, appartient à $\psi_h^{(h)}(s)(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ et vérifie les

conclusions du lemme 3.16. L'application $ST^{(h)} : C(w) \rightarrow \mathcal{C}^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{L_k}$ est un morphisme car, par hypothèse d'induction et par définition de Λ :

$$\begin{aligned} \partial ST^{(h)}(s) &= \hat{\alpha}_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h-1)}(\partial s) + ST^{(h)}(\partial s) - \alpha_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h)}(\partial s) - \Lambda_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h)}(\partial^2 s) \\ &= ST^{(h)}(\partial s) \end{aligned}$$

puisque

$$\alpha_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h)}(\partial s) = \hat{\alpha}_{\psi_h(s)}^{(h)} \pi_h ST^{(h)}(\partial s) = \hat{\alpha}_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h-1)}(\partial s)$$

par hypothèse d'induction sur la propriété 3.

Vérifions les quatre propriétés. La première est une conséquence directe de l'hypothèse d'induction sur cette même propriété et de la conclusion 1 du lemme 3.16. Puisque $\psi_h(s)$ est transverse aux supports des simplexes de $ST^{(h-1)}(s)$, $\mu_h(\hat{\alpha}_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h-1)}(s))$ n'est pas écrasé ; par la conclusion 4 du lemme 3.16, $\mu_h(\Lambda_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h)}(\partial s))$ n'est pas écrasé non plus. Donc $\mu_h(ST^{(h)}(s))$ n'est pas écrasé.

Soit $t \in \hat{\alpha}_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h-1)}(s)$. Par hypothèse d'induction sur la propriété 2, $\bar{K}(t;j) \subset \bar{K}'(s;j)$ si $1 \leq j < h$, et $\bar{K}(t;h) = \{\psi_h(s)\} \subset \bar{K}'(F) = \bar{K}'(s;h)$. Soit maintenant $t \in \Lambda_{\psi_h(s)}^{(h)} r$ pour $r \in ST^{(h)}(\partial s)$. La conclusion du lemme 3.16 et l'hypothèse d'induction sur la propriété 2 donnent : $\bar{K}(t;j) \subset \bar{K}(r;j) \subset \bar{K}'(s;j)$ si $j \neq h$, et $\bar{K}(t;h)$ est inclus dans le plus petit cône fermé contenant $\bar{K}(r;h)$ et $\psi_h(s)$. Or, $\bar{K}(r;h), \{\psi_h(s)\} \subset \bar{K}'(s;h)$. Donc $\bar{K}(t;h) \subset \bar{K}'(s;h)$.

Vérifions la troisième propriété :

$$\begin{aligned} \pi_h ST^{(h)}(s) &= \pi_h \hat{\alpha}_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h-1)}(s) + \pi_h \Lambda_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h)}(\partial s) \\ &= \pi_h \hat{\alpha}_{\psi_h(s)}^{(h)} ST^{(h-1)}(s) \text{ par la conclusion 3 du lemme 3.16} \\ &= ST^{(h-1)}(s) \end{aligned}$$

Ainsi, $\pi_h ST^{(h)}(s)$ ne dépend que de $\pi_h(s)$. Pour $1 \leq j < h$:

$$\pi_j ST^{(h)}(s) = \hat{\alpha}_{\psi_h(s)}^{(h-1)} (\pi_j ST^{(h-1)}(s)) + \Lambda_{\psi_h(s)}^{(h-1)} (\pi_j ST^{(h)}(\partial s)) \quad (3.25)$$

par la conclusion 3 du lemme 3.16.

Or, si $s, s' \in S_\ell(w)$ sont tels que $\pi_j(s) = \pi_j(s')$, alors $\mu_h(s) = \mu_h(s')$ c'est-à-dire $s \sim_{h,\ell} s'$. Donc $\psi_h(s) = \psi_h(s')$. Et par hypothèse d'induction sur la propriété 3, les expressions entre parenthèses à la ligne (3.25) ont même valeur pour s et s' . Donc $\pi_{jST^{(h)}}(s) = \pi_{jST^{(h)}}(s')$, c'est-à-dire $\pi_{jST^{(h)}}(s)$ ne dépend que de $\pi_j(s)$.

Etablissons enfin la quatrième propriété. Soient $s \in S_\ell(w)$ et $t \in ST^{(h)}(s)$. Si $t \in \hat{\alpha}_{\psi_h(s)}^{(h)} r'$ pour $r' \in ST^{(h-1)}(s)$, $\text{supp } t = \text{supp } r'$ et l'on a :

$$\text{vol}([\text{supp } t], \varphi(s)(b)) \geq \check{f}(h-1, \ell, b(w), k(w), \text{vol}(w)) \quad (3.26)$$

par hypothèse d'induction sur la propriété 4.

Si $t \in \hat{\alpha}_{\psi_h(s)}^{(h)} r$ pour $r \in ST^{(h)}(\partial s)$:

$$\begin{aligned} & \text{vol}([\text{supp } t], \varphi(s)(b)) \\ & \geq \text{vol}([\text{supp } t], \psi_h(s), \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b)) - \alpha_1(\ell, 2k(w)) \\ & = \text{vol}([\text{supp } t], \psi_h(s), \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b)) \text{vol}([\text{supp } t], \psi_h(s)) \\ & \quad - \alpha_1(\ell, 2k(w)) \\ & \geq \text{vol}([\mu_h r], \psi_h(s), \varphi_1(s)(b), \dots, \widehat{\varphi_h(s)(b)}, \dots, \varphi_p(s)(b)) \times \\ & \quad \times \text{vol}([\text{supp } t], \psi_h(s)) - \alpha_1(\ell, 2k(w)) \\ & \text{car } [\text{supp } t] \subset [\mu_h r, \psi_h(s)] \text{ (lemme 3.16)} \\ & \geq \frac{1}{2} \check{f}_1(h, \ell, b(w), k(w), \text{vol}(w)) \times \hat{f}(i-1, \text{vol}([\text{supp } r], \psi_h(s))) - \alpha_1(i, 2k(w)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

par la ligne (3.24) et le lemme 3.16, conclusion 4.

Par hypothèse d'induction :

$$\text{vol}([\text{supp } r], \psi_h(s)) \leq \check{f}(h, i-1, b(w), k(w), \text{vol}(w)) - \alpha_1(i-1, 2b(w)).$$

On pose $\check{f}_2(h, i-1, \dots)$ égal à la partie positive de cette expression ;

et (3.27) devient :

$$\text{vol}([\text{supp } t], \varphi(s)(b)) \geq \frac{1}{2} \check{f}_1(h, \ell, \dots) \times \hat{f}(i-1, \check{f}_2) - \alpha_1 \quad (3.28)$$

dont la partie positive du membre de droite, que l'on note $\check{f}_3(h, \ell, \dots)$, se

comporte de la même manière que \check{f} . On définit enfin, en présence de (3.26) et (3.28) :

$$\check{f}(h, \ell, b(w), k(w), \text{vol}(w)) = \min \{ \check{f}(h-1, \ell, \dots), \check{f}_3(h, \ell, \dots) \}$$

et la propriété 4 est établie.

On pose $ST = ST^{(p)} : C(w) \rightarrow \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ qui, en tant que (p)-application, induit un morphisme $ST : \bar{C}(w) \rightarrow \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$. Remarquons que les propriétés 2 et 4 donnent lieu à :

$$\begin{aligned} \text{vol}(ST(s)) &\geq \min_{t \in ST(s)} \text{vol}([\text{supp } t], \varphi(s)(b)) - \alpha_1(\ell, 2k(w)) \\ &\geq \check{f}(p, \ell, b(w), k(w), \text{vol}(w)) - \alpha_1(\ell, 2k(w)) \end{aligned}$$

Définissant $\check{f}_0(\ell, b(w), k(w), \text{vol}(w))$ comme la partie positive de cette expression, on obtient :

$$4\text{bis}) \quad \text{vol}(ST(s)) \geq \check{f}_0(\ell, b(w), k(w), \text{vol}(w)) ,$$

où \check{f}_0 se comporte comme \check{f} .

DÉMONSTRATION DU LEMME 2 .

Nous démontrons le lemme 2 suivant la même méthode qu'au lemme 1.

Soient $z \in \bar{Z}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ et $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\chi^{j_0}z$ n'ait pas de points antipodaux pour $j \geq j_0$: $ST(\chi^j z)$ a donc un sens. Quel que soit $j \in \mathbb{N}$, $b(\chi^j z) \leq |z|$ et $\text{vol}(\chi^j z) \geq \text{vol}(z) > 0$. Par la propriété 4bis, il existe $v > 0$ et $j_1 > j_0$ tels que $\text{vol}(ST(s)) \geq v > 0$ quels que soient $s \in \chi^j z$ et $j \geq j_1$. Ainsi, pour $j \geq j_1$, ST est à valeurs dans $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ et $ST(\chi^j z) \in \bar{Z}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$. La première partie du lemme 2 est établie en même temps que sont vérifiées les trois hypothèses du lemme 3.13 pour $w = \chi^j z$ ($j \geq j_1$) et $M = ST$. Il existe donc une homotopie Λ entre i et ST :

$$\Lambda, i, ST : \bar{C}(\chi^j z) \longrightarrow \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$$

qui, par la conclusion 1 du lemme 3.13, est à supports linéaires non-dégénérés

car i et ST le sont. Par la conclusion 2 du même lemme,

$$\text{vol}(t) \geq f(q, b(ST), b(x^j z), k_{ST}(x^j z), \text{vol}_{ST}(x^j z), 0) .$$

Or, pour $j \geq j_1$, $b(ST)$ et $b(x^j z)$ sont bornés supérieurement, $\text{vol}_{ST}(x^j z)$ est borné inférieurement par un réel strictement positif, et

$$k_{ST}(x^j z) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

par la propriété 2 de la définition de ST . Il existe donc, par les propriétés de la fonction f du lemme 3.13, un entier $j(z) \geq j_1$ tel que $\text{vol}(t) > 0$ pour tout $t \in \Lambda(x^{j(z)} z)$. Ainsi $\Lambda(x^{j(z)} z) \in \bar{C}^{(p)}(R^n)_{Lk}$ et $\partial \Lambda(x^{j(z)} z) = x^{j(z)} z - ST(x^{j(z)} z)$, ce qui établit le lemme 2.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.

Soit $z \in \bar{Z}^{(p)}(R^n)_{Lk}$ un cycle sans torsion, $0 < q+p < n$. Si $p = 0$, le lemme 3 est évident. On suppose donc que $p > 0$.

Pour établir que $z \in \bar{B}^{(p)}(R^n)_{Lk}$, il nous suffira de montrer qu'il existe un vecteur $\psi \in R_0^n$ tel que z est homologue dans $\bar{C}^{(p)}(R^n)_{Lk}$ à un cycle $z' \in \bar{Z}^{(p)}(R^n)_{Lk}$ vérifiant : $\varphi_p(s') = \psi$ quel que soit $s' \in z'$. En effet, ceci implique que $z' = 0$ car $\pi_p(z') = 0$.

Puisque z est sans torsion, chaque sous-espace vectoriel $[s]$ de R^n , pour $s \in z$, est de dimension $q+p < n$. Il existe donc deux vecteurs $v, \psi \in R_0^n$, chacun transverse à tous les espaces $[s]$. Épaississons chaque simplexe $s = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in z$ dans la direction v de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Ep}(s) : \Delta_q \times [0, 1] &\longrightarrow R^n \times V_p(R^n) \\ (x, t) &\longmapsto (\lambda(x) + tv, \varphi_1(x), \dots, \varphi_{p-1}(x), (1-t)\varphi_p(x) + t\psi) . \end{aligned}$$

Cette application est bien définie car, ψ étant transverse à $[s]$, ψ n'est antipodal à aucun des éléments de $\text{Im } \varphi_p(s)$. Pour la même raison, l'ensemble $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x), \psi\}$ est un système libre : le p -champ $\varphi(\text{Ep}(s))$ est donc partout un p -repère. Ensuite, puisque v est transverse à $[s]$, $\text{Ep}(s)$ est à

support linéaire non-dégénéré. Notons enfin qu'en $t = 0$, $Ep(s)$ vérifie :

$$\dim [\text{In } D(\text{supp } Ep(s))(x, 0), \varphi(Ep(s))(x, 0)] = q + p + 1 \quad (3.29)$$

quel que soit $x \in \Delta_q$.

