MÉMOIRES DE LA S. M. F.

HENRY MAILLOT

Courbures et basculements des sous-variétés riemanniennes

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 22 (1986)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1986_2_22__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 22
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 114, 1986, fascicule 1

COURBURES ET BASCULEMENTS DES SOUS-VARIETES RIEMANNIENNES

par

MAILLOT Henry

A MES PARENTS

Résumé.

Dans ce travail, après avoir rappelé les définitions et résultats de l'article [Ma.1] nous poursuivons notre étude des relations entre le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel d'une sous-variété V et les variations angulaires de l'espace tangent à V.

En chaque point de V nous avons défini un endomorphisme β qui mesure les variations angulaires de l'espace tangent à V. Lorsque V est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$, l'intégrale du déterminant de β est liée aux nombres de Betti de V.

Nous définissons la notion de roulis de V suivant un vecteur tangent à V. Ceci conduit en particulier à des définitions en codimension quelconque des directions et des lignes de courbure.

Un "théorème de Joachimsthal" est démontré.

Nous définissons et étudions les directions principales "longitudinales" des tubes autour de V. Des relations avec la courbure de la connexion normale sont établies.

Abstract.

In this work, after recalling the results of the article [Ma.1] we continue our study of the relationship between the Riemann-Christoffel curvature tensor

Manuscrit reçu le 4 juin 1985, Révisé le 12 mars 1986.

0037-9484/86 01/1-154 $ 17.40 © Gauthier-Villars

of a submanifold V and the angular variations of the tangent space to V.

At each point of V we have defined an endomorphism β which measures the angular variations of the tangent space to V.

If V is a compact submanifold of R^n then the integral of the determinant of β is linked to the Betti numbers of V.

We define the notion of roll of V with respect to a tangent vector to V. This leads in particular to definitions, for any dimension, of directions and lines of curvature.

A "Joachimsthal theorem" is proved.

We define and study the "longitudinal" principal directions of the tube over V.

Relations with the curvature of the normal connection are established.

SOMMAIRE

0. Notations générales et résumé de l'article [Ma.1]

1. Notations et conventions générales
2. Rappels d'algèbre euclidienne
3. Définition et signification géométrique de l'endomorphisme de bascule
4. Courbure aréolaire d'une sous-variété
5. Sous-variétés minimales et sous-variétés isobasculantes
6. Relations entre l'opérateur de courbure de V et l'endomorphisme de bascule dans le cas où $\tilde{V}$ a une courbure nulle
7. Endomorphismes de bascule et courbures aréolaires d'un produit de sous-variétés.

I. Basculements, tangages, diamètres et courbures

1. Compléments sur les endomorphismes de bascule et les sous-variétés isobasculantes
2. Existence de points d'*-convexité
3. Courbures, tangages et diamètres
4. Basculements et transports parallèles
5. Courbure aréolaire et nombres de Betti.

II. Roulis et rotations instantanées

1. Notations et rappels
2. Un invariant conforme : le roulis
3. Roulis et intersections de sous-variétés, théorème de Joachimsthal
4. Rotations instantanée g_u associée à un vecteur u tangent à V, relations avec courbures intrinsèques, basculements, tangages et roulis.
5. Tangages, roulis et basculements dans les sous-variétés produits
6. Indice de nullité de roulis et courbure de la connexion normale
7. Liaisons entre tangages, roulis et basculements.

III. Sous-espaces centraux, translations instantanées et points focaux des sous-variétés d'un espace euclidien

1. Notations et préliminaires
2. Champ de Killing X_u, sous-espace central $\mathscr{C}_u$, point central H_u et translation instantanée $\mathcal{T}_u$ associés à un vecteur u tangent à la sous-variété V
3. Vecteurs tangents non dégénérés
4. Vecteurs tels que $g_u = 0$ ou $\mathcal{T}_u = 0$, relations avec les points focaux
5. Limites d'intersections d'espaces normaux, tangents, etc... .

IV. Sur les sous-espaces "longitudinaux" et les directions principales des tubes autour d'une sous-variété

1. Cas où $\tilde{V}$ est un espace euclidien
2. Définitions et propriétés des champs de sous-espaces "longitudinaux" $\mathcal{O}$ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ (pour $\tilde{V}$ quelconque).
3. Cas où $\tilde{V}$ est une variété riemannienne (resp. kählérienne) dont la courbure sectionnelle (resp. sectionnelle holomorphe) est constante.
4. Le champ de sous-espaces $\mathscr{L}$. Définition des directions principales longitudinales (pour $\tilde{V}$ quelconque). Relations entre l'intégrabilité de $\mathscr{L}$ et la platitude de la connexion normale.

Introduction

Depuis Gauss, les Géomètres se sont attachés à distinguer les propriétés géométriques intrinsèques des surfaces de leurs propriétés extrinsèques.

La courbure, dite de Gauss, généralisée en le tenseur de Riemann-Christoffel est devenue le pilier central de la théorie intrinsèque des variétés riemanniennes.

Il n'en reste pas moins que la notion de courbure est à l'origine purement extrinsèque : la courbure intrinsèque des variétés de dimension 1 sur $\mathbb{R}$ est toujours nulle. Le problème de la généralisation des notions de courbures extrinsèques au cas des sous-variétés de dimension quelconque a été traité par de nombreux auteurs (pour une étude récente, voir J.M. MORVAN [Mo]).

Historiquement l'étude locale de la courbure des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ s'est faite par l'intermédiaire des "sections normales". A chaque droite D tangente en un point x_o de la surface est associé une "courbure normale" f(D) dont on étudie la variation en fonction de D. On en déduit la définition des directions principales (points stationnaires de f), de la courbure de Gauss, etc. .

Pour une hypersurface de dimension p d'une variété riemannienne $\tilde{V}$ les choses sont analogues, il y a en général p directions stationnaires pour la courbure de la section normale, à savoir les directions principales. La situation est beaucoup plus compliquée lorsque V est une sous-variété de codimension $q > 1$. Dans ce dernier cas, on peut encore associer à chaque droite D tangente en x_o à V une "courbure normale", mais celle-ci n'a pas un comportement simple quand D varie ; en particulier il peut y avoir plus de p directions stationnaires.

Ceci incite à penser que pour une sous-variété de dimension p et de codimension $q > 1$ de $\tilde{V}$ il n'y a pas en général p droites privilégiées jouant le rôle des directions principales d'une hypersurface.

Dans [Ma.1] nous avons montré qu'en fait il existe quand même de telles droites, que nous avons appelées directions de basculement principal.

Nous avons défini un endomorphisme symétrique β de T_xV caractérisé par la propriété suivante :

Soient γ une courbe paramétrée de V, $x_o = \gamma(t_o)$, $u = \gamma'(t_o)$, $\theta(t)$ l'angle $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ de $T_{x_o}V$ avec $\tilde{P}_{t_o,t}(T_{\gamma(t)}V)$, où $\tilde{P}_{t_o,t}$ désigne le transport parallèle relatif à $\tilde{V}$, le long de γ, de t à t_o.

Alors $\frac{\theta(t)}{t-t_o}$ tend vers $\|\beta(u)\|$ quand $t \xrightarrow[t>t_o]{} t_o$.

Nous appelons β **l'endomorphisme de bascule** de V au point x. Les **directions de basculement principal** sont, par définition, les directions propres de β.

Ceci nous a conduit naturellement à la définition suivante : une sous-variété V de $\tilde{V}$ est dite **isobasculante** lorsque, pour tout $x \in V$, $\|\beta(u)\|$ reste constant quand u varie dans la sphère unité de T_xV. Pour cela, il faut et il suffit qu'en tout point de V l'endomorphisme β soit une homothétie.

Dans le présent travail, constitué de cinq chapitres que nous allons décrire brièvement, nous poursuivons notre étude des propriétés géométriques liées aux notions de courbures intrinsèques ou extrinsèques d'une sous-variété d'une variété riemannienne.

Les chapitres sont numérotés en chiffres romains, et une référence à (III.5.2) par exemple, renvoie au n° (5.2) de III.

0. Le chapitre 0 contient les notations générales et un résumé de l'article [Ma.1] auquel le présent travail fait suite.

I. Le chapitre I commence par une interprétation de la forme bilinéaire associée à β^2 comme différence de deux métriques.

Ceci nous permet de caractériser les sous-variétés isobasculantes comme étant celles pour lesquelles l'application canonique de V dans le fibré en grassmanniennes d'indice p sur $\tilde{V}$ est une application conforme.

Puis nous donnons une interprétation géométrique de l'indice de nullité relative introduit par Chern et Kuiper : cet indice au point x n'est autre que le nombre maximum de directions linéairement indépendantes en x, suivant lesquelles le basculement de V est nul (cf. I.1.7).

Nous étudions ensuite plus avant les sous-variétés isobasculantes. Nous avons vu dans [Ma.1] qu'il en existe de nombreux exemples.

Les sous-variétés ombilicales sont automatiquement isobasclantes, mais la réciproque est très loin d'être vraie. C'est dans le cas de la codimension 1 que les deux notions sont les plus proches.

Nous établissons en (I.1.18) qu'une hypersurface isobasculante compacte , connexe, de dimension $\geqslant 2$, d'un espace euclidien E est nécessairement une hypersphère de E. Toutefois une hypersurface isobasculante d'une sphère n'est pas forcément ombilicale (cf. I.1.11 et 1.14).

Lorsqu'on étudie les rapports entre les deux notions d'hypersurfaces isobasculantes et d'hypersurfaces ombilicales on rencontre la question suivante : A quelles conditions, dans une variété $\tilde{V}$, toute hypersurface compacte possède-t-elle au moins un point de convexité ? Nous avons cherché à voir dans quelle mesure le raisonnement classique dans $\mathbb{R}^n$, consistant à enserrer V dans des sphères, se généralisait (cf. I.2.7 et 2.9).

Ensuite, ayant défini le **tangage de V suivant un vecteur** de façon naturelle, nous avons étudié les rapports entre courbures, tangages, basculements et diamètres extrinsèques. L'outil de base est le lemme (I.3.1) et son complément (I.3.7).

Mentionnons l'application aux sous-variétés minimales de $\mathbb{R}^n$ (I.3.3) et la caractérisation d'une sphère (I.3.8).

L'étude des rapports entre basculements et transport parallèle nous permet d'énoncer en particulier une propriété des surfaces minimales à bord de $\mathbb{R}^n$, qui relie l'intégrale de la racine carrée du module de la courbure de Gauss sur le bord à l'intégrale de la courbure de Gauss sur la variété (cf.I.4.8).

Le chapitre I se termine par une comparaison de la courbure de Gauss-Bonnet d'une sous-variété de dimension paire de $\mathbb{R}^n$ avec sa courbure aréolaire det β, (cf. I.5.4).

L'intégrale de la courbure aréolaire dépend de la topologie de V : à un facteur près ne dépendant que de la dimension et de la codimension de V, elle est minorée par la somme des nombres de Betti de V (cf. I.5.5).

II. Dans le chapitre II la notion de **roulis** d'une sous-variété V suivant un vecteur tangent à V est définie et étudiée. Le roulis est un invariant conforme.

Si V est une hypersurface de $\tilde{V}$, et si $x \in V$ et $u \in (T_x V) \setminus \{0\}$, pour que $\mathbb{R}u$ soit une direction principale de V il faut et il suffit que le roulis de V suivant u soit nul.

Ceci, ainsi que d'autres raisons, conduit à appeler **direction de courbure** d'une sous-variété V de $\tilde{V}$ toute droite $\mathbb{R}u$, $u \in (T_x V) \setminus \{0\}$, telle que le roulis de V suivant u soit nul, et **ligne de courbure** de V toute courbe de V dont toutes les tangentes sont des directions de courbure de V. Une direction de courbure est nécessairement une direction de basculement principal.

La définition ci-dessus des lignes de courbure permet d'énoncer un "théorème de Joachimsthal" général (cf. II.3.7). Le fibré normal relativement à $\tilde{V}$ de la ligne de courbure, et sa connexion canonique interviennent de façon essentielle.

Pour qu'une sous-variété V de $\tilde{V}$ soit ombilicale il faut et il suffit que tous les roulis de V soient nuls. (Cet énoncé est à rapprocher du suivant : pour qu'une sous-variété V de $\tilde{V}$ soit totalement géodésique il faut et il suffit que tous ses basculements soient nuls.)

Il en résulte en particulier que si V_1 et V_2 sont deux sous-variétés ombilicales de $\tilde{V}$ telles que :

i) $\dim V_1 + \dim V_2 > \dim \tilde{V}$,
ii) $V_1 \cap V_2$ est connexe,
iii) V_1 et V_2 sont transverses en un point $x_o \in V_1 \cap V_2$,

alors $V_1 \cap V_2$ est une sous-variété ombilicale et de plus V_1 et V_2 se coupent suivant un angle constant (cf. II.3.8 et 3.9).

Des formules relatives aux roulis ou aux basculements d'une intersection sont établies.

On montre que le basculement $\| \beta(u) \|$ n'est autre que la norme euclidienne d'une **"rotation instantanée"** $\hat{g}_u$ (cf. II.4.5). L'endomorphisme $\hat{g}$ se décompose canoniquement en une somme de deux éléments orthogonaux dont les normes euclidiennes ne sont autres que le tangange de V suivant u et le roulis de V suivant u.

Lorsque $\tilde{V}$ est conformément plate, pour qu'une sous-variété V de dimension p

de $\tilde{V}$ ait une connexion normale plate, il faut et il suffit qu'en chaque point de V il existe p directions linéairement indépendantes suivant lesquelles le roulis de V est nul (cf. II.6.6).

Le carré du basculement est égal à la somme du carré du tangage et du carré du roulis, mais tangage et roulis ne sont pas indépendants et ne se comportent pas de façon symétrique. Par exemple, d'une majoration au point x_o des tangages suivant les vecteurs unitaires, on déduit une majoration des roulis suivant ces mêmes vecteurs (cf. II.7.1), mais la réciproque est fausse, comme le montre le cas d'une sphère euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Cette réciproque devient vraie quand on se limite aux sous-variétés minimales (cf. II.7.3).

III. Dans le chapitre III, nous définissons et étudions pour les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ des objets qui, lorsque V est une courbe, sont les axes et les centres de courbure de V.

