MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PHILIPPE ROBBA

Une introduction naïve aux cohomologies de Dwork

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 23 (1986), p. 61-105

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1986_2_23__61_0>

Société Mathématique de France
2e Série, Mémoire n° 23, 1986, p. 61-105

UNE INTRODUCTION NAÏVE AUX COHOMOLOGIES DE DWORK

Philippe ROBBA

La démonstration originelle de Dwork de la rationalité de la fonction zêta pour les variétés [Dw.1] semblait de nature non cohomologique. En fait, une théorie cohomologique p-adique était sous-jacente à cette démonstration ainsi que le montrait l'article [Dw.4], où Dwork déterminait le degré de la fonction zêta associée à une hypersurface sous des hypothèses de non-singularité.

Inspirés par les résultats de Dwork, Monsky et Washnitzer ont développé une théorie cohomologique p-adique formelle ([MW.1], [MW.2], [Mo.1]) d'inspiration plus géométrique.

Bien entendu, pour la vérification des autres conjectures de Weil, une théorie cohomologique complète était indispensable. Un échec majeur des théories de Dwork et Monsky-Washnitzer était de ne pouvoir démontrer en général la finitude des cohomologies (Monsky démontre la finitude dans le cas des courbes [Mo.1]).

Pour ces raisons, on a vu se développer, avec le succès que l'on connaît, les théories de cohomologie ℓ-adique et cristalline.

Néanmoins, la théorie de Dwork a, sur ses concurrentes, l'avantage de la simplicité, de son caractère explicite, et du point de vue "surconvergent". (Dans l'article de Berthelot, on verra comment le point de vue "surconvergent" peut être introduit dans la théorie cristalline de façon à obtenir une théorie qui englobe la théorie cristalline, la théorie de Dwork et la théorie de Monsky-Washnitzer). C'est pourquoi cette théorie a continué à rendre de grands services comme par exemple dans l'estimation du degré des fonctions L, l'étude p-adique des fonctions hypergéométriques ou des fonctions de Bessel, grâce à la théorie de la déformation, l'estimation de la valuation p-adique des racines des fonctions L, la formule de Gross-Koblitz pour les sommes de Gauss et sa généralisation.

0037-9484/1986/02 61 45 /$ 6.50

Malheureusement, les idées de base de la méthode de Dwork se trouvent bien cachées au milieu de complexes calculs. Nous espérons que cet exposé pourra servir de fil conducteur pour la lecture des articles utilisant les méthodes de Dwork. Si les idées de base n'ont pas changé depuis les premiers articles de Dwork, certaines améliorations techniques ont été apportées, surtout sous l'influence de la théorie de Monsky-Washnitzer. Nous avons autant que possible tenu compte de ces améliorations et nous n'avons pas hésité à nous éloigner des notations de Dwork pour souligner le côté cohomologique et pour travailler sans bases.

A titre d'application, nous montrons comment la formule de trace permet d'utiliser les cohomologies de Dwork pour l'étude des fonctions L (dès le début, Serre avait observé que les méthodes de Dwork s'appliquaient à l'étude des fonctions L).

Nous n'avons développé la théorie duale que dans le cas d'une variable car il nous semble que dans le cas de plusieurs variables, la théorie n'a pas atteint la même maturité. On pourra consulter [Dw.5][Dw.6][Sp.1] pour le cas de plusieurs variables.

Pour ce qui est des équations différentielles p-adiques étudiées par des méthodes cohomologiques, des résultats généraux ont été établis par Dwork et Katz dans le cas des équations de Picard-Fuchs. D'autres cas particuliers ont été étudiés, parfois de façon très approfondie, par Dwork, Adolphson, Sperber, Baldassarri. Il serait souhaitable que les résultats particuliers obtenus soient unifiés dans une théorie générale. Le paragraphe 6 de cet exposé espère, malgré ses défauts, effectuer un premier pas en vue de cette systématisation.

Nous n'avons pas mis de références au cours du texte. Nous renvoyons le lecteur à la bibliographie thématique pour les références correspondant aux différentes parties de cet exposé.

I.- L'ESPACE DAGUE DE MONSKY-WASHNITZER

Pour $x \in \mathbb{C}_p^n$ et $\nu \in \mathbb{N}^n$ on pose

$$|x| = \max_i |x_i| \quad , \quad x^\nu = x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} .$$

Si $x \in \mathbb{C}_p$, $\overline{x}$ désignera son image dans le corps résiduel.

Pour $P \in \mathbb{C}_p[X] = \mathbb{C}_p[X_1,\dots,X_n]$, $P = \Sigma_\nu a_\nu X^\nu$, on pose $|P| = |P|_{gauss} = \max_\nu |a_\nu|$.

Ceci définit une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{C}_p[X]$ qui s'étend à $\mathbb{C}_p(X)$.

Soit $g \in \mathbb{C}_p[X]$, avec $|g|_{gauss} = 1$. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{C}_p^n \ ; \ |g(x)| = 1 \quad \text{et} \quad |x| \leq 1\} = \{x \in \mathbb{C}_p^n \ ; \ |g(x)| \geq 1 \quad \text{et} \quad |x| \leq 1\}$$

(A est le relèvement en caractéristique 0 du complémentaire de l'hypersurface d'équation $\overline{g}(x) = 0$ en caractéristique p) et pour chaque $e < 1$ on considère les "voisinages tubulaires ouverts et fermés" de A

$$A_e^- = \{x \in \mathbb{C}_p^n \ ; \ |g(x)| > e \quad \text{et} \quad |x| < 1/e\}$$

$$A_e^+ = \{x \in \mathbb{C}_p^n \ ; \ |g(x)| \geq e \quad \text{et} \quad |x| \leq 1/e\} .$$

On note $\mathcal{H}(A_e^+)$ l'algèbre des éléments analytiques sur A_e^+ (à coefficients dans $\mathbb{C}_p$) c'est-à-dire l'espace des limites uniformes sur A_e^+ de fractions rationnelles sans singularités dans A_e^+.

L'espace dague $\mathcal{H}^\dagger(A)$ de Monsky-Washnitzer

$$\mathcal{H}^\dagger(A) = \bigcup_{e<1} \mathcal{H}(A_e^+) = \lim_{e<1} \text{ind}\ \mathcal{H}(A_e^+) .$$

On considérera aussi l'espace des fonctions analytiques sur A_e^-

$$\mathcal{A}(A_e^-) = \bigcap_{e'>e} \mathcal{H}(A_{e'}^+) = \lim_{e' \overset{>}{\to} e} \mathrm{proj}\, \mathcal{H}(A_{e'}^+) \quad .$$

On a également

$$\mathcal{H}^\dagger(A) = \bigcup_{e<1} \mathcal{A}(A_e^-) \quad .$$

Nous utiliserons souvent la propriété suivante : si la série entière à une variable $v = \Sigma_{i\geq o} a_i x^i$ a rayon de convergence R et si $u \in \mathcal{H}^\dagger(A)$ vérifie $|u|_{gauss} < R$, alors $v \circ u \in \mathcal{H}^\dagger(A)$.

On observera que $\mathcal{H}^\dagger(A)$ ne dépend que de A et donc que de $\bar{g} \in \mathbb{F}_\infty[X]$ (on note par $\mathbb{F}_\infty$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$), alors que $\mathcal{H}(A_e^+)$ et $\mathcal{A}(A_e^-)$ peuvent dépendre du choix du relèvement g de $\bar{g}$.

Nous avons adopté les définitions de fonctions analytiques à la Krasner par goût personnel, les définitions en terme de fonctions analytiques rigides à la Tate sont équivalentes (et peut-être mieux adaptées au problème considéré).

<u>Cas particulier de la dimension 1</u> (n = 1)

Alors l'ensemble A est de la forme

$$A = B(O,1^+) - \bigcup_{j=1}^{s} B(c_j,1^-)$$

où les $B(c_j,1^-)$ sont des classes résiduelles distinctes. On peut pour définir $\mathcal{H}^\dagger(A)$ supposer que $g(x) = \prod_j (x - c_j)$. Alors

$$A_e^+ = B(O,(1/e)^+) - \bigcup_{j=1}^{s} B(c_j,e^-)$$

et

$$\mathcal{H}(A_e^+) = \{f = \Sigma_{i\geq o} a_i x^i + \Sigma_j \Sigma_{i\geq 1} \frac{a_{j,i}}{(x - c_j)^i} \ ; \ \lim_i |a_i| e^{-i} = 0 \ ,$$

$\forall j \ \ \lim_i |a_{j,i}| e^{-i} = 0\}$.

2.- COHOMOLOGIE DE DE RHAM ASSOCIEE A UN MODULE DIFFERENTIEL

2.1.- Modules différentiels

Sur l'espace $\mathcal{H}^\dagger(A)$ agissent les dérivations $\partial_i = \frac{d}{dx_i}$, $1 \le i \le n$.

Un module différentiel M sur $\mathcal{H}^\dagger(A)$ est un module sur $\mathcal{H}^\dagger(A)$ sur lequel agissent les dérivations ∂_i en respectant la formule de Leibnitz et la formule de Schwartz : pour tout $a \in \mathcal{H}^\dagger(A)$ et tout $m \in M$

$$\partial_i(am) = \partial_i(a)m + a\partial_i(m)$$

$$\partial_i\partial_j m = \partial_j\partial_i m \ .$$

Nous supposerons toujours (et nous ne le répèterons pas) que notre module M est libre et de rang fini. Soit alors une base

$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{pmatrix}$ de M.

Les dérivations ∂_i sont alors entièrement caractérisées par les matrices de dérivation

$$(2.1) \qquad \partial_i F_j = \Sigma_\ell \eta^i_{j\ell} F_\ell \ .$$

Par abus de notations, nous écrivons $M = F(\mathcal{H}^\dagger)^k$ avec la correspondance pour $u = (u_1,\dots,u_k) \in (\mathcal{H}^\dagger)^k$

$$u \,.\, F \longmapsto \Sigma\, u_j F_j \ .$$

Cette notation a l'inconvénient de privilégier une base, et il ne faudra pas oublier que l'on a des définitions équivalentes de notre module différentiel par changement de base. Par contre l'avantage (surtout dans le cas d'un module de rang 1) sera d'interpréter F comme une solution formelle du système (2.1) et au lieu de définir M par les équations (2.1) on définira M à l'aide de la fonction formelle F.

<u>EXEMPLES</u>.- (rang 1) a) Soit $f \in \mathbb{C}_p(x)$, $|f| = 1$, n'ayant pas de singularités

dans A. Soit $\pi \in \mathbb{C}_p$ solution de $\pi^{p-1} = -p$. Posons $F = \exp \pi f$. Le module $F\mathcal{H}^{\dagger}(A)$ est le module de rang 1, possédant une base F, les dérivations étant définies par

$$\partial_i F = \pi \partial_i f F \quad .$$

b) Soit $f \in \mathbb{C}_p(x)$, $|f| = 1$, ne s'annulant pas dans A et n'ayant pas de singularités dans A, et soit $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Posons $F = f^{\alpha}$. Les dérivations dans $M = F\mathcal{H}^{\dagger}(A)$ sont définies par

$$\partial_i F = \alpha(\partial_i f/f)F \quad .$$

2.2.- Formules de changement de base

Notons $G_i = (\eta^i_{j\ell})$ la matrice de la dérivation ∂_i dans la base F. Les formules (2.1) s'écrivent alors

$$\partial_i F = G_i F \quad , \quad \partial_i \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{pmatrix} = G_i \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{pmatrix} \quad .$$

Si l'on considère une nouvelle base $\tilde{F}$, on a la matrice de changement de base $H \in G\ell_k(\mathcal{H}^{\dagger})$ telle que $\tilde{F} = HF$. Alors d'après la formule de Leibniz :

$$\partial_i \tilde{F} = \partial_i (HF) = (\partial_i H)F + H\partial_i F = \partial_i HH^{-1}\tilde{F} + HG_iH^{-1}\tilde{F} \quad .$$

Les nouvelles matrices de dérivation sont donc

$$\tilde{G}_i = HG_iH^{-1} + \partial_i HH^{-1} \quad .$$

Autrement dit, deux familles de matrices de dérivation (G_i) et $(\tilde{G}_i)$ sont équivalentes (définissent des modules différentiels isomorphes) s'il existe $H \in G\ell_k(\mathcal{H}^{\dagger})$ telle que

$$\tilde{G}_i H - HG_i = \partial_i H \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n \quad .$$

Dans le cas de rang 1 les formules se simplifient (car les 1×1 matrices commutent!). Alors si $\partial_i F = \eta_i F$ et $\partial_i \tilde{F} = \tilde{\eta}_i \tilde{F}$ on a $\tilde{\eta}_i = \eta_i + \partial_i u/u$ avec u et $u^{-1} \in \mathcal{H}^{\dagger}$ (ce qui équivaut à $\tilde{F} = uF$).

EXEMPLES.- a) Reprenons l'exemple a) de 2.1. Soient f et $\tilde{f} \in \mathbb{C}_p(x)$, n'ayant pas de singularités dans A, telles que $|f| = 1$, $|\tilde{f}| = 1$ et $|f - \tilde{f}| < 1$ (donc $\bar{f} = \bar{\tilde{f}}$). Comme la fonction $\exp \pi x$ a rayon de convergence 1, $\exp \pi(f - \tilde{f})$ appartient à $\mathcal{H}^{\dagger}(A)$. Par conséquent $F = \exp \pi f$ et $\tilde{F} = \exp \pi\tilde{f}$ définissent des modules différentiels canoniquement isomorphes puisque $F/\tilde{F}$ est un élément inversible de $\mathcal{H}^{\dagger}(A)$. On définit donc un module différentiel M qui ne dépend que de $\bar{f}$.

b) Reprenons l'exemple b) de 2.1. Soient f et $\tilde{f} \in \mathbb{C}_p(x)$, n'ayant ni singularités ni zéros dans A, telles que $|f| = |\tilde{f}| = 1$ et $|f - \tilde{f}| < 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Alors on a $|1 - \frac{f}{\tilde{f}}| < 1$ et $\frac{f}{\tilde{f}}$ n'a pas de singularités dans A. Comme $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, la fonction $(1 + x)^{\alpha}$ a rayon de convergence 1 et donc, si on pose $F = f^{\alpha}$ et $\tilde{F} = \tilde{f}^{\alpha}$, $F/\tilde{F} = (1 - (1 - \frac{f}{\tilde{f}}))^{\alpha}$ appartient à $\mathcal{H}^{\dagger}(A)$ ce qui montre que F et $\tilde{F}$ définissent des modules différentiels canoniquement isomorphes (donc un module différentiel M qui ne dépend que de $\bar{f}$).