La subdivision barycentrique de chaque $(q+1)$ -prisme $Ep(s)$ de la somme $Ep(z) = \sum_{s \in Z} a_s Ep(s)$, où a_s est le coefficient de s dans z , donne lieu à une chaîne de $\bar{\Phi}_{q+1}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ que l'on désignera également par $Ep(z)$. On a alors : $\partial Ep(z) = z - w$, où $w \in \bar{\Phi}_q^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ est nulle car pour tout $s \in w$, $\varphi_p(s)$ est l'application constante ψ . Or, $Ep(z)$ n'appartient pas en général à $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ car le p -repère $\varphi(t)$ d'un simplexe $t \in Ep(z)$ n'est pas nécessairement transverse au support de t . Il reste, pour achever la preuve, à définir convenablement un froissement de la chaîne $Ep(z)$ qui vérifie cette dernière condition.

DÉFINITION 3.19. Soient Z^n une variété lisse munie d'une connexion, et \mathfrak{J} un feuilletage régulier de Z de codimension $0 < \text{codim } \mathfrak{J} < n$. Notons ${}^{\mathfrak{J}}C(Z)_{Pk}$ le sous-complexe de $C(Z)_{Pk}$ librement engendré par le sous-ensemble simplicial ${}^{\mathfrak{J}}S(Z)_{Pk} \subset S(Z)_{Pk}$ des simplexes λ qui sont transverses aux feuilles $(T_{\lambda(x)}(\text{Im } \lambda))$ est transverse à $T_{\lambda(x)}(F(\lambda(x)))$ où $F(\lambda(x))$ est la feuille passant par $\lambda(x)$ et qui ne rencontre aucune feuille en plus d'un point.

Un froissement (relatif à \mathfrak{J}) $fr_c \in C(Z)_{Pk}$ d'une chaîne $c \in {}^{\mathfrak{J}}C(Z)_{Pk}$ est défini de la manière suivante :

- a) Tout froissement $fr_\lambda \in C(Z)_{Pk}$ d'un simplexe $\lambda \in {}^{\mathfrak{J}}S(Z)_{Pk}$ vérifie $F(\lambda) = F(fr_\lambda)$, où $F(\lambda)$ est le saturé pour \mathfrak{J} de $\text{Im } \lambda$, et $F(fr_\lambda) = \bigcup_{\sigma \in fr_\lambda} F(\sigma)$;
- b) Un froissement d'un 0-simplexe est un 0-simplexe vérifiant la condition a) ;
- c) Le froissement se comporte comme un morphisme :
 - (i) si $c = \sum_{\lambda \in c} a_\lambda \lambda$, alors $fr_c = \sum_{\lambda \in c} a_\lambda fr_\lambda$ où fr_λ est un froissement de λ ;
 - (ii) $\partial fr_c = fr_{\partial c}$.

Le froissement est une opération inverse du lissage : c'est le plissage

d'un simplexe selon les feuilles de \mathfrak{F} . L'utilité du feuilletage apparaît dans la définition suivante.

DÉFINITION 3.20. Notons $\mathfrak{F}\mathfrak{C}^{(h)}(Z)_{PK}$ le sous-complexe de $\mathfrak{C}^{(h)}(Z)_{PK}$ dont les supports des simplexes appartiennent à $\mathfrak{F}S(Z)_{PK}$. On définit le froissement (relatif à \mathfrak{F}) $fr_c \in \mathfrak{C}^{(h)}(Z)_{PK}$ d'une chaîne $c \in \mathfrak{F}\mathfrak{C}^{(h)}(Z)_{PK}$ de la manière suivante :

a) Un froissement $fr_s \in \mathfrak{C}^{(h)}(Z)_{PK}$ d'un simplexe $s = (\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_h) \in \mathfrak{F}S^{(h)}(Z)_{PK}$ est une chaîne $fr_s = \sum_{\sigma \in fr_\lambda} a_\sigma s_\sigma$, fr_λ étant un froissement de λ , a_σ le coefficient de σ dans fr_λ , $\text{supp}(s_\sigma) = \sigma$, et $\varphi_j(s_\sigma)(x) = (\omega \circ \varphi_j(s) \circ \lambda^{-1} \circ \rho \circ \sigma)(x)$, où $\rho: \text{Im } \sigma \rightarrow \text{Im } \lambda$ est l'application associant à $z \in \text{Im } \sigma$ l'unique point $\rho(z) \in F(z) \cap \text{Im } \lambda$, et où ω est le transport parallèle du point $\rho \circ \sigma(x)$ au point $\sigma(x)$ le long du géodésique dans la feuille $F(\sigma(x))$;

b) Le froissement se comporte comme un morphisme.

Dans la démonstration du lemme 3, \mathbb{R}^n est la variété ambiante ; on dira qu'un froissement fr_c d'une chaîne $c \in \mathfrak{F}\mathfrak{C}^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{PK}$ est linéaire si $fr_c \in \mathfrak{C}^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{LK}$. Soit maintenant \mathcal{E} la partition de $Ep(z)$ en classes d'équivalences de simplexes ayant même support, et désignons par $\text{supp}(E)$ le support commun aux simplexes d'un ensemble $E \in \mathcal{E}$. Soit également W un sous-espace vectoriel de dimension $q+1$ de \mathbb{R}^n tel que la restriction de la projection orthogonale $pr_\perp: \mathbb{R}^n \rightarrow W$ à l'espace affine $[\text{supp}(E)]_a$ soit injective quel que soit $E \in \mathcal{E}$. Désignons par \mathfrak{F} le feuilletage de codimension $q+1$ de \mathbb{R}^n dont les feuilles sont les espaces affines $pr_\perp^{-1}(x)$ pour $x \in W$. Alors, $Ep(z) \in \mathfrak{F}\mathfrak{C}_{q+1}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{LK}$. Or, $\dim \mathfrak{F} + \dim \text{supp}(E) = n$ et $\text{supp}(t)$ est donc transverse au sens de Thom à F , quels que soient $t \in Ep(z)$ et $F \in \mathfrak{F}$. On en déduit, puisque $\dim(\text{supp } t) = q+1$ et $\text{codim } [\alpha(t)] \leq q+1$, qu'il existe un froissement linéaire $fr_{Ep(z)} \in \mathfrak{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{LK}$ dont le bord est alors : $\partial fr_{Ep(z)} = fr_{\partial Ep(z)} = fr_z - fr_w$. A cause de (3.29), on peut choisir un froissement de $Ep(z)$ qui ne

modifie pas $Ep(z)$ sur une bande suffisamment petite autour de z . Alors,

$$\partial \text{fr}_{Ep(z)} = z - \text{fr}_w.$$

Remarquons finalement qu'on aura pu froisser chaque $\text{supp}(E)$, pour $E \in \mathcal{E}$, de manière à ce que la chaîne $\text{fr}_{\text{supp}(E)}$ soit en position générale par rapport à chacun des p -repères $\varphi(t)$ pour $t \in E$. Il en résulte que, pour $t, t' \in Ep(z)$,

$$\text{supp}(t) = \text{supp}(t') \Rightarrow \text{supp}(\text{fr}_t) = \text{supp}(\text{fr}_{t'}) ; \quad (3.30)$$

d'où on conclut, par la condition a) de la définition 3.20, que si $\text{supp}(t) = \text{supp}(t')$ et $\varphi_j(t) = \varphi_j(t')$ pour un entier j compris entre 1 et p , alors les supports et les j -èmes champs des simplexes de fr_t et $\text{fr}_{t'}$ sont identiques. Il en résulte que $\text{fr}_{Ep(z)}$ satisfait aux contraintes $\pi_j = 0$ ($1 \leq j \leq p$) car $Ep(z)$ y satisfait.

Il existe donc un froissement $\text{fr}_{Ep(z)} \in \bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$ tel que

$$\partial \text{fr}_{Ep(z)} = z - \text{fr}_w = z,$$

car, par (3.30), le froissement de la chaîne nulle w est nul. Ainsi $z \in \bar{B}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$, ce qui établit le lemme 3.

4. CHAINES RÉGULIÈRES ET FIBRATIONS DE KAN

Les entiers k , n et m étant toujours fixés, on établit d'abord les énoncés $(*)$ et $(**)$ pour la submersion $pr : U = V \times W \rightarrow V$, où V est un pavé ouvert de \mathbb{R}^n , W un pavé ouvert de \mathbb{R}^{m-n} , et où pr est la projection sur le premier facteur. Puisque $(**)$ est évident pour $q = 0$, les énoncés $(*)$ et $(**)$ se ramènent au suivant :

$$\bar{H}_q^{(p)}(pr)_k \text{ ISL et } R \Rightarrow \bar{H}_q^{(p)}(pr)_k = 0 \quad (4.1)$$

quels que soient $0 \leq q, p < n$ tels que $0 < q+p < n$.

Supposons que $\bar{H}_q^{(p)}(pr)_k$ est ISL et R . Alors, tout cycle $z \in \bar{Z}_q^{(p)}(pr)_k$ est représentable par un cycle régulier. Il suffit donc d'établir que tout cycle régulier $z \in \bar{Z}_q^{(p)}(pr)_k$ appartient à $\bar{B}_q^{(p)}(pr)_k$. Identifiant, pour un ouvert O quelconque de \mathbb{R}^l , TO à $O \times \mathbb{R}^l$ de la façon évidente, $S^{(p)}(O)_{pk}$ s'identifie à un sous-ensemble simplicial de l'ensemble simplicial singulier k -fois différentiable $(S(O \times \mathbb{R}^l)_k)^p$ par l'application $s \mapsto (\mu_1(s), \dots, \mu_p(s))$.

Soit $z \in \bar{Z}_q^{(p)}(pr)_k$ un cycle régulier. Alors z , en tant que chaîne régulière, induit une section locale \hat{z}_{supp} :

$$\begin{array}{ccc} & & S(U)_k \\ & \nearrow \hat{z}_{\text{supp}} & \downarrow S(pr)_k \\ p_1(\text{supp } S(z)) & \subset & S(V)_k \end{array}$$

du sous-ensemble simplicial $p_1(\text{supp } S(z))$ dans $S(U)_k$, définie par

$\hat{z}_{\text{supp}}(\lambda_1) = \lambda_2$ où λ_2 est l'unique simplexe de $S(U)_k$ tel que $(\lambda_1, \lambda_2) \in \text{supp}(S(z))$.