Si V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $u \in T_xV$, on définit un champ de Killing X_u sur $\mathbb{R}^n$ qui donne naissance à un sous-espace affine $\mathscr{C}_u$, appelé **espace central** et à un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_u$, **la translation instantanée.**

Un point privilégié est aussi considéré : la projection orthogonale H_u de x sur $\mathscr{C}_u$. Il s'avère que H_u-x est orthogonal à V (cf. III.2.2).

Nous sommes conduits de façon naturelle à la définition de la non-dégénérescence d'un élément u de TV (cf. III.3.3). La non-dégénérescence est le cas général. Par exemple lorsque V est une courbe, pour que $u \in T_xV$ soit non dégénéré il faut et il suffit que u et la courbure de V au point x soient non nuls.

Les cas particuliers des courbes et hypersurfaces réelles ou complexes sont examinés (III.3.7 et 3.8).

Les vecteurs u pour lesquels la rotation instantanée g_u est nulle sont évidemment dégénérés.

Diverses caractérisations de ces vecteurs sont données.

Nous étudions ensuite les vecteurs u pour lesquels la translation instantanée

$\mathfrak{T}_u$ est nulle. Ceci nous conduit à une interprétation cinématique des points focaux (III.4.5).

Dans le cas où dim V $\leqslant$ codim V, si $u \in TV$ est non dégénéré et si γ est une courbe paramétrée de V telle que $\gamma'(0) = u$, alors dès que $|t|$ est assez petit, l'espace affine normal à V au point $\gamma(t)$ est transverse à l'espace affine normal à V au point $\gamma(0)$ et l'intersection de ces deux espaces affines normaux tend vers l'espace central $\mathscr{C}_u$ quand $t \underset{\neq}{\longmapsto} 0$ (cf. III.5.2).

Une interprétation analogue est donnée dans le cas où dim V $\geqslant$ codim V, l'intersection des espaces affines normaux est alors remplacée par "l'espace affine perpendiculaire commun" (cf. III.5.3).

IV. Le chapitre IV est relatif aux tubes autour de V.

Dans (IV.1) on considère le cas où la variété ambiante $\tilde{V}$ est un espace euclidien. Les géométries de V et des tubes autour de V sont alors étroitement liées.

Nous nous intéressons particulièrement aux phénomènes que l'on observe lorsqu'on suit par continuité une direction principale longitudinale de Tub V depuis un point y_o jusqu'à son antipode y_1 (cf. IV.1.5, 1.8 et 1.10).

Dans (IV.2) la variété $\tilde{V}$ est quelconque. On définit d'abord en tout point y de $\tilde{V}$ pas trop éloigné de V, des sous-espaces $\mathcal{O}_y$, $\mathscr{P}_y$, $\mathcal{J}_y$ de $T_y\tilde{V}$ qui ont tous la dimension p et un caractère longitudinal.

Les définitions de $\mathcal{O}$ et $\mathscr{P}$ sont toutes naturelles. Celle de $\mathcal{J}$ est un peu plus cachée. Elle se justifie par le fait que $\mathcal{J}$ est localement intégrable si et seulement si la connexion normale de V est plate (cf. IV.2.7).

Lorsque $\tilde{V}$ a une courbure sectionnelle (resp. sectionnelle holomorphe) constante, les espaces $\mathcal{O}_y$, $\mathscr{P}_y$ et $\mathcal{J}_y$ sont confondus, et ils sont stables par l'endomorphisme fondamental ℓ du tube autour de V passant par y.

Si $\tilde{V}$ a une courbure sectionnelle constante et si la connexion normale de V est plate, alors $\mathcal{O}$ est localement intégrable et la connexion normale de chaque sous-variété intégrale est plate (cf. IV.3.5).

Lorsque $\tilde{V}$ est quelconque, les espaces $\mathcal{O}_y$, $\mathscr{P}_y$, $\mathcal{J}_y$ ne sont pas nécessai-

rement égaux et ne sont pas nécessairement stables par ℓ.

Dès lors existe-t-il une notion de directions propres longitudinales ?

La réponse est oui ; ce sont les directions principales qui appartiennent à un certain sous-espace $\mathscr{L}_y$ stable par ℓ.

Grosso modo $\mathscr{L}$ est défini de la façon suivante : quand y approche de V, l'endomorphisme fondamental ℓ au point y du tube passant par y a des valeurs propres qui tendent vers l'infini et d'autres qui ont des limites finies ; la somme des sous-espaces propres de ℓ relatifs à ces dernières est $\mathscr{L}_y$. De façon plus précise, si $\vec{n}$ désigne le champ des vecteurs unitaires normaux sortant des tubes autour de V, on sait que ℓ est l'endomorphisme induit par $-\tilde{\nabla}\vec{n}$ dans $T_y(\text{Tub } V)$.

La difficulté est que $\vec{n}$ n'estpas défini sur V. On se tire d'affaire en considérant le champ $\sigma\vec{n}$ produit de $\vec{n}$ par la fonction distance à V.

$\sigma\vec{n}$ n'est autre que l'image du champ de Liouville du fibré normal NV par la restriction à NV de l'exponentielle de $\tilde{V}$(cf. IV.4.1).

La proposition (IV.4.5.2) précise ce que devient ℓ_y quand y se rapproche de V, en restant sur une géodésique fixe de $\tilde{V}$ rencontrant V orthogonalement.

Après avoir établi les propriétés ci-dessus, on étend au cas d'une variété $\tilde{V}$ quelconque certains résultats démontrés en (IV.1).

On procède de la façon suivante. Si ξ est un vecteur unitaire normal en x_o à V et $\gamma : [0,r] \to \tilde{V}$ la géodésique de $\tilde{V}$ telle que $\gamma'(0) = \xi$, on suit par continuité les directions propres longitudinales le long de γ ; on est ainsi ramené à l'étude faite en (IV.1) du comportement des vecteurs propres de h_ξ lorsque ξ varie dans la sphère unité de l'espace normal en x_o à V (cf. IV.4.8).

On démontre que si $\mathscr{L}$ est localement intégrable alors la connexion normale de V est plate (cf. IV.4.9).

Ce travail est pour l'essentiel la partie B de ma thèse d'état (LYON 1984). Celle-ci a été rédigée à l'instigation de P. DAZORD, dont les conseils et le contrôle m'ont été très précieux.

Je renouvelle mes remerciements aux rapporteurs J.P. BOURGUIGNON, P. DAZORD, R. LANGEVIN et J.M. MORVAN, pour les intéressantes conversations que nous avons eues.

J.P. BOURGUIGNON m'a fait de nombreuses remarques, critiques et suggestions qui m'ont permis d'améliorer ma première rédaction, je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie enfin Madame GAFFIER pour son très bon travail dactylographique.

*

CHAPITRE 0

NOTATIONS GENERALES ET RESUME DE L'ARTICLE [Ma.1]

Nous fixons dans ce chapitre 0 des notations générales et nous rassemblons les définitions et résultats de l'article [Ma.1] auquel le présent travail fait suite.

1. Notations et conventions générales.

Pour alléger l'exposé nous supposons toutes les variétés données de classe C^∞ et de dimensions finies.

La lettre V désigne une sous-variété d'une variété riemannienne $\tilde{V}$. La deuxième forme vectorielle de V relativement à $\tilde{V}$ est notée α.

Pour tout $x \in V$, $T_x\tilde{V} = T_xV \oplus N_xV$ où N_xV est l'orthogonal dans $T_x\tilde{V}$ de T_xV.

Pour tout $\xi \in N_xV$, α_ξ est la forme bilinéaire symétrique sur T_xV définie par :

$$\alpha_\xi(u,v) = (\alpha(u,v)\,|\,\xi)$$

pour tous u,v éléments de T_xV, et h_ξ est l'endomorphisme (dit fondamental) associé à α_ξ.

Sauf mention du contraire, dim $\tilde{V} = n$, dim $V = p$, $q = n-p$, $(\tau_1,\dots,\tau_p)$ (resp. $(\nu_1,\dots,\nu_q)$) sont des bases orthonormées de T_xV (resp. N_xV).

Les endomorphismes h_{ν_i} sont parfois notés h_i pour alléger l'écriture.

Si $u \in T_xV$ et $u \neq 0$, la courbure relativement à $\tilde{V}$ de la géodésique de V issue de u est $\frac{\|\alpha(u,u)\|}{\|u\|^2}$. Il est donc naturel (et ce sera commode dans la suite) d'appeler **tangage de V suivant le vecteur** u, le nombre $t_u = \frac{\|\alpha(u,u)\|}{\|u\|}$.

Nous posons $t_u = 0$ pour $u = 0$. Ainsi $t_{\lambda u} = |\lambda| t_u$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si u est un élément non nul de $T_x V$ nous disons en suivant Chern ([Ch.]) que $\mathbb{R}u$ est **une direction asymptotique** lorsque $\alpha(u,u) = 0$, i.e. lorsque le **tangage** t_u **est nul.**

Pour toute variété riemannienne M, lorsque aucune confusion n'est à craindre, ∇ est la dérivation covariante de M, R est la courbure de M et ρ l'opérateur de courbure correspondant : pour tous champs de vecteurs X,Y,Z sur M

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

$$(\rho(X \wedge Y) | (Z \wedge W)) = -((R(X,Y)Z) | W),$$

Q est la courbure de Ricci de M : pour tout $x \in M$, tout $u \in T_x M$ et toute base orthonormée $(a_1,\dots,a_n)$ de $T_x M$,

$$Q(u) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} R(u,a_i)a_i.$$

Si A est un champ de tenseurs sur M, ∇A est le champ d'applications linéaires défini par $(\nabla A).u = \nabla_u A$ pour tout $u \in TM$.

On pose $\nabla^1 A = \nabla A$ et $\nabla^i A = \nabla(\nabla^{i-1} A)$ pour tout entier $i \geqslant 2$.

Les objets relatifs à $\tilde{V}$ sont généralement notés par une lettre munie d'un $\sim$, exemple : $\tilde{R}, \tilde{\rho}, \tilde{\nabla}$, etc. .

Nous appelons **géodésique unitaire** toute géodésique γ telle que $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout t.

Si $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{S}_k$ est la sphère euclidienne de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^{k+1}$.

Le plus souvent I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Rappels d'algèbre euclidienne.

Soit E un espace euclidien de dimension n. Pour tout entier $p > 0$, $\overset{p}{\Lambda} E$ est canoniquement muni d'une structure d'espace euclidien telle que :

$$(x_1 \wedge \dots \wedge x_p | y_1 \wedge \dots \wedge y_p) = \det((x_i | y_j)).$$

Soit X un sous-espace vectoriel de dimension k de E. Si $(x_1,\dots,x_k)$ est une base orthonormée de X, alors l'élément $x_1 \wedge \dots \wedge x_k$ de $\overset{k}{\Lambda} E$ est défini au signe près, il est dit multivecteur unitaire associé à X.

Si X et Y sont des sous-espaces vectoriels de E ayant pour dimension commune k, on définit l'angle ($\leqslant \pi/2$) de X et de Y comme étant le réel θ qui vérifie $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ et $|(\alpha_X | \alpha_Y)| = \cos\theta$ où α_X et α_Y sont des multivecteurs unitaires respectivement associés à X et Y.

3. Définition et signification géométrique de l'endomorphisme de bascule.

Soit V une sous-variété de dimension p d'une variété riemannienne $\tilde{V}$. Les dérivations covariantes relatives à V et $\tilde{V}$ seront notées ∇ et $\tilde{\nabla}$ respectivement.

Soit $x_o \in V$ et $u \in T_{x_o} V$: on va définir un coefficient de basculement au point x_o, suivant u, de l'espace tangent à V.

Soit $\gamma : I \to V$ une application deux fois dérivable, définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, telle que $\gamma(0) = x_o$ et $\gamma'(0) = u$.

Enfin, soit $\tau : U(x_o) \to \overset{p}{\Lambda} T\tilde{V}$ une application définie sur un voisinage de x_o dans V, telle que $\tau(x)$ soit l'un des deux multivecteurs unitaires associés au sous-espace $T_x V$ et telle que τ soit continue.

Posons $f = \tau \circ \gamma$ et soit $g : I \to \overset{p}{\Lambda} T\tilde{V}$ le champ parallèle le long de γ défini par la condition initiale $g(0) = \tau(x_o)$. Notons $\theta(t)$ l'angle ($\leqslant \pi/2$) de $T_{\gamma(t)}V$ avec le transporté par parallélisme dans $\tilde{V}$, le long de γ, jusqu'au point $\gamma(t)$, de l'espace tangent en x_o à V. Posons $S(t) = (f(t) | g(t))$; on a donc $S(t) = \cos\theta(t)$, au voisinage de $t = 0$. On a alors la :

(3.1) Proposition.

(i) $\dfrac{\theta(t)}{t}$ *tend vers* $|S''(0)|^{1/2}$ *quand* t *tend vers* 0 *par valeurs* > 0.

(ii) $S''(0) = -((\tilde{\nabla}\tau)(x_o).u) | ((\tilde{\nabla}\tau)(x_o).u)$.

(3.2) Définitions. *D'après la proposition (3.1) la limite de* $\dfrac{\theta(t)}{t}$ *ne dépend que de* x_o *et* u *; nous l'appellerons* ***le basculement au point*** x_o ***suivant le vecteur*** u, *de l'espace tangent à* V.

Posons $\varphi_{x_o}(u,v) = ((\tilde{\nabla}\tau)(x_o).u)(\tilde{\nabla}\tau)(x_o).v)$ *pour* $u,v \in T_{x_o} V$ *(le changement de* τ

en $-\tau$ *n'affecte pas cette définition).*

φ_{x_o} *est une forme bilinéaire symétrique positive. Nous noterons* φ_{e,x_o} *l'endomorphisme associé et nous appellerons* ***endomorphisme de bascule*** β_{x_o} *au point* x_o *la racine carrée positive de* φ_{e,x_o} .

D'après la proposition (3.1) si $\|u\| = 1$ *et si* u *est vecteur propre de* β_{x_o} *alors la valeur propre associée n'est autre que le basculement au point* x_o *suivant* u . *Nous appellerons donc* ***basculements principaux*** *au point* x_o *les valeurs propres de l'endomorphisme de bascule.*

Exemples.