2.3.- Cohomologie de Dwork

Nous noterons Ω^j l'espace des j-formes à coefficients dans le module différentiel M ($0 \leq j \leq n$, n nombre de variables). La différentiation extérieure d envoie Ω^j dans Ω^{j+1}, nous écrirons $d_j : \Omega^j \to \Omega^{j+1}$. On peut alors considérer le complexe de de Rham

$$(C) \qquad 0 \xrightarrow{d_{-1}} \Omega^0 \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \to \cdots \Omega^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n \xrightarrow{d_n} 0.$$

Cette suite n'est pas exacte. Il lui correspond les espaces de cohomologie (cohomologie de Dwork)

$$H^j = \operatorname{Ker} d_j/\operatorname{Im} d_{j-1} \quad .$$

Alors se posent aussitôt les questions naturelles :

a) La cohomologie est-elle finie ? (c'est-à-dire $\dim_{\mathbb{C}_p} H^j < \infty$ pour tout i)

b) Si oui, calculer $\dim H^j$.

Notons que quand la cohomologie est finie, il est naturel de considérer la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe (C)

$$\chi(C) = \Sigma_j (-1)^j \dim H^j \quad .$$

(Si l'on a une suite exacte de complexes

$$0 \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to 0$$

alors

$$\chi(C_1) - \chi(C_2) + \chi(C_3) = 0) \quad .$$

L'une des insuffisances de la théorie est que l'on ne possède pas de réponse tout à fait générale à la question a). Pour des réponses partielles voir la bibliographie.

Nous allons cependant indiquer pourquoi il est intéressant de travailler avec l'espace $\mathcal{H}^\dagger$. Si l'on utilise l'espace $\mathcal{H}(A)$ des éléments analytiques sur A, on n'a, pour les modules différentiels utilisés dans les applications, jamais une cohomologie finie. Si l'on utilise $\mathcal{H}(A_e^+)$ on peut avoir parfois une cohomologie finie, parfois infinie. Avec $\mathcal{H}^\dagger(A)$ ou $\mathcal{A}(A_e^-)$ on obtient une cohomologie finie (du moins chaque fois que l'on sait répondre à la question : la cohomologie est-elle finie ?)

2.4.- Cohomologie rationnelle

Posons $\mathcal{L} = \mathbb{C}_p[X_1,\dots,X_n,1/g(X)]$ où g est le polynôme qui a servi à définir A. Supposons que pour une base F convenable de M les matrices de dérivation des ∂_i aient leurs coefficients dans $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}^\dagger$. On peut donc considérer que l'on a $M = M_o \otimes_{\mathcal{L}} \mathcal{H}^\dagger(A)$ où M_o est un $\mathcal{L}$-module différentiel. On peut alors considérer le complexe de de Rham (C_o) attaché à M_o ainsi que les espaces de cohomologie associés H_o^j dits espaces de cohomologie rationnelle. Dans le cas où $g = 1$ on sait montrer que les cohomologies rationnelles sont finies [Dw.6].

Par ailleurs comme on a une injection du complexe (C_o) dans le complexe (C) on en déduit des applications canoniques $H_o^j \to H^j$. La question se pose de savoir si ces applications sont des isomorphismes.

Dans le cas d'une variable on montre facilement que

$$H_o^o \to H^o \text{ est injective}$$

et (en utilisant le fait que $\mathcal{L}$ est dense dans $\mathcal{H}^\dagger(A)$)

$$H_o^1 \to H^1 \text{ est surjective.}$$

Il en résulte donc que $\chi(C_o) \leq \chi(C)$ et que l'on a égalité si et seulement si les deux cohomologies sont isomorphes

3. ACTION DE FROBENIUS

3.1.- Action de Frobenius sur $\mathcal{H}^\dagger$.

Si $q = p^\mu$ on sait que l'application $x \longmapsto x^q$ est un automorphisme de $\mathbb{F}_\infty$ et que les points fixes de cet automorphisme sont les éléments de $\mathbb{F}_q$.

Considérons un relèvement en caractéristique 0 du polynôme x^p, c'est-à-dire soit $\tau \in \mathbb{C}_p[x]$ avec deg $\tau = p$ et $\bar{\tau}(x) = x^p \in \mathbb{F}_\infty[x]$. Pour μ entier ≥ 1, on note $\tau_\mu = \tau \circ \ldots \circ \tau$ (μ fois), donc $\bar{\tau}_\mu(x) = x^q$ avec $q = p^\mu$.

Soit $g \in \mathbb{C}_p[X]$ le polynôme qui a servi à définir A. Si $\bar{g} \in \mathbb{F}_q[X]$, l'application $\underset{\sim}{\tau}_\mu : (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto (\tau_\mu(x_1),\ldots,\tau_\mu(x_n))$ laisse A globalement invariant, et l'on voit que $\tau_\mu^* : u \longmapsto u \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu$ envoie $\mathcal{H}^\dagger(A)$ dans lui-même. (Ceci est encore un avantage de considérer $\mathcal{H}^\dagger$, en effet τ_μ^* n'envoie pas $\mathcal{H}(A_e^+)$ dans lui-même mais dans un $\mathcal{H}(A_{e'}^+)$ avec $e' < e$) .

3.2.- <u>Action de Frobenius sur M</u>.

On peut également définir une action τ_μ^* sur le module différentiel M. Etant donnée une base F de M, on a interprété F comme une solution formelle du système 2.1. Le module $\tau_\mu^*(M)$ aura même rang que M et aura formellement pour base $\tilde{F} = F \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu$, pour cette base les matrices de dérivation sont donc

$$\partial_i \tilde{F}_j = \tau_\mu'(x_i)\Sigma_\ell \tau_\mu^*(\eta_{j\ell}^i)\tilde{F}_\ell \quad .$$

On a l'application de Frobenius $\tau_\mu^* : M \to \tau_\mu^*(M)$

$$\Sigma u_i F_i \longmapsto \Sigma \tau_\mu^*(u_i)\tilde{F}_i \quad .$$

On vérifie qu'à un isomorphisme près ces définitions ne dépendent pas de la base choisie dans M.

Si le module différentiel $\tau_\mu^*(M)$ est isomorphe à M on dit que M a une structure de Frobenius forte.
(τ_μ^* est un endomorphisme de la catégorie des $\mathcal{H}^\dagger(A)$- modules différentiels).
<u>Cas d'un module de rang 1</u>

On a alors un seul vecteur de base F. Dire que $\tau_\mu^*(M)$ est isomorphe à M revient à dire que (du point de vue des matrices de dérivation) tout se passe comme si l'on avait $F \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu = \varphi F$ avec φ et $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}^\dagger(A)$, ou encore on peut interpréter $\varphi = F \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu / F$ comme un élément de $\mathcal{H}^\dagger(A)$ (ainsi que φ^{-1}).

Reprenons les exemples du paragraphe 2.1.

a) $F = \exp \pi f$, avec $f \in \mathbb{C}_p(x)$ sans singularités dans A, $|f|_{\text{gauss}} = 1$. Si $\bar{f} \in \mathbb{F}_q(x)$, alors $\bar{f}(x^q) - \bar{f}(x)^q = 0$ donc $|f \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu - f^q|_{\text{gauss}} < 1$. On peut donc écrire

$$F/F \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu = \exp \pi(f - f^q)\exp \pi(f^q - f \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu) = \theta_q(f)\exp \pi(f^q - f \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu) \quad .$$

Comme la fonction $\theta_q(x) = \exp \pi(x - x^q)$ a rayon de convergence $R > 1$ et que

$f \in \mathcal{H}^\dagger(A)$ avec $|f|_{gauss} = 1$, on en déduit que $\theta_q(f) \in \mathcal{H}^\dagger(A)$. Comme $\exp \pi x$ a rayon de convergence 1 et que $f^q - f \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu \in \mathcal{H}^\dagger(A)$ avec $|f^q - f \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu|_{gauss} < 1$, on en déduit que $\exp \pi(f^q - f \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu) \in \mathcal{H}^\dagger(A)$. Donc $F/F \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu$ s'interprète comme un élément de $\mathcal{H}^\dagger(A)$.

Notons que $\partial_i F/F = \pi \partial_i f \in \mathcal{L}$. Donc notre module différentiel M provient d'un $\mathcal{L}$-module M_o. Notons que l'application τ_μ^* transforme des fractions rationnelles en fractions rationnelles. Supposons que g soit tel que τ_μ^* transforme $\mathcal{L}$ en lui-même. On peut alors considérer le $\mathcal{L}$-module différentiel $\tau_\mu^*(M_o)$ Mais $\tau_\mu^*(M_o)$ n'est pas isomorphe à M_o car $F/F \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu$ est essentiellement une fonction analytique et n'appartient pas à $\mathcal{L}$. L'action de Frobenius ne pourra donc être définie que pour la cohomologie analytique et non pas pour la cohomologie rationnelle.

b) $F = f^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ et $f \in \mathbb{C}_p(x)$ sans singularités ni zéros dans A, $|f|_{gauss} = 1$. On peut écrire

$$F/F \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu = f^{\alpha(1-q)} (f^q/f \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu)^\alpha \quad .$$

Si $\bar{f} \in \mathbb{F}_q(x)$, alors $|1 - f^q/f \circ \tau_\mu|_{gauss} < 1$ et $f^q/f \circ \tau_\mu \in \mathcal{H}^\dagger(A)$. Comme de plus la fonction $(1 + x)^\alpha$ a rayon de convergence 1 (car $\alpha \in \mathbb{Z}_p$) $(f^q/f \circ \tau_\mu)^\alpha$ appartient à $\mathcal{H}^\dagger(A)$.

Si de plus $\alpha(1 - q) \in \mathbb{Z}$ alors $f^{\alpha(1-q)} \in \mathcal{H}^\dagger(A)$ et par conséquent $F/F \circ \underset{\sim}{\tau}_\mu$ s'interprète comme un élément de $\mathcal{H}^\dagger(A)$.

Cas général

Soit G_i la matrice de la dérivation ∂_i relativement à la base F (cf. § 2.2). Les matrices des ∂_i relativement à la base $\tilde{F} = F \circ \tau_\mu$ de $\tau_\mu^*(M)$ sont $\tilde{G}_i = \tau_\mu'(x_i) G_i \circ \tau_\mu$. Dire que $\tau_\mu^*(M)$ est isomorphe à M revient à dire qu'il existe $H \in Gl_k(\mathcal{H}^\dagger(A))$ telle que

$$\tau_\mu'(x_i)(G \circ \tau_m)H - HG = \partial_i H \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n.$$

3.3.- Action de Frobenius sur le complexe de de Rham (C).

Considérons le cas où notre $\mathcal{H}^\dagger(A)$-module différentiel M a une structure de Frobenius forte (c'est-à-dire qu'il existe $q = p^\mu$ tel que $\bar{g} \in \mathbb{F}_q[X]$ et que $\tau_\mu^*(M)$ soit isomorphe à M). On peut alors définir une action de Frobenius Frob_q^j sur l'espace des j-formes différentielles par la formule (pour $m \in M$)

(3.3) $\quad \mathrm{Frob}_q^j(m\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_j}) = \tau_\mu^*(m)\tau_\mu'(x_{i_1})\ldots \tau_\mu'(x_{i_1})dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_j}$

et en la prolongeant par linéarité.

Il est clair que l'action de Frobenius commute avec la différentiation extérieure, donc que l'on a défini un morphisme de complexe Frob_q de (C) dans lui-même. Il en résulte une action de Frobenius sur les espaces de cohomologie, on la notera $\beta_j : H^j \to H^j$.

Alors que le morphisme Frob dépend du choix du relèvement τ, on peut montrer que les applications β_j ne dépendent pas du choix du relèvement.

3.4.- Application de Dwork

Nous nous proposons de définir un inverse à gauche à l'action de Frobenius.

Soit $u \in \mathcal{H}^\dagger(A)$. On définit la fonction $\Psi_q(u)$ par la formule

(3.4.1) $$\Psi_q(u)(x) = \sum_{\underset{\sim}{\tau}_\mu(y)=x} \frac{u(y)}{\tau_\mu'(y_1)\ldots\tau_\mu'(y_n)} = \sum_{\underset{\sim}{\tau}_\mu(y)=x} \frac{u(y)}{\mathrm{Jac}(\underset{\sim}{\tau}_\mu)(y)}$$

où $\mathrm{Jac}(\underset{\sim}{\tau}_\mu)$ désigne le jacobien de l'application $\underset{\sim}{\tau}_\mu$. On démontre que ceci définit un élément de $\mathcal{H}^\dagger(A)$. (Pour les valeurs de x pour lesquelles le dénominateur peut devenir infini, la valeur de la fonction est définie par continuité). De plus on a

(3.4.2) $$|\Psi_q(u)|_{gauss} \leq |u|_{gauss} \quad .$$

Posons $\psi_q(u) = \Psi_q(u\tau_\mu'(x_1)\ldots\tau_\mu'(x_n))$. Si $u \in \mathcal{H}^\dagger(A)$, on a donc $\psi_q(u) \in \mathcal{H}^\dagger(A)$. Par ailleurs, comme l'équation $\tau_\mu(y_i) = x_i$ possède q solutions pour chaque i, l'équation $\underset{\sim}{\tau}_\mu(x) = y$ possède donc q^n solutions et on a donc pour tout $u \in \mathcal{H}^\dagger(A)$

$$\psi_q(\tau_\mu^*(u)) = q^n u$$

ou encore (en tant qu'opérateurs sur $\mathcal{H}^\dagger(A)$)

(3.4.3) $$\psi_q \circ \tau_\mu^* = q^n \mathrm{Id} \; .$$

Observons que l'on a également pour tout $a \in \mathcal{H}^\dagger(A)$ la formule évidente

$$\psi_q(\tau_\mu^*(a)u) = a\psi_q(u) \quad .$$

Considérons alors notre module différentiel M avec structure de Frobenius forte.