Cette section se prolonge à une section globale de $S(pr)_k$, $\sigma_{\text{supp}} : S(V)_k \rightarrow S(U)_k$,

car $S(pr)_k$ est une fibration de Kan ([9], p.25) à fibre contractile. Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 S(U)_k \times S(\mathbb{R}^m)_k & \xrightarrow{\text{pr}_1} & S(U)_k \\
 \downarrow S(D\text{pr})_k = S(\text{pr})_k \times S(D_x \text{pr})_k & & \downarrow S(\text{pr})_k \\
 S(V)_k \times S(\mathbb{R}^n)_k & \xrightarrow{\text{pr}_1} & S(V)_k
 \end{array}$$

où pr_1 est la projection sur le premier facteur, et $S(D_x \text{pr})_k : S(\mathbb{R}^m)_k \rightarrow S(\mathbb{R}^n)_k$ est indépendante du point $x \in U$. Alors z , en tant que chaîne régulière, induit pour tout $1 \leq j \leq p$ une section \hat{z}_j de $S(\text{pr})_k \times S(D_x \text{pr})_k$ au-dessus du sous-ensemble simplicial $p_1(\mu_j S(z)) \subset S(V)_k \times S(\mathbb{R}^n)_k$, telle que $\text{pr}_1 \circ \hat{z}_j = \sigma_{\text{supp}} \circ \text{pr}_1$. Elle est définie par $\hat{z}_j(\lambda_1, \psi_1^j) = (\lambda_2, \psi_2^j)$, où (λ_2, ψ_2^j) est l'unique simplexe de $S(TU)_k = S(U)_k \times S(\mathbb{R}^m)_k$ tel que $((\lambda_1, \psi_1^j), (\lambda_2, \psi_2^j)) \in \mu_j(S(z))$. Puisque les flèches horizontales sont des projections sur le premier facteur et que $S(\text{pr})_k$ et $S(D_x \text{pr})_k$ sont des fibrations de Kan à fibre contractile, \hat{z}_j se prolonge à une section globale de $S(\text{pr})_k \times S(D_x \text{pr})_k$, $\sigma_j : S(V)_k \times S(\mathbb{R}^n)_k \rightarrow S(U)_k \times S(\mathbb{R}^m)_k$, telle que $\text{pr}_1 \circ \sigma_j = \sigma_{\text{supp}} \circ \text{pr}_1$, ce qu'on exprime par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 S(TU)_k & \xrightarrow{S(\xi)} & S(U)_k \\
 \sigma_j \left(\downarrow S(D\text{pr})_k \right. & & \left. \sigma_{\text{supp}} \left(\downarrow S(\text{pr})_k \right) \right. \\
 S(TV)_k & \xrightarrow{S(\xi)} & S(V)_k
 \end{array}$$

où ξ est la projection canonique du fibré tangent sur sa base, et où

$S(\xi) \circ \sigma_j = \sigma_{\text{supp}} \circ S(\xi)$. Notons $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ la section de $(S(D\text{pr})_k)^p$:

$$\begin{array}{ccc}
 (S(TU)_k)^p & \xrightarrow{S(\xi) \circ \text{pr}_j} & S(U)_k \\
 \sigma \left(\downarrow (S(D\text{pr})_k)^p \right. & & \left. \sigma_{\text{supp}} \left(\downarrow S(\text{pr})_k \right) \right. \\
 (S(TV)_k)^p & \xrightarrow{S(\xi) \circ \text{pr}_j} & S(V)_k
 \end{array}$$

où pr_j est la projection sur j -ème facteur ($1 \leq j \leq p$), et où

$(S(\xi) \circ \text{pr}_j) \circ \sigma = \sigma_{\text{supp}} \circ (S(\xi) \circ \text{pr}_j)$. Puisque le relevé de classe C^k , dans

pr , de tout simplexe plongé est un simplexe plongé, et que les relevés de classe C^k , dans $D_X(pr) : T_X U \rightarrow T_Y V$, de sous-espaces transverses sont transverses, la section σ donne lieu à une section σ_0 de p_1 :

$$\begin{array}{ccccc} S^{(p)}(pr)_k & \xrightarrow{p_2} & S^{(p)}(U)_{Pk} & \hookrightarrow & (S(TU)_k)^p \\ \sigma_0 \uparrow & & & & \uparrow \sigma \\ S^{(p)}(V)_{Pk} & \xrightarrow{\quad} & & & (S(Dpr)_k)^p \\ & & & & \downarrow \\ & & & & (S(TV)_k)^p \end{array}$$

prolongeant la section $\hat{z} : p_1(S(z)) \rightarrow S^{(p)}(pr)_k$ induite par z , et définie par $\sigma_0(s) = (s, \sigma(s))$. Par définition de σ et σ_0 , $\mu_j(\sigma_0(s)) = (\mu_j(s), \sigma_j(\mu_j(s)))$; $\mu_j(\sigma_0(s))$ ne dépend donc que de $\mu_j(s)$. Il résulte du corollaire 1.7 que σ_0 induit une section $\bar{\sigma}_0$ de p_1 :

$$\begin{array}{ccc} \bar{C}^{(p)}(pr)_k & \xrightarrow{p_1} & \bar{C}^{(p)}(V)_{Pk} \\ & \searrow \bar{\sigma}_0 & \end{array}$$

prolongeant \hat{z} . Enfin, par le résultat du §3, $\bar{H}_q^{(p)}(V)_{Pk} = 0$ car V est difféomorphe à \mathbb{R}^n . Soit $\bar{c} \in \bar{C}^{(p)}(V)_{Pk}$ telle que $\partial \bar{c} = p_1(z)$. Alors $\bar{\sigma}_0(\bar{c}) \in \bar{C}^{(p)}(pr)_k$ et $\partial \bar{\sigma}_0(\bar{c}) = \bar{\sigma}_0(\partial \bar{c}) = \bar{\sigma}_0(p_1(z)) = \hat{z}(p_1(z)) = z$.

Les énoncés (*) et (**), et les théorèmes 1-S, 2-S et S sont donc établis pour une submersion $pr : V^n \times W^{m-n} \rightarrow V^n$.

5. CAS GÉNÉRAL

On passe au cas général d'une submersion $f : X_2^m \rightarrow X_1^n$ de classe C^{k_0} , avec $2 \leq k_0 \leq \infty$, $1 \leq k \leq k_0 - 1$, n et m fixés. Notons d'abord que les énoncés (*) et (**) peuvent être remplacés par les énoncés (*') et (**') suivants, qui donnent également les mêmes théorèmes :

Quel que soit $p \leq 1$,

$$\left. \begin{array}{l} \bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k \text{ ISL et R} \\ \text{quelle que soit la submersion} \\ f : X_2 \rightarrow X_1^n \text{ de classe } C^{k_0} \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k = 0 \\ \text{quelle que soit la submersion} \\ f : X_2 \rightarrow X_1^n \text{ de classe } C^{k_0} \end{array} \right\} \quad (*)'$$

et

$$\left. \begin{array}{l} H_{* < n}(f)_k \text{ ISL et R} \\ \text{quelle que soit la submersion} \\ f : X_2 \rightarrow X_1^n \text{ de classe } C^{k_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (p_2)_* \text{ est un isomorphisme pour} \\ * < n \text{ et une surjection pour } * = n, \\ \text{quelle que soit la submersion} \\ f : X_2 \rightarrow X_1^n \text{ de classe } C^{k_0}. \end{array} \quad (**')$$

L'invariance par subdivision barycentrique est donnée en hypothèse de ces énoncés, et cela, ajouté à la démonstration du cas euclidien, suffit à établir ces énoncés en utilisant une méthode due à Milnor qui consiste à passer successivement de la projection de pavés à celle d'ouverts par la suite de Mayer-Vietoris en homologie sectionnelle, et à une submersion quelconque par le lemme de Zorn. On démontre d'abord l'énoncé (*'). On procède en quatre étapes, en supposant $p \geq 1$ fixé.

LEMME 5.1. Soient $f : X_2 \rightarrow X_1^n$ une submersion de classe C^{k_0} , et $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un recouvrement de X_2 en ouverts emboîtés. Si $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f|_{U_j})_k = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, alors $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k = 0$.

Démonstration. Tout cycle $z \in \bar{Z}^{(p)}(f)_k$ est contenu dans une submersion $f|_{U_j}$ pour j suffisamment grand.

LEMME 5.2. Soient $f : X_2 \rightarrow X_1^n$ une submersion de classe C^{k_0} , et U_1, U_2 deux ouverts de X_2 recouvrant X_2 . Si $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f|_{U_i})_k = 0$ pour $U = U_1, U_2, U_1 \cap U_2$, alors $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k = 0$.

Démonstration. On établit d'abord la suite de Mayer-Vietoris pour l'homologie $\bar{H}_*^{(p)}(f)_k$ dont découlera le lemme. Il est clair que la suite

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow C^{(p)}(f|_{U_1 \cap U_2})_k & \xrightarrow{a} & C^{(p)}(f|_{U_1})_k & \oplus & C^{(p)}(f|_{U_2})_k & \xrightarrow{b} & C^{(p)}(f|_{U_1}; f|_{U_2})_k \rightarrow 0 \\ & & \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 & & \\ & & C_1 & \oplus & C_2 & \xrightarrow{\quad} & C_1 + C_2 \end{array}$$

est exacte, où i_1 et i_2 sont induits par les inclusions et où $C^{(p)}(f|_{U_1}; f|_{U_2})_k$

est le sous-complexe de $C^{(p)}(f)_k$ engendré par $S^{(p)}(f|_{U_1})_k \cup S^{(p)}(f|_{U_2})_k$.

Elle induit la suite également exacte :

$$0 \rightarrow \bar{C}^{(p)}(f|_{U_1 \cap U_2})_k \xrightarrow{a} \bar{C}^{(p)}(f|_{U_1})_k \oplus \bar{C}^{(p)}(f|_{U_2})_k \xrightarrow{b} \bar{C}^{(p)}(f|_{U_1}; f|_{U_2})_k \rightarrow 0.$$

En effet, il est clair que a est injectif et que $\text{Im } a = \ker b$. Montrons que b est surjectif. Soit $c \in \bar{C}^{(p)}(f|_{U_1}; f|_{U_2})_k$. Alors, c peut s'écrire sous la forme $c_1 + c_2$, où $c_i \in C^{(p)}(f|_{U_i})_k$ de manière que deux simplexes de c ayant même support appartiennent à la même sous-chaîne c_i ($i = 1, 2$). Or, puisque $\pi_j(c) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$, $\pi_j(c(\text{supp } s)) = 0$ pour tous $1 \leq j \leq p$ et $s \in c$, où $c(\text{supp } s)$ est la sous-chaîne de c constituée des simplexes ayant $\text{supp } (s)$ comme support. Donc $\pi_j(c_i) = 0$ pour tous $1 \leq j \leq p$ et $i = 1, 2$, d'où $c_i \in \bar{C}^{(p)}(f|_{U_i})_k$.

Cette suite exacte courte donne lieu à la suite exacte longue d'homologie, dont on déduit que $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f|_{U_1}; f|_{U_2})_k = 0$. Enfin, la surjectivité du morphisme :

$$i_{* < n-p} : \bar{H}_{*}^{(p)}(f|_{U_1}; f|_{U_2})_k \rightarrow \bar{H}_{*}^{(p)}(f|_{U_1 \cup U_2})_k$$

induit par l'inclusion au niveau des chaînes, découle directement de l'hypothèse d'invariance par subdivision barycentrique de $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f|_{U_1 \cup U_2})_k = \bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f)_k$.

LEMME 5.3. Soit $\text{pr} : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur le premier facteur. Quel que soit l'ouvert U de \mathbb{R}^n , $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(\text{pr}|_U)_k = 0$.

Démonstration. Tout ouvert U de \mathbb{R}^m s'exprime comme réunion dénombrable de pavés ouverts de \mathbb{R}^m : $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$. Posant $U_j = \bigcup_{1 \leq i \leq j} P_i$, l'ensemble $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement dénombrable de U en ouverts emboîtés. Par le lemme 5.1, il suffit de montrer que $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(\text{pr}|_{U_j})_k = 0$ quel que soit $j \in \mathbb{N}$. On procède par induction sur j pour démontrer que si O_j est un ouvert de \mathbb{R}^m s'exprimant comme réunion de j pavés ouverts, $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(\text{pr}|_{O_j})_k = 0$.

Si $j = 1$, c'est le cas euclidien déjà établi. Soit $j > 1$, et supposons que $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(\text{pr}|_{O_{j-1}})_k = 0$. Si O_j est réunion de j pavés ouverts, $O_j = O_{j-1} \cup O_1$, et $O_{j-1} \cap O_1$ s'exprime comme réunion de $j-1$ pavés ouverts. Le lemme 5.2 donne le résultat.

Démonstration de l'énoncé (*) .