(3.2.1) Si V est une courbe dans $\tilde{V}$, l'endomorphisme de bascule n'est autre que l'homothétie ayant pour rapport la courbure géodésique de V.

(3.2.2) Si V est une hypersurface de $\tilde{V}$, l'endomorphisme de bascule est la valeur absolue de l'endomorphisme associé à la deuxième forme fondamentale (cf. (3.4) plus bas).

(3.3) Proposition. *Soient* $x \in V$ *et* $(\tau_1,\dots,\tau_p)$ *une base orthonormée de* T_xV. *L'endomorphisme de bascule* β *de* V *s'exprime en fonction de la deuxième forme vectorielle* α *de* V *par la formule :*

$$(\beta^2(u)\,|\,v) = \sum_{1\leq i\leq p} (\alpha(u,\tau_i)\,|\,\alpha(v,\tau_i))$$

pour tous $u,v \in T_xV$.

On a donc $\mathrm{Tr}\ \beta^2 = (\alpha\,|\,\alpha)$ et par conséquent l'interprétation géométrique suivante :

(3.3.1) Corollaire. *Le carré scalaire de la deuxième forme fondamentale vectorielle au point* x *est égal à la somme des carrés des basculements principaux. (Ces derniers sont comptés avec leurs ordres de multiplicité.)*

(3.3.2) Corollaire. *Le tangage suivant un vecteur est inférieur ou égal au basculement suivant ce vecteur :*

$$t_u \leq \|\beta(u)\| \qquad \textit{pour tout } u \in T_{x_o}V.$$

Cette inégalité est évidente pour $u = 0$, et pour $u \neq 0$, elle découle de la formule $(\beta(u)|\beta(u)) = \sum_{1 \leq i \leq p} (\alpha(u,\tau_i)|\alpha(u,\tau_i))$ appliquée à une base orthonormée $(\tau_1,\dots,\tau_p)$ telle que $\tau_1 = \frac{u}{\|u\|}$.

(3.4) Proposition. *Soient* $\nu_1, \dots, \nu_q$ *des champs de vecteurs normaux sur* V, *tels que pour tout* x *de* V, $(\nu_1(x), \dots, \nu_q(x))$ *soit une base orthonormée de* N_xV. *Pour* $X,Y \in T_xV$ *posons*

$$\alpha(X,Y) = \sum_{1 \leq k \leq q} \alpha_k(X,Y)\nu_k,$$

et soit h_k *l'endomorphisme associé à* α_k. *Alors l'endomorphisme de bascule est donné par :*

$$\beta = \Big(\sum_{1 \leq k \leq q} h_k \circ h_k\Big)^{1/2}.$$

(3.4.1) Corollaire. *Soient* V *une hypersurface et* ν *un champ sur* V *de vecteurs normaux unitaires. Désignons par* h *l'endomorphisme associé à la deuxième forme fondamentale scalaire relative à* ν. *Alors* $\beta = |h|$. *Par conséquent, les* ***basculements principaux*** *sont les* ***valeurs absolues des courbures principales.***

Dans le cas d'une **sous-variété quelconque,** lorsque les valeurs propres de l'endomorphisme de bascule au point x_o sont toutes simples, on a, au point x_o, n directions privilégiées que nous appellerons **directions de basculement principal.**

(3.4.2) Corollaire. *Soit* V *une sous-variété complexe d'une variété kählérienne* $\tilde{V}$. *Alors en tout point* x *de* V *l'endomorphisme de bascule* β *de* V *est* $\mathbb{C}$-*linéaire.*

Preuve. Soit $\mathcal{J}$ l'opérateur de multiplication par i dans T_xV. On sait que les h_k anticommutent avec $\mathcal{J}$, donc, d'après (3.4), β^2 commute avec $\mathcal{J}$. Il résulte alors d'une propriété connue des racines carrées positives que β commute avec $\mathcal{J}$, d'où la $\mathbb{C}$-linéarité de β.

4. Courbure aréolaire d'une sous-variété.

Supposons que $\tilde{V}$ est un espace euclidien E.

L'application τ considérée dans la section 3 s'identifie alors à une applica-

tion de $U(x_o)$ dans la sphère unité de $\overset{p}{\Lambda} E$.

Soit $d\sigma$ l'aire balayée par $\tau(x)$ quand x décrit l'élément d'aire dS autour du point x_o sur V. On a alors la

(4.1) Proposition. *Le rapport* $\frac{d\sigma}{dS}$ *tend vers le déterminant de l'endomorphisme de bascule* β_{x_o} *lorsque* dS *tend vers zéro.*

Sous les hypothèses de la proposition (4.1) il est naturel d'appeler **courbure aréolaire** de V au point x_o la limite de $\frac{d\sigma}{dS}$ quand dS tend vers zéro. La proposition (4.1) peut alors s'énoncer :

Pour une sous-variété V d'un espace euclidien E, la **courbure aréolaire** de V en un point x_o de V est égale au **produit des basculements principaux** en x_o (comptés avec leurs ordres de multiplicité).

(4.2) Définition. *Plus généralement, pour* $\tilde{V}$ *quelconque, nous appellerons courbure aréolaire de* V *, en un point* x_o *de* V *, le déterminant de l'endomorphisme de bascule en ce point.*

5. Sous-variétés minimales et sous-variétés isobasculantes.

(5.1) Définition. *Soit* $x_o \in V$. *La sous-variété* V *est dite* ***isobasculante*** *au point* x_o, *par rapport à* $\tilde{V}$ *, lorsque l'endomorphisme de bascule au point* x_o *de* V *relativement à* $\tilde{V}$ *est une homothétie.*

V *est dite isobasculante lorsqu'elle est isobasculante en tout point.*

Ainsi une sous-variété **isobasculante** est une sous-variété telle que **la variation angulaire de l'espace vectoriel tangent est la même dans toutes les directions.**

(5.2) Proposition. *Toute sous-variété minimale* V *de dimension deux, d'une variété riemannienne quelconque* $\tilde{V}$ *est isobasculante.*

Ceci résulte de la proposition (3.4) les $h_k \circ h_k$ étant alors des homothéties.

(5.3) Proposition. *Soit* $x_o \in V$. *Supposons que* $(\mathrm{Tr}\,\alpha)(x_o) = 0$ *et que* $\tilde{\rho}(x_o)$ *est une homothétie de rapport* a . *Alors, au point* x_o *, la courbure de Ricci* Q *de* V *et l'endomorphisme de bascule* β *sont liés par la relation*
$\beta^2 + Q = (p-1)a\,\mathrm{id}$.

Lorsque $a = 0$, on a $Q = -\beta^2$ et par conséquent une interprétation géométrique de Q dans ce cas.

(5.3.1) Corollaire. *Soient* $\tilde{V}$ *une variété à courbure sectionnelle constante et* V *une sous-variété minimale de* $\tilde{V}$. *Alors pour que* V *soit une variété d'Einstein il faut et il suffit que* V *soit isobasculante dans* $\tilde{V}$.

(5.3.2) Corollaire. *Soit* $x_o \in V$. *Supposons que* $(\mathrm{Tr}\,\alpha)(x_o) = 0$ *et que* $\tilde{\rho}(x_o)$ *est une homothétie de rapport* a , *alors :*

(i) la courbure aréolaire de V *en* x_o *est égale à la racine carrée de la valeurs sur* $(p-1)a$ *du polynôme caractéristique de la courbure de Ricci.*

(ii) Si $a = 0$, *la courbure scalaire de* V *en* x_o *est égale à l'opposé de la somme des carrés des basculements principaux.*

Remarque.

Le cas $p = 2$ et $a = 0$ du corollaire (i) s'énonce :

Soient V une surface ($p=2$) et $x_o \in V$.

Supposons $(\mathrm{Tr}\,\alpha)(x_o) = 0$ et $\tilde{\rho}(x_o) = 0$, alors la **courbure aréolaire** $\mathscr{A}(x_o)$ et la **courbure de Gauss** $c(x_o)$ de V au point x_o sont liés par

$$\mathscr{A}(x_o) = |c(x_o)|.$$

Ainsi **la courbure aréolaire d'une sous-variété minimale de dimension deux dans une variété à courbure nulle est égale, en tout point, à la valeur absolue de sa courbure de Gauss.**

(5.3.3) Exemples. Soient E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{G}^n_k$ l'ensemble des p-vecteurs purs de norme 1 dans $\overset{k}{\Lambda} E$. La variété $\mathscr{G}^n_k$ est une sous-variété minimale et isobasculante de la sphère unité $S(\overset{k}{\Lambda} E)$ de $\overset{k}{\Lambda} E$.

La courbure aréolaire de $\mathscr{G}^n_k$ relativement à la sphère unité de $\overset{k}{\Lambda} E$ est constante et égale à $((k-1)(n-k-1))^{(n-k)k/2}$.

La variété $\mathscr{G}^n_k$ n'est pas minimale dans $\overset{k}{\Lambda} E$, mais elle est isobasculante dans $\overset{k}{\Lambda} E$.

Revenons au cas général de V sous-variété de $\tilde{V}$ et α deuxième forme fonda-

mentale de V.

Soit $\bar{\alpha}$ la linéarisée symétrique de α, i.e., $\bar{\alpha}_x$ est l'application linéaire de $(T_xV) \odot (T_xV)$ dans $T_x\tilde{V}$ définie par $\bar{\alpha}(X \odot Y) = \alpha(X,Y)$.

(5.4) Définition. *Soit* $x_o \in V$. *V est dite sous-variété véronésienne au point x_o lorsque l'application $\bar{\alpha}_{x_o}$ est une similitude, i.e., lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

(5.4.1) $(\bar{\alpha}_{x_o}(\xi) | \bar{\alpha}_{x_o}(\eta) = \lambda(\xi | \eta))$ *pour tous* ξ, η *dans* $(T_{x_o}V) \odot (T_{x_o}V)$.

V est dite sous-variété véronésienne de $\tilde{V}$ lorsqu'elle est véronésienne en chacun de ses points.

(5.4.2) Exemples : (cf. [4] et [5])

Soient E euclidien de dimension n et $k \in \mathbb{N}^*$.

L'image de la sphère unité de E par l'application $x \to 1/\sqrt{k!}\, x \odot \dots \odot x$ de $\overset{k}{\odot}E$ dans $\overset{k}{\odot}E$ est une sous-variété véronésienne $\mathscr{V}^n_k$ de la sphère unité de $\overset{k}{\odot}E$. (Le produit scalaire de $\overset{k}{\odot}E$ est défini par

$$(x_1 \odot \dots \odot x_k | y_1 \odot \dots \odot y_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (x_1 | y_{\sigma(1)}) \dots (x_k | y_{\sigma(k)}),$$

où $\mathfrak{S}_k$ est l'ensemble des permutations de $\{1,2,\dots,k\}$.)

La variété de Véronèse classique correspond au cas $n = 3$ et $k = 2$.

(5.4.3) Il résulte aussitôt de la formule (5.4.1) et de la proposition (3.3) que pour toute sous-variété véronésienne V de dimension p de $\tilde{V}$:

$$(\beta^2(u) | v) = \lambda(p+1)(u | v)$$

Par conséquent V est isobasculante dans $\tilde{V}$ et la courbure aréolaire de V dans $\tilde{V}$ est égale à $(\lambda(p+1))^{p/2}$.

En particulier $\mathscr{V}^n_k$ est une sous-variété isobasculante de la sphère unité $S(\overset{k}{\odot}E)$ et $\mathscr{V}^n_k$ a une courbure aréolaire constante égale à $\left(\frac{(k-1)n}{k}\right)^{\frac{n-1}{2}}$.

Pour $k \geqslant 2$, les variétés $\mathscr{V}^n_k$ ne sont pas minimales dans $S(\overset{k}{\odot}E)$.

(5.5) Cas des variétés complexes. *Soient* $\tilde{V}$ *une variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante* c *et* V *une sous-variété complexe* de dimension complexe p de $\tilde{V}$. Alors la courbure de Ricci Q de V et l'endomorphisme de bascule β de V relativement à $\tilde{V}$ sont liés par : $Q = \frac{1}{2}\, c(p+1)\mathrm{id} - \beta^2$.

Ceci découle directement de la proposition (3.3) et de [3] volume II, p. 177.

Ainsi *pour que* V *soit une variété d'Einstein il faut et il suffit qu'elle soit isobasculante dans* $\tilde{V}$. Notons que V est minimale dans $\tilde{V}$ puisque c'est une sous-variété complexe d'une variété kählérienne.

6. Relations entre l'opérateur de courbure de V et l'endomorphisme de bascule dans le cas où $\tilde{V}$ a une courbure nulle.

(6.1) Proposition. *Supposons que la courbure de* $\tilde{V}$ *est nulle au point* x_o *de* V. *Soient* $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_p$ *les carrés des basculements principaux de* V *au point* x_o. *Alors le carré scalaire de l'opérateur de courbure* ρ *de* V *au point* x_o *vérifie*

$$(\rho|\rho) \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} \mathcal{T}_i \mathcal{T}_j .$$

(6.1.1) Corollaire. *Sous les hypothèses de la proposition (6.1) on a :*

(i) Soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *une base orthonormée de* $T_{x_o}V$, *et* $\sigma_{ij} = \rho(a_i \wedge a_j)|(a_i \wedge a_j)$ *la courbure sectionnelle relative au plan* $\mathbb{R}a_i + \mathbb{R}a_j$. *Alors :*

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} \sigma_{ij}^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} \mathcal{T}_i \mathcal{T}_j$$

au point x_o.

(ii) $2(\rho|\rho) \leqslant \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathcal{T}_i\right)^2 = (\alpha|\alpha)^2$ *au point* x_o.

(6.1.2) Corollaire. *Supposons que* V *est de dimension deux et que la courbure de* $\tilde{V}$ *est nulle au point* x_o *de* V. *Alors la courbure de Gauss* $c(x_o)$ *de* V *en* x_o *et la courbure aréolaire* $\mathcal{A}(x_o)$ *vérifient* $|c(x_o)| \leqslant \mathcal{A}(x_o)$.

(On rappelle qu'on a vu en (5.3.2) que cette inégalité est une égalité lorsque $(\mathrm{Tr}\ \alpha)(x_o) = 0$.)