Soit H la matrice de passage de la base $\tilde{F} = F \circ \tau_\mu$ à la base F : $F = H\tilde{F}$. Pour $m = u \cdot F \in M$ on pose

$$\Psi_q(m) = \Psi_q(uH) \cdot F \quad \text{et} \quad \psi_q(m) = \psi_q(uH) \cdot F$$

(à droite on applique Ψ_q (resp. ψ_q) à chaque composante du vecteur ligne uH^{-1}).

On a clairement (en tant qu'opérateur sur M)

(3.4.4) $\quad \psi_q \circ \tau_\mu^* = q^n \mathrm{Id}$.

On définit alors l'application de Dwork Dw_q^j sur l'espace des j-formes différentielles par la formule (pour $m \in M$)

(3.4.5) $$Dw_q^j(m\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_j}) = \Psi_q\left(m\, \frac{\tau'_\mu(x_1)\ldots\tau'_\mu(x_n)}{\tau'_\mu(x_{i_1})\ldots\,\tau'_\mu(x_{i_j})}\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_j}$$

et en la prolongeant par linéarité.

Il découle immédiatement de la formule (3.3) et de (3.4.4) et (3.4.5) que

$$Dw_q^j \circ \mathrm{Frob}_q^j = q^n \mathrm{Id} .$$

On vérifie sans trop de peine que l'application de Dwork commute à la différentiation extérieure. C'est donc un morphisme de complexe de (C) dans lui-même et l'on a

$$Dw_q \circ \mathrm{Frob}_q = q^n \mathrm{Id}.$$

Il en résulte une action de Dwork sur les espaces de cohomologie on la notera $\alpha_j : H^j \to H^j$. On a bien sûr

$$\alpha_j \circ \beta_j = q^n \mathrm{Id}$$

et donc, si H^j est de dimension finie, α_j est un isomorphisme de H^j.

Comme on a vu que β_j ne dépendait pas du choix du relèvement τ, il en résulte (au moins dans le cas $\dim H^j < +\infty$) que α_j non plus ne dépend pas du relèvement τ.

3.5.- Formulation particulière de l'application de Dwork

Considérons le cas particulier où A est défini par le polynôme $g(X) = X_1 X_2 \ldots X_n$. Alors

$$\mathcal{H}^{\dagger}(A) = \{u = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} a_\nu x^\nu \quad \text{avec} \quad \lim_{|\nu|\to\infty} |a_\nu| e^{-|\nu|} = 0$$

pour un $e < 1$ non précisé).

Choisissons comme relèvement du Frobenius $\tau(x) = x^p$. Alors pour $u \in \mathcal{H}^{\dagger}(A)$

$$\tau^* u(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} a_\nu x^{p\nu}$$

et

$$\psi_p u(x) = \sum_i \sum_{y_i^p = x_i} u(y) = p^n \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} a_{p\nu} x^\nu .$$

Si l'on prend comme base des formes différentielles les $\frac{dx_i}{x_i}$, l'action de Frobenius dans Ω^j donnera (en admettant que $\tau^*(M) = M$)

$$\mathrm{Frob}_p^j\left(m \frac{dx_{i_1}}{x_{i_1}} \wedge\ldots\wedge \frac{dx_{i_j}}{x_{i_j}}\right) = \tau^*(m) p^j \frac{dx_{i_1}}{x_{i_1}} \wedge\ldots\wedge \frac{dx_{i_j}}{x_{i_j}}$$

et l'action de Dwork donnera

$$\mathrm{Dx}_p^j\left(m \frac{dx_{i_1}}{x_{i_1}} \wedge\ldots\wedge \frac{dx_{i_j}}{x_{i_j}}\right) = \psi_p(m) p^{-j} \frac{dx_{i_1}}{x_{i_1}} \wedge\ldots\wedge \frac{dx_{i_j}}{x_{i_j}} .$$

3.6.- Factorisation du Frobenius

Lorsque la cohomologie dépend de certains paramètres, la valeur $q = p^\mu$ qu'il faut prendre pour pouvoir définir un endomorphisme de Frobenius pour notre complexe de de Rham (C) peut dépendre de la valeur du paramètre. On a alors intérêt à factoriser notre application de Frobenius (et de Dwork) en facteurs correspondant à la composition par $\underset{\sim}{\tau}$ (ce qui en caractéristique p correspond au changement de variable $X \longmapsto X^p$).

Notons σ un automorphisme de $\mathbb{C}_p$ qui relève l'automorphisme de Frobenius de $\mathbb{F}^\infty$. Nous noterons également σ la bijection correspondante de $\mathbb{C}_p^n$. On notera A^σ l'image de A par σ. Alors l'application $\tau^* : u \longmapsto u \circ \underset{\sim}{\tau}$ définit une application de $\mathcal{H}^{\dagger}(A^\sigma)$ dans $\mathcal{H}^{\dagger}(A)$. On dira que le $\mathcal{H}^{\dagger}(A^\sigma)$-module différentiel s(M) est un successeur de M si $M \cong \tau^*(s(M))$. (On demande de plus pour M et s(M) d'être entièrement solubles dans le polydisque générique du polydisque unité, c'est-à-dire qu'il existe $F_1 \ldots F_k$ analytiques dans le polydisque unité ouvert, linéairement indépendantes, satisfaisant le système (2.1) ; cette condition est automatiquement vérifiée si M a une structure de Frobenius forte ; sous cette condition s(M) est uniquement déterminé à un isomorphisme près).

Notons $s(C)$ le complexe de de Rham associé à $s(M)$. On a l'application de Frobenius $\mathrm{Frob}_p : s(C) \to (C)$, qui est un morphisme de complexes, définie sur l'espace des j-formes différentielles par la formule (avec $m \in s(M)$)

$$\mathrm{Frob}_p^j(m dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_j}) = \tau^*(m)\tau'(x_{i_1}) \ldots \tau'(x_{i_j}) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_j}$$

(et prolongée par linéarité).

Pour $u \in \mathcal{H}^\dagger(A)$, on définit $\Psi_p(u)$ par la formule

$$\Psi_p(u)(x) = \sum \frac{u(y)}{\tau'(y_1) \ldots \tau'(y_n)} \quad ,$$

ceci est un élément de $\mathcal{H}^\dagger(A)$. On pose $\psi_p(u) = \Psi_p(u\tau'(x_1) \ldots \tau'(x_n))$.

Si F est une base de M, notons $s(F)$ la base de $s(M)$ telle que $s(F) \circ \tau = F$. On définit l'application $\Psi_p : s(M) \to M$ par la formule

$$\Psi_p \left(\sum_{j=1}^{k} u_j s(F_j)\right) = \sum_{j=1}^{k} \Psi_p(u_j) F_j .$$

On obtient alors le morphisme de complexes de Dwork $\mathrm{Dw}_p : (C) \to s(C)$ défini sur les j-formes différentielles par la formule (m appartenant à M)

$$\mathrm{Dw}_p^j(m dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_j}) = \Psi_p\left(m \frac{\tau'(x_1) \ldots \tau'(x_n)}{\tau'(x_{i_1}) \ldots \tau'(x_{i_j})}\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_j} .$$

On a encore $\mathrm{Dw}_p \circ \mathrm{Frob}_p = p \, \mathrm{Id}$.

<u>Exemples</u> (cas de rang 1, on reprend les exemples du § 3.2).

Pour $f \in \mathbb{C}_p(x)$ on note f^σ la fraction rationnelle obtenue en appliquant σ aux coefficients de f. (Cette définition ne dépend pas de la représentation de f!). Si $|f|_{gauss} = 1$ alors $|f^\sigma|_{gauss} = 1$ et $|f^p - f^\sigma \circ \tau|_{gauss} < 1$. De plus si f n'a pas de singularités dans A (resp. n'a ni zéros ni singularités dans A), f^σ n'a pas de singularités dans A^σ (resp. n'a ni zéros ni singularités dans A^σ).

1) Soit $F = \exp \pi f$ avec $f \in \mathbb{C}_p(x)$ sans singularités dans A, $|f|_{gauss} = 1$. Supposons σ choisi de telle sorte que $\sigma(\pi) = \pi$. Alors le $\mathcal{H}^\dagger(A^\sigma)$-module différentiel défini par $\hat{F} = \exp \pi f^\sigma$ est un successeur du $\mathcal{H}^\dagger(A)$-module différentiel défini par F. Notons que F n'est pas $\hat{F} \circ \tau$. Les formules qui définissent Dw_p dans les bases F et $\hat{F}$ font alors intervenir la matrice de passage de F à $\hat{F} \circ \tau$:

$H(x) = \exp\pi\,(f^{\sigma}(\underset{\sim}{\tau}(x)) - f(x) = \hat{F}\circ\tau/F.$

2) Soit $F = f^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ et $f \in \mathbb{C}_p(x)$ sans zéros ni singularités dans A, $|f|_{gauss} = 1$. Soit $\beta \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\alpha - p\beta \in \mathbb{Z}$. ($\beta$ est un successeur de α). Alors le $\mathcal{H}^{\dagger}(A^{\sigma})$-module différentiel défini par $\hat{F} = (f^{\sigma})^{\beta}$ est un successeur du $\mathcal{H}^{\dagger}(A)$-module différentiel défini par F. Encore une fois F n'est pas $\hat{F}\circ\underset{\sim}{\tau}$ et il faut faire intervenir la matrice de passage de F à $\hat{F}\circ\tau$: $H = \hat{F}\circ\underset{\sim}{\tau}/F = (f^{\sigma}\circ\tau/f^{p})^{\beta}f^{p\beta-\alpha}$.

4.- LA FORMULE DE TRACE

La raison principale pour introduire la transformation de Dwork est qu'on peut développer pour elle une théorie de Fredholm : trace, déterminant de Fredholm, résolvante.

4.1.- Opérateur nucléaire

Soit U un espace vectoriel sur $\mathbb{C}_p$ et soit L une application linéaire de U dans U. On dit que L est nucléaire si

a) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}_p$ il existe une décomposition $U = N_{\lambda} \oplus W_{\lambda}$ où N_{λ} et W_{λ} sont des sous-espaces invariants pour L, N_{λ} est de dimension finie, $1 - \lambda L$ est nilpotent sur N_{λ} et bijectif sur W_{λ}.

b) pour tout $r > 0$ il y a un nombre fini de $\lambda \in \mathbb{C}_p$ tels que $N_{\lambda} \neq \{0\}$ et $|\lambda| \leq r$.

Pour L nucléaire on peut donc définir sa trace

$$\text{(4.1.1)} \qquad \mathrm{Tr}(L) = \sum_{N_{\lambda}\neq\{0\}} \frac{1}{\lambda}\dim N_{\lambda}$$

(c'est la somme des valeurs propres de L comptées avec leur multiplicité algébrique) et le déterminant

$$\text{(4.1.2)} \qquad \det(1 - tL) = \prod_{N_{\lambda}\neq\{0\}} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{\dim N_{\lambda}} = \exp\left(-\sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(L^s)\,t^s/s\right)$$

qui est une fonction entière de t. (Ici 1 désigne l'application identité).

Considérons le cas où U est un espace de Banach possédant une base orthonormale (e_j). On dira que l'endomorphisme L de U est complètement continu si c'est la limite uniforme d'une suite d'opérateurs de rang fini. Le résultat essentiel de la théorie est que tout opérateur complètement continu est nucléaire. De plus si l'on note (c_{ij}) la matrice de L relativement à la base (e_j)

$(L(e_j) = \sum_j c_{ij} e_j)$ on a la relation

$$\mathrm{Tr}(L) = \sum_j c_{jj}.$$

4.2. Formule de Trace

L'opérateur Ψ_q (défini au § 3.4), vu comme opérateur de $\mathcal{H}^\dagger(A)$ dans lui-même, est un opérateur nucléaire. Cela se voit en montrant que, pour $e < 1$ voisin de 1, Ψ_q envoie continûment $\mathcal{H}(A_e)$ dans un $\mathcal{H}(A_{e'})$ avec $e' < e$ et que l'injection canonique de $\mathcal{H}(A_{e'})$ dans $\mathcal{H}(A_e)$ est complètement continue ce qui prouve que Ψ_q est un endomorphisme complètement continu de $\mathcal{H}(A_e)$. Comme par ailleurs on peut trouver une base orthogonale commune des $\mathcal{H}(A_e)$ on voit que $\det(1 - t\Psi_q)$ ne dépend pas de e, donc pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}_p$ les N_λ ne dépendent pas de e, d'où la nucléarité de Ψ_q dans $\mathcal{H}^\dagger(A) = \bigcup_e \mathcal{H}(A_e)$.

Soit $H \in G\ell_k(\mathcal{H}^\dagger(A))$. Alors l'application θ de $(\mathcal{H}^\dagger(A))^k$ dans lui-même

$$\theta : u = (u_1, \ldots, u_k) \longmapsto \Psi_q(uH)$$

est nucléaire et l'on a

$$(4.2) \qquad \mathrm{Tr}\ \theta = \sum_{\substack{\tau_\mu(x)=x \\ x\in A}} \frac{\mathrm{Tr}\ H(x)}{(\tau'_\mu(x_1) - 1)\ldots(\tau'_\mu(x_n) - 1)}$$

(où bien sûr Tr H désigne la somme des éléments diagonaux de la matrice H).

4.3.- Application à la transformation de Dwork

Considérons la situation décrite au § 3.4 en gardant les notations de ce paragraphe.

Il résulte immédiatement de la définition (3.4.5) et de ce que l'on vient de voir que l'endomorphisme Dw_q^j de Ω^j est nucléaire et il résulte de la formule (4.2) que

$$\mathrm{Tr}\ Dw_q^j = \sum_{\substack{\tau_\mu(x)=x \\ x\in A}} \left(\frac{\mathrm{Tr}\ H(x)}{(\tau'_\mu(x_1) - 1)\ldots(\tau'_\mu(x_n) - 1)} \sum \tau'_\mu(x_{i_1})\ldots\tau'_\mu(x_{i_{n-j}})\right)$$

la dernière somme portant sur toutes les familles de n-j éléments distincts $(i_1, \ldots, i_{n-j})$ de $\{1, \ldots, n\}$ (il y a $\binom{n}{j}$ termes) .