Soit $f: X_2 \rightarrow X_1^n$ une submersion de classe C^{k_0} et soit \mathcal{u} un recouvrement ouvert de X_2 tel que pour chaque $U \in \mathcal{u}$, $f|_U$ soit C^{k_0} -difféomorphe à la projection sur le premier facteur d'un pavé ouvert $V \times W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$.

Alors $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f|_U)_k = 0$ quel que soit $U \in \mathcal{u}$, car $k \leq k_0 - 1$. Selon le lemme 5.1 et le lemme de Zorn, il existe un ouvert U_0 non-vide de X_2 tel que $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f|_{U_0})_k$ soit nul et que U_0 soit maximal parmi tous les ouverts U de X_2 pour lesquels cette propriété est vérifiée. Si $U_0 \neq X_2$, soit $U_1 \in \mathcal{u}$ tel que $U_1 \not\subset U_0$. Alors $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f|_{U_0})_k = \bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f|_{U_1})_k = 0$, et $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f|_{U_0 \cup U_1})_k = 0$ par le lemme 5.3, car $f|_{U_0 \cap U_1}$ est C^{k_0} -difféomorphe à la restriction de la projection $\text{pr}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ à un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Donc $\bar{H}_{* < n-p}^{(p)}(f|_{U_0 \cup U_1})_k = 0$ par le lemme 5.2 contredisant le caractère maximal de U_0 . Donc $U_0 = X_2$.

On établit maintenant l'énoncé (***) suivant la même méthode en quatre étapes. Les énoncés des lemmes et leur démonstration sont en tous points semblables, sauf pour la démonstration du lemme suivant :

LEMME 5.2bis. Soient $f: X_2 \rightarrow X_1^n$ une submersion de classe C^{k_0} , et U_1, U_2 deux ouverts de X_2 recouvrant X_2 . Si, quel que soit $U = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2$, $(p_2)_*: H_*(f|_U)_k \rightarrow H_*(U)$ est un isomorphisme pour $* < n$ et une surjection pour $* = n$, il en est de même de $(p_2)_*: H_*(f)_k \rightarrow H_*(X_2)$.

Démonstration. Soit le diagramme commutatif de suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & C(f|_{U_1 \cap U_2})_k & \longrightarrow & C(f|_{U_1})_k \oplus C(f|_{U_2})_k & \longrightarrow & C(f|_{U_1}; f|_{U_2})_k & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow p_2 & & \downarrow p_2 \oplus p_2 & & \downarrow p_2 & \\
 0 \longrightarrow & C(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & C(U_1) \oplus C(U_2) & \longrightarrow & C(U_1; U_2) & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Il induit le diagramme commutatif de suites exactes longues dont il résulte, par le lemme des cinq, que $(p_2)_* : H_*(f|_{U_1}; f|_{U_2})_k \rightarrow H_*(U_1; U_2)$ est un isomorphisme pour $* < n$ et une surjection pour $* = n$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H_*(f|_{U_1}; f|_{U_2})_k & \xrightarrow{j_*} & H_*(f|_{U_1 \cup U_2})_k \\
 (p_2)_* \downarrow & & \downarrow (p_2)_* \\
 H_*(U_1; U_2) & \xrightarrow[\sim]{j_*} & H_*(U_1 \cup U_2)
 \end{array}$$

où j_* est le morphisme induit par l'inclusion au niveau des chaînes. La flèche du bas est un isomorphisme, et celle du haut une surjection car

$H_*(f|_{U_1 \cup U_2})_k$ est, par hypothèse, invariant par subdivision linéaire.

L'injectivité ou la surjectivité de la flèche de droite résulte alors de l'injectivité ou de la surjectivité de la flèche de gauche.

6. CAS $k = k_0$

On a dû omettre le cas $k = k_0$ car l'homologie $H_*^{(p)}(f)_{k_0}$ n'est pas définie pour une application de classe C^{k_0} . Mais le théorème S pour $k = k_0$ se déduit aisément du même théorème pour $k = k_0 - 1$.

Soit $f : \lambda_2 \rightarrow \lambda_1^n$ une submersion de classe C^{k_0} , $k_0 \geq 2$, et désignons par $p_2^k : C(f)_k \rightarrow C(\lambda_2)$ le morphisme injectif p_2 . Soient $q \leq n$ et $c \in C_q(\lambda_2)$ une chaîne telle que $oc \in \text{Im } p_2^{k_0}$. Alors $oc \in \text{Im } p_2^{k_0-1}$, ou $k_0 - 1 \geq 1$, et il existe une chaîne $c' = \sum_{s \in C'} a_s s \in \text{Im } p_2^{k_0-1}$ telle que $oc' \in oc$ et $c - c' \in B(\lambda_2)$, en vertu de la partie du théorème S déjà établie. Il existe par ailleurs, quel que soit $\alpha > 0$, une chaîne $c_\alpha = \sum_{s \in C'} a_s s_\alpha$ de simplexes

k_0 -fois différentiables de X_2 telle que $\partial c_\alpha = \partial c'$ et $d(s_\alpha, s) \leq \alpha$, où d est une métrique quelconque compatible avec la topologie C^1 de Whitney sur $C^1(\Delta_q, X_2)$. Puisque $f_\# : C^1(\Delta_q, X_2) \rightarrow C^1(\Delta_q, X_1)$ est continue, il existe donc pour tout $\beta > 0$, une chaîne $c_\beta = \sum_{s \in c'} a_s s_\beta$ de simplexes k_0 -fois différentiables de X_2 telle que $\partial c_\beta = \partial c'$, $d(s_\beta, s) \leq \beta$ sur $C^1(\Delta_q, X_2)$, et $d(f \circ s_\beta, f \circ s) \leq \beta$ sur $C^1(\Delta_q, X_1)$. Les simplexes $f \circ s$, pour $s \in c'$, étant des immersions injectives, il en va de même de $f \circ s_\beta$ pour $\beta \leq \beta_0$ suffisamment petit. Enfin, pour $\beta_1 \leq \beta_0$ assez petit, $c' - c_{\beta_1} \in B(X_2)$. Donc $c_{\beta_1} \in \text{Im } p_2^{k_0}$, et c est représentée par c_{β_1} .

7. HOMOLOGIE SECTIONNELLE RELATIVE d'une SUBMERSION.

Le théorème S s'étend aisément au cas relatif. Appelons k_0 -submersion un k_0 -diagramme dans lequel f et f_0 sont des submersions :

$$\begin{array}{ccc} Y_2 & \xrightarrow{g_2} & X_2 \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1} & X_1 \end{array}$$

et posons $\ell = \dim Y_1$ et $n = \dim X_1$ ($\ell \leq n$).

THÉORÈME S (cas relatif). Soient $(f, f_0; g)_{k_0}$ une k_0 -submersion,

$2 \leq k_0 \leq \infty$, $j_* : H_*(f)_k \rightarrow H_*(f, f_0; g)_k$, et $(p_2)_* : H_*(f, f_0; g)_k \rightarrow H_*(X_2, Y_2; g_2)$

le morphisme défini au §1. Alors, quel que soit $1 \leq k \leq k_0$:

(i) Si $\ell < n$: $(p_2)_*$ est un isomorphisme pour $* \leq \ell$ et une surjection pour $* = \ell + 1$, et j_* est un isomorphisme pour $* > \ell + 1$.

(ii) Si $\ell = n$: $(p_2)_*$ est un isomorphisme pour $* < \ell$ et une surjection pour $* = \ell$, et j_* est un isomorphisme pour $* > \ell + 1$.

Ce théorème résulte du théorème S par application du lemme des cinq au diagramme de suites exactes longues induit par le diagramme :

HOMOLOGIE DE SHIH D'UNE SUBMERSION

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C(f)_k & \longrightarrow & C(f, f_0; g)_k & \longrightarrow & C(f_0)_k \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow p_2 & & \downarrow p_2 & & \downarrow p_2 \\
 0 & \longrightarrow & C(X_2) & \longrightarrow & C(X_2, Y_2; g_2) & \longrightarrow & C(Y_2) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

A P P E N D I C E

On a rassemblé ici les démonstrations de quelques énoncés techniques utilisés au cours de ce travail.

Démonstration du lemme 2.3-P. Nous considérons un complexe $c_p^{(q)}(V)_{P_k}$ dual au complexe $\tilde{C}_q^{(p)}(V)_{P_k}$. Soient

$$c_p^{(q)}(V)_{P_k} = \tilde{C}_q^{(p)}(V)_{P_k} \quad (c_p^{(q)}(V)_{P_k} = 0 \text{ pour } p < 0)$$

$$\text{et } \partial_p = \pi_p : c_p^{(q)}(V)_{P_k} \rightarrow c_{p-1}^{(q)}(V)_{P_k} \quad (\partial_p = 0 \text{ pour } p \leq 0) .$$

Ainsi, $\partial^2(c) = \pi_{p-1} \pi_p(c) = \pi_p \pi_{p-1}(c) = \pi_p(0) = 0$, et on note $h_*^{(q)}(V)_{P_k}$ l'homologie de ce complexe. Alors, $z_p^{(q)}(V)_{P_k} = \tilde{C}_q^{(p)}(V)_{P_k}$ et

$$\pi : \tilde{C}_q^{(p+1)}(V)_{P_k} \rightarrow \tilde{C}_q^{(p)}(V)_{P_k}$$

$$\text{s'écrit } \partial : c_{p+1}^{(q)}(V)_{P_k} \rightarrow z_p^{(q)}(V)_{P_k} ,$$

d'où l'énoncé du lemme 2.3-P est équivalent à la nullité de $h_{* \neq n-q}^{(q)}(V)_{P_k}$.

Il est suffisant de montrer que $h_{* \neq n-q}^{(q)}(\lambda) = 0$ où $\lambda \in S_q(V)_{P_k}$ et où $h_*^{(q)}(\lambda)$ est l'homologie du sous-complexe $c(\lambda) \subset c^{(q)}(V)_{P_k}$ constitué des chaînes ayant λ

pour support. En effet, soit $z \in z_p^{(q)}(V)_{P_k}$ et écrivons z sous la forme

$z = \sum_{\lambda \in \Lambda} z(\lambda)$ où $z(\lambda)$ est la sous-chaîne de z constituée des simplexes ayant même support λ . On a alors, quel que soit $1 \leq j \leq p$:

$$\pi_j(z) = 0 \Leftrightarrow \pi_j(z(\lambda)) = 0 \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda .$$

On peut dire plus : il est suffisant de montrer que $h_{* \neq n-q}^{(q)}(\sigma) = 0$ pour un simplexe $\sigma \in S_q(\mathbb{R}^n)_{P_k}$. Soient en effet $\lambda \in S_q(V)_{P_k}$ et $\sigma \in S_q(\mathbb{R}^n)_{P_k}$. Décomposant la restriction de TV à $\text{Im } \lambda$ en somme directe des fibrés triviaux tangent et normal à $\text{Im } \lambda$, il existe un difféomorphisme ξ de fibrés de classe C^{k-1} entre la restriction de $T\mathbb{R}^n$ à $\text{Im } \sigma$ et la restriction de TV à $\text{Im } \lambda$, appliquant fibré tangent sur fibré tangent et fibré normal sur fibré normal. Par conséquent, ξ induit un isomorphisme de $c^{(q)}(\sigma)$ sur $c^{(q)}(\lambda)$ et de $h_*^{(q)}(\sigma)$ sur $h_*^{(q)}(\lambda)$, utilisant le théorème de Stone-Weierstrass pour passer de $k-1$ à k .

On va montrer que $\mathfrak{h}_{* \neq n-q}^{(q)}(\sigma) = 0$ en procédant par induction sur q , partant de $q = n$. Il suffit d'établir :

- (i) quel que soit $\sigma \in S_n(\mathbb{R}^n)_{Pk}$, $\mathfrak{h}_{* \neq 0}^{(n)}(\sigma) = 0$;
 et (ii) si $\mathfrak{h}_{* \neq n-q-1}^{(q+1)}(\sigma) = 0$ quel que soit $\sigma \in S_{q+1}(\mathbb{R}^n)_{Pk}$, alors $\mathfrak{h}_{* \neq n-q}^{(q)}(\sigma) = 0$ quel que soit $\sigma \in S_q(\mathbb{R}^n)_{Pk}$.