L'inégalité de la proposition (6.1) est une égalité lorsque V est une hypersurface. En dehors de ce cas l'égalité n'a lieu que dans des circonstances particulières. Plus précisément :

(6.2) Proposition. *Sous les hypothèses de la proposition (6.1) supposons qu'on a, au point* x_o,

$$(\rho|\rho) = \sum_{1 \leq i < j \leq p} \sigma_i \sigma_j,$$

et qu'il existe une deuxième forme fondamentale scalaire ne possédant pas de valeurs propres opposées. Alors la deuxième forme fondamentale vectorielle au point x_o *prend ses valeurs dans une droite (i.e., toutes les deuxièmes formes scalaires sont proportionnelles).*

Corollaire. *Soient* V *une surface* (p=2) *et* $x_o \in V$. *Supposons que* $\tilde{\rho}(x_o) = 0$ *et* $\mathscr{A}(x_o) = 0$, *mais que la courbure moyenne vectorielle* $(\mathrm{Tr}\,\alpha)(x_o)$ *soit non nulle. Alors la seconde forme fondamentale vectorielle* $\alpha(x_o)$ *prend ses valeurs dans une droite.*

7. Endomorphismes de bascule et courbures aréolaires d'un produit de sous-variétés.

Soient V_1 et V_2 des sous-variétés respectivement de $\tilde{V}_1$ et $\tilde{V}_2$, variétés riemanniennes quelconques. Posons $V = V_1 \times V_2$ et $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2$.

V est une sous-variété de $\tilde{V}$.

Soient β_1, β_2, β les endomorphismes de bascule respectifs des sous-variétés V_1, V_2, V.

Pour tout $x = (x_1, x_2) \in V$ on vérifie aisément que $\beta_x = \beta_{x_1} \times \beta_{x_2}$.

Il en résulte pour les courbures aréolaires $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}$ correspondantes la relation $\mathscr{A}(x) = \mathscr{A}_1(x_1)\,\mathscr{A}_2(x_2)$. Ceci permet de donner un exemple simple de sous-variété de dimension deux dont la courbure aréolaire diffère de la courbure de Gauss :

Considérons $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_2 = \mathbb{R}^2$ et, pour i = 1,2, soit V_i le cercle $S(0,r_i)$ de rayon r_i, $r_i > 0$. Alors la courbure de Gauss de $V_1 \times V_2$ est nulle mais la courbure aréolaire de $V_1 \times V_2$ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ est constante et égale à $1/(r_1 r_2)$.

CHAPITRE I

BASCULEMENTS, TANGAGES, DIAMETRES ET COURBURES

1. Compléments sur les endomorphismes de bascule et les sous-variétés iso-basculantes.

En (0;3) nous avons défini, en chaque point x d'une sous-variété V d'une variété riemannienne $\tilde{V}$, un **endomorphisme symétrique** β **, dit de bascule,** de T_xV.

Nous allons interpréter la forme bilinéaire associée à β^2 comme différence de deux métriques riemanniennes sur V.

Appelons **∇-fibré vectoriel riemannien** tout fibré vectoriel $\pi : F \to B$, muni d'une connexion ∇ et d'une section différentiable g de $(F \otimes F)^*$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) Pour tout $x \in B$, g_x est un produit scalaire sur la fibre F_x en x ;

ii) $\nabla g = 0$.

Pour un tel fibré, on a en chaque point $z \in F_x$ une application canonique v de T_zF dans F_x qui est la composée de la projection sur l'espace vertical $\mathcal{V}_z = T_z(F_x)$ et de l'isomorphisme canonique de $T_z(F_x)$ sur F_x.

Posons pour tous $A,B \in T_zF$,

$$\bar{g}(A,B) = g(v(A),v(B)) + g(\pi^T(A), \pi^T(B)). \tag{1.1}$$

Ceci définit canoniquement un produit scalaire sur T_zF pour lequel les espaces horizontaux et verticaux sont orthogonaux.

La variété F munie de $\bar{g}$ est une variété riemannienne.

Le fibré $\overset{p}{\Lambda} T\tilde{V}$ est canoniquement un ∇-fibré vectoriel riemannien, et par suite canoniquement une variété riemannienne. Dans la suite, lorsque $\overset{p}{\Lambda} T\tilde{V}$ sera considéré comme variété riemannienne, il s'agira toujours de cette structure canonique.

L'ensemble des éléments purs de norme 1 dans $\overset{p}{\Lambda} T\tilde{V}$ s'identifie au fibré des sous-espaces vectoriels orientés de dimension p, lequel est un revêtement à deux feuillets du fibré des sous-espaces de dimension p. Ce dernier, aussi appelé **fibré en grassmanniennes d'indice p sur $\tilde{V}$**, sera noté $\mathcal{G}(p,\tilde{V})$.

Nous munirons $\mathcal{G}(p,\tilde{V})$ de la métrique induite par celle de $\overset{p}{\Lambda} T\tilde{V}$.

Comme V est une sous-variété de dimension p de $\tilde{V}$, il existe un plongement différentiable canonique :

$$f : V \to \mathcal{G}(p,\tilde{V})$$
$$x \longmapsto T_x V$$

Localement f correspond à une application différentiable $x \longmapsto \tau(x)$, définie au signe près, telle que, pour tout x, $\tau(x)$ soit l'un des deux éléments unitaires de $\overset{p}{\Lambda} T_x\tilde{V}$ associés à $T_x V$.

Avec les notations précédentes :

$$\bar{g}((T\tau).u, (T\tau).v) = ((\tilde{\nabla}\tau).u \,|\, (\tilde{\nabla}\tau).v) + (u|v) \tag{1.2}$$

pour tous u,v éléments de $T_x V$. Or

$$(\beta^2(u)|v) = ((\tilde{\nabla}\tau).u \,|\, (\tilde{\nabla}\tau).v), \quad \text{(cf. 0.3.2)} \tag{1.3}$$

d'où la :

(1.4) Proposition. *La forme bilinéaire associée à β^2 est égale à la différence entre la métrique induite par f et la métrique de V.*

(1.5) Corollaire. *La sous-variété V est isobasculante si et seulement si l'application canonique f de V dans $\mathcal{G}(p,\tilde{V})$ est une application conforme.*

Je suis redevable à J.P. Bourguignon de m'avoir signalé cette équivalence.

(1.6) Proposition. *Soient* $x \in V \subset \tilde{V}$ *et* $u \in T_x V$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\|(Tf).u\| = \|u\|$;

ii) $\beta(u) = 0$;

iii) $\alpha(u,v) = 0$ *pour tout* $v \in T_x V$;

iv) $u \in \cap \mathrm{Ker}\, h_\xi$ *où l'intersection est étendue à tous les* $\xi \in N_x V$.

Preuve. Compte tenu de (1.2) et (1.3), i) équivaut à $(\beta^2(u) \mid u) = 0$, i.e. à $\beta(u) = 0$, puisque β est symétrique.

D'après (0.3.3)

$$\|\beta(u)\|^2 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \|\alpha(u, \tau_i)\|^2,$$

d'où l'équivalence de ii) et iii).

L'équivalence de iii) et iv) découle de la définition des h_ξ. □

L'indice de nullité relative de V au point x (cf. [Ch., Ku.]) est la dimension de l'espace vectoriel des $u \in T_x V$ tels que $\alpha(u,.) = 0$.

On a donc l'interprétation géométrique suivante :

(1.7) Théorème. *L'indice de nullité relative de* V *au point* x *est le nombre maximum de directions linéairement indépendantes suivant lesquelles le basculement de* V *est nul.*

Rappelons que V est dite **ombilicale** relativement à $\tilde{V}$ au point $x \in V$ lorsqu'il existe $\xi_0 \in N_x V$ tel que $\alpha(u,v) = (u \mid v)\xi_0$ pour tous u,v éléments de $T_x V$. Pour que V soit ombilicale au point x, il faut et il suffit que h_ξ soit une homothétie pour tout $\xi \in N_x V$.

V est dite ombilicale lorsqu'elle l'est en chacun de ses points.

(1.8) Proposition. *Si* V *est ombilicale relativement à* $\tilde{V}$ *au point* $x \in V$, *alors l'endomorphisme de bascule de* V *au point* x *est l'homothétie de rapport* $\left\| \frac{\mathrm{Tr}\,\alpha}{p} \right\|$.

Ceci se voit aisément à partir de (0.3.3).

(1.9) Corollaire. *Toute sous-variété ombilicale est isobasculante.* □

Rappelons que (cf. [Ch. B]) :

(1.10) Les sous-variétés ombilicales connexes d'un espace euclidien E sont :

* les sous-variétés connexes de dimension 1 de E,
* les ouverts connexes des sous-espaces affines de E,
* les ouverts connexes des hypersphères des sous-espaces affines de E.

(1.11) Les sous-variétés ombilicales connexes d'une hypersphère S d'un espace euclidien E sont :

* les sous-variétés connexes de dimension 1 de S,
* les ouverts connexes des sections de S par les sous-espaces affines de E.

Les sous-variétés considérées en (1.10) et (1.11) sont donc a fortiori isobasculantes relativement à E et à S respectivement, mais il y en a beaucoup d'autres. Nous avons vu par exemple (cf. 0.5.2) que :

(1.12) Toute sous-variété minimale de dimension deux d'une variété riemannienne quelconque est isobasculante.

Remarque.

Une sous-variété minimale de dimension > 2 n'est pas nécessairement isobasculante. Par exemple, soit M une caténoïde dans $\mathbb{R}^3$. Alors M × M est une sous-variété minimale de codimension 2 de $\mathbb{R}^6$ (comme produit de sous-variétés minimales), mais M × M n'est pas isobasculante dans $\mathbb{R}^6$. Ceci résulte du fait que la caténoïde est une surface isobasculante dans $\mathbb{R}^3$ (d'après (1.12)) mais les basculements suivant des vecteurs unitaires en deux points différents sont en général distincts.

Autres exemples :

(1.13) $V = \mathbb{S}_k \times \mathbb{S}_\ell$ est une sous-variété isobasculante compacte de codimension 2 de $\mathbb{R}^{k+\ell+2}$, ($\beta_{\mathbb{S}_k} = \mathrm{id}$, $\beta_{\mathbb{S}_\ell} = \mathrm{id}$ et $\beta_V = \beta_{\mathbb{S}_k} \times \beta_{\mathbb{S}_\ell}$). Mais V n'est pas ombilicale relativement à $\mathbb{R}^{k+\ell+2}$ d'après le rappel (1.10).

(1.14) $V = S_k(0,r) \times S_k(0,r)$ est une hypersurface isobasculante dans $\tilde{V} = S_{2k+1}(0,r\sqrt{2})$ (cf. lemme (1.15) ci-dessous) et V est aussi une hypersurface

minimale dans $\tilde{V}$ (cf. [Si.J.]).

On notera que V n'est pas minimale relativement à $\mathbb{R}^{k+\ell+2}$ (puisque $\mathbb{R}^{k+\ell+2}$ ne possède aucune sous-variété minimale compacte), mais elle est isobasculante relativement à $\mathbb{R}^{k+\ell+2}$.

(1.15) Lemme. *Soient V_1, V_2, V_3 des variétés riemanniennes telles que V_i soit une sous-variété de V_{i+1} pour $i = 1,2$. Supposons V_2 ombilicale relativement à V_3. Alors V_1 est isobasculante par rapport à V_2 si et seulement si elle l'est par rapport à V_3.*

Preuve. Soit α_{ij}, pour $i < j$, la deuxième forme vectorielle de V_i relativement à V_j.

Pour tous u,v éléments de T_xV_1 on a :

$$\alpha_{1,3}(u,v) = \alpha_{1,2}(u,v) + \alpha_{2,3}(u,v).$$

D'après l'hypothèse il existe $\xi_o \in N_xV_2$ tel que

$$\alpha_{2,3}(u,v) = (u|v)\xi_o \text{ pour tous } u,v \text{ éléments de } T_xV_2.$$

Il en résulte en désignant par $(\tau_1,\dots,\tau_p)$ une base orthonormée de T_xV_1 que

$$\sum_{1\leq i\leq p} (\alpha_{1,3}(u,\tau_i)|\alpha_{1,3}(v,\tau_i)) = \sum_{1\leq i\leq p} (\alpha_{12}(u,\tau_i)|\alpha_{12}(v,\tau_i)) + \sum_{1\leq i\leq p} (u|\tau_i)(v|\tau_i)\|\xi_o\|^2,$$

donc en désignant par β_{ij}, pour $i < j$, l'endomorphisme de bascule de V_i relativement à V_j, on obtient d'après(0.3.3) $\beta^2_{1,3}(u)|v = \beta^2_{1,2}(u)|v + (u|v)\|\xi_o\|^2$, d'où le résultat.

(1.16) Définitions. *Soient V une hypersurface de $\tilde{V}$ et $x_o \in V$.*

i) V est dite ****-convexe*** *(resp.* ***fortement *-convexe****) au point x_o lorsque pour un choix convenable du vecteur unitaire normal ξ, α_ξ est ≥ 0 (resp. définie positive).*

ii) V est dite ***e-convexe*** *au point x_o lorsque, au voisinage de x_o dans $\tilde{V}$, V se trouve d'un même côté, au sens large, de l'hypersurface $\exp_{\tilde{V},x_o}(T_{x_o}V)$.*

*iii) V est dite *-convexe (resp. fortement *-convexe, resp. e -convexe) lorsqu'elle l'est en tout point.*

iv) Le ***point*** *x_o est dit* ***méplat*** *lorsque $\alpha_\xi = 0$.*

On trouvera en (2.3) des justifications de la terminologie.

Notons que si V est minimale dans $\tilde{V}$, V n'est fortement *-convexe en aucun point.

(1.17) Proposition. *Soit* V *une hypersurface connexe de* $\tilde{V}$. *Supposons que :*
i) V *est isobasculante dans* $\tilde{V}$,
ii) V *est fortement *-convexe en au moins un point* x_o,
iii) La courbure aréolaire de V *par rapport à* $\tilde{V}$ *est non nulle en tout point de* V . *Alors* V *est une hypersurface ombilicale fortement convexe de* $\tilde{V}$.