Comme l'on a

$$(\tau'_\mu(x_1)-1)\dots(\tau'_\mu(x_n)-1=\sum_{j=o}^{n}(-1)^j\Sigma\,\tau'_\mu(x_{i_1})\dots\tau'_\mu(x_{i_{n-j}})$$

on en déduit

$$\sum_{j=o}^{n}(-1)^j\mathrm{Tr}\,Dw_q^j=\sum_{\substack{\underset{\sim}{\tau}_\mu(x)=x\\ x\in A}}\mathrm{Tr}(H(x))\quad .$$

Comme les opérateurs Dw_q^j sont nucléaires on en déduit facilement que les opérateurs quotients α_j (agissant sur H^j) sont aussi nucléaires (c'est évident si H^j est de dimension finie). De plus on a

$$\sum_{j=o}^{n}(-1)^j\mathrm{Tr}\,Dw_q^j=\sum_{j=o}^{n}(-1)^j\mathrm{Tr}\,\alpha_j$$

ce qui donne finalement

$$(4.3)\qquad \sum_{j=o}^{n}(-1)^j\mathrm{Tr}\,\alpha_j=\sum_{\substack{\underset{\sim}{\tau}_\mu(x)=x\\ x\in A}}\mathrm{Tr}(H(x))\quad .$$

4.4.- Sommes de caractères

Si $a\in\mathbb{F}_\infty$, alors $a\in\mathbb{F}_q$ pour un certain $q=p^\mu$ donc satisfait la relation $a^q-a=0$. Comme l'équation $X^q-X=0$ a des racines simples dans $\mathbb{F}_\infty$, il existe un unique élément de $\mathbb{C}_p$, solution de $X^q-X=0$ qui relève a. Cet élément est appelé le représentant de Teichmuller de a et sera noté Teich(a). On voit facilement que cette définition ne dépend pas du choix de q tel que $a\in\mathbb{F}_\infty$ et que pour tous a et b de $\mathbb{F}_\infty$ Teich(ab) = Teich(a)Teich(b).

Donc l'application Teich : $\mathbb{F}_q^\times\to\mathbb{C}_p$ est un caractère multiplicatif sur $\mathbb{F}_q$. De plus c'est un générateur du groupe des caractères multiplicatifs, c'est-à-dire que si $\chi:\mathbb{F}_q^\times\to\mathbb{C}_p$ est un caractère multiplicatif, on a $\chi=\mathrm{Teich}^s$ pour un certain s entier $0\leqslant s\leqslant q-1$.

Soit $\zeta\in\mathbb{C}_p$ une racine primitive p-ième de 1. L'application $\omega_p : a\longmapsto\zeta^a$ de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{C}_p$ est un caractère additif. Il en résulte que l'application ω_q de $\mathbb{F}_q$ dans $\mathbb{C}_p$

$$\omega_q : a\longmapsto\omega_p(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q:\mathbb{F}_p}a)$$

est un caractère additif sur $\mathbb{F}_q$. On montre que pour tout caractère additif ω sur $\mathbb{F}_q$ il existe $c\in\mathbb{F}_q$ tel que $\omega(x)=\omega_q(cx)$.

Soient alors $g \in \mathbb{F}_q[X]$, f et $h \in \mathbb{F}_q(X)$ telles que f (resp. h) n'ait pas de singularités (resp. ni singularités ni zéros) en dehors de l'hypersurface $g = 0$ dans $\mathbb{F}_\infty^n$.

Posons

$$(4.4.1)\qquad S(f,h;g) = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^n,\, g(x)\neq 0} \mathrm{Teich}(h(x))\,\omega_q(f(x)) .$$

D'après ce que nous venons de voir les sommes les plus générales de caractères se représentent de cette façon. Comme exemples de sommes de caractères citons les sommes de Gauss, sommes de Jacobi, sommes de Kloosterman. Nous nous proposons de donner une interprétation de ces sommes à l'aide de cohomologies de Dwork.

On connaît grâce à Dwork une représentation analytique des caractères additifs. Nous avons déjà introduit les fonctions $\theta_p(x) = \exp \pi(x - x^p)$ et $\theta_q(x) = \exp \pi(x - x^q) = \theta_p(x)\theta_p(x^p)\ldots\theta_p(x^{p^{\mu-1}})$ qui ont rayon de convergence > 1. Si l'on a choisi pour π la solution la plus proche de $\zeta - 1$, on montre alors que pour $x \in \mathbb{F}^q$

$$(4.4.2)\qquad \omega_q(x) = \theta_q(\mathrm{Teich}\ x) .$$

Soit τ un relèvement du Frobenius comme dans le paragraphe 3, soit $g^* \in \mathbb{C}_p[X]$ un relèvement de g, soient f^* et $h^* \in \mathbb{C}_p(X)$ des relèvements de f et h tels que f^* (resp. h^*) n'a pas de singularités (resp. n'a ni singularités ni zéros) dans l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{C}_p^n \ ;\ |g^*(x)| = 1 \text{ et } |x| \leq 1\}$, alors la somme (4.4.1) peut être réécrite sous la forme (g.§6.3 de (Ro2)

$$(4.4.3)\qquad S(f,h;g) = \sum_{x\in A,\, \underset{\sim}{\tau}_\mu(x)=x} H(x)$$

où $H(x) = h^*(x)\left(\dfrac{h^*(x)^q}{h^*(\underset{\sim}{\tau}_\mu(x))}\right)^{1/(1-q)} \theta_q(f^*(x))\ \exp \pi(f^*(x)^q - f^*(\underset{\sim}{\tau}_\mu(x)))$.
Comme $H \in \mathcal{H}^\dagger(A)$ (4.4.3) a bien un sens.

Formellement

$$H(x) = (h^*(x)/h^*(\underset{\sim}{\tau}_\mu(x)))^{1/(1-q)} \exp \pi(f^*(x) - f^*(\underset{\sim}{\tau}_\mu(x))).$$

Considérons alors le $\mathcal{H}^\dagger(A)$-module différentiel M de rang 1 défini par

$$F = h^{*1/(1-q)} \exp \pi f^* .$$

(On combine les exemples a) et b) du § 3.2). Alors

$$F/F\circ\underset{\sim}{\tau}_\mu = H .$$

En vertu de la formule de trace (4.3) (attention ici H a été remplacé par H^{-1}) on obtient

$$(4.4.4)\qquad S(f,h;g) = \sum_{j=o}^{n} (-1)^{j} \mathrm{Tr}\ \alpha_j \ .$$

4.5.- FONCTIONS L

Considérons une extension $\mathbb{F}_{q^s}$ de $\mathbb{F}_q$. A tout caractère multiplicatif χ sur $\mathbb{F}_q$ on associe de façon canonique le caractère multiplicatif χ_s sur $\mathbb{F}_{q^s}$

$$\chi_s(x) = \chi(N_{\mathbb{F}_{q^s}:\mathbb{F}_q} x) = \chi(x^{(q^s-1)/(q-1)})$$

et à tout caractère additif ψ sur $\mathbb{F}_q$ on associe le caractère additif ψ_s sur $\mathbb{F}_{q^s}$

$$\psi_s(x) = \psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^s}:\mathbb{F}_q} x) = \psi(x + x^q + \ldots + x^{q^{s-1}}) \ .$$

Donc à toute somme S de caractères sur $\mathbb{F}_q$ on associe de façon canonique une somme S_s de caractères sur $\mathbb{F}_{q^s}$. Dans le cas de la somme (4.4.1) on obtient

$$(4.5.1)\qquad S_s(f,h;g) = \sum_{x\in\mathbb{F}^n_{q^s},g(x)\neq o} \mathrm{Teich}(h^{(q^s-1)/(q-1)}(x))\omega_{q^s}(f(x)) \ .$$

On construit alors la fonction L attachée à cette somme de caractères

$$(4.5.2)\qquad L(f,h;g;T) = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} S_s(f,h;g)T^s/s\right) \ .$$

Comme dans le paragraphe précédent, on peut réécrire la somme (4.5.1) sous la forme

$$(4.5.3)\qquad S_s(f,h;g) = \sum_{x\ A,\,\underset{\sim}{\tau}_\mu(x)=x} H(x)H(\underset{\sim}{\tau}_\mu(x))\ldots H(\underset{\sim}{\tau}_{\mu}{}^{(s-1)}(x))$$

ce qui donnera grâce à la formule de trace

$$(4.5.4)\qquad S_s(f,h;g) = \sum_{j=o}^{n} (-1)^{j} \mathrm{Tr}\ \alpha_j^s \ .$$

On en déduit alors l'expression pour la fonction L (cf. formule 4.1.2).

$$(4.5.5)\qquad L(f,h;g;T) = \prod_{j=o}^{n} [\det(1 - T\ \alpha_j)]^{(-1)^{j+1}} \ .$$

Si l'on sait que les H^j sont de dimensions finies, on en déduit que la fonction L est rationnelle. La connaissance des dimensions des H^j nous renseigne sur les degrés des numérateurs et dénominateurs. Enfin on voit que degré(L) = degré du numérateur - degré du dénominateur est $-\chi(C)$ où $\chi(C)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe (C).

Notons qu'on peut obtenir la rationalité de L sans savoir que les H^j sont de dimension finie. En effet on déduit de (4.5.5) que L est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}_p$. On peut alors utiliser le critère de Borel-Dwork pour en déduire la rationalité de L. Une telle démonstration peut être qualifiée de pré-cohomologique.

4.6.- Nombre de points d'une hypersurface

Nous allons simplement indiquer comment le nombre de points d'une hypersurface peut s'exprimer à l'aide d'une somme de caractères, ceci permet d'exprimer la fonction zêta comme une fonction L.

Considérons l'hypersurface affine V dans $\mathbb{F}_q^n$ définie par l'équation g = 0 où $g \in \mathbb{F}_q[X]$. Notons N le nombre de $\mathbb{F}_q$-points de V. On a

$$N = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^n, g(x)=0} 1 = q^n - \sum_{x\in\mathbb{F}_q^n, g(x)\neq 0} 1$$

$$(4.6.1.) \qquad N = q^n - S(0,1;g) \quad .$$

Donnons une autre formulation. On utilise le résultat classique que si ω est un caractère additif non trivial sur $\mathbb{F}_q$

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_q} \omega(ax) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \neq 0 \\ q & \text{si} \quad a = 0 \; . \end{cases}$$

Rajoutons une variable x_o et notons (x_o,x) un point de $\mathbb{F}_q^{n+1}$. Alors

$$N = \frac{1}{q} \sum_{x\in\mathbb{F}_q^n} \sum_{x_o\in\mathbb{F}_q} \omega_q(x_o g(x))$$

$$(4.6.2) \qquad N = \frac{1}{q} S(x_o g(x),1;1) \quad .$$

Il est facile de voir que le nombre N_s de $\mathbb{F}_{q^s}$-points de V est donné dans le premier cas par

$$N_s = q^{ns} - S_s(0,1;g)$$

et dans le deuxième cas par

$$N_s = \frac{1}{q^s} \; S_s(x_o g(x),1;1) \quad .$$

Donc la fonction zêta $Z_V(T) = \exp(\sum_{s=1}^{\infty} N_s T^s/s)$ sera dans le premier cas

$$Z_V(T) = (1 - qT)^{-n} L(0,1;g;T)^{-1}$$

et dans le deuxième cas

$$Z_V(T) = L(x_o g(x),1;1;T/q) \quad .$$

Donnons encore deux autres expressions importantes de N à l'aide de sommes de caractères.

-<u>Revêtement de Kummer</u>

Soit $f \in \mathbf{F}_q[X]$ et soit $d|q-1$. Considérons l'hypersurface V dans $\mathbf{F}_q^{n+1}$ définie par l'équation

$$y^d = f(x) \quad .$$

On montre que le nombre N de $\mathbf{F}_q$-points de V est

$$N = q^n + \sum_{1\leq i\leq d-1} \; \sum_{x\in\mathbf{F}_q^n, f(x)\neq 0} \mathrm{Teich}(f^{i(q-1)/d}(x))$$

$$N = q^n + \sum_{1\leq i\leq d-1} S(0,f^{i(q-1)/d};f) \quad .$$

-<u>Revêtement d'Artin-Schreier</u>

Soit $f \in \mathbf{F}_q[X]$. Soit r tel que $\mathbf{F}_r \subset \mathbf{F}_q$. Considérons l'hypersurface V dans $\mathbf{F}_q^{n+1}$ définie par l'équation

$$y^r - y = f(x) \quad .$$

On montre que le nombre N de $\mathbf{F}_q$-points de V est

$$N = \sum_{a \in \mathbb{F}_r} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^n} \omega_q(af(x))$$

$$N = \sum_{a \in \mathbb{F}_r} S(af,1;1) \quad .$$

5.- THEORIE DUALE. STRUCTURE SYMPLECTIQUE

Dans ce paragraphe, nous nous limitons au cas d'une seule variable.

5.1.- Les espaces R et R'

Etant donné une classe résiduelle $\bar{c}$ de $\mathbb{C}_p$, on choisit un représentant privilégié c de $\bar{c}$ (on prendra toujours le représentant ∞ pour la classe résiduelle $\bar{\infty}$). On note

$R_{\bar{c}}$ = espace des fonctions analytiques dans la classe $\bar{c}$ (nulles à l'∞ si $\bar{c}=\bar{\infty}$)

$R'_{\bar{c}}$ = espace des fonctions analytiques dans une couronne

$$r < |x-c| < 1 \quad (1 < |x| < 1/r \quad \text{si} \quad \bar{c} = \bar{\infty}) \quad (\text{avec } r<1 \text{ non précisé}).$$

Cette définition ne dépend pas du représentant c choisi.