L'énoncé (i) est trivial. Démontrons (ii). Soit $\sigma' \in S_q(\mathbb{R}^n)_{Pk}$. Montrer que $\mathfrak{h}_{* \neq n-q}^{(q)}(\sigma') = 0$ est équivalent à montrer le même résultat pour un simplexe $\sigma : \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire affine non-dégénéré.

Soit alors $z = \sum_{s \in Z} a_s(\sigma, \varphi_1(s), \dots, \varphi_p(s)) \in Z_p^{(q)}(\sigma)$, où $0 \leq p < n-q$ (pour $p > n-q$ ou $p < 0$, $C_p^{(q)}(\sigma) = 0$), et où $\varphi_j(s) : \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}_0^n$ est de classe C^k .

Ici, deux champs quelconques sont homotopes : chaque champ est homotope à un champ constant par la contractibilité de Δ_q , et deux champs sont homotopes par la connexité de \mathbb{R}_0^n (on suppose $n \geq 2$: pour $n = 0$ ou 1 , le théorème P est trivial).

Notons $B : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ l'application constante de Δ_q sur son barycentre b , et

$F : \Delta_q \times [0, 1] \rightarrow \Delta_q$ l'homotopie entre $\text{id}, B : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$, définie par

$$F(x, t) = (1-t)x + tb.$$

On appellera t-contraction l'application $F_t = F(\cdot, t) : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$. Pour $\varphi : \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}_0^n$

désignons par φ^t le composé $\varphi \circ F_t$, et par $F_{(t_1, \dots, t_p)}(z)$ la chaîne

$$\sum_{s \in Z} a_s(\sigma, \varphi_1^{t_1}(s), \dots, \varphi_p^{t_p}(s)).$$

On pose également $F_t(z) = F_{(t, \dots, t)}(z)$, $\Phi_j = \{\varphi_j(s) : s \in Z\}$, et

$$z(\varphi_j) = \sum_{\substack{s \in Z \text{ tel que} \\ \varphi_j(s) = \varphi_j}} a_s \quad \text{pour } \varphi_j \in \Phi_j. \quad \text{Evidemment, } z = \sum_{\varphi_j \in \Phi_j} z(\varphi_j).$$

Remarquons enfin que la t-contraction induit un endomorphisme F_t de $C^{(q)}(\sigma)$,

car $D\sigma : \Delta_q \rightarrow L(H^q, \mathbb{R}^n)$ est constante. Alors, $F_1(z) \in Z_p^{(q)}(\sigma)$ est

constitué de champs constants et appartient donc à $\mathfrak{C}_p^{(q)}(\sigma)$. Il reste à montrer que $z - F_1(z) \in \mathfrak{C}_p^{(q)}(\sigma)$, ce qu'on établira en montrant que, pour $\epsilon \in (0, 1]$ suffisamment petit, $z = F_0(z) \sim F_\epsilon(z) \sim F_{2\epsilon}(z) \sim \dots \sim F_{m\epsilon}(z) \sim \dots \sim F_1(z)$ où " \sim " est l'homologie dans $\mathfrak{C}^{(q)}(\sigma)$.

Soit $\varphi_i \in \tilde{\mathfrak{C}}_i$, pour $1 \leq i \leq p$ quelconque. Il est clair que $\pi_j(z(\varphi_i)) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$, $j \neq i$. L'intégration du champ φ_i le long de σ par l'application $\text{Exp} : \text{TR}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donne lieu, comme dans la démonstration de la prop. 2.1 (où le rôle du champ φ_{p+1} est ici tenu par le champ φ_i) au prisme

$$g(s) = (g_\sigma, g_1, \dots, \hat{g}_1, \dots, g_p) : \Delta_q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times V_{p-1}(\mathbb{R}^n)$$

quel que soit $s \in z(\varphi_i)$. Désignons par :

$$\Theta(s) = (\theta_\sigma, \theta_1, \dots, \hat{\theta}_1, \dots, \theta_p)$$

l'image par $g(s) : C_{q+1}(\Delta_q \times \mathbb{R})_{pk} \rightarrow C_{q+1}^{(p-1)}(\mathbb{R}^n)_{pk}$ de la chaîne constituée du seul simplexe $C_{(b,1)} j_0^q$ où $j_0^q : \Delta_q \rightarrow \Delta_q \times \mathbb{R}$ est l'identification de Δ_q à $\Delta_q \times \{0\}$ et où $C_{(b,1)}$ est le cône ordinaire de sommet $(b, 1)$. On vérifie aisément que la chaîne

$$\Theta(z(\varphi_i)) = \sum_{s \in z(\varphi_i)} a_s \Theta(s)$$

appartient bien à $Z_{p-1}^{(q+1)}(\Theta_i(\sigma))$, car $z(\varphi_i)$ vérifie les contraintes $\pi_j = 0$ pour tout $1 \leq j \neq i \leq p$. Par hypothèse d'induction (ii), $\Theta(z(\varphi_i)) \in \mathfrak{C}_{p-1}^{(q+1)}(\Theta_\sigma)$: il existe donc $\Omega(z(\varphi_i)) \in \mathfrak{C}_p^{(q+1)}(\Theta_\sigma)$ tel que

$$\pi \Omega(z(\varphi_i)) = \Theta(z(\varphi_i)) .$$

Prenant de chaque côté la 0-ème face, on obtient :

$$\pi \left(\sum_{t \in \Omega(z(\varphi_i))} b_t(\sigma, F_0(\varphi_1(t)), \dots, F_0(\varphi_p(t))) \right) = \sum_{s \in z(\varphi_i)} a_s(\sigma, \varphi_1(s), \dots, \hat{\varphi}_1, \dots, \varphi_p(s))_{(1)}$$

Or, φ_i est le champ unitaire normal de la 0-ème face σ dans Θ_σ , d'où

l'appartenance à $S_{q+1}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{PK}$ d'un simplexe $t = (\theta_\sigma, \varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)) \in \Omega(z(\varphi_1))$ implique :

$$(\sigma, F_0(\varphi_1(t)), \dots, F_0(\varphi_{i-1}(t)), \varphi_i, F_0(\varphi_i(t)), \dots, F_0(\varphi_p(t))) \in S_q^{(p+1)}(\mathbb{R}^n)_{PK},$$

quel que soit $t \in \Omega(z(\varphi_1))$. Ainsi, (1) donne lieu à :

$$\begin{aligned} \pi\left(\sum_{t \in \Omega(z(\varphi_1))} b_t(\sigma, F_0(\varphi_1(t)), \dots, F_0(\varphi_{i-1}(t)), \varphi_i, F_0(\varphi_i(t)), \dots, F_0(\varphi_p(t)))\right) = \\ = \sum_{s \in z(\varphi_1)} a_s(\sigma, \varphi_1(s), \dots, \varphi_p(s)) = z(\varphi_1), \end{aligned}$$

équation qu'on notera : $\pi(c(\varphi_1)) = z(\varphi_1)$. Posant $c_i(z) = \sum_{\varphi_1 \in \Phi_1} c(\varphi_1)$, on a

$\pi(c_i(z)) = z$. Remarquons cependant que $c_i(z)$ n'appartient pas à $C_{p+1}^{(q)}(\sigma)$, la contrainte $\pi_i = 0$ n'étant pas vérifiée.

Soit $\epsilon \in (0, 1]$ suffisamment petit pour que, quels que soient $1 \leq i, i_0 \leq p$:

$$F_{(m\epsilon, \dots, m\epsilon, (m-1)\epsilon, \dots, (m-1)\epsilon)}(c_i(z)) \in C_q^{(p+1)}(\mathbb{R}^n)_{PK},$$

\uparrow
 i_0 -ème position

quel que soit $1 \leq m \leq \frac{1}{\epsilon}$, c'est-à-dire suffisamment petit pour que le p -champ de chaque simplexe de cette chaîne soit un p -repère en position générale par rapport au support. Un tel nombre existe : il suffit, pour chaque $1 \leq i \leq p$ et chaque $t \in c_i(z)$, de choisir $\delta(t) > 0$ suffisamment petit pour que le tuple

$(\text{Im } D\sigma, \varphi_1(t)(x_1), \dots, \varphi_{p+1}(t)(x_{p+1}))$ engendre un $(q+p+1)$ -espace quelle que soit la boule de Δ_q de rayon $\delta(t)$ contenant les points x_1, \dots, x_{p+1} . Posons

$$\delta = \min_{\substack{t \in c_i(z) \\ 1 \leq i \leq p}} \delta(t) \text{ et } \epsilon_1 \in (0, 1] \text{ assez petit pour que } |F_{\epsilon_1}(x) - x| < \delta$$

quel que soit $x \in \Delta_q$. Notons enfin $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$ tel que $1/\epsilon$ soit un entier. On a alors, quels que soient $1 \leq i, i_0 \leq p$ et $1 \leq m \leq 1/\epsilon$

$$F_{(m\epsilon, \dots, m\epsilon, (m-1)\epsilon, \dots, (m-1)\epsilon)}(c_i(z)) \in C_q^{(p+1)}(\mathbb{R}^n)_{PK},$$

\uparrow
 i_0 -ème position

car $|F_{m\epsilon}(x) - F_{(m-1)\epsilon}(x)| = |F_\epsilon(x) - x| \leq |F_{\epsilon_1}(x) - x| < \delta$. Bien entendu, cette chaîne vérifie, comme $c_i(z)$, les contraintes $\pi_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$, $j \neq i$.

Donc, quels que soient $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq m \leq 1/\epsilon$, la chaîne

$$F(\underbrace{m\epsilon, \dots, m\epsilon}_{i\text{-ème position}}, \underbrace{(m-1)\epsilon, \dots, (m-1)\epsilon}_{i\text{-ème position}})^{(c_i(z))} - F(\underbrace{m\epsilon, \dots, m\epsilon}_{i\text{-ème position}}, \underbrace{(m-1)\epsilon, \dots, (m-1)\epsilon}_{i\text{-ème position}})^{(c_i(z))}$$

appartient à $C_{p+1}^{(q)}(\sigma)$ car ici toutes les contraintes $\pi_j = 0$ sont vérifiées quel que soit $1 \leq j \leq p$, même pour $j = i$. Cette chaîne a pour bord

$$F(\underbrace{m\epsilon, \dots, m\epsilon}_{i\text{-ème position}}, \underbrace{(m-1)\epsilon, \dots, (m-1)\epsilon}_{i\text{-ème position}})^{(z)} - F(\underbrace{m\epsilon, \dots, m\epsilon}_{i\text{-ème position}}, \underbrace{(m-1)\epsilon, \dots, (m-1)\epsilon}_{i\text{-ème position}})^{(z)} \in \mathcal{B}_p^{(q)}(\sigma).$$

Ainsi, on a dans $C^{(q)}(\sigma)$, les homologies entre les contractions successives :

$$z = F_0(z) \sim F_{(\epsilon, 0, \dots, 0)}(z) \sim F_{(\epsilon, \epsilon, 0, \dots, 0)}(z) \sim \dots \sim F_{\epsilon}(z) \quad (m = 1 \text{ et } 1 \leq i \leq p)$$

$$F_{\epsilon}(z) \sim F_{(2\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon)}(z) \sim F_{(2\epsilon, 2\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon)}(z) \sim \dots \sim F_{2\epsilon}(z) \quad (m = 2 \text{ et } 1 \leq i \leq p)$$

$$\vdots$$

$$F_{(\frac{1}{\epsilon}-1)\epsilon}(z) \sim F_{(\frac{1}{\epsilon}\epsilon, (\frac{1}{\epsilon}-1)\epsilon, \dots, (\frac{1}{\epsilon}-1)\epsilon)}(z) \sim \dots \sim F_{\frac{1}{\epsilon}\epsilon}(z) = F_1(z) \quad (m = \frac{1}{\epsilon} \text{ et } 1 \leq i \leq p).$$

$$\text{Donc } z \sim F_1(z) \sim 0.$$

Démonstration du lemme 2.3-S.