Preuve. La courbure aréolaire est, par définition, le déterminant de β (cf. 0.4).
Soit $x_1 \in V$. V étant connexe il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to V$ tel que $\gamma(0) = x_o$ et $\gamma(1) = x_1$. Soit $t \to \vec{n}(t)$ un champ continu de vecteurs normaux unitaires le long de γ tel que $h_{\vec{n}(o)}$ soit défini positif. $\det \beta_{\gamma(t)} = |\det h_{\vec{n}(t)}|$, donc $\det h_{\vec{n}(t)} \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Il en résulte que l'indice de $h_{\vec{n}(t)}$ est fonction continue de t ; il est donc constant et comme il vaut 0 pour t = 0, il est partout nul sur [0,1] , donc $h_{\vec{n}(1)} = \beta_{x_1}$, donc V est ombilicale et fortement *-convexe.

(1.18) Proposition. *Soient* E *un espace euclidien et* V *une hypersurface isobasculante de* E .
Supposons V *compacte, connexe, et* $\dim V \geqslant 2$. *Alors* V *est une hypersphère de* E.

Preuve. i) Par hypothèse, pour tout élément x de V, β_x est l'homothétie de rapport λ_x. V étant une hypersurface compacte d'un espace euclidien, V est fortement *-convexe en au moins un point x_o de V (cf. [K.N.]). Il en résulte que, au voisinage de x_o, il existe un champ local différentiable de vecteurs unitaires normaux ξ tel que $h_{\xi_x} = \lambda_x$ id. On déduit alors de (1.10) que h_ξ est l'homothétie de rapport constant λ_{x_o} au voisinage de x_o.
ii) Soit $x_1 \in V$. V étant connexe il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to V$ tel que $\gamma(0) = x_o$ et $\gamma_1(1) = x_1$. Soit $t \to \vec{n}(t)$ un champ continu de vecteurs unitaires normaux le long de γ . Notons A l'ensemble des $t \in [0,1]$ tels que, pour tout $s \in [0,t]$, $h_{\vec{n}(s)}$ soit l'homothétie de rapport λ_o. Soit a = sup A. Par continuité, on a $a \in A$. Si $a < 1$, alors en raisonnant comme au i) avec $\gamma(a)$ au lieu de x_o on voit qu'il existe un champ local η au voisinage de $\gamma(a)$ de

vecteurs normaux unitaires, vérifiant $n_{\gamma(a)} = \vec{n}(a)$, et tel que h_η soit l'homothétie de rapport λ_o. Il existe donc des points de A strictement plus grands que a : contradiction. Donc a = 1 et $h_{\vec{n}(1)}$ est l'homothétie de rapport λ_o. Finalement V est ombilicale, donc V est d'après (1.10) un ouvert d'une hypersphère S de E et puisque S est connexe et V fermée, on a V = S.

(1.19) Dans la suite nous appellerons **"p-sphère" d'un espace euclidien** E toute hypersphère d'un sous-espace affine de dimension p+1 de E.

Remarque.

L'exemple (1.13) montre qu'une sous-variété isobasculante compacte connexe de **codimension 2** dans un espace euclidien n'est pas nécessairement une p-sphère de E.

(1.20) Proposition. *Soit* S *une hypersphère d'un espace euclidien* E *et* V *une hypersurface compacte connexe de* S *, isobasculante relativement à* S*, telle que* V *soit incluse dans un hémisphère ouvert de* S *et telle que* $\dim V \geqslant 2$ *. Alors* V *est la section de* S *par un hyperplan affine de* E.

Preuve. Du fait que S est compacte et incluse dans un hémisphère ouvert de S on déduit (cf. [Spi.] ou section 2 ci-dessous) que V est fortement *-convexe en au moins un point x_o relativement à S. Et on peut alors décalquer la preuve de la proposition (1.18) en s'appuyant sur (1.11) au lieu de (1.10).

2. Existence de points d'*-convexité.

(2.1) Définitions. *Soient* A *une sous-variété à bord de* $\tilde{V}$ *telle que* $\dim A = \dim \tilde{V}$, *et* $x \in \partial A$.

i) A *est dite* ***convexoïde*** *(resp. fortement convexoïde)* ***au point*** x *lorsque, en désignant par* $\xi \in T_x A$ *le vecteur unitaire normal rentrant et par* α *la deuxième forme de* ∂A *relativement à* $\tilde{V}$ *on a* $\alpha_\xi \geqslant 0$ *(resp.* α_ξ *défini positif).*

ii) **A** ***est dite*** **e** ***-convexoïde au point*** **x** *lorsque A se trouve, au voisinage de* x *dans* $\tilde{V}$ *d'un même côté, au sens large, de l'hypersurface* $\exp_{\tilde{V},x}(T_x V)$.

iii) A *est dite convexoïde (resp. fortement convexoïde, resp.* e *-convexoïde) lorsqu'elle l'est en tout point. Nous dirons alors que* A *est un* ***convexoïde*** *(resp. un* ***convexoïde fort****, resp. un* **e** ***-convexoïde****) de* $\tilde{V}$.

Le bord d'un convexoïde (resp. convexoïde fort, resp. e-convexoïde) est donc une hypersurface *-convexe (resp. fortement *-convexe, resp. e-convexe) de $\tilde{V}$.

Nous aurons besoin dans la suite du lemme suivant :

(2.2) Lemme.

i) Soient I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, $0 \in I$, *et* $Y : I \to T\tilde{V}$ *une application différentiable. Soit* $c(t)$ *l'origine de* $Y(t)$. *Posons* $x_o = c(0)$, $f = \exp_{\tilde{V},x_o}$, $c^1(t) = f^{-1}(c(t))$ *et* $Y^1(t) = (Tf^{-1}).Y(t)$ *pour* t *voisin de* 0 . *Alors* $\frac{\tilde{\nabla} Y}{dt}(0) = \frac{dY^1}{dt}(0)$.

ii) Soient V_1, V_2, V_3 *des variétés riemanniennes telles que pour* $i < j$, V_i *soit une sous-variété de* V_j . *Notons* α_{ij} *la deuxième forme de* V_i *relativement à* V_j . *Soient* $x_o \in V_1$ *et* $f = \exp_{V_3,x_o}$. *Posons* $V_i^1 = f^{-1}(V_i)$ *et soit* α_{ij}^1 *la deuxième forme de* V_i^1 *relativement à* V_j^1 .

Alors pour tous éléments u,v *de* $T_{x_o} V_i$ *on a :*

$$\alpha_{ij}(u,v) = \alpha_{ij}^1(u,v) .$$

Preuve de i) : i) découle du fait que $T_o f = \mathrm{id}\, T_{x_o} \tilde{V}$ et que les " Γ_{ij}^k " relatifs à la carte f sont nuls au point x_o.

Preuve de ii) : Pour $i < j$ notons $N_{ij}(x_o)$ l'orthogonal de $T_{x_o} V_i$ dans $T_{x_o} V_j$.

On a $N_{1,3}(x_o) = N_{1,2}(x_o) \oplus N_{2,3}(x_o)$ où la somme directe est orthogonale. Comme $T_o f = \mathrm{id}\, T_{x_o} V_3$ on a $T_{x_o} V_i = T_o V_i^1$ pour $i = 1,2,3$. Il en résulte que pour $i < j$ l'espace normal en x_o V_i^1 relativement à V_j^1 est égal à $N_{ij}(x_o)$.

D'après i) appliqué à V_3 on a, par projection orthogonale sur $N_{i,3}(x_o)$, $\alpha_{i,3}(u,v) = \alpha_{i,3}^1(u,v)$, pour tous u,v éléments de $T_{x_o} V_i$ et $i = 1,2$.

Comme, pour tous u,v éléments de $T_{x_o} V_1$,

$$\alpha_{1,3}(u,v) = \alpha_{1,2}(u,v) + \alpha_{2,3}(u,v)$$

et $\alpha_{1,3}^1(u,v) = \alpha_{1,2}^1(u,v) + \alpha_{2,3}^1(u,v)$, il en résulte $\alpha_{1,2}(u,v) = \alpha_{1,2}^1(u,v)$, pour tous u,v éléments de $T_{x_o} V_1$.

(2.3) Corollaire. *Soient* V *une hypersurface de* $\tilde{V}$ *et* $x_o \subset V$.

i) Si V *est fortement *-convexe en* x_o *, alors* V *est* e*-convexe en* x_o.

ii) Si V *est* e*-convexe en* x_o *, alors* V *est *-convexe en* x_o.

Preuve. Posons $f = \exp_{\tilde{V},x_o}$ et $V_1 = f^{-1}(V)$.

Par définition de la *-convexité au point x_o, V_1 se trouve au voisinage de 0_{x_o} dans $T_{x_o}\tilde{V}$, d'un même côté, au sens large, de $T_{x_o}V$.

Soit $\xi \in N_{x_o}V$. Notons α_1 la deuxième forme de V_1 relativement à $T_{x_o}\tilde{V}$. Alors d'après (2.2) $\alpha_{(x_o)} = \alpha_{1(o)}$ d'où i) et ii) d'après des théorèmes classiques appliqués à $\alpha_{1,\xi}$.

(2.4) De même si A est un convexoïde fort de $\tilde{V}$ alors A est un e-convexoïde ; et si A est un e-convexoïde, alors A est un convexoïde.

(2.5) Proposition. *Soient* V_1 *une variété riemannienne,* $\tilde{V}$ *une hypersurface connexe de* $V_1 \times \mathbb{R}$ *,* pr_1 *et* pr_2 *les projections de* $V_1 \times \mathbb{R}$ *sur* V_1 *et* $\mathbb{R}$ *respectivement et* $\mathcal{J} = pr_2\tilde{V}$. *Supposons que pour tout* $z \in \mathcal{J}$ *l'hypersurface* $V_1 \times \{z\}$ *coupe* $\tilde{V}$ *transversalement et soit* $S_Z = (V_1 \times \{z\}) \cap \tilde{V}$ *pour tout* $z \in \mathcal{J}$.

Supposons qu'il existe une famille (C_z), $z \in \mathcal{J}$, *de* e*-convexoïdes de* V_1 *tels que :*

i) $pr_1(S_z) = \partial C_z$ *pour tout* $z \in \mathcal{J}$;

ii) $z_1 < z_2$ *entraîne* $C_{z_1} \subset C_{z_2}$.

Alors, pour tout $z_o \in \mathcal{J}$, *l'ensemble* A_{z_o} *des points* (x,z) *de* $\tilde{V}$ *tels que* $z \leqslant z_o$ *est un convexoïde de* $\tilde{V}$ *dont le bord est* S_{z_o}.

Soit $\theta(m)$ *l'angle de* $V_1 \times \{z_o\}$ *et de* $\tilde{V}$ *au point* $m \in S_{z_o}$.

Si $\theta(m) = \frac{\pi}{2}$ *alors* m *est un point méplat de* S_{z_o} *relativement à* $\tilde{V}$.

Si $\theta(m) \neq \frac{\pi}{2}$ *et si* C_{z_o} *est fortement convexoïde au point* m, *alors* A_{z_o} *est fortement convexoïde en* m, *relativement à* $\tilde{V}$.

Preuve. On a pour tout $(x,z) \in V_1 \times \mathbb{R}$

$$T_{x,z}(V_1 \times \mathbb{R}) \simeq (T_xV_1) \times \mathbb{R}.$$

Nous dirons que z est la cote du point (x,z).

Si $(u,\lambda) \in (T_x V_1) \times \mathbb{R}$, nous dirons que (u,λ) est vertical (resp. horizontal) lorsque $u = 0$ (resp. $\lambda = 0$) et que (u,λ) est tourné vers le haut (resp. vers le bas) lorsque $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$).

Pour tout $m \in \tilde{V}$ notons $\nu_1(m)$ le vecteur unitaire tangent à $\tilde{V}$, orthogonal à S_z et tourné vers le bas. Soit α la deuxième forme de S_{z_o} relativement à $\tilde{V}$. Il s'agit de prouver que α_{ν_1} est $\geqslant 0$ au point $m_o = (x_o,z_o)$ de S_{z_o}.

Soit $U_1(0)$ un ouvert de $T_{x_o} V_1$ contenant 0, tel que $\exp_{V_1,x_o}$ induise un difféomorphisme f_1 de $U_1(0)$ sur un ouvert $U(x_o)$ contenant x_o.

La restriction de $\exp_{V_1 \times \mathbb{R},(x_o,z_o)}$ à $U_1(0) \times \mathbb{R}$ vérifie $f(u,\lambda) = (f_1(u), z_o+\lambda)$ pour tous $u \in U_1(0)$ et $z \in \mathbb{R}$.

Soit $g : U(x_o) \times \mathbb{R} \to U_1(0) \times \mathbb{R}$ définie par $g(x,z) = (f_1^{-1}(x),z)$. g est une carte de $V_1 \times \mathbb{R}$ et g est la fonction composée $(x,z) \to (u,\lambda) \to (u,z_o+\lambda)$. On a donc $T_{x_o,z_o} g = \mathrm{id}$.

L'application g conserve l' "altitude" z. Il résulte alors du lemme (2.2) et du fait que l'application $(u,\lambda) \to (u,z_o+\lambda)$ est une isométrie de $T_{x_o} V_1 \times \mathbb{R}$ sur lui-même que, pour prouver que α_{ν_1} est $\geqslant 0$, on peut supposer que V_1 est un ouvert d'un espace euclidien E_1, ce que nous faisons dans la suite de la démonstration.

Toutefois, sous les hypothèses initiales, S_{z_o} était le bord d'un e-convexoïde $\hat{C}_{z_o} = C_{z_o} \times \{z_o\}$ de $V_1 \times \{z_o\}$, (car $x \longmapsto (x,z_o)$ est une isométrie de V_1 sur $V_1 \times \{z_o\}$). Nous pouvons maintenant seulement affirmer que $\hat{C}_{z_o}$ est dans $E_1 \times \{z_o\}$ e-convexoïde **au point m_o.**

Posons $E = E_1 \times \mathbb{R}$, $H = E_1 \times \{z_o\}$ et notons P la projection orthogonale $(x,z) \longmapsto (x,z_o)$ de E sur H.

Soit $\xi_o \in T_{m_o}(\hat{C}_{z_o})$ le vecteur unitaire normal à S_{z_o}, de sens rentrant, $\xi_o \in E_1 \times \{0\}$.