Soit $\bar{S}$ un ensemble fini de classes résiduelles (avec $\bar{\infty} \in \bar{S}$) et S l'ensemble des représentants des éléments de $\bar{S}$. On pose $A = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \bigcup_{\bar{c} \in \bar{S}} \bar{c}$. On note

$$R(A) = \bigoplus_{\bar{c} \in \bar{S}} R_{\bar{c}}$$

$$R'(A) = \bigoplus_{\bar{c} \in \bar{S}} R'_{\bar{c}} \quad .$$

Observons que, pour tout $\bar{c} \in \bar{S}$, $\mathcal{H}^{\dagger}(A) \subset R'_{\bar{c}}$. On plonge $\mathcal{H}^{\dagger}(A)$ dans $R'(A)$ diagonalement :

$$u \longmapsto (u,u,\dots,u) \quad .$$

On vérifie que l'on alors

$$R'(A) = \mathcal{H}^{\dagger}(A) \oplus R(A) \quad .$$

5.2.- Intégration et dualité

Pour $u \in R'_{\bar{c}}$, si $\bar{c} \neq \bar{\infty}$, on a $u = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a_\nu (x-c)^\nu$ dans une couronne $r < |x-c| < 1$, on pose

$$\mathrm{Res}_{\bar{c}}(udx) = a_{-1} ,$$

si $\bar{a} = \bar{\infty}$ on a $u = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a_\nu x^\nu$ dans une couronne $1 < |x| < 1/r$, on pose

$$\mathrm{Res}_{\bar{\infty}}(udx) = -a_{-1}.$$

(Cette définition ne dépend pas du représentant choisi).

Si $u = (u_{\bar{c}})_{\bar{c} \in \bar{S}} \in R'(A)$, on pose

$$\int_{\partial^+ A} udx = - \sum_{c \in S} \mathrm{Res}_{\bar{c}}(u_{\bar{c}} dx) \quad .$$

(Explication de la notation : pour $e < 1$, considérons le voisinage A_e^+ de A $A_e^+ = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \bigcup_{c \in S} B(c,e^-)$, où $B(\infty,e^-) = \{x ; |x| > 1/e\}$, et la frontière $\partial A_e^+ = \bigcup_{c \in S} C(c,e)$, où $C(c,e)$ désigne le cercle de centre c et de rayon e, orientée canoniquement. Pour e assez proche de 1, ∂A_e^+ est dans le domaine de définition de u, l'intégrale considérée est alors précisément l'intégrale sur ∂A_e^+, elle ne dépend pas de e).

Si $u \in R'(A)$, $\int_{\partial^+ A} du = 0$. (C'est évident).

Si $u \in \mathcal{H}^\dagger(A)$, $\int_{\partial^+ A} udx = 0$. On peut interpréter cette formule comme une formule de Cauchy. Si u est une fraction rationnelle, ceci exprime que la somme des résidus de u est nulle. On l'obtient pour $u \in \mathcal{H}^\dagger(A)$ par passage à la limite.

Si $u,v \in R(A)$, $\int_{\partial^+ A} uvdx = 0$. (C'est facile).

La forme bilinéaire

$$(u,v) \to \int_{\partial^+ A} uvdx$$

met en dualité $R'(A)$ avec lui-même. Plus précisément, $R'(A)$ étant muni de sa topologie naturelle, $R'(A)$ s'identifie ainsi avec son dual topologique. Il résulte des formules que nous venons d'indiquer que $\mathcal{H}^\dagger(A)$ est son propre polaire dans cette dualité, c'est-à-dire que si $u \in R'(A)$ est tel que $\int_{\partial^+ A} uvdx = 0$ pour tout $v \in \mathcal{H}^\dagger(A)$ alors $u \in \mathcal{H}^\dagger(A)$.

5.3. Module différentiel dual

Soit M un $\mathcal{H}^\dagger(A)$ module différentiel (de rang fini). Soit $M^t = \mathrm{Hom}(M, \mathcal{H}^\dagger(A))$ le module dual. On notera $< \ , \ >$ la dualité. On munit M^t d'une structure de module différentiel par la formule

$$\partial < m,m' > \; = \; < \partial m,m' > \; + \; < m,\partial m' > \qquad\qquad m \in M \;\; , \;\; m' \in M^t \;\; .$$

Si F est une base de M, nous noterons F^{-1} la base duale dans M^t, en effet si G est la matrice de la dérivation ∂ (agissant sur M) dans la base F, la matrice de ∂ (agissant sur M^t) dans la base duale F^{-1} est $-G^t$.

Considérons le R'(A)-module différentiel $\hat{M} = M \otimes_{\mathcal{K}^\dagger(A)} R'(A)$. On peut identifier $\hat{M}^t$ avec $M^t \otimes_{\mathcal{K}^\dagger(A)} R'(A)$.

La forme bilinéaire

$$(m,m'dx) \longmapsto \int_{\partial^+A} < m,m'dx > \quad (= \int_{\partial^+A} < m,m' > dx)$$

met en dualité (au-dessus de $\mathbb{C}_p$) $\hat{M}$ et $\hat{M}^t dx$, et d'après ce que nous avons vu le polaire de M est alors $M^t dx$, donc le dual de M s'identifie à $\hat{M}^t dx/M^t dx$.

De même, on met en dualité $\hat{M}dx$ et $\hat{M}^t$ et alors le dual de Mdx s'identifie à $\hat{M}^t/M^t$.

5.4.- Complexe dual. Structure symplectique

Dans cette dualité, la transposée de la différentiation extèrieure

$$\hat{M} \xrightarrow{d} \hat{M}dx$$

est

$$\hat{M}^t \xrightarrow{-d} \hat{M}^t dx \quad .$$

En effet

$$\int_{\partial^+A} < dm,m' > \; = \int_{\partial^+A} d < m,m' > \; - \int_{\partial^+A} < m,dm' > \; = \int_{\partial^+A} < m,-dm' > \quad .$$

Comme d envoie M^t dans $M^t dx$, par passage au quotient, on a une application

$$\bar{d} \; : \; \hat{M}^t/M^t \to \hat{M}^t dx/M^t dx \quad .$$

Il est clair que $-\bar{d}$ est l'application transposée de

$$M \xrightarrow{d} Mdx \quad .$$

Si H^1 = Mdx/dM est de dimension finie, il en résulte que dM est fermé dans Mdx et alors le dual de H^1 s'identifie au noyau K de $-\bar{d}$, K = Ker $\bar{d}$.

Dorénavant, nous supposons que l'on a dim $H^1 < +\infty$.

Soit $\dot{m}'$ un élément de K et soit $m' \in \hat{K}$ un relèvement de $\dot{m}'$. Dire que $\bar{d}\dot{m}' = 0$ signifie que $dm' \in M^t dx$. Comme m' est défini modulo M^t, dm' est défini modulo dM^t, donc définit un unique élément $\hat{d}\dot{m}'$ de $H^{t1} = M^t dx/dM^t$, d'où un morphisme :

$$\hat{d} : K = \mathrm{Ker}(\bar{d}) \to M^t dx/dM^t = H^{t1},$$

c'est-à-dire du dual de H^1 dans H^{t1}. On a clairement un complexe

$$\mathrm{Ker}_{M^t} d \to \mathrm{Ker}_{\hat{M}^t} d \to \mathrm{Ker}\, \hat{d}$$

la première flèche étant la restriction de l'injection canonique de M^t dans $\hat{M}^t$ et la seconde la restriction de la projection de $\hat{M}^t$ dans $\hat{M}^t/M^t$.

On vérifie assez facilement qu'on a plus précisément la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ker}_{M^t} d \to \mathrm{Mer}_{\hat{M}^t} d \to \mathrm{Ker}\, \hat{d} \to 0 \quad .$$

Par conséquent, $\hat{d}$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}_{M^t} d = \mathrm{Ker}_{\hat{M}^t} d$. Si $\hat{d}$ est injective et si l'on sait que $\dim H^{t1} = \dim H^1$ (ce qui est le cas dans tous les exemples où on sait calculer ces dimensions) il en résulte que $\hat{d}$ est un isomorphisme. C'est cet isomorphisme qu'on appellera la structure symplectique.

5.5.- Action de Frobenius .

Soit τ un relèvement du Frobenius et soit $q = p^{\mu}$ tel que $\bar{A}$ soit invariant sous l'action de l'automorphisme $x \mapsto x^q$.

Si $u \in R'(A)$, on vérifie que $u \circ \tau_{\mu}$ définit encore un élément de $R'(A)$. Egalement on peut définir $\Psi_q(u)$ comme élément de $R'(A)$ par la formule (3.4.1).

S'il est assez clair que pour $u \in R'(A)$

$$(5.5.1) \qquad \int_{\partial^+ A} (u \circ \tau_{\mu})\tau_{\mu}' dx = q \int_{\partial^+ A} u dx$$

(c'est la formule de changement de variable), il est moins évident, mais également vrai, que l'on a

$$(5.5.2) \qquad \int_{\partial^+ A} \Psi_q(u) dx = \int_{\partial^+ A} u dx \quad .$$

De cette formule fondamentale on déduit alors que pour tous u et v de $R'(A)$

$$(5.5.3) \qquad \int_{\partial^+ A} u\Psi_q(v)dx = \int_{\partial^+ A} (u \circ \tau_\mu) v dx$$

et

$$(5.5.4) \qquad \int_{\partial^+ A} u\psi_q(v)dx = \int_{\partial^+ A} v(u \circ \tau_\mu)\tau_\mu' dx \quad .$$

Si l'on a $\tau_\mu^*(M) \cong M$ alors on a également $\tau_\mu^*(\hat{M}) \cong \hat{M}$ et donc on peut définir les applications de Frobenius et de Dwork sur le complexe de de Rham

$$\hat{M} \xrightarrow{d} \hat{M}dx \quad .$$

On a également $\tau_\mu^*(M^t) = (\tau_\mu^* M)^t = M^t$ et $\tau_\mu^* \hat{M}^t = \hat{M}^t$. Si F est une base de M (donc de $\hat{M}$) et si F^{-1} est la base duale dans M^t, la base duale de $F \circ \tau_\mu$ est $F^{-1} \circ \tau_\mu$. De cette remarque et des formules (5.5.3) et (5.5.4) il découle que la transposée de l'application de Dwork (resp. de Frobenius) est l'application de Frobenius (resp. de Dwork), précisément pour tous $m \in \hat{M}$ et $m' \in \hat{M}^t$ on a

$$\int_{\partial^+ A} \langle \mathrm{Frob}_q^0(m), m'dx \rangle = \int_{\partial^+ A} \langle m, \mathrm{Dw}_q^1(m'dx) \rangle$$

$$\int_{\partial^+ A} \langle \mathrm{Frob}_q^1(mdx), m' \rangle = \int_{\partial^+ A} \langle mdx, \mathrm{Dw}_q^0(m') \rangle$$

$$\int_{\partial^+ A} \langle \mathrm{Dw}_q^0(m), m'dx \rangle = \int_{\partial^+ A} \langle m, \mathrm{Frob}_q^1(m'dx) \rangle$$

$$\int_{\partial^+ A} \langle \mathrm{Dw}_q^1(mdx), m' \rangle = \int_{\partial^+ A} \langle mdx, \mathrm{Frob}_q^0(m') \rangle \quad .$$

Nous avons noté α_1 (resp. β_1) l'endomorphisme de H^1 correspondant à l'action de Dwork (resp. de Frobenius) sur le complexe $0 \to M \xrightarrow{d} Mdx \to 0$.

Notons α_1' (resp. β_1') l'endomorphisme de H^{t1} correspondant à l'action de Dwork (resp. Frobenius) sur le complexe $0 \to M^t \xrightarrow{d} M^t dx \to 0$.

Comme Dw_q^0 (resp. Frob_q^0) laisse invariant M^t, par passage au quotient on peut définir l'endomorphisme α^* (resp. β^*) de $\hat{M}^t/M^t$. On voit facilement que α^* (et β^*) envoie K dans lui-même. D'après ce que nous avons dit il est clair que α^* est l'application transposée de β_1 et que β^* est l'application transposée de α_1 (lorsqu'on considère K comme le dual de H^1).

Rappelons que nous avons défini une appplication $\hat{d}$ de K dans H^{tl}. On vérifie que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\hat{d}} & H^{tl} \\ {\scriptstyle\alpha^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'_1} \\ K & \xrightarrow{\hat{d}} & H^{tl} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\hat{d}} & H^{tl} \\ {\scriptstyle\beta^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta'_1} \\ K & \xrightarrow{\hat{d}} & H^{tl} \end{array}$$

sont commutatifs.

Il en résulte que si $\hat{d}$ est un isomorphisme

$$\det \alpha'_1 \det \alpha_1 = \det \alpha^* \det \alpha_1 = \det \beta_1 \det \alpha_1 = q^{\delta}$$

où $\delta = \dim H^1$.

5.6.- Equation fonctionnelle des fonctions L (une variable).

Considérons la somme de caractères

$$S(f,h;g) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q, g(x) \neq 0} \mathrm{Teich}(h(x))\,\omega_q(f(x))$$

où $g \in \mathbb{F}_q[x]$, f et $h \in \mathbb{F}_q(x)$ tels que les pôles de f (resp. les zéros et les pôles de h soient des zéros de g (dans $\mathbb{F}_\infty$).

Soit $L(f,h;g;T)$ la fonction L associée.

Soit A l'ensemble des classes résiduelles où g ne s'annule pas. Soient f^* et h^* des relèvements de f et h tels que les pôles de f^* (resp. les zéros et les pôles de h^*) ne soient pas dans A. On pose

$$F = h^{*1/(1-q)} \exp \pi f^* .$$

Considérons la cohomologie associée au module différentiel $F\mathcal{K}^\dagger(A)$. On a vu (§ 4.5) que

$$L(f,h;g;T) = \det(1 - T\alpha_1)/\det(1 - T\alpha_o) \quad .$$

Si $F \notin \mathcal{K}^\dagger(A)$ (ou plus précisément s'il n'existe pas $u \in \mathcal{K}^\dagger(A)$ tel que $u'/u = F'/F$) on a $H^O = \{0\}$ et $\det(1 - T\alpha_o) = 1$, donc $L(f,h;g;T)$ est alors un polynôme de degré $\delta = \dim H^1$ (car α_1 est une bijection de H^1, de plus on sait montrer que $\dim H^1 < +\infty$).