Soient $f: X_2 \rightarrow X_1^n$ une submersion de classe C^{k_0} , $2 \leq k_0 \leq \infty$, et des entiers $1 \leq k \leq k_0 - 1$, $p \geq 0$, et $q < n - p$ fixés. On va montrer que $\pi: \tilde{C}_q^{(p+1)}(f)_k \rightarrow \bar{C}_q^{(p)}(f)_k$ est surjectif en utilisant le lemme 2.3-P. La démonstration suit essentiellement les mêmes idées que celles utilisées dans la démonstration de la proposition 2.1 (ii) et au §4.

Pour $(\lambda_1, \lambda_2) \in S_q(f)_k$, notons $S_q^{(p)}(\lambda_1, \lambda_2)$ le sous-ensemble de $S_q^{(p)}(f)_k$ des simplexes de support (λ_1, λ_2) , et $C_q^{(p)}(\lambda_1, \lambda_2) \subset C_q^{(p)}(f)_k$ le sous-groupe librement engendré par $S_q^{(p)}(\lambda_1, \lambda_2)$. Posons :

$$\tilde{C}_q^{(p+1)}(\lambda_1, \lambda_2) = C_q^{(p+1)}(\lambda_1, \lambda_2) \cap \tilde{C}_q^{(p+1)}(f)_k$$

$$\text{et } \bar{C}_q^{(p)}(\lambda_1, \lambda_2) = C_q^{(p)}(\lambda_1, \lambda_2) \cap \bar{C}_q^{(p)}(f)_k.$$

On définit de manière semblable $\tilde{C}_q^{(p+1)}(\lambda_1)$ et $\bar{C}_q^{(p)}(\lambda_1)$, pour $\lambda_1 \in S_q(X_1)_{Pk}$. Il est suffisant de montrer que, quel que soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in S_q(f)_k$,

$$\pi : \tilde{C}_q^{(p+1)}(\lambda_1, \lambda_2) \longrightarrow \bar{C}_q^{(p)}(\lambda_1, \lambda_2)$$

est surjectif. Or, par la démonstration du lemme 2.3-P, $\pi_p^{(q)}(\lambda_1) = 0$, c'est-à-dire $\pi : \tilde{C}_q^{(p+1)}(\lambda_1) \rightarrow \bar{C}_q^{(p)}(\lambda_1)$ est surjectif.

Soit $c \in \bar{C}_q^{(p)}(\lambda_1, \lambda_2)$ une chaîne quelconque. On commence par la rendre régulière en multipliant chaque champ $\mu_j(s)$ pour $1 \leq j \leq p$ et $s \in c$, par une constante réelle strictement positive $\delta_j(\mu_j s) \in \mathbb{R}^+$ convenablement choisie : $\mu_j(s) = (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \delta_j(\mu_j s) \mu_j(s) = (\delta_j(\mu_j s) \cdot \varphi_1, \delta_j(\mu_j s) \cdot \varphi_2)$, le produit étant celui donné par la structure de fibré vectoriel sur TX_1 et TX_2 . On exige également que les fonctions $\delta_j : \{\mu_j(s) : s \in c\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ choisies soient telles que :

$$\mu_j(s) \neq \mu_j(s') \Rightarrow \delta_j(\mu_j s) \mu_j(s) \neq \delta_j(\mu_j s') \mu_j(s') \quad (1)$$

Appelons c_0 la chaîne régulière ainsi obtenue de c . Puisque δ_j ne dépend que de $\mu_j(s)$, il est clair que $\pi_j(c_0) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$. Ainsi, c_0 est une chaîne régulière de $\bar{C}_q^{(p)}(\lambda_1, \lambda_2)$. Alors $p_1(c_0)$ appartient à $\bar{C}_q^{(p)}(\lambda_1)$, et il existe donc une chaîne $e \in \tilde{C}_q^{(p+1)}(\lambda_1)$ telle que $\pi(e) = p_1(c_0)$. On relève e en une chaîne $d_0 \in \tilde{C}_q^{(p+1)}(\lambda_1, \lambda_2)$ telle que $\pi d_0 = c_0$ de la façon suivante.

En tant que chaîne régulière, c_0 induit, pour chaque $1 \leq j \leq p$, une application $\sigma_j : A_j = \{p_1 \mu_j(s) : s \in c_0\} \subset S_q^{(1)}(\lambda_1) \rightarrow S_q^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2)$ définie par $\sigma_j(p_1 \mu_j(s)) = \mu_j(s)$. Alors, pour $t \in e$, on relève $\mu_j(t)$ par σ_j si $\mu_j(t) \in A_j$; sinon, on relève $\mu_j(t)$ sur un champ k -fois différentiable de n -plans horizontaux du fibré $TX_2|_{\text{Im } \lambda_2} \xrightarrow{Df} TX_1|_{\text{Im } \lambda_1}$. Il est clair que ce relevé d_0 de la chaîne e appartient à $\tilde{C}_q^{(p+1)}(\lambda_1, \lambda_2)$ et que $\pi d_0 = c_0$. Enfin, il ne reste plus qu'à ramener d_0 sur une chaîne $d \in \tilde{C}_q^{(p+1)}(\lambda_1, \lambda_2)$ telle que $\pi d = c$: il suffit, pour cela, de multiplier $\mu_j(t)$, $t \in d_0$, par $1/\delta_j(\mu_j s)$ si $\mu_j(t) = \delta_j(\mu_j s) \mu_j(s)$ pour un certain $\mu_j(s) \in \{\mu_j(s) : s \in c\}$ (unique par la ligne (1)), et par 1 sinon.

Démonstration de l'inégalité du triangle pour la métrique 0-fine.

Soient F un espace vectoriel réel et $\| \cdot \|$ une norme sur F . On montre que l'application $d_0 : F \times F \rightarrow [0, 2]$ définie par :

$$d_0(x, y) = \begin{cases} \frac{|x-y|}{\max(|x|, |y|)} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est une métrique sur F . Les deux premiers axiomes d'une métrique sont évidents.

Il reste à vérifier l'inégalité du triangle :

$$d_0(x, y) \leq d_0(x, z) + d_0(z, y)$$

quel que soient $x, y, z \in F$. Si $0, x, y, z$ ne sont pas tous distincts, cette inégalité est évidente. On suppose donc $0, x, y, z$ tous distincts.

Si $|z| \leq \max(|x|, |y|)$, on a :

$$\frac{|x-y|}{\max(|x|, |y|)} \leq \frac{|x-z| + |z-y|}{\max(|x|, |y|)} \leq \frac{|x-z|}{\max(|x|, |z|)} + \frac{|z-y|}{\max(|z|, |y|)}.$$

Supposons que $|z| > \max(|x|, |y|)$. Il est clair qu'il suffit de démontrer l'inégalité du triangle dans un sous-espace de dimension trois, c'est-à-dire dans \mathbb{R}^3 que l'on munit de sa norme usuelle. Si $|x| \neq |y|$, supposons $|x| > |y|$. Alors, $|z| > |x| > |y|$. On doit montrer que :

$$\frac{|x-y|}{|x|} \leq \frac{|x-z| + |z-y|}{|z|} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z|}{|x|} \leq \frac{|x-z| + |z-y|}{|x-y|} \quad (2)$$

Faisant varier l'origine 0 dans la direction \vec{Ox} jusqu'au point où $|x| = |y|$, on laisse invariant le membre de droite de (2), en augmentant le membre de gauche car $|z| > |x|$. Il suffit donc de démontrer (2) dans le cas où $|z| > |x| = |y|$.

Or, (2) est équivalent à

$$|z| \leq |x| \frac{(|x-z| + |z-y|)}{|x-y|} \quad (3)$$

Fixons le triangle x, y, z , mais faisons varier 0 de sorte que

$|x| = |y| = \text{constante}$. Alors, 0 trace un cercle C centré au point milieu de \overline{xy} , orthogonal à $x - y$. Le membre de droite de (3) demeure inchangé, tandis que $|z|$ est maximisé quand $0 \in C \cap P$ où P est un espace affine de dimension 2 contenant x, y et z . Il suffit donc d'établir (1) dans \mathbb{R}^2 .

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ avec $|z| > |x| = |y|$, où $0, x, y, z$ sont tous distincts. Fixons $0, x$ et y et laissons varier z avec $|z| > |x| = |y|$. Si

(1) est faux, c'est dire que

$$f(z) = \frac{|x-z| + |z-y|}{|z|} - \frac{|x-y|}{|x|}$$

devient strictement négative en z_0 hors de la boule fermée $\bar{B}_{|x|}(0)$. Or

$$\frac{|x-z| + |z-y|}{|z|} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 2 \text{ et } \frac{|x-y|}{|x|} \leq 2. \text{ Il existe donc un réel } R > 0 \text{ tel que}$$

$z_0 \in B_R(0)$ et que $f(z) > f(z_0)$ quand $z \in \partial B_R(0)$. De plus, f est positive sur $\partial B_{|x|}(0)$ par A). Donc, le minimum de la restriction de f à l'anneau fermé $\bar{B}_R(0) - B_{|x|}(0)$ ne peut avoir lieu sur le bord de l'anneau. Il a donc lieu en un point critique de f . Soit donc z le minimum de f sur $\bar{B}_R(0) - B_{|x|}(0)$. Alors, $Df(z) = 0$ et $f(z) < 0$ car $f(z_0) < 0$. Et

$$Df(z) = 0 \Leftrightarrow D_{\psi} f(z) = D_{\varphi} f(z) = 0,$$

où ψ est un vecteur unitaire dans la direction de z et où φ est orthogonal à ψ . Or,

$$D_{\varphi} f = \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)|z| - (|x-z| + |z-y|)0}{|z|^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha + \cos \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \pi \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 \text{ car } \varphi \perp \vec{Oz}.$$

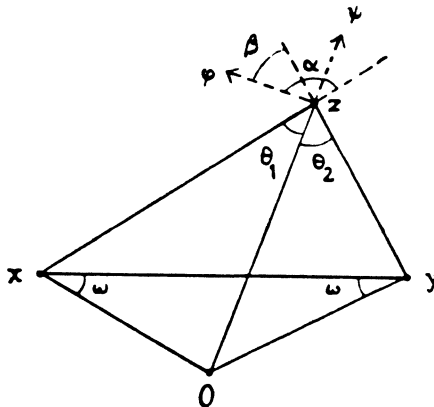


Figure 6

Et désignant par θ l'angle $\theta_1 = \theta_2$,

$$D_{\psi} f = \frac{2 \cos \theta |z| - (|x-z| + |z-y|)}{|z|^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \theta = \frac{|x-z| + |z-y|}{|z|}.$$

Or ceci implique que $\theta = \omega$. En effet :

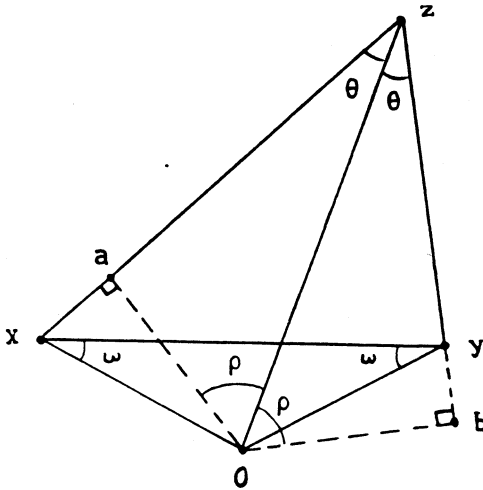


Figure 7

$$2 \cos \theta = \frac{|z-a| + |z-b|}{|z|} = \frac{|x-z| + |z-y|}{|z|},$$

d'où $|x-a| = |y-b|$.