Posons $\Gamma = T_{m_o}(S_{z_o})$. Soit $t \longmapsto \gamma(t)$ une courbe paramétrée de S_{z_o} telle que $\gamma(0) = m_o$ et $\gamma'(0) = u$.

Notons α_H (resp. $\bar{\alpha}$) la deuxième forme vectorielle de S_{z_o} relativement à H (resp. $\tilde{V}$)

$$\alpha_{H,\xi_o}(u,u) = (\gamma''(t) \mid \xi_o)$$

$$\bar{\alpha}_{\nu_1}(u,u) = (\gamma''(t) \mid \nu_1),$$

$$\text{et } \gamma''(t) = (\alpha_{H,\xi_o}(u,u))\xi_o + w, \quad \text{avec } w \in \Gamma .$$

Le vecteur ν_1 est orthogonal à Γ, donc :

(2.5.1) $$\bar{\alpha}_{\nu_1}(u,u) = (\alpha_{H,\xi_o}(u,u))(\xi_o \mid \nu_1).$$

Montrons que $(\xi_o \mid \nu_1) \geqslant 0$ au point m_o.

Soit $\lambda \longmapsto \varphi(\lambda)$ la ligne intégrale du champ ν_1 (ligne de plus grande pente de $\tilde{V}$) telle que $\varphi(0) = m_o$. Supposons $(\xi_o \mid \nu_1) \neq 0$.

Posons $\varphi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), z_\lambda)$
et $\varphi_H(\lambda) = P(\varphi(\lambda)) = (\varphi_1(\lambda), z_o)$.

(2.5.2) On a $\varphi'(0) = \nu_1$ et ν_1 est tourné vers le bas (le difféomorphisme g a conservé cette propriété) donc $\frac{dz_\lambda}{d\lambda}(0) < 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $0 < \lambda < \eta$ implique $z_\lambda < 0$. On a $\varphi_1(\lambda) \in C_{z_\lambda}$ donc $\varphi_1(\lambda) \in C_{z_o}$, i.e. $\varphi_H(\lambda) \in \hat{C}_{z_o}$.

Par suite $\left(\frac{\varphi_H(\lambda) - m_o}{\lambda} \middle| \xi_o\right) \geqslant 0$ pour tout $\lambda \in]0,\eta[$,

(2.5.3) donc, à la limite, $(\varphi'_H(0) \mid \xi_o) \geqslant 0$

$$(\xi_o \mid \nu_1) = (\xi_o \mid \varphi'(0))$$
$$= (\xi_o \mid \varphi'_H(0)) \geqslant 0$$

La proposition résulte alors de (2.5.1).

(2.6) Lemme. *Soit* A *une sous-variété à bord de* $\tilde{V}$ *telle que* $\dim A = \dim \tilde{V}$. *Supposons que* A *est convexoïde (resp. fortement convexoïde, resp.* e*-convexoïde) au point* $m_o \in \partial A$. *Soient* V *une sous-variété de* $\tilde{V}$ *telle que* $V \subset A$ *et* $m_o \in V \cap \partial A$. *Soient* $\xi_o \in T_{m_o}A$ *le vecteur unitaire normal rentrant,* α *(resp.* $\bar{\alpha}$ *) la deuxième forme de* V *(resp.* ∂A*) relativement à* $\tilde{V}$. *Alors pour tout* $u \in T_{m_o}V$:

(2.6.1) $$\bar{\alpha}_{\xi_o}(u,u) \leqslant \alpha_{\xi_o}(u,u).$$

Preuve. D'après le lemme (2.2) on peut supposer que $\tilde{V}$ est un espace euclidien E et que $x_o = 0$. Faisons-le et posons $H = T_{m_o}(\partial A)$, $H_1 = T_{m_o}V$.

Les hypothèses $x_o \in V \cap \partial A$ et $V \subset A$ entraînent $H_1 \subset H$.

Soit $z = \varphi(x)$, $x \in H$, $\|x\| < \eta$ (resp. $z = \varphi_1(x)$, $x \in H_1$, $\|x\| < \eta$) des équations locales de ∂A et V respectivement dans le repère (H, ξ_o).

Comme $V \subset A$ il en résulte que V est d'un même côté au sens large de l'hypersurface ∂A au voisinage de x_o. Donc $\varphi(x) \leqslant \varphi_1(x)$ pour $x \in H_1$ et $\|x\| < \eta$, et la formule de Taylor à l'ordre deux appliquée à φ et φ_1 donne (2.6.1).

(2.7) Corollaires.

(2.7.1) *Sous les hypothèses de la proposition (2.5), pour toute sous-variété compacte* V *de* $\tilde{V}$ *il existe* $x_o \in V$ *et* $\xi_o \in N_{x_o}V$ *tels que* $\|\xi_o\| = 1$ *et* $\alpha_{\xi_o} \geqslant 0$.

Preuve. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,z) = z$. f étant continue sur le compact V est majorée et atteint sa borne supérieure en un point $m_o = (x_o, z_o)$. On a $V \subset A_{z_o}$ (notations de la proposition 2.5) et $m_o \in V \cap S_{z_o}$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.6 à A_{z_o} et V.

On obtient de même les énoncés (2.7.2) et (2.7.3) :

(2.7.2) *Sous les hypothèses de la proposition (2.5), si* $\theta(m) \neq \frac{\pi}{2}$ *pour tout* $m \in \tilde{V}$ *et si* C_z *est un convexoïde fort pour tout* $z \in \mathscr{I}$, *alors pour toute sous-variété compacte* V *de* $\tilde{V}$ *il existe* $x_o \in V$ *et* $\xi_o \in N_{x_o}V$ *tel que* $\|\xi_o\| = 1$ *et que* α_{ξ_o} *soit définie positive.*

En particulier $\tilde{V}$ *ne possède pas de sous-variété minimale compacte de dimension* > 0 *, et toute hypersurface compacte de* $\tilde{V}$ *possède un point où elle fortement *-convexe.*

(2.7.3) *Sous les hypothèses de la proposition (2.5) supposons que* $\theta(m) \neq \frac{\pi}{2}$ *pour tout* $m \in \tilde{V}$ *et que* $pr_1(S_z)$ *ne possède aucun point méplat relativement à* V_1 *. Alors pour toute hypersurface compacte* V *de* $\tilde{V}$ *il existe* $x_0 \in V$ *et* $\xi_0 \in N_{x_0} V$ *tels que* $\| \xi_0 \| = 1$, $\alpha_{\xi_0} \geqslant 0$ *et* $\alpha_{\xi_0} \neq 0$.

En particulier $\tilde{V}$ *ne possède pas d'hypersurface minimale compacte.*

(2.8) Exemples.

(2.8.1) Soit Q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Alors le graphe G de $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une variété riemannienne de dimension n (**paraboloïde elliptique**) qui ne possède aucune sous-variété minimale compacte de dimension >0 et dans laquelle toute hypersurface compacte possède un point où elle est fortement *-convexe. (En fait dans cet exemple $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ ne coupe pas transversalement G mais il est clair que la preuve ci-dessus est encore valable ; on suppose dim $V > 0$!).

(2.8.2) Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une application C^∞ telle que $\varphi'(r) > 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit G le graphe de l'application $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \varphi(\| x \|)$ (**hypersurface de révolution**). Alors G ne possède aucune sous-variété minimale compacte de dimension > 0 et toute hypersurface compacte de G possède un point où elle est fortement *-convexe.

En effet, les $pr_1(S_z)$ sont alors des sphères de $\mathbb{R}^n$, elles sont donc les bords des boules fermées correspondantes qui sont des convexoïdes forts de $\mathbb{R}^n$. De plus G étant le graphe d'une fonction différentiable, l'angle de $\mathbb{R}^n \times \{z\}$ avec G est toujours $\neq \frac{\pi}{2}$; d'où le résultat d'après (2.7.2).

Pour tout $m \in G$ soit ν_1 le vecteur unitaire tangent à la méridienne et tourné vers le bas :

(2.8.2.1)
$$\nu_1 = \frac{-1}{\sqrt{1+\varphi'^2(\| x \|)}} \frac{x}{\| x \|} - \frac{\varphi'(\| x \|)}{\sqrt{1+\varphi'^2(\| x \|)}} \vec{k},$$

où $\vec{k}$ est l'élément (0.1) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

On vérifie aisément que, au point $m = (x,z)$ où $z = \varphi(\|x\|)$, la deuxième forme $\bar{\alpha}$ de S_z relativement à G vérifie :

(2.8.2.2) $$\bar{\alpha}_{\nu_1}(u,u) = \frac{(u|u)}{\|x\|\sqrt{1+\varphi'^2(\|x\|)}}, \text{ pour tout } u \in T_m(S_z).$$

En particulier si $\varphi(r) = -\sqrt{R^2-r^2}$, $0 \leqslant r < R$, **(hémisphère ouvert)** on a, en posant $\theta = \operatorname{Arctg}\frac{r}{R}$,

(2.8.2.3) $$\bar{\alpha}_{\nu_1}(u,u) = \frac{\cos\theta}{R\sin\theta}(u|u), \text{ pour tout } z \in]-R,0[\text{ et tout } u \in T_m(S_z).$$

La proposition suivante généralise le principe de démonstration classique de l'existence d'un point *-convexe sur toute hypersurface compacte V de $\mathbb{R}^n$ par enserrement de V au moyen d'une famille de sphères.

(2.9) Proposition. *Soit* (A_t), $t \in \mathbb{R}_+^*$ *une famille de convexoïdes d'une variété riemannienne* $\tilde{V}$. *Posons* $W_t = \partial A_t$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *soit* $W_t(\varepsilon)$ *l'ensemble des* $x \in \tilde{V}$ *tels que* $d(x,W_t) \leqslant \varepsilon$. *Supposons que* $t \mapsto A_t$ *vérifie la condition de continuité suivante (où* Δ *désigne la différence symétrique :* $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$) :

(2.9.*) *Pour tout* $t_o > 0$, *tout compact* K *de* $\tilde{V}$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que* $|t-t_o| \leqslant \eta$ *implique* $(A_t \Delta A_{t_o}) \cap K \subset W_{t_o}(\varepsilon)$.

Soit V *une sous-variété compacte de* $\tilde{V}$ *telle que :*

(2.9.1) *i)* $V \not\subset \bigcap_{t>o} A_t$;

(2.9.2) *ii) il existe* $\mu > 0$ *tel que* $V \subset A_\mu$.

Alors l'ensemble T *des* $t \in]0,\mu]$ *tels que pour tout* $s \in [t,\mu]$ *on ait* $V \subset A_s$ *a un plus petit élément* $t_o > 0$. *On a* $V \subset A_{t_o}$ *et* $V \cap W_{t_o} \neq \emptyset$.

Preuve.

i) Posons $t_o = \operatorname{Inf} T$.

Comme $V \not\subset \bigcap_{t>o} A_t$ il existe $\lambda > 0$ tel que $V \not\subset A_\lambda$. λ est un minorant de T (sinon il existerait $t \in T$ tel que $t < \lambda$ et on aurait $V \subset A_\lambda$), donc $t_o > 0$.

ii) Prouvons que $V \subset A_{t_o}$.

Par l'absurde, supposons $V \not\subset A_{t_o}$. Alors il existe $x_1 \in V$ tel que $x_1 \notin A_{t_o}$. Comme A_{t_o} est fermé on a $d(x_1, A_{t_o}) > 0$. Posons $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} d(x_1, A_{t_o})$.

(2.9.3) On a $x_1 \notin W_{t_o}(\varepsilon_1)$ et d'après l'hypothèse il existe $\eta_1 > 0$ tel que $|t-t_o| \leqslant \eta_1$ entraîne :

$$(A_t \Delta A_{t_o}) \cap V \subset W_{t_o}(\varepsilon_1).$$

Supposons $\eta_1 < \mu - t_o$ et posons $t_1 = t_o + \eta_1$.

On a $V \subset A_{t_1}$ donc $x_1 \in A_{t_1}$.

Comme $x_1 \notin A_{t_o}$ on a $x_1 \in A_{t_1} \setminus A_{t_o}$,

donc $x_1 \in (A_t \Delta A_{t_o}) \cap V$

donc $x_1 \in W_{t_o}(\varepsilon_1)$,

ce qui contredit (2.9.3).

Donc $V \subset A_{t_o}$.

Comme T est un intervalle il en résulte que $V \subset A_s$ pour tout $s \in [t_o, \mu]$, i.e. $t_o \in T$.

iii) Prouvons que $V \cap W_{t_o} \neq \emptyset$.

Par l'absurde, supposons $V \cap W_{t_o} = \emptyset$. V étant compact et W_{t_o} étant fermé, $d(V, W_{t_o}) > 0$. Posons $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} d(V, W_{t_o})$, alors $W_{t_o}(\varepsilon_2) \cap V = \emptyset$.

D'après l'hypothèse il existe $\eta_2 > 0$ tel que $|t-t_o| \leqslant \eta_2$ entraîne $(A_t \Delta A_{t_o}) \cap K \subset W_{t_o}(\varepsilon_2)$. Supposons $\eta_2 < t_o$. Soit $s \in [t_o - \eta_2, t_o]$, alors $|s-t_o| \leqslant \eta_2$ donc :

$$(A_s \Delta A_{t_o}) \cap K \subset W_{t_o}(\varepsilon_2)$$

Prouvons que $V \subset A_s$. Soit $x \in V$.

Comme $d(V, W_{t_o}) = 2\varepsilon_2$, on a $d(x, W_{t_o}) \geqslant 2\varepsilon_2$, donc $x \notin W_{t_o}(\varepsilon)$, donc $x \notin (A_s \Delta A_{t_o}) \cap V$, donc $x \notin A_s \Delta A_{t_o}$.

Or $x \in V$, donc $x \in A_{t_o}$.

Il en résulte que $x \in A_s \cap A_{t_o}$, donc $x \in A_s$.

Donc $V \subset A_s$. Comme $t_o \in T$ on a aussi $V \subset A_s$ pour tout $s \in [t_o,\mu]$. Finalement $V \subset A_s$ pour tout $s \in [t_o-\eta_2,\mu]$, donc $t_o-\eta_2 \in T$, ce qui contredit $t_o = \operatorname{Inf} T$.