La fonction conjuguée complexe de $L(f,h;g;T)$ doit être interprétée comme $L(-f,h^{-1};g;T)$. On doit donc considérer la cohomologie associée au module différentiel $F^{-1}\mathcal{K}^{\dagger}(A)$ qui est le module dual de $F\mathcal{K}^{\dagger}(A)$. On a alors $\dim H^{t1} = \dim H^1$ et

$$L(-f,h^{-1};g;T) = \det(1 - T\alpha_1')/\det(A - T\alpha_0') \quad .$$

Considérons le cas où $F \notin \mathcal{K}^{\dagger}(A)$. Les solutions de $du = 0$ pour $u \in F^{-1}R'(A)$ sont les éléments de $R'(A)$ tels que $u'/u = F'/F$. On aura donc $\mathrm{Ker}_{R'(A)} d = \{0\}$ si et seulement si pour chaque classe résiduelle $\bar{c}$ qui est un zéro de g (et pour la classe $\bar{\infty}$) $F \notin R_c'$.

Dans ce cas, $\hat{d}$ est un isomorphisme. On aura par conséquent

$$\begin{aligned}\bar{L}(f,h;g;T) &= L(-f,h^{-1};g;T) = \det(1 - T\alpha_1') = \det(1 - T\alpha^*) \\ &= \det(1 - T\beta_1) = \det(1 - Tq\, \alpha_1^{-1}) \\ &= (-qT)^{\delta} \det \alpha_1^{-1} \det(1 - \tfrac{1}{Tq}\, \alpha_1) = CT^{\delta} L(f,h;g;1/qT))\end{aligned}$$

où C est une constante.

5.7.- Autodualité. Cup-produit

Nous considérons le cas important où

a) M est isomorphe à son module différentiel dual M^t

b) $\hat{d}$ réalise un isomorphisme entre K et H^{t1}.

A cause de l'hypothèse a) nous pouvons identifier H^1 et H^{t1}. Nous définissons alors sur H^1 une forme bilinéaire non dégénérée

$$H^1 \times H^1 \to \mathbb{C}_p$$

par la formule

$$(\omega,\eta) \longmapsto \langle\langle \omega,\eta \rangle\rangle = \langle \omega, \hat{d}^{-1}\eta \rangle$$

où $\langle\, ,\, \rangle$ désigne la dualité entre H^1 et K. Nous appellerons cette forme bilinéaire cup-produit.

Nous allons montrer que cette forme bilinéaire est alternée

$$\langle\langle \omega,\eta \rangle\rangle = - \langle\langle \eta,\omega \rangle\rangle$$

pour tous $\omega,\eta \in H^1$. Pour cela allons écrire le cup-produit sous une forme équivalente. Soient $\underline{\omega},\underline{\eta}$ des relèvements de ω et η respectivement dans Mdx. Comme $\hat{d}$ est surjective, on a $dM \subset \hat{M}dx$ et par conséquent il existe $\xi \in \hat{M}$ tel que

$$d\xi = \underline{\eta} \quad .$$

On écrira $\xi = \int \underline{\eta}$. On a alors

$$<< \omega,\eta >> = \int_{\partial+_A} < \underline{\omega}, \int \underline{\eta} > \quad .$$

(Notons que $\int \underline{\eta}$ est défini modulo $\mathrm{Ker}_{\hat{M}} d$, mais comme $\mathrm{Ker}_M d = \mathrm{Ker}_{\hat{M}} d$, $\int \underline{\eta}$ est défini modulo $\mathrm{Ker}_M d$ et donc l'intégrale ci-dessus ne dépend ni du représentant $\underline{\omega}$ ni du représentant $\underline{\eta}$ ni de la primitive $\int \underline{\eta}$ et donc peut servir à définir le cup-produit). La formule à démontrer résulte alors simplement de la formule d'intégration par partie

$$\int_{\partial^+ A} < d \int \underline{\omega}, \int \underline{\eta} > = - \int_{\partial^+ A} < \underline{\omega}, d \int \underline{\eta} > \quad .$$

6.- EQUATION DIFFERENTIELLE ASSOCIEE A LA VARIATION DE LA COHOMOLOGIE

6.1.- Principe général

Supposons que nous cherchions une solution $u(\lambda)$ d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynômiaux :

$$Lu = \Sigma\, a_i(\lambda) u^{(i)}(\lambda) = 0$$

sous la forme d'une intégrale $u(\lambda) = \int_\Gamma \varphi(x,\lambda)dx$ (dans le plan complexe), le contour Γ ne dépendant pas de λ. On cherchera φ telle que l'on ait

$$\Sigma\, a_i(\lambda) \frac{\partial}{\partial\lambda} \varphi(x,\lambda)dx = d\psi(x,\lambda) = \frac{\partial}{\partial x} \psi \, dx$$

puis on cherchera un contour Γ tel que la variation $\int_\Gamma d\psi$ soit identiquement nulle en λ, tandis que l'intégrale définissant u ne l'est pas.

Le problème essentiel est donc un problème purement algébrique (c'est-à-dire ne relevant pas de la théorie des fonctions de variable complexe) : montrer qu'une combinaison linéaire de différentielles est nulle modulo les différentielles exactes. Présenté sous cette forme le problème garde tout son sens en p-adique et l'on voit que les méthodes de cohomologie p-adique que nous avons décrites se prêtent à l'étude de ces équations différentielles. Notons cependant qu'on devra en général commencer par faire une normalisation de façon à se ramener au cas où toutes les solutions de notre équation convergent dans le disque générique.

6.2.- Exemples

6.2.1.- Méthode de Laplace

Elle s'applique principalement quand les $a_i(\lambda)$ sont des polynômes du premier degré :

$$Lu = \Sigma(c_i\lambda + d_i)u^{(i)}(\lambda) = 0 \qquad c_i, d_i \in \mathbb{Q} .$$

On cherche u sous la forme

$$u(\lambda) = \int_\Gamma \varphi(x)e^{x\lambda}dx \quad .$$

Après calculs on trouve que φ doit satisfaire l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx}(\Sigma\, c_i x^i\varphi(x)) - \Sigma\, d_i x^i\varphi(x) = 0 \quad .$$

Donc φ définit un $\mathbb{Q}[x, \frac{1}{\Sigma c_i x_i}]$-module différentiel et $\varphi e^{x\lambda}$ définit un $\mathbb{Q}[x, \frac{1}{\Sigma c_i x_i}, \lambda]$-module différentiel.

Pour étudier la cohomologie p-adique associée, il faut au moins faire un changement de variable de façon à faire apparaître $\exp(\pi x\lambda)$ au lieu de $\exp(x\lambda)$.

6.2.2.- Equation de Picard-Fuchs

(Nous utilisons sans vergogne l'excellente introduction de Katz [Ka.1]).

Soit X une courbe projective non singulière de genre g définie sur un corps K de caractéristique 0.

Une différentielle méromorphe est de deuxième espèce si ses résidus sont 0. Les différentielles exactes sont de deuxième espèce et l'espace quotient est de dimension 2g sur K.

Supposons K muni de dérivations non triviales (c'est-à-dire K dépend de paramètres).

Soit x une fonction non constante ; ainsi le corps des fonctions de X est une extension finie de $K(x)$, toute dérivation D de K peut être étendue à $K(x)$ en posant $D(x) = 0$ et ainsi définit une dérivation sur le corps des fonctions de X. On notera cette dérivation D_x pour rappeler la dépendance en x. De même soit $\frac{d}{dx}$ la dérivation de $K(x)$ qui tue K et prend la valeur 1 pour x, son extension au corps des fonctions est encore notée $\frac{d}{dx}$. On voit facilement que D_x et $\frac{d}{dx}$ commutent puisque leur commutateur tue à la fois K et x. Enfin D_x agit sur les différentielles par $D_x(fdg) = D_x(f)dg + fd(D_x g)$ ou plus simplement $D_x(fdx) = D_x(f)dx$. Comme $D_x(dg) = d(D_x g)$, D_x préserve l'exactitude. La formule $\mathrm{res}\,(D_x(\omega)) = D_x(\mathrm{res}\,(\omega))$ assure que D_x préserve les différentielles de deuxième espèce. Par passage au quotient, D_x agit comme une dérivation sur les différentielles de deuxième espèce modulo les différentielles exactes.

Sur l'espace quotient l'action de D_x ne dépend pas de x parce que si y est une autre fonction non constante, $(D_y - D_x)fdx = d(fD_y(x))$.

L'espace quotient est donc un K-module différentiel de rang 2g (connexion de Gauss-Manin).

Dans le cas complexe, si on intègre sur les classes d'homologie γ_j, les périodes $\int_{\gamma_j}$ vérifient une équation différentielle d'ordre 2g. En effet $\omega, D_x\omega, \ldots, D_x^{2g-1}\omega$ sont linéairement dépendants modulo les différentielles exactes c'est-à-dire il existe $a_i \in K$ tels que

$$\Sigma\, a_i D_x^i(\omega) = dg$$

et donc

$$\Sigma\, a_i D_x^i \int_{\gamma_i} \omega = 0 .$$

Ceci est l'équation de Picard-Fuchs.

6.3.- Fonctions spéciales

Nous allons passer en revue les principales fonctions spéciales étudiées par les méthodes cohomologiques de Dwork.

6.3.1.- Fonction hypergéométrique ${}_2F_1(a,b,c;\lambda)$ $(a,b,c \in \mathbb{Q})$.

La formule intégrale d'Euler

$${}_2F_1(a,b,c;\lambda) = c^{te} \int x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-\lambda x)^{-a}dx$$

suggère de considérer la cohomologie de Dwork associée au module différentiel de rang 1 défini par $F_\lambda = x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-\lambda x)^{-a}$. Pour que notre module différentiel soit soluble dans le disque générique, on se limitera au cas $a,b,c \in \mathbb{Z}_p$.

Si d est le dénominateur commun de a,b,c : $a = \frac{m}{d}$, $b = \frac{n}{d}$, $c = \frac{\ell}{d}$, cette intégrale représente les périodes de la différentielle de première espèce dx/y sur la courbe

$$y^d = x^{d-n}(1-x)^{d+n-\ell}(1-\lambda x)^m.$$

On a donc affaire à une équation de Picard-Fuchs. Le genre g de cette courbe peut être >1, alors que l'équation différentielle de ${}_2F_1$ est d'ordre 2. Ceci est dû au fait qu'à cause des automorphismes de la courbe l'équation de Picard-Fuchs se scinde.

6.3.2.- Fonction de Bessel

Pour $a \in \mathbb{Q}$, la fonction de Bessel J_a peut être définie par
$$J_a(\lambda) = \mathrm{Cte}\ \lambda^a \int x^{-a-1} \exp(x - \frac{\lambda^2}{4x})dx.$$

Avec $\pi^{p-1} = -p$, on a donc

$$K_a(\lambda) = \lambda^{-a/2} J_a(2\pi\sqrt{-\lambda}) = \mathrm{cte} \int x^{-a-1} \exp(x + \pi^2 \frac{\lambda}{x})dx ,$$

soit après le changement de variable $x \longmapsto \pi x$ (et un changement de contour)

$$K_a(\lambda) = \mathrm{cte}' \int x^{-a-1} \exp \pi(x + \frac{\lambda}{x})dx .$$

Cette formule suggère, pour étudier l'équation différentielle associée à K_a, de considérer la cohomologie associée au module différentiel de rang 1 défini par $F_\lambda = x^{-a}\exp \pi(x + \frac{\lambda}{x})$. L'introduction du facteur π correspond à la nécessité d'une normalisation pour que les solutions de notre équation différentielle convergent dans le disque générique.

6.3.3.- Fonction hypergéométrique ${}_3F_2$

La formule intégrale

$${}_3F_2\begin{pmatrix} a,b_1,b_2 \\ ;\lambda \\ c_1,c_2 \end{pmatrix} = c^{te} \iint x^{b_1-1}(1-x)^{c_1-b_1-1} y^{b_2-1}(1-y)^{c_2-b_2-1}(1-xy\lambda)^{-a}dx\, dy$$

suggère de considérer la cohomologie de Dwork associée au module différentiel de rang 1 (en 2 variables) défini par

$$F_\lambda = x^{b_1-1}(1-x)^{c_1-b_1-1}\, y^{b_2-1}(1-y)^{c_2-b_2-1}(1-xy\lambda)^{-a}\ .$$

Compte tenu de 6.3.1 on peut réécrire cette intégrale

$$_3F_2\left(\begin{matrix} a,b_1,b_2 \\ \\ c_1,c_2\end{matrix}\ ;\lambda\right) = \text{cte} \int x^{b_1-1}(1-x)^{c_1-b_1-1}\ {_2F_1}(a,b_2,c_2;\,x\lambda)dx$$

ce qui suggère de considérer la cohomologie de Dwork associée au module différentiel de rang 2 (en 1 variable) obtenu en faisant le produit tensoriel du module différentiel associé à $x^{b_1-1}(1-x)^{c_1-b_1-1}$ et du module différentiel associé à ${_2F_1}(a,b_2,c_2;\,x\lambda)$.

Notons que cette construction nous fournit un module différentiel de rang 4 alors que ${_3F_2}$ vérifie une équation différentielle d'ordre 3. On doit donc s'attendre à voir apparaître un sous-module différentiel de rang 3. Celui-ci apparaît effectivement de façon naturelle lorsqu'on considère la structure symplectique.

6.4. Structure de Frobenius

Nous allons indiquer comment les modules différentiels obtenus par variation de la cohomologie sont naturellement munis d'une structure de Frobenius.

Dans ce paragraphe, purement descriptif, nous donnerons une formulation très générale. Tout ce que nous dirons sera exact dans les cas particuliers mentionnés au § 6.3. Nous ignorons si c'est toujours vrai dans le cadre général que nous adoptons. Il faut interpréter ce paragraphe comme une description de ce que pourrait être une théorie générale.

Considérons un module différentiel (de rang fini) en n variables dépendant rationnellement d'un paramètre λ. Plus précisément, considérons un module différentiel $M_{x,\lambda}$ en $n+1$ variables (x,λ) tel que ses matrices de dérivation pour une base convenable aient des coefficients fractions rationnelles en (x,λ), λ étant une variable indépendante de x.