Ceci entraîne que $\angle(x, 0, a) = \angle(y, 0, b)$, et on en conclut :

$$\angle(x, 0, y) = \pi - 2\omega = 2\rho + \angle(x, 0, a) - \angle(y, 0, b) = 2\rho,$$

$$\Leftrightarrow \omega = \pi/2 - \rho = \pi/2 - (\pi/2 - \theta) = \theta.$$

Enfin, l'égalité $\theta = \omega$ conduit à

$$f(z) = \frac{|x-z| + |z-y|}{|z|} - \frac{|x-y|}{|x|} = 2 \cos \theta - 2 \cos \omega = 0,$$

ce qui est contradictoire.

Démonstration de la proposition 3.7. (Voir également [13], §5, [14] et [15], p. 358 où des résultats analogues sont établis.)

La construction d'une suite fine et régulière de subdivisions linéaires donnée ici s'appuie sur une idée géométrique simple. Elle a l'avantage de rendre intuitivement claire la démonstration du caractère "morphisme" de ces subdivisions (recollement des faces).

Appelons hypercoupe de Δ_q une coupe de $\Delta_q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ selon un plan de dimension $q-1$ inclus dans l'hyperplan $H_q \supset \Delta_q$, et notons, pour $q \geq 1$ et $j \geq 1$, $P(q,j)$ l'ensemble des q -polytopes obtenus en opérant sur Δ_q j hypercoupes régulièrement distancées parallèlement à toute hyperface de Δ_q . Pour une hyperface F_i de Δ_q , cela signifie que les coupes sont déterminées par j $(q-1)$ -plans distincts $J_{i,1}, \dots, J_{i,j}$ dans H_q , parallèles à F_i , et tels que :

$$\text{dist}(F_i, J_{i,1}) = \text{dist}(J_{i,1}, J_{i,2}) = \dots = \text{dist}(J_{i,j-1}, J_{i,j}) = \text{dist}(J_{i,j}, a_i)$$

où a_i est le sommet de Δ_q opposé à F_i . Notons $K(q,j)$ le complexe simplicial obtenu de la subdivision barycentrique des polytopes de $P(q,j)$, qui donne lieu à une triangulation linéaire $(K(q,j), 1_{\Delta_q}, \theta(q,j))$ de (Δ_q, θ_q) où $\theta(q,j)$ est induit par l'orientation θ_q de Δ_q . Or, pour une hyperface quelconque F_i de Δ_q , $K(q,j) \cap F_i$ est un sous-complexe simplicial de $K(q,j)$ et il est évident que l'injection $V_i: \Delta_{q-1} \hookrightarrow \Delta_q$ induit un isomorphisme de $K(q-1,j)$ sur $K(q,j) \cap F_i$.

Fixons j et laissons q libre. Soit $\omega(q,j)$ un ordre total des sommets de $K(q,j)$ pour tout $q \geq 1$, tel que l'isomorphisme de $K(q-1,j)$ sur $K(q,j) \cap F_i$ induit par V_i conserve la relation d'ordre des sommets. On définit la subdivision

$\gamma^j = (\gamma_q^j)_{q \geq 0}$ par $\gamma_0^j = 1_{\Delta_0}$ et, si $q \geq 1$, par la chaîne de triangulation linéaire

$$\gamma_q^j = c((K(q,j), 1_{\Delta_q}, \theta(q,j)), \omega(q,j)) \in C_q(\Delta_q)_L.$$

Cette définition satisfait bien à la définition 1.2. Il est clair que la suite $\{\gamma^j\}_{j \geq 1}$ est fine. Elle est régulière car le type d'un polytope est invariant par similitude et l'ensemble $\bigcup_{j \geq 1} P(q,j)$ contient un nombre fini d'éléments à similitude près.

Démonstration du lemme 3.15.

Voir plus loin.

Démonstration du lemme 3.17.

Définissons d'abord la fonction \tilde{f} . On notera a, b et c ses trois arguments, où a et b sont des entiers tels que $a \geq 0$ et $b > 0$, et où $c \in [0, 1]$.

Soit A_V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension $\dim A_V \geq a+2$, et soit $\alpha \in S(A_V)$ la sphère unité de A_V centrée à l'origine. Notons $K(A_V, \alpha, c)$ le double cône ouvert dans A_V de sommet 0 , de centre la droite vectorielle contenant α , et dont le sinus du rayon angulaire est c , et désignons par $K^C(A_V, \alpha, c)$ le fermé $A_V - K(A_V, \alpha, c)$. Donnons-nous b sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimension a , V_j , $1 \leq j \leq b$, inclus dans $K^C(A_V, \alpha, c)$.

Définissons $\tilde{f}: S(A_V) \rightarrow [0, 1]$ par :

$$\tilde{f}(v) = \begin{cases} \min_{1 \leq j \leq b} \text{vol}(V_j, v, \alpha) & \text{si } a > 0 \\ \text{vol}(v, \alpha) & \text{si } a = 0 \end{cases},$$

où on a identifié, comme d'habitude, v et α aux espaces vectoriels $[v]$ et $[\alpha]$.

Cette fonction est continue. Puisque $\dim A_V = a+2$ et que $\dim V_j = a$, cette fonction est presque partout strictement positive quand $c > 0$. Donc $\sup_{v \in S(A_V)} \tilde{f}(v) > 0$ quand $c > 0$. Désignons par $P = P(V_1, \dots, V_b) \in S(A_V)$ un point tel que :

(i) la droite vectorielle $[P]$ passant par P est transverse aux espaces V_j ($1 \leq j \leq b$) si $a > 0$, et (ii) \tilde{f} atteint son maximum en P .

Ces deux conditions peuvent être satisfaites en même temps : c'est évident si \tilde{f} est identiquement nulle ; sinon, le maximum de \tilde{f} est strictement positif et se produit donc en des points où (i) est satisfaite. Posons $\tilde{f}(V_1, \dots, V_b) = \frac{1}{2} \tilde{f}(P(V_1, \dots, V_b))$. Alors, $\tilde{f}(V_1, \dots, V_b)$ est une fonction continue dont chaque variable appartient au compact $G_a(K^C(A_V, \alpha, c)) \subset G_a(A_V)$. Donc :

$$\inf_{(V_1, \dots, V_b) \in (G_a(K^c(A_V, \alpha, c)))^b} \tilde{f}(V_1, \dots, V_b) > 0 \quad \text{si } c > 0,$$

que l'on note $\tilde{f}(a, b, c, \dim A_V)$ qui, évidemment, ne dépend pas du choix particulier de A_V ni de celui de α . On pose :

$$\tilde{f}(a, b, c) = \min_{a+2 \leq \dim A_V \leq n} \tilde{f}(a, b, c, \dim A_V).$$

Remarquons que $\tilde{f}(0, b, c) = \frac{1}{2}$ et que $\tilde{f}(a > 0, b, 0) = 0$. C'est bien une fonction positive, continue et croissante en fonction du dernier argument, qui vérifie $\tilde{f}(a, b, c > 0) > 0$. Il est clair également que $\tilde{f}(a, b, c)$ est décroissante en fonction de b .

Soient maintenant $w \in \mathcal{Z}_\ell^{(h)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$, $\psi \in \mathbb{R}_0^n$, et A un sous-espace affine de \mathbb{R}^n de dimension au moins $\ell+2$ contenant les espaces $[\text{supp } r]_a$ pour $r \in w$ et admettant ψ comme vecteur tangent. Soient A_V le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n parallèle à A , et T une translation de \mathbb{R}^n telle que $T(A) = A_V$. Posons $a = \ell$, $b = |\{[\text{supp } r] : r \in w\}|$, $c = \text{vol}(w, \psi)$, $\alpha = \frac{\psi}{\|\psi\|}$ et V_j les espaces $[\text{supp } r]$ pour $r \in w$. On est ainsi ramené à la situation décrite plus haut : soit alors $P = P(V_1, \dots, V_b) = P(\{[\text{supp } r] : r \in w\}) \in S(A_V)$ où \tilde{f} atteint son maximum (il est clair que ni P ni \tilde{f} ne dépendent de l'ordre des espaces V_1, \dots, V_b) :

$$\tilde{f}(P) = \begin{cases} \min_{r \in w} \text{vol}([\text{supp } r], P, \psi) & \text{si } \ell > 0 \\ \text{vol}(P, \psi) & \text{si } \ell = 0 \end{cases}.$$

Par le choix de P , $[P]$ est transverse aux espaces $[\text{supp } r]$, $r \in w$, si $a > 0$. Donc, pour $u \in [P]$ suffisamment éloigné de l'origine, les espaces vectoriels $[C_u(T(\text{supp } r))]$ sont de dimension $\ell+1$ quel que soit $r \in w$, et la distance d_G entre $[C_u(T(\text{supp } r))]$ et $[[\text{supp } r], u]$ devient aussi petite que l'on veut. Il existe donc $u_0 \in [P]$ non nul tel que : (a) $\dim [C_{u_0}(T(\text{supp } r))]$ = $\ell+1$, et (b) $\min_{r \in w} \text{vol}([C_{u_0}(T(\text{supp } r))], \psi) \leq \frac{1}{2} \min_{r \in w} \text{vol}([[\text{supp } r], u_0], \psi)$.

Alors, le point $p = T^{-1}(u_0) \in A$ satisfait aux conclusions du lemme 3.17.

En effet, pour $r \in w$, $C_p(\text{supp } r) = T^{-1}(C_{u_0}(T(\text{supp } r)))$ et $C_{u_0}(T(\text{supp } r))$ est non-dégénéré par (a). Ensuite :

$$\begin{aligned} \text{vol}([C_p \text{supp } r], \psi) &= \text{vol}([C_{u_0}(T(\text{supp } r))], \psi) \\ &\geq \frac{1}{2} \min_{r \in w} \text{vol}([\text{supp } r], u_0, \psi) \quad \text{par (b)} \\ &\geq \begin{cases} \frac{1}{2} \min_{r \in w} \text{vol}([\text{supp } r], P, \psi) & \text{si } \ell > 0 \text{ par la prop. 3.11(i)} \\ \frac{1}{2} \text{vol}(P, \psi) & \text{si } \ell = 0 \end{cases} \\ &= \tilde{f}(\{[\text{supp } r] : r \in w\}) \\ &\geq \tilde{f}(\ell, |\{[\text{supp } r] : r \in w\}|, \text{vol}(w, \psi)) \\ &\geq \tilde{f}(\ell, |w|, \text{vol}(w, \psi)) \end{aligned}$$

car $|w| \geq |\{[\text{supp } r] : r \in w\}|$, et \tilde{f} est décroissante en fonction du second argument. Enfin, il est clair que p ne dépend que de $\{\text{supp } r : r \in w\}$, ψ et A .

Démonstration du lemme 3.15.

La démonstration de ce lemme est tout à fait semblable à la précédente : mais on maximise ici le produit du type par le volume, au lieu du seul volume, pour obtenir en même temps les conclusions b) et c) du lemme 3.15.

Démonstration du lemme 3.18.

Soient $\bar{B} \subset S^{n-1}$ une boule de rayon angulaire θ strictement positif, $\xi \geq 1$ et $1 \leq d < n$. Soit une suite $(E_1, \dots, E_\xi, x_1, \dots, x_\xi)$, où E_1 est un sous-espace vectoriel non nul de \mathbb{R}^n tel que $\max_{1 \leq i \leq \xi} \dim E_i = d$, $E_1 \cap \bar{B} \neq \emptyset$, et où $x_1 \in E_1 \cap \bar{B}$, et considérons la fonction $g : D = \bar{B} - \{x_1, \dots, x_\xi\} \rightarrow [0, 1]$ définie par $g(y) = \min_{1 \leq i \leq \xi} \text{vol}([y - x_i], E_i)$. C'est une fonction continue, n'admettant pas de

limite aux points x_i . Soit alors

$$g(E_1, \dots, E_\xi, x_1, \dots, x_\xi) = \frac{1}{2} \sup_{y \in D} g(y) > 0$$

et choisissons un point $x \in D$ tel que $g(x) \geq g(E_1, \dots, E_\xi, x_1, \dots, x_\xi)$, que l'on notera $x(E_1, \dots, E_\xi, x_1, \dots, x_\xi)$. Il est clair que ce point appartient à $\bar{B} - \bigcup_{1 \leq i \leq \xi} E_i$.