Donc $V \cap W_{t_o} \neq \emptyset$.

(2.10) Corollaire. *Sous les hypothèses de la proposition (2.9) :*

i) Il existe $x_o \in V$ *et* $\xi_o \in N_{x_o} V$ *tels que* $\|\xi_o\| = 1$ *et* $\alpha_{\xi_o} \geqslant 0$.

ii) Si A_t *est un convexoïde fort pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$, *alors il existe* $x_o \in V$ *et* $\xi_o \in N_{x_o} V$ *tels que* $\|\xi_o\| = 1$, *et que* α_{ξ_o} *soit définie positive.*

iii) Si pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, ∂A_t *ne possède aucun point méplat et si* V *est une hypersurface, alors il existe* $x_o \in V$ *et* $\xi_o \in N_{x_o} V$ *tels que* $\|\xi_o\| = 1$, $\alpha_{\xi_o} \geqslant 0$ *et* $\alpha_{\xi_o} \neq 0$.

Preuve. Application immédiate du lemme (2.6).

(2.11) Remarques.

(2.11.1) La condition (2.9.1) est automatiquement vérifiée pour toute sous-variété V de dimension p lorsque $\bigcap_{t>o} A_t$ est inclus dans une sous-variété **à bord I_o** de dimension $k \leqslant p$ telle que ∂I_o soit non vide et I_o connexe (car $V \subset \bigcap_{t>o} A_t$ entraîne $V \subset I_o$, donc $\dim V = \dim I_o$, V est donc ouverte relativement à I_o, V étant de plus fermée non vide on a donc $V = I_o$, ce qui est impossible puisque $\partial V = \emptyset$ et $\partial I_o \neq \emptyset$.

(2.11.2) La condition (2.9.2) est automatiquement vérifiée pour toute sous-variété compacte de dimension p lorsque la famille $t \longmapsto A_t$ est croissante et que la réunion des intérieurs des A_t, pour $t > 0$, est égale à $\tilde{V}$.

L'exemple simple suivant illustre les deux remarques précédentes.

Soient $\tilde{V} = E$ un espace euclidien et x_1,x_2 des éléments de E. Posons $d(x_1,x_2) = 2c$.

Pour tout $t > 0$, soit A_t l'ensemble des $x \in \tilde{V}$ tels que $d(x,x_1)+d(x,x_2) \leqslant 2c+t$. (Ellipsoïde de révolution). $\bigcap_{t>o} A_t$ est alors le segment fermé $I_o = [x_1,x_2]$.

(2.11.3) On peut démontrer que la famille $z \mapsto A_z$ de convexoïdes de la proposition (2.5) vérifie la propriété de continuité (2.9.*).

Nous omettons la preuve de ce fait que nous n'utilisons pas.

3. Courbures, tangages et diamètres.

Lorsque A est une partie d'une variété riemannienne M, on note $\delta_M(A)$ le diamètre de A dans l'espace métrique M.

Le lemme suivant est à la base de la présente section.

(3.1) Lemme de comparaison. *Soient* E *un espace euclidien,* $\varepsilon > 0$, $\gamma : [a,b] \to E$ *une application de classe* C^2 *telle que* $\|\gamma'(s)\| = 1$ *et* $\|\gamma''(s)\| \leqslant \varepsilon$ *pour tout* $s \in [a,b]$. *Posons* $R_o = \frac{1}{\varepsilon}$. *Alors :*

i) Si $b-a \leqslant 2\pi R_o$, *on a* $\|\gamma(b)-\gamma(a)\| \geqslant R_o \left|1 - e^{i\frac{b-a}{R_o}}\right|$;

ii) Si $\pi R_o \leqslant b-a$, *on a* $\delta_E(\mathrm{Im}\ \gamma) \geqslant 2R_o$;

iii) Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, *on a* $\mathrm{long}\ \gamma \geqslant 2\pi R_o$ *et* $\delta_E(\mathrm{Im}\ \gamma) \geqslant 2R_o$.

Preuve.

i) Soit $\ell = b-a$. On peut supposer E vectoriel $a = -\frac{\ell}{2}$, $b = \frac{\ell}{2}$ et $\gamma(0) = 0$. Posons $\vec{k} = \gamma'(0)$, $z(s) = (\gamma(s)|\vec{k})$ et soit $\varphi(s)$ défini par $(\gamma'(s)|\vec{k}) = \cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, désignons par (e_1,e_2) la base canonique, posons

$$\gamma_1(s) = R_o + R_o\, e^{i(\pi - \frac{s}{R_o})}, \quad y_1(s) = (\gamma_1(s)|e_2) = R_o \sin\frac{s}{R_o},$$

et soit $\psi(s)$ défini par $\gamma'_1(s)|e_2 = \cos\psi$, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$. On a $\psi(s) = \frac{s}{R_o}$, $\frac{dz}{ds} = \cos\varphi$, $\frac{dy_1}{ds} = \cos\psi$.

Posons $\tau(s) = \gamma'(s)$. Comme $\varphi(s)$ est la distance géodésique de $\vec{k}$ à $\tau(s)$ sur la sphère unité :

$$\varphi(s) \leqslant \int_o^s \left\|\frac{d\tau}{dt}\right\| dt, \text{ pour tout } s \in [0,\tfrac{\ell}{2}].$$

Donc $\varphi(s) \leqslant \int_o^s \frac{1}{R_o}\, dt$,

(3.1.1) i.e. $\varphi(s) \leqslant \psi(s)$, pour tout $s \in [0, \frac{\ell}{2}]$, donc $\cos \psi(s) \leqslant \cos \varphi(s)$, i.e. $\frac{dy_1}{ds} \leqslant \frac{dz}{ds}$. Comme $y_1(0) = z(0)$, il en résulte $y_1(s) \leqslant z(s)$, pour tout $s \in [0, \frac{\ell}{2}]$. En particulier $y_1(\frac{\ell}{2}) \leqslant z(\frac{\ell}{2})$.

De même on obtient :

$$z(-\tfrac{\ell}{2}) \leqslant y_1(-\tfrac{\ell}{2}) = -y_1(\tfrac{\ell}{2}),$$

donc $2y_1(\frac{\ell}{2}) \leqslant z(\frac{\ell}{2}) - z(-\frac{\ell}{2}) \leqslant \| \gamma(\frac{\ell}{2}) - \gamma(-\frac{\ell}{2}) \|$.

Comme $2y_1(\frac{\ell}{2}) = R_o |1 - e^{i\frac{\ell}{R_o}}|$, i) est démontré.

ii) Si $\pi R_o \leqslant b-a$ alors $a + \pi R_o \in [a,b]$, donc d'après i) $\| \gamma(a + R_o) - \gamma(a) \| \geqslant 2R_o$, donc $\delta(\mathrm{Im}\, \gamma) \geqslant 2R_o$.

iii) Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ alors $\mathrm{long}\, \gamma \geqslant 2\pi R_o$ (car si on avait $\mathrm{long}\, \gamma < 2\pi R_o$ on aurait $\| \gamma(a) - \gamma(b) \| > 0$ d'après i)). Ainsi $b-a \geqslant 2\pi R_o$, donc d'après ii), $\delta(\mathrm{Im}\, \gamma) \geqslant 2R_o$.

(3.2) Théorème. *Soient* V *une sous-variété d'un espace euclidien* E *et* $\varepsilon > 0$. *Supposons que pour tout* $x \in V$ *et tout* $u \in T_x V$ *tel que* $\|u\| = 1$ *on ait* $t_u \leqslant \varepsilon$. *Alors :*

i) Si V *possède au moins une géodésique définie sur tout* $\mathbb{R}$, *le diamètre extrinsèque de* V *dans* E *est minoré :* $\delta_E V \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$;

ii) Si $\gamma : [a,b] \to V$, $a \neq b$, *est une géodésique de* V *telle que* $\gamma(a) = \gamma(b)$, *alors :*

$$\mathrm{long}\, \gamma \geqslant 2\pi \frac{1}{\varepsilon} \quad \textit{et} \quad \delta_E(\mathrm{Im}\, \gamma) \geqslant \frac{2}{\varepsilon}.$$

Preuve. Si c est une géodésique unitaire de V, en désignant par α la deuxième forme vectorielle de V relativement à E, on a $c''(t) = \alpha(c'(t), c'(t))$. Donc $\| c''(t) \| \leqslant \varepsilon$ pour tout t. Il suffit alors d'appliquer le lemme (3.1).

(3.3) Corollaire. *Soient* V *une sous-variété minimale d'un espace euclidien* E *et* $k_o > 0$. *Supposons que la courbure de Ricci* Q *de* V *vérifie* $-k_o \leqslant (Q(u)|u)$ *pour tout* $u \in TV$ *tel que* $\|u\| = 1$. *Soit* $\gamma : [a,b] \to V$ *une géodésique de* V *telle que* $\gamma(a) = \gamma(b)$. *Alors :*

i) $\text{long}\ \gamma \geqslant \frac{2\pi}{\sqrt{k_o}}$;

ii) $\delta_E(\text{Im}\ \gamma) \geqslant \frac{2\pi}{\sqrt{k_o}}$.

Preuve. V étant minimale, on a $Q = -\beta^2$. Il suffit alors d'appliquer (3.2) avec $\varepsilon = \sqrt{k_o}$.

(3.4) Lemme. *Soient* $\tilde{V}$ *une sous-variété d'un espace euclidien* E *et* $R_1 > 0$. *Notons* $\tilde{\alpha}$ *la deuxième forme vectorielle de* $\tilde{V}$ *relativement à* E *et supposons que* $\|\tilde{\alpha}(u,u)\| \leqslant \frac{1}{R_1}$ *pour tout* $u \in T\tilde{V}$ *tel que* $\|u\| = 1$. *Soit* $\gamma : [a,b] \to \tilde{V}$ *une courbe paramétrée de* $\tilde{V}$ *telle que* $\|\gamma'(s)\| = 1$, *pour tout* $s \in [a,b]$, *et dont la courbure relativement à* $\tilde{V}$ *est partout* $\leqslant \varepsilon_1$. *Alors :*

i) Si $b-a \geqslant \frac{\pi R_1}{\sqrt{R_1^2\ \varepsilon_1^2+1}}$, *on a* $\delta_E(\text{Im}\ \gamma) \geqslant \frac{2R_1}{\sqrt{1+R_1^2\ \varepsilon_1^2}}$;

ii) Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, *on a* $\text{long}\ \gamma \geqslant \frac{2\pi R_1}{\sqrt{1+R_1^2\ \varepsilon_1^2}}$.

Preuve. $\gamma''(s) = \frac{\tilde{\nabla}\gamma'}{ds}(s) + \tilde{\alpha}(\gamma'(s),\gamma'(s))$ pour tout $s \in [a,b]$, et les deux termes du deuxième membre sont orthogonaux. Donc
$\|\gamma''(s)\|^2 = \|\frac{\tilde{\nabla}\gamma'}{ds}(s)\|^2 + \|\tilde{\alpha}(\gamma'(s),\ \gamma'(s))\|^2$, d'où $\|\gamma''(s)\| \leqslant \sqrt{\varepsilon_1^2 + \frac{1}{R_1^2}}$ et il suffit d'appliquer le lemme (3.1) avec $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \frac{1}{R_1^2}}$.

Remarque. Si $\tilde{V}$ est une sphère S de rayon R_1 et γ une géodésique de S alors le lemme (3.4) s'applique avec $\varepsilon_1 = 0$ et se réduit à des propriétés bien connues.

(3.5) Proposition. *Soient* $\tilde{V}$ *une sous-variété fermée d'un espace euclidien* E *et* V *une sous-variété fermée de* $\tilde{V}$. *Notons* α *(resp.* $\tilde{\alpha}$*) la deuxième forme vectorielle de* V *(resp.* $\tilde{V}$*) relativement à* $\tilde{V}$ *(resp.* E*).*

Supposons que pour tout $u \in TV$ *(resp.* $T\tilde{V}$ *) tel que* $\|u\| = 1$ *on ait* $\|\alpha(u,u)\| \leqslant \varepsilon_1$ *(resp.* $\|\tilde{\alpha}(u,u)\| \leqslant \frac{1}{R_1}$.

Alors $\delta_E V \geqslant \frac{2R_1}{\sqrt{1+R_1^2\ \varepsilon_1^2}}$.

Preuve. V étant fermée relativement à $\tilde{V}$ et $\tilde{V}$ étant fermée dans E, V est

fermée dans E, donc V est complète. La proposition découle alors du lemme (3.4) appliqué aux géodésiques de V.

(3.5.1) Remarque. Si on remplace dans (3.5) les hypothèses $\| \alpha(u,u) \| \leqslant \varepsilon_1$ et $\| \tilde{\alpha}(u,u) \| \leqslant \frac{1}{R_1}$ par $\| \beta(u) \| \leqslant \varepsilon_1$ et $\| \tilde{\beta}(u) \| \leqslant \frac{1}{R_1}$, la proposition s'applique (cf. 0 ; 3.3.2).

(3.6) Théorème. *Soient* S *une sphère de rayon* R_1 *dans un espace euclidien* E, V *une sous-variété fermée de* S, *et* $\varepsilon_1 > 0$. *Notons* α *la deuxième forme vectorielle de* V *relativement à* S *et supposons* $\| \alpha(u,u) \| \leqslant \varepsilon_1$ *pour tout* $u \in TV$ *tel que* $\| u \| = 1$. *Alors le diamètre extrinsèque de* V *dans* S *est minoré :*

(3.6.1)
$$2R_1 \operatorname{Arctg} \frac{1}{R_1 \varepsilon_1} \leqslant \delta_S V.$$

Preuve. D'après la proposition (3.5) :

$$\delta_E V \geqslant \frac{2R_1}{\sqrt{1+R_1^2 \varepsilon_1^2}}.$$

V étant compacte il existe x_1 et x_2 éléments de V tels que

(3.6.2)
$$\| x_1 - x_2 \| = \frac{2R_1}{\sqrt{1+R_1^2 \varepsilon_1^2}}$$

Posons $d_S(x_1,x_2) = 2\varphi \; R_1$.