On peut dans un premier temps considérer la cohomologie algébrique, en considérant $M_{x,\lambda}$ comme un module différentiel en n variables, les x, avec $\mathbb{C}_p(\lambda)$ comme corps des constantes. Le $n^{\text{ème}}$-espace de cohomologie H^n est alors un $\mathbb{C}_p(\lambda)$-espace vectoriel. Nous le noterons dorénavant W. Par ailleurs, comme la dérivation $\partial/\partial\lambda$ commute avec les dérivations $\partial/\partial x_i$, $\partial/\partial\lambda$ définit un homomorphisme du complexe de de Rham associé à $M_{x,\lambda}$ dans lui-même, donc, par passage au quotient, une dérivation sur W qui en fait un module différentiel sur $\mathbb{C}_p(\lambda)$. Nous nous limiterons au cas où W est de dimension finie.

On peut également spécialiser λ et considérer la cohomologie algébrique. On obtient ainsi un espace de cohomologie $W_\lambda = H^n_\lambda$ qui est de même dimension que W et isomorphe à la spécialisation de W sauf pour un nombre fini de valeurs de λ qui sont les singularités de notre module différentiel.

Pour pouvoir définir une structure de Frobenius, il faut considérer la cohomologie analytique. On suppose que notre module différentiel $M_{x,\lambda}$ a une structure de Frobenius (forte). En particulier, il existe un module différentiel $M^s_{x,\lambda}$ le successeur de $M_{x,\lambda}$, tel que $M_{x,\lambda}$ soit isomorphe à $M^s_{x^p,\lambda^p}$ en tant que module différentiel (sur un espace dague convenable). Si maintenant, on spécialise le paramètre λ, il est clair que le module différentiel à n variables, $M_{x,\lambda}$, a pour successeur M^s_{x,λ^p}.

Toujours pour λ spécialisé, on peut considérer le complexe de de Rham associé à $M_{x,\lambda}$ considéré comme module différentiel sur un espace $\mathcal{H}^\dagger(A_\lambda)$. On obtient alors le $n^{\text{ième}}$ espace de cohomologie H^n_λ et nous supposerons que, génériquement, H^n_λ est isomorphe à l'espace W_λ obtenu dans la cohomologie algébrique. Quand λ varie dans une classe résiduelle, l'espace $\mathcal{H}^\dagger(A_\lambda)$ ne varie pas et on montre que les modules différentiels $M_{x,\lambda}$ sont isomorphes entre eux, il en est donc de même de H^n_λ : le fibré H^n_λ est donc localement trivial. Quand on spécialise λ dans une classe résiduelle où le module différentiel W a une singularité, la dimension de H^n_λ peut décroître (H^n n'est plus isomorphe à W_λ). On remédie à cette situation en diminuant les trous de A_λ. Nous n'entrerons pas dans les détails. Si l'on note B l'union des classes résiduelles où W n'a pas de singularités, on notera encore W le $\mathcal{H}^\dagger(B)$-module différentiel $W \otimes_{\mathbb{C}_p(\lambda)} \mathcal{H}^\dagger(B)$, et l'on considérera H^n_λ comme spécialisation W_λ de W.

Considérons l'espace de cohomologie $W^s = (W^s_\lambda)$ associé au module différentiel $M^s_{x,\lambda}$. Son image sous l'action de Frobenius $\tau(\lambda) = \lambda^p$ est l'espace $\tau^* W^s = (W^s_{\lambda^p})$ associé au module différentiel M^s_{x,λ^p}. Comme, pour λ spécialisé, le successeur de $M_{x,\lambda}$ est M^s_{x,λ^p}, l'application de Frobenius, agissant sur les espaces de cohomologie, définit un isomorphisme (car on est en dimension finie) de $W^s_{\lambda^p}$ sur W_λ : $\beta_\lambda : W^s_{\lambda^p} \to W_\lambda$. Il est clair que la dérivation par λ commute avec β_λ, car les applications $\partial/\partial\lambda$ et $x \longmapsto x^p$ commutent. Pour s'assurer que β_λ est un morphisme de $\mathcal{H}^\dagger(B)$-module différentiel, il reste à vérifier que pour des bases convenables de W et W^s, la matrice de β_λ a ses coefficients dans $\mathcal{H}^\dagger(B)$. Cette vérification a été faite cas par cas dans les exemples cités au § 6.3. Il serait souhaitable d'en avoir une démonstration générale.

Nous allons expliciter les formules de changement de base et voir comment elles se traduisent pour les équations différentielles associées à nos modules différentiels W et W^p.

Au lieu de considérer l'isomorphisme $\beta_\lambda : W^s_{\lambda^p} \to W_\lambda$, nous allons plutôt utiliser l'isomorphisme inverse (à un facteur p) $\alpha_\lambda : W_\lambda \to W^s_{\lambda^p}$. Soit F une base de W et F^s une base de W^s. Par abus de notation, nous allons noter $F^s(\lambda^p) = \tau^* F^s$ la base de $\tau^* W^s = (W^s_{\lambda^p})$ déduite de F^s. Soient $G(\lambda)$ et $G^s(\lambda)$ les matrices de dérivation dans W et W^s respecitvement :

$$\frac{d}{d\lambda} F = GF \quad , \quad \frac{d}{d\lambda} F^s = G^s F^s \ .$$

Alors la matrice de dérivation dans $\tau^* W^s$ est $p\lambda^{p-1} G^s(\lambda^p)$

$$\frac{d}{d\lambda} F^s(\lambda^p) = p\lambda^{p-1} G^s(\lambda^p) F^s(\lambda^p) \quad .$$

Soit $A(\lambda)$ la matrice de l'application α_λ relative aux bases $F(\lambda)$ et $p^s(\lambda^p)$ (à ne pas confondre avec l'ensemble A_λ considéré ci-dessus) :

$$\alpha_\lambda (F(\lambda)) = A(\lambda) F^s(\lambda^p) \quad .$$

Comme

$$\alpha_\lambda \circ \frac{d}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \circ \alpha_\lambda \quad ,$$

on obtient

$$\frac{d}{d\lambda}(AF^s(\lambda^p)) = (\frac{d}{d\lambda} A(\lambda))F^s(\lambda^p) + A(\lambda) \frac{d}{d\lambda} F^s(\lambda^p) = [\frac{d}{d\lambda} A(\lambda) + A(\lambda) p\lambda^{p-1} G^s(\lambda^p)] F^s(\lambda^p)$$

$$= G(\lambda) A(\lambda) F^s(\lambda^p)$$

ou encore

$$(6.4.1) \quad \frac{d}{d\lambda} A(\lambda) = G(\lambda) A(\lambda) - p\lambda^{p-1} A(\lambda) G^s(\lambda^p) \ .$$

Ceci correspond aux formules de changement de bases du § 2.2.

Comme il est possible de choisir des bases F et F^s telles que les matrices A, G et G^s soient de norme de Gauss ≤ 1, on aura

$$(6.4.2) \quad \frac{d}{d\lambda} A = GA \bmod p \ ...$$

Notons $U(Z,\lambda)$ la matrice telle que, pour $|Z - \lambda| < 1$,

$$\frac{d}{d\lambda} U(Z,\lambda) = G(\lambda)\, U(Z,\lambda), \qquad U(Z,Z) = I,$$

et définissons de même $U^s(Z,\lambda)$. On a alors

$$\frac{d}{d\lambda} U^s(Z^p,\lambda^p) = p\lambda^{p-1} G(\lambda^p)\, U^s(Z^p,\lambda^p), \qquad U^s(Z^p,Z^p) = I .$$

On déduit alors de la relation (6.4.1) que

$$\frac{d}{d\lambda}[A(\lambda)U^s(Z^p,\lambda^p)] = [\frac{d}{d\lambda} A(\lambda)]U^s(Z^p,\lambda^p) + A(\lambda)\frac{d}{d\lambda} U^s(Z^p,\lambda^p) = G(\lambda)A(\lambda)U^s(Z^p,\lambda^p)$$

et l'on a donc

$$A(\lambda)U^s(Z^p,\lambda^p) = U(Z,\lambda)C$$

où C est une matrice indépendante de λ. En faisant $\lambda = Z$, on obtient

(6.4.3) $$A(\lambda)U^s(Z^p,\lambda^p) = U(Z,\lambda)A(Z) \quad .$$

Remarque.- Dwork développe sa théorie de la déformation dans l'espace dual. Les points de vue sont équivalents et les formules sont les mêmes, à une transposition près.

6.5.- Propriétés des équations différentielles ayant une structure de Frobenius forte

6.5.1.- On considère un module différentiel W (en 1 variable λ) et la suite de ses successeurs W_i :

$$W_o = W, \quad W_{i+1} = W_i^s \quad .$$

On suppose qu'il existe ℓ tel que W_ℓ soit isomorphe à W, soit $\tau^{*\ell}W = W$.

Soit G la matrice de dérivation associée à une base de W. Nous nous proposons d'étudier le rayon de convergence et la croissance des solutions de l'équation différentielle $\frac{d}{d\lambda} U = G(\lambda)U$ dans une classe résiduelle non singulière. On note Γ la réunion des classes résiduelles non singulières (c'est-à-dire où le système n'a pas de singularités). Notons $U(Z,\lambda)$ la matrice, définie pour λ proche de Z, telle que

(6.5.1.1) $$U(Z,Z) = I \quad , \quad \frac{d}{d\lambda} U(Z,\lambda) = G(\lambda)U(\lambda).$$

Comme $\tau^{*\ell}W = W$, il existe une matrice $A_{p^\ell}(\lambda)$, à coefficients dans $\mathcal{H}^\dagger(\Gamma)$, ainsi que $A_{p^\ell}(\lambda)^{-1}$ telle que

$$A_{p^\ell}(\lambda)U(Z^{p^\ell},\lambda^{p^\ell}) = U(Z,\lambda)A_{p^\ell}(Z).$$

Pour $q = p^{\ell m}$, on pose $A_q(\lambda) = A_{p^\ell}(\lambda)A_{p^\ell}(\lambda^{p^\ell})\dots A_{p^\ell}(\lambda^{p^{\ell(m-1)}})$, alors

$$A_q(\lambda)U(Z^q,\lambda^q) = U(Z,\lambda)A_q(Z) \ . \tag{6.5.1.2}$$

Etant donné une classe résiduelle non singulière (donc contenue dans B), on choisit pour Z le représentant de Teichmuller de cette classe. Il existe alors q de la forme $q = p^{\ell m}$ tel que $Z = Z^q$. Pour la suite du paragraphe, Z et q restent fixés.

6.5.2.- Rayon de convergence de $U(Z,\lambda)$

Soit λ appartenant à la classe résiduelle de Z. Il est bien connu que quand $j \to +\infty$, $\lambda^{q^j} \to Z$ uniformément en λ. Précisément pour tout $r < 1$, tout $\varepsilon > 0$, il existe j_o tel que si $|\lambda - Z| < r$ et $j \geq j_o$ alors $|\lambda^{q^j} - Z| < \varepsilon$. (Formulation analogue si $Z = \infty$). Alors si ε a été choisi plus petit que le rayon de convergence de $U(Z,\lambda)$ (qui n'est pas nul) on déduit de (6.5.1.2) que pour un $j \geq j_o$

$$A_{q^j}(\lambda)U(Z,\lambda^{q^j}) = U(Z,\lambda)A_{q^j}(Z)$$

donc que $U(Z,\lambda)$ converge dans le disque $|Z - \lambda| < r$, donc dans toute la classe résiduelle $|Z - \lambda| < 1$.

6.5.3.- Croissance des solutions

Si $|A_q(\lambda)|_{gauss} = \sup_{i,j}|A_{q,ij}(\lambda)|_{gauss} \neq 1$, soit $c \in C_p$ avec $|1/c| = |A_q(\lambda)|_{gauss}$. Alors si on pose $B(\lambda) = c\, A_q(\lambda)$, l'équation (6.5.1.2) s'écrit

$$B(\lambda)U(Z,\lambda^q) = U(Z,\lambda)B(Z) \tag{6.5.3.1}$$

et l'on a $|B(\lambda)|_{gauss} = 1$.

Supposons pour simplifier que la matrice B(Z) soit diagonalisable. Soit P la matrice telle que

$$P^{-1}B(Z)P = \Delta = \begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_s \end{pmatrix}$$

Alors la matrice $V(\lambda) = U(Z,\lambda)P$ vérifie le même système différentiel que $U(Z,\lambda)$ et la relation (6.5.3.1) devient

(6.5.3.2) $\quad B(\lambda)V(\lambda^p) = V(\lambda)\Delta$.

On dit que V est une <u>solution matrice normalisée</u> de notre système différentiel.

Notons $V^1 \dots V^s$ les vecteurs colonnes de $V(\lambda)$, on a donc

(6.5.3.3) $\quad B(\lambda)V^j(\lambda^q) = \omega_j V^j(\lambda) \qquad 1 \le j \le s$.

Pour $0 < r < 1$, posons

$$|V^j|(r) = \max_i \sup_{|\lambda-Z|\le r} |V_i^j(\lambda)| = \max_i \sup_{|\lambda-Z|=r} |V_i^j(\lambda)| .$$

Comme pour $|\lambda - Z| > |p|$ on a $|\lambda^q - Z| = |\lambda^q - Z^q| = |\lambda - Z|^q$, on déduit de (6.5.3.3) que pour $r > |p|^{1/q}$

(6.5.3.4) $\quad |V^j|(r) \le \frac{1}{|\omega_j|} |V^j|(r^q)$.

Si $|\omega_j| = q^{-\alpha_j}$ on en déduit que

(6.5.3.5) $\quad |V^j|(r) = O(1/(\mathrm{Log}\ r)^{\alpha_j}) \quad$ quand $r \to 1$;

on dit que $|V^j|(r)$ a <u>une croissance logarithmique d'ordre au plus</u> α_j.

(Si $B(Z)$ n'est pas diagonalisable, on met $B(Z)$ sous forme de Jordan et on étudie simultanément les vecteurs colonnes de V correspondant aux sous-matrices élémentaires de la forme de Jordan).

Pour savoir si $|V^j|(r)$ a exactement la croissance logarithmique d'ordre α_j (c'est-à-dire n'est pas de croissance logarithmique d'ordre $< \alpha_j$), il faut avoir quelques renseignements supplémentaires sur la matrice $B(\lambda)$.