On vérifie aisément que $g(E_1, \dots, E_\xi, x_1, \dots, x_\xi)$ est une fonction strictement positive et continue en fonction des 2ξ paramètres qui varient sur un compact. Donc

$$\inf_{(E_1, \dots, E_\xi, x_1, \dots, x_\xi)} g(E_1, \dots, x_\xi) > 0,$$

nombre que l'on désigne par $g(\theta, d, \xi)$. C'est une fonction continue de la variable

$0 < \theta \leq \pi$. On pose $g(d, \xi) = \inf_{0 < \theta \leq \pi} g(\theta, d, \xi)$. Il reste à voir que $g(d, \xi)$ est strictement positive, ce qui revient à montrer que $\liminf_{\theta \rightarrow 0} g(\theta, d, \xi) > 0$. Il suffit pour cela de projeter la construction sur l'hyperplan affine $T_p(S^{n-1})$ par la projection radiale, $p \in S^{n-1}$ étant le centre de \bar{B} : on définit alors le même genre de fonction $g'(E'_1, \dots, E'_\xi, x'_1, \dots, x'_\xi)$, où E'_1 est le sous-espace affine de dimension $\dim E_1 - 1$ de $T_p(S^{n-1})$, $x'_1 \in E'_1 \cap \bar{B}_r(p)$ où $\bar{B}_r(p)$ est la boule de rayon r centrée en p dans l'espace $T_p(S^{n-1})$. Evidemment $g'(r, d, \xi)$ est invariant pour le paramètre $r \in (0, \infty)$. Donc $\liminf_{r \rightarrow 0} g'(r, d, \xi) > 0$, d'où

$\liminf_{\theta \rightarrow 0} g(\theta, d, \xi) > 0$. Le lemme est donc établi en posant

$$x = x(E_1, \dots, E_\xi, x_1, \dots, x_\xi).$$

RÉFÉRENCES

- [1] CAIRNS S.S., A simple triangulation method for smooth manifolds,
Bull. Amer. Math. Soc., 67 (1961), 389-390.
- [2] EILENBERG S., Singular homology in differentiable manifolds,
Ann. of Math. 48 (1947), 670-681.
- [3] EILENBERG S., STEENROD N., Foundations of algebraic topology,
Princeton University Press, 1952.
- [4] HU S.T., On singular homology in differentiable spaces,
Ann. of Math. 50 (1949), 266-269.
- [5] LALONDE F., Homologie de Shih et applications au problème de
Cauchy global, Thèse, Université de Montréal, 1983.
- [6] LALONDE F., Homologies non-singulières d'une variété et homologie
sectionnelle d'une submersion, Thèse d'Etat, Orsay, 1985.
- [7] LALONDE F., Homologie de plongements dans les variétés différentiables,
C.R. Acad. Sc. Paris, 299 (1984), série I, 987-990.
- [8] LALONDE F., Homologie de Shih d'une submersion,
C.R. Acad. Sc. Paris 299 (1984), série I, 1025-1028.
- [9] MAY J.P., Simplicial objects in algebraic topology,
Van Nostrand Mathematical Studies, 1967.
- [10] SHIH W., Un invariant algébrique associé à une application continue
et le problème de Cauchy global, C.R. Acad. Sc. Paris,
285 (1977), Série A, 333-336.
- [11] SHIH W., Une remarque sur le degré d'une application continue
et les équations aux dérivées partielles avec condition intégrable,
C.R. Acad. Sc. Paris, 292 (1981), Série I, 825-828.
- [12] THOM R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables,
Comment. Math. Helv. 28 (1954), 17-86.
- [13] THURSTON W., The theory of foliations of codimension greater than one,
Comment. Math. Helv., 49 (1974), 214-231.
- [14] WHITEHEAD J.H.C., On C^1 -complexes,
Ann. of Math., 41 (1940), 809-824.
- [15] WHITNEY H., Geometric integration theory,
Princeton University Press, 1957.

INDEX TERMINOLOGIQUE

- Complexe de chaînes géométrique, 11
- Complexe de Kan, 11
- Cône différentiable, 46
- Cône tildé, 46
- Epaississement, 71
- Fibration de Kan, 11
- Fine (suite de subdivisions linéaires), 39
- Froissement, 72
 - linéaire, 73
- Hypercoupe, 93
- k-diagramme, 12
- k-morphisme, 12
- k-submersion, 82
- Métrique 0-fine, 34
- Non-écrasé (simplexe), 60
- q-régulière (chaîne), 20
- (r)-application, 19
 - forte, 19
- Régulière (chaîne), 20
- Régulière (suite de subdivisions linéaires), 39
- Sans points antipodaux (chaîne), 60
- Sans torsion (simplexe), 31
 - (chaîne), 31
 - (morphisme), 64
- Simplicial (ensemble), 11
 - (morphisme), 11
- Subdivision linéaire, 16
- Support linéaire (simplexe à), 31
- Supports linéaires (chaîne à), 31
- t-contraction, 85
- Topologie 0-fine, 33
- Triangulation linéaire, 16
 - (chaîne de), 16
- Type d'un polytope, 39
 - d'une chaîne, 39
- Volume d'un simplexe, 46
 - d'une chaîne, 46

INDEX DES NOTATIONS

F_i	11	$\tau_2 : T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$	30
$S(c), C(c)$	11	\mathbb{R}_0^n	30
$H(V)_{Dk}, H(V)_{Pk}$	11	$\varphi_j : S^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk} \rightarrow S(\mathbb{R}_0^n)_{Dk}$	31
δ_k	13	$(\lambda, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$	31
$S(f)_k, C(f)_k, H(f)_k$	13	$D\lambda$	31
V_i	13	$[s]_a, [s]$	31
$C(f, f_0; g)_k, H(f, f_0; f)_k$	13	$L(s), L(\lambda)$	31
ξ_k	14	$\$^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Dk}$	32
$P_i : \delta_k \rightarrow \xi_k \quad (i=1,2)$	14	$\$^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Ik}, \$^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk}, \$^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Lk}$	33
$p_i : H_* \rightarrow H_* \circ P_i \quad (i=1,2)$	14	$S^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Ik}$	33
$c((K, h, \theta_K), \omega)$	16	d_0	34
$S(P)_L, C(P)_L$	16	$L_k(E, \mathbb{R}^n)$	36
$V_p(TV), \tilde{V}_p(TV)$	17	d_G	37
$\text{supp} : V_p(TV) \rightarrow V$	17	$T(P), T(c)$	39
ISL	17	$d(c)$	39
$S^{(p)}(V)_{Pk}, C^{(p)}(V)_{Pk}, H^{(p)}(V)_{Pk}$	17	$\text{Vol}(E), T(E)$	45
$S^{(p)}(f)_k, C^{(p)}(f)_k, H^{(p)}(f)_k$	18	$\text{Vol}(s; x), \text{vol}(\mathcal{A}(x)), \text{vol}(s), \text{vol}(c)$	46
$\text{supp} : S^{(p)}(f)_k \rightarrow S(f)_k$	18	$C_u \lambda, \hat{C}_u \lambda, \tilde{C}_u \lambda, \tilde{C}_{(u, \psi)} s$	46
$p_i : S^{(p)}(f)_k \rightarrow S^{(p)}(X_i)_{Pk}$	18	$K_\theta(x), \bar{K}_\theta(x), \bar{K}(s; j), \bar{K}(c; j)$	47
$\mu_j : S^{(p)}(f)_k \rightarrow S^{(1)}(f)_k$	18	$k(s; j), k(c; j), k(c)$	47
$\pi_j : S^{(p)}(f)_k \rightarrow S^{(p-1)}(f)_k$	18	$k_M(s; j), k_M(c; j), k_M(c)$	47
$\bar{C}^{(p)}(f)_k, \tilde{C}^{(p)}(f)_k$	18	$\text{vol}_M(s), \text{vol}_M(c)$	47
$\pi : S^{(p+1)}(f)_k \rightarrow S^{(p)}(f)_k$	20	$b(M)$	48
R	21	$E(s)$	48

$b(w)$	48
$d_0(w, L(w))$	48
$d(u, \bar{B}(\lambda))$	49
$T(u, L(\lambda))$	49
$\psi^{(h)}(R^n)_{Lk}$	60
$[[s]_a, \psi]_a$	61
$ST, ST^{(h)}$	64
E_p	71
$\mathfrak{I}_S(Z)_{Pk}, \mathfrak{I}_C(Z)_{Pk}$	72
fr_c	72
$\mathfrak{I}_C^{(h)}(Z)_{Pk}$	73
$c_p^{(q)}(V)_{Pk}, \kappa^{(q)}(V)_{Pk}$	84
$F_t, F_{(t_1, \dots, t_p)}$	85

Mémoires de la Société Mathématique de France - nouvelle série

- 1980 - 1 . J. Briançon, A. Galligo, M. Granger - Déformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites.
 2 . D. Bertrand, M. Waldschmidt - Fonctions abéliennes et nombres transcendants.
 3 . Y. Félix - Dénombrement des types de K-Homotopie. Théorie de la déformation.
 4 . L. Bégueri - Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos.
- 1981 - 5 . S. Ochanine - Signature modulo 16, invariants de Kervaire généralisés et nombres caractéristiques dans la K-théorie réelle.
 6 . Nguyen Tien Dai, Nguyen Huu Duc, F. Pham - Singularités non dégénérées des systèmes de Gauss-Manin réticulés. Appendice de Nguyen Tu Cuong.
- 1982 - 7 . P. Ellia - Sur les fibrés uniformes de rang $(n + 1)$ sur P^n .
- 1983 - 8 . M. Granger - Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels.
 9/10 . S. Halperin - Lectures on minimal models.
 11/12 . G. Henniart - La conjecture de Langlands locale pour $GL(3)$.
- 1984 - 13 . D. Bertrand, M. Emsalem, F. Gramain, M. Huttner, M. Langevin, M. Laurent, M. Mignotte, J.-C. Moreau, P. Philippon, E. Reyssat, M. Waldschmidt - Les nombres transcendants.
 14 . G. Dloussky - Structure des surfaces de Kato.
 15 . M. Duflo, P. Eymard, G. Schiffmann (éditeurs) - Analyse harmonique sur les groupes de Lie et les espaces symétriques.
 16 . F. Delon, D. Lascar, M. Parigot, G. Sabbagh (éditeurs) - Compte rendu de la table ronde de Logique, octobre 1983, Paris.
 17 . B. Perrin-Riou - Arithmétique des courbes elliptiques et théorie d'Iwasawa.
- 1985 - 18 . Corinne Blondel - Les représentations supercuspidales des groupes métaplectiques sur $GL(2)$ et leurs caractères.
 19 . J.P. Demailly - Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines.
 20 . F. Digne, J. Michel - Fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani.
 21 . M. Gros - Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique.
- 1986 - 22 . H. Maillot - Courbures et basculements des sous-variétés riemanniennes.
 23 . D. Barsky, P. Robba (Editeurs) - Introductions aux cohomologies p-adiques.
 24/25 . B. Helffer, J. Sjöstrand - Résonances en limite semi-classique.
- 1987 - 26 . F. Lescure - Compactifications équivariantes par des courbes.
 27 . M.-M. Virotte-Ducharme - Une construction du groupe de Fischer $F_1(24)$.
 28/29 . D. Perrin - Courbes passant par m points généraux de P^3 .
 30 . F. Lalonde - Homologie de Shih d'une submersion (Homologies non singulières des variétés feuilletées).