6.5.4- <u>Remarque</u>

La théorie des applications semi-linéaires de Dieudonné permet de considérer la même matrice $A_{p^\ell}(\lambda)$ pour toutes classes résiduelles $B^-(Z,1)$ sans qu'il soit nécessaire de considérer les $A_q(\lambda)$ avec des q différents pour les différents Z.

6.5.5- Cas d'un système différentiel obtenu par variation de la cohomologie

Nous nous plaçons dans la situation décrite au paragraphe 6.4. Spécialisons λ en Z. Alors, pour la valeur de q introduite ci-dessus, $\tau_q(M_{x,Z}) = M_{x^q,Z}$ est isomorphe à $M_{x,Z}$. On en déduit une application de Dwork sur l'espace de cohomologie

$$\alpha : W_Z \to W_Z$$

et d'après ce qu'on a vu $A_q(Z)$ est la matrice de l'application α dans une base convenable.

Les ordres de croissance des solutions sont liés aux valuations p-adiques des valeurs propres de l'endomorphisme de Dwork. Rappelons que dans le cas où l'on considère une cohomologie associée à des sommes de caractères, les valeurs propres de l'endomorphisme de Dwork sont les inverses des zéros de la fonction L associée.

BIBLIOGRAPHIE THEMATIQUE

N.B. Nous ne considérons pas les articles utilisant les méthodes de cohomologie cristalline.

- Rationalité des fonctions zêta et L.

  Méthode précohomologique :

  Fonction zêta [Dw 1] [Se 1] [Mo 2] [Ko 1]

  Fonction L [Bo 1] [Dw 7] [Re]

  Méthode cohomologique :

  Fonction zêta (hypersurface non singulière) [Dw 4] [Mo 2]

  Fonction L (1 variable) [Ro 2]

- Degré de fonctions zêta et L.

  Degré de la fonction zêta (hypersurface non singulière) [Dw 4] [Mo 2]

  Degré des fonctions L (1 variable) [Ro 2]

  Estimation du degré des fonctions L [Bo 1] [Bo 2] [A-S 1]

- Dimension de la cohomologie - Indice d'un opérateur différentiel.

  Cohomologie associée à une hypersurface non singulière [Dw 4] [Mo 2]

  Cohomologie algébrique [Dw 6]

  Cohomologie associée aux fonctions hypergéométriques F(a,b;c;x) [Dw 9] [Dw 17] [Dw 18] [He]

  Cohomologie associée aux hypersommes de Kloosterman, fonction hypergéométrique ${}_0F_n(1,1,\dots,1;x)$ [Sp 1]

  Cohomologie associée aux produits symétriques de l'équation différentielle de F(1/2,1/2;1;x), polynôme de Hecke [Ad 1]

  Cohomologie associée aux fonctions de Bessel, sommes de Kloosterman [Dw 16] [A-S 2] [Dw 18]

  Cohomologie associée aux sommes de Gauss [By 1] [La] [Dw 17] [Dw 18]

  Cohomologie associée aux fonctions L (1 variable) [Ro 2]

  Cohomologie associée aux fonctions hypergéométriques ${}_3F_2$ [Ba 2]

  Calcul de l'indice d'un opérateur différentiel à points singuliers réguliers [Ad 3]

  Existence d'un indice pour un opérateur différentiel [Ro 1]

  Calcul d'indice pour des opérateurs différentiels [Ro 2] [Ro 3]

- Opérateurs nucléaires et formule de trace.

  [Dw 1] [Dw 4] [Se 2] [Gr] [Mo 1] [Mo 2] [Re] [By 2]

- Autour de la formule de Gross-Koblitz. Dépendance de la cohomologie par rapport à certains paramètres.

  [GK] [By 1] [La] [Ka 4] [Dw 17] [Dw 18] [Ba 1]

- Estimation des valuations p-adiques des valeurs propres du Frobenius.

  Zéros de la fonction zêta [Dw 5] [Ka 2]

  Zéros des fonctions L [Bo 1] [Sp 2] [Sp 4] [Sp 5] [Ro 2]

  Polynômes de Hecke [Ad 2]

- Théorie duale.

  Plusieurs variables [Dw 5] [Dw 6] [Sp 1]

  Une variable [Dw 16] [Dw 17] [AS 2] [Ro 2] [Ba 1] [Ba 2]

  Equation fonctionnelle de la fonction zêta [Dw 5]

  Equation fonctionnelle des fonctions L (1 variable) [Ro 2]

- Variation de la fonction zêta. Equations de Picard-Fuchs.

  [Dw 3] [Dw 5] [Dw 6] [Ka 1] [Dw 8] [Ka 2] [Dw 9] [Ka 3]
  [Dw 11] [Dw 13]

- Equations différentielles p-adiques étudiées par des méthodes cohomologiques.

  Fonction hypergéométrique $F(1/2,1/2;1;x)$ [Dw 9]

  Equation de Picard-Fuchs pour les courbes [Dw 11]

  pour les surfaces [Dw 13]

  Produits symétriques de l'équation satisfaite par $(F(1/2,1/2;1;x)$

  [Dw 10] [Ad 1]

  Fonction de Bessel [Dw 16] [AS 2]

  Fonction hypergéométrique ${}_0F_n(1,1,\ldots,1;x)$ [Sp 1]

  Fonction hypergéométrique $F(a,b;c;x)$ [Dw 17] [He]

  Fonction hypergéométrique ${}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b_1,b_2\\ c_1,c_2\end{matrix}\;;\;x\right)$ [Ba 2]

[Ad 1] A. ADOLPHSON - A p-adic theory of Hecke polynomials. Duke Math. J. 43 (1976), 115-145.

[Ad 2] A. ADOLPHSON - On the mod p eigenvalues of Hecke operators. Duke Math. J. 43 (1976), 109-114.

[Ad 3] A. ADOLPHSON - An index theorem for p-adic differential operators. Trans. Amer. Math. Soc. 216 (1976), 279-293.

[Ad 4] A. ADOLPHSON - The U_p-operator of Atkin on modular functions of level three. Ill. J. of Math. 24 (1980), 49-59.

[A-S 1] A. ADOLPHSON, S. SPERBER - Exponential sums on the complement of a hypersurface. Amer. J. Math. 102 (1980), 461-487.

[A-S 2] A. ADOLPHSON, S. SPERBER - Twisted Kloosterman sums and p-adic Bessel functions. Amer. J. Math. 106 (1984), 549-591.

[A-S 3] A. ADOLPHSON, S. SPERBER - Character sums in finite fields. Comp. Math. 52 (1984), 325-354.

[Ba 1] P. BALDASSARRI - Higher p-adic Gamma functions and Dwork cohomology. Astérisque, 119-120 (1984), 111-128.

[Ba 2] F. BALDASSARRI - Cohomologie p-adique pour la fonction ${}_3F_2\left({a,b_1,b_2 \atop c_1,c_2};\lambda\right)$, Astérisque, 119-120 (1984), 51-110.

[Bo 1] E. BOMBIERI - On exponential sums in finite fields. Amer. J. Math. 88 (1966), 71-105.

[Bo 2] E. BOMBIERI - On exponential sums in finite fields II. Invent. Math. 47 (1978), 29-39.

[By 1] M. BOYARSKY - p-adic Gamma functions and Dwork cohomology. Trans. Amer. Math. Soc. 257 (1980), 359-369.

[By 2] M. BOYARSKY - The Reich trace formula. Astérisque 119-120 (1984), 129-150

[Ch 1] G. CHRISTOL - Systèmes fifférentiels linéaires p-adiques : Structure de Frobenius faible. Bull. Soc. Math. France 109 (1981), 83-122.

[Ch 2] G. CHRISTOL - Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers. Astérisque, 119-120 (1984), 151-168.

[Dw 1] B. DWORK - On the rationality of the zeta function of an algebraic variety. Amer. J. Math. 82 (1960), 631-648.

[Dw 2] B. DWORK - On the congruence properties of the zeta function of algebraic variety. J. Reine Angew. Math. 203 (1960), 130-142.

[Dw 3] B. DWORK - A deformation theory for the zeta function of a hypersurface. Proc. Int. Cong. Math. (1962), 247-259.

[Dw 4] B. DWORK - On the zeta function of a hypersurface. Pub. Math. I.H.E.S. 12 (1962), 5-68.

[Dw 5] B. DWORK - On the zeta function of a hypersurface II. Ann. of Math. 80 (1964), 227-299.

[Dw 6] B. DWORK - On the zeta function of a hypersurface III. Ann. of Math. 83 (1966), 457-519.

[Dw 7] B. DWORK - On the rationality of zeta functions and L-series. Proc. Conf. Local Fields, Driebergen 1966, Springer-Verlag 1967, 40-55.

[Dw 8] B. DWORK - On the zeta function of a hypersurface IV : a deformation theory for singular hypersurface. Ann. of Math. 90 (1969), 335-352.

[Dw 9] B. DWORK - p-adic cycles. Pub. Math. I.H.E.S. 37 (1969), 27-116.

[Dw 10] B. DWORK - On Hecke polynomials. Inv. Math. 12 (1971), 249-256.

[Dw 11] B. DWORK - Normalized period matrices I. Ann. of Math. 94 (1971) 337-388

[Dw 12] B. DWORK - The U_p operator of Atkin on moduoar functions of level 2 with growth conditions. Proc. of the Summer Institute on Modular forms (1972), Antwerp.

[Dw 13] B. DWORK - Normalized period matrices II. Ann. of Math. 98 (1973), 1-57.

[Dw 14] B. DWORK - On p-adic differential equations I. Bull. Soc. Math. France, Mémoire 39-40 (1974), 27-37.

[Dw 15] B. DWORK - On p-adic differential equations IV. Ann. Sc. ENS 6 (1973), 295-316.

[Dw 16] B. DWORK - Bessel functions as p-adic functions of their argument. Duke Math. J. 41 (1974), 711-738.

[Dw 17] B. DWORK - Lectures on p-adic differential equations GL 253 (1983), Springer-Verlag.

[Dw 18] B. DWORK - On the Boyarsky principle. Amer. J. of Math. 105 (1983) 115-156.

[Dw 19] B. DWORK - On Kummer's twenty-four solutions of the hypergeometric differential equation. Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[Dw 20] B. DWORK - On p-adic analysis. Some recent advances in the basic sciences vol. 2 (Proc. Annual Sc. Conf.). Belfer graduate school of Sciences, Yeshiva University, N.Y. (1969), 129-154.

[G-K] B. GROSS, N. KOBLITZ - Gauss sums and the p-adic Gamma function. Ann. of Math. 109 (1979), 569-581.

[Gr] L. GRUSON - Théorie de Fredholm p-adique. Bull. Soc. Math. France 94 (1966), 67-95.

[He] M. HEILIGMAN - A p-adic theory of hypergeometric differential équations. Princeton thesis 1982.

[Ka 1] N. KATZ - On the differential equations satisfied by period matrices. Pub. Math. I.H.E.S. 35 (1968), 71-106.

[Ka 2] N. KATZ - On a theorem of Ax. Amer. J. of Math. 93 (1971), 485-499.

[Ka 3] N. KATZ - Travaux de Dwork. Séminaire Bourbaki 1971-72, exposé 409 (Lecture Notes in Math. 340, 1973, Springer-Verlag).

[Ka 4] N. KATZ - Crystalline cohomology, Dieudonné modules and Jacobi sums. Automorphic forms, Representation theory an Arithmetic. Tata Inst., Bombay 1979, 165-246.

[Ko 1] N. KOBLITZ - p-adic numbers, p-adic analysis and zeta function. Springer-Verlag, 1977.

[Ko 2] N. KOBLITZ - p-adic analysis : a short course on recent work. London Math. Soc., Lecture Notes series 46.

[La] S. LANG - Cyclotomic fields II, GTM 69. Springer-Verlay 1980.

[Lu] S. LUBKIN - A p-adic proof of Weil's conjectures. Ann. of Math. 87 (1968), 105-194 ; ibid 87 (1968), 195-225.

[Mo 1] P. MONSKY - Formal cohomology III, fixed point theorems. Ann. of Math. 93 (1971), 315-343.

[Mo 2] P. MONSKY - p-adic analysis and zeta functions. Lectures in Mathematics, Kyoto University, Kinokuniya bookstore, Tokyo

[M-W 1] P. MONSKY, G. WASHNITZER - Formal cohomology I. Ann. of Math. 88 (1968), 181-217.

[M-W 2] P. MONSKY, G. WASHNITZER - Formal cohomology II. Ann. of Math. 88 (1968), 218-238.

[Re] D. REICH - A p-adic fixed point formula. Amer. J. Math. 91 (1969), 835-850.

[Ro 1] P. ROBBA - On the index of p-adic differential operators I. Ann. of Math. 101 (1975), 280-316.

[Ro 2] P. ROBBA - Index of p-adic differential operators III. Application to exponential sums. Astérisque, 119-120 (1984), 191-266.

[Ro 3] P. ROBBA - Indice d'un opérateur différentiel p-adique IV. Cas des systèmes. Ann. Inst. Fourier 35,2 (1985), 13-55.

[Se 1] J.P. SERRE - Rationalité des fonctions zêta des variétés algébriques (d'après B. Dwork). Séminaire Bourbaki, 1959-1960, exposé 198.

[Se 2] J.P. SERRE - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. Pub. Math. I.H.E.S. 12 (1962), 69-85.

[Sp 1] S. SPERBER - p-adic hypergeometric functions and their cohomology. Duke Math. J. 44 (1977), 535-589.

[Sp 2] S. SPERBER - Congruences properties of the hyper-Kloosterman sum. Compositio Math. 40 (1980), 3-33.

[Sp 3] S. SPERBER - On the L-functions associated with certain exponential sums. J. Number Theory 12 (1980), 141-153.

[Sp 4] S. SPERBER - Newton polygons for general hyper-Kloosterman sums. Astérisque, 119-120 (1984), 267-330.

[Sp 5] S. SPERBER - A p-adic theory of exponential sums. Amer. J. Math. (to appear)

E R A 643
Université Paris Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY Cedex
FRANCE