(3.6.2) s'écrit : $2R_1 \sin \varphi = \frac{2R_1}{\sqrt{1+R_1^2 \varepsilon_1^2}}$, d'où $1 = \sin^2 \varphi + \varepsilon_1^2 R_1^2 \sin^2 \varphi$

$$\frac{1}{\varepsilon_1 R_1} = \operatorname{tg} \varphi$$

i.e. $\varphi = \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{\varepsilon_1 R_1}$, d'où le résultat.

D'après (3.6.1), si une sous-variété de S *a, relativement à* S, *tous ses basculements, suivant des vecteurs unitaires, majorés par* ε_1 *très petit, alors* $\delta_S V$ *est très voisin de* $\delta_S S = \pi R_1$.

Le lemme suivant complète le lemme de comparaison (3.1).

(3.7) Lemme. *Avec les hypothèses et notations du lemme (3.1), supposons* $b-a \leqslant 2\pi R_o$ *et*

(3.7.1) $$\| \gamma(b) - \gamma(a) \| = R_o \left| 1 - e^{i\frac{b-a}{R_o}} \right| .$$

Alors l'image de γ *est un arc de cercle de rayon* R_o.

Preuve. Conservons les notations de la preuve de (3.1). Posons $A = \gamma(-\frac{\ell}{2})$, $B = \gamma(\frac{\ell}{2})$, $A_1 = \gamma_1(-\frac{\ell}{2})$, $B_1 = \gamma_1(\frac{\ell}{2})$.

(3.7.1) s'écrit : $\| B-A \| = \| B_1 - A_1 \|$.

Soient H l'hyperplan vectoriel orthogonal à k, P (resp. Q) la projection orthogonale de A (resp. B) sur H.

D'après la preuve de (3.1) on a $(A|k) \geqslant 0$ et $(B|k) \leqslant 0$.

Supposons que $\| B-Q \| \leqslant \| A-P \|$, et soit $\hat{\gamma} : [-\frac{\ell}{2}, +\frac{\ell}{2}] \to E$ défini par les conditions suivantes :

i) $\hat{\gamma} | [0, \frac{\ell}{2}] = \gamma[0, \frac{\ell}{2}]$,

ii) Pour tout $s \in [-\frac{\ell}{2}, 0]$, $\hat{\gamma}(s)$ est le symétrique par rapport à H de $\gamma(-s)$.

(3.7.2) Posons $B' = \hat{\gamma}(-\frac{\ell}{2})$. Alors $\| B-B' \| \leqslant \| B_1 - A_1 \|$. On vérifie sans peine que $\hat{\gamma}$ est de classe C^2. Comme $\| \hat{\gamma}''(s) \| \leqslant \varepsilon$ pour tout s, on peut appliquer à $\hat{\gamma}$ le lemme (3.1), d'où :

(3.7.3) $$\| B-B' \| \geqslant \| B_1 - A_1 \| .$$

On a donc $\| B-B' \| = \| B-A \|$.

Comme $(A|k) \leqslant (B'|k)$ ceci exige $A = B'$.

(3.7.4) Ainsi $\| B-Q \| = \| A-P \|$.

Nous allons montrer que $\gamma([0, \frac{\ell}{2}])$ est un arc de cercle de rayon R_o. De même en échangeant les rôles de $[0, \frac{\ell}{2}]$ et de $[-\frac{\ell}{2}, 0]$, ce qui est possible d'après (3.7.4) on saura que $\gamma([-\frac{\ell}{2}, 0])$ est un arc de cercle de rayon R_o. Comme ces deux arcs de cercle auront même tangente en 0 et même normale principale, la proposition sera démontrée.

Comme $\|B-Q\| = \frac{1}{2}\|B_1-A_1\|$, on a $z(\frac{\ell}{2}) = y_1(\frac{\ell}{2})$. Or $0 \leqslant \frac{d(z(s)-y_1(s))}{ds}$ pour tout $s \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]$; l'application $s \longmapsto z(s) - y_1(s)$ est donc croissante. Comme elle s'annule pour $s = 0$ et $s = \frac{\ell}{2}$, il en résulte qu'elle est constante sur $[0,\frac{\ell}{2}]$.

Par suite $\varphi(s) = \psi(s)$ pour tout $s \in [0,\frac{\ell}{2}]$, donc $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R_o}$.

Soit $\mathscr{C}$ le cylindre engendré par les droites $\gamma(s) + Rk$, $s \in]0,\frac{\ell}{2}]$.

Notons $\lambda(s)$ (resp. $\lambda_g(s)$) la courbure de γ au point s relativement à E (resp. à $\mathscr{C}$).

Comme $\lambda_g(s) = \frac{d\varphi}{ds}$, on a:

$$\frac{1}{R_o} = \lambda_g \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{R_o}.$$

(3.7.5) Donc $\lambda = \lambda_g$.

Montrons que ceci entraîne que $\mathscr{C}$ est plan. Soit α la deuxième forme vectorielle de $\mathscr{C}$, $u = \gamma'(s)$, (u_1,u_2) une base orthonormée de $T_{\gamma(s)}\mathscr{C}$ telle que $u_2 = k$.

(3.7.5) se traduit par $\alpha(u,u) = 0$.

Posons $u = x_1u_1 + x_2u_2$. Comme $\alpha(u_1,u_2) = 0$ et $\alpha(u_2,u_2) = 0$ on a $x_1^2\ \alpha(u_1,u_1) = 0$.

Comme $s > 0$, on a $x_1 \neq 0$, donc $\alpha(u_1,u_1) = 0$. α est donc nulle en tout point $\gamma(s)$, $s \in]0, \frac{\ell}{2}]$. Il en résulte que α est nulle en tout point de $\mathscr{C}$.

Par conséquent $\mathscr{C}$ est plan. Comme une courbe plane dont la courbure est $\frac{1}{R_o}$ est un arc de cercle de rayon R_o, le lemme (3.7) est démontré.

(3.8) Théorème. *Soit* V *une hypersurface fermée d'un espace euclidien* E *et* $\varepsilon > 0$. *Supposons que:*

i) Pour tout $x \in V$ *et tout* $u \in T_xV$ *tel que* $\|u\| = 1$, *on a* $\|\alpha(u,u)\| \leqslant \varepsilon$;

ii) Le diamètre extrinsèque de V *dans* E *est égal à* $\frac{2}{\varepsilon}$.

Alors V *est une sphère.*

Preuve. Posons $R = \frac{1}{\varepsilon}$.

V étant fermée bornée est complète. Soit $x_o \in V$. Pour tout $u \in T_{x_o}V$ tel que $\|u\| = 1$ soit $\gamma_u : \mathbb{R} \to V$ la géodésique issue de u.

Posons $A_u = \gamma_u(-\frac{\pi}{2}R)$, $B_u = \gamma_u(\frac{\pi}{2}R)$.

D'après le lemme (3.1) on a :

$$\|B_u - A_u\| \geqslant 2R,$$

et d'après ii),

$$\|B_u - A_u\| \leqslant 2R.$$

Donc

$$\|B_u - A_u\| = 2R.$$

Donc, d'après le lemme (3.7), $\gamma_u([-\frac{\pi}{2}R, \frac{\pi}{2}R])$ est un demi-cercle de rayon R. En répétant le raisonnement aux points A_u et B_u au lieu de x_o, on voit que Im γ_u est un cercle de rayon R.

Soit $\nu \in N_{x_o}V$ tel que $\|\nu\| = 1$.

On a $\gamma''_u(0) = \pm \frac{1}{R}\nu$.

Comme $\gamma''_u(0)$ est fonction continue de u quand u varie dans la sphère unité de $T_{x_o}V$, on peut supposer, en remplaçant au besoin ν par son opposé, que $\gamma''_u(0) = \frac{1}{R}\nu$. Im γ_u est donc le cercle de diamètre $(x_o, x_o+2R\nu)$ dans le plan affine $x_o + \mathbb{R}u+\mathbb{R}\nu$. Il en résulte que V est la sphère de centre $x_o + R\nu$ et de rayon R.

(3.9) Proposition. *Soient* E *un espace euclidien et* R *réel* > 0, $\gamma : [0,\pi R] \to E$ *une application de classe* C^2 *telle que* $\|\gamma'(s)\| = 1$ *et* $\|\gamma''(s)\| \leqslant \frac{1}{R}$ *pour tout* $s \in [0,\pi R]$.

Soit S *une sphère de centre* I *et de rayon* R. *Supposons que* $\gamma(0) \in S$ *et que* $\gamma'(0) \in TS$. *Alors :*

i) Im γ *est incluse dans le complémentaire de la boule ouverte de centre* I *et de rayon* R *;*

ii) Si $t_1 \in [0, \pi R]$ *est tel que* $\gamma(t_1) \in S$, *alors* $\gamma([0,t_1])$ *est un arc de grand cercle de la sphère* S.

Preuve. Reprenons les notations de la preuve du lemme (3.1) (avec $\ell = 2\pi R$) : $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = k$. Soit H l'hyperplan vectoriel orthogonal à k. Posons $\xi = \frac{I}{\|I\|}$ et identifions la base canonique (e_1,e_2) de $\mathbb{R}^2$ avec (ξ,k), de sorte que γ_1 devient une courbe paramétrée dans le plan $\mathbb{R}\xi \oplus \mathbb{R}k$ telle que $\gamma_1(0) = 0$

et $\gamma_1'(0) = k$. Posons $\gamma(s) = M(s)$, $\gamma_1(s) = M_1(s)$, et soit $P(s)$ (resp. $P_1(s)$) la projection orthogonale de $M(s)$ (resp. $M_1(s)$) sur H.

1° Prouvons que pour tout $s \in [0, \frac{\pi}{2} R]$ on a $\|M(s)-I\| \geqslant R$.

Puisque $\varphi = \mathrm{ang}(k, \gamma'(s))$, on a $\| \frac{dP}{ds} \| = \sin \varphi$, donc $\left|\frac{d\|P\|}{ds}\right| \leqslant \sin \psi$.

D'autre part, en posant $\gamma_1(s) = x_1(s)\xi + y_1(s)k$, on a $\frac{dx_1}{ds} = \sin \varphi$.

Comme $0 \leqslant \varphi \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a donc $|\frac{d\|P\|}{ds}| \leqslant \frac{dx_1}{ds}$, et ceci pour tout $s \in [0, \frac{\pi}{2} R]$.

Par suite $\|P(s)\| \leqslant x_1(s)$, i.e. $\|P(s)\| \leqslant \|P_1(s)\|$ pour tout $s \in [0, \frac{\pi}{2}R]$.

Il en résulte que $\| I-P_1 \| \leqslant \| I-P \|$.

De plus, d'après la preuve du lemme (3.1) : $\|M_1-P_1\| \leqslant \|M-P\|$. Il résulte alors du théorème de Pythagore que $\|M_1-I\| \leqslant \|M-I\|$, i.e. $R \leqslant \|M(s)-I\|$, ceci pour tout $s \in [0, \frac{\pi}{2}R]$.

2° Soit T l'ensemble des $t \in [0,\pi R]$ tels que pour tout $s \in [0,t]$ on ait $\| \gamma(s)-I\| \geqslant R$. T est un intervalle contenant $[0, \frac{\pi}{2} R]$.

Posons $\mu = \mathrm{Sup}\ T$ et $B = \gamma(\mu)$. Par continuité on a

$$\| \gamma(\mu)-I\| \geqslant R \quad \text{et} \quad \mu \in T.$$

Supposons que $\mu < \pi R$.

Alors nécessairement $\| \gamma(\mu)-I\| = R$.

(Sinon par continuité il existerait des points de T strictement plus grands que μ).

Pour tout $s \in [0, \pi R]$ posons $\gamma_S(s) = I + R \frac{\gamma(s) - I}{\| \gamma(s) - I\|}$.

Soit $\gamma_1 : [0, \pi R] \to S$ la paramétrisation par l'abscisse curviligne d'un demi-grand cercle de S telle que $\gamma_1(0) = 0$ et $B \in \mathrm{Im}\ \gamma_1$.

Soit $t_2 \in [0,\pi R]$ tel que $\gamma_1(t_2) = B$. On a :

(3.9.1) $$\mathrm{long}\ \gamma_S|[0,\mu] \leqslant \mu$$

donc, a fortiori, $t_2 \leqslant \mu$.

Posons $B_1 = \gamma_1(\mu)$. D'après le lemme (3.1) appliqué à $\gamma|[0,\mu]$, on a

$\|B-0\| \geqslant \|B_1-0\|$. Comme $0 \leqslant t_2 \leqslant \mu \leqslant \pi$, ceci exige $B = B_1$, i.e. $t_2 = \mu$. Donc d'après (3.9.1),

$$\text{long } \gamma_S|[0,\mu] \leqslant d_S(0,B),$$

(où d_S désigne la distance de la variété riemannienne S), donc $\gamma_S([0,\mu])$ est un arc de grand cercle de la sphère S, de longueur μ.

Ainsi long $\gamma_S|[0,\mu] = \text{long}(\gamma|[0,\mu])$.

Ceci exige $\gamma_S|[0,\mu] = \gamma|[0,\mu]$.

Donc $\gamma|[0,\mu]$ est un arc de grand cercle de la sphère S. On peut alors reprendre le raisonnement précédent au point $\gamma(\mu)$ au lieu de $\gamma(0)$, ce qui montre l'existence de points de T strictement plus grands que μ : contradiction.

Donc $\mu = \pi R$.

Donc $\|\gamma(s)-I\| \geqslant R$ pour tout $s \in [0,\pi R]$.

3° Prouvons le ii) de la proposition (3.9).

Soit $t_1 \in [0,\pi R]$ tel que $\gamma(t_1) \in S$.

Puisque, pour tout $s \in [0,t_1]$, on a $\|\gamma(s)-I\| \geqslant R$, on prouve comme dans la partie 2°), en remplaçant μ par t_1, que $\gamma([0,t_1])$ est un arc de grand cercle de S.

4. Basculements et transports parallèles.

(4.1) Proposition. *Soient* V *une sous-variété de* $\tilde{V}$, γ : $[a,b] \to V$ *une courbe paramétrée de* V *et* $X : [a,b] \to TV$ *un champ* ∇*-parallèle le long de* γ *tel que* $\|X(t)\| = 1$ *pour tout* $t \in [a,b]$.

Alors $\left\| \frac{\tilde{\nabla} X}{dt}(t) \right\| \leqslant \|\beta(\gamma'(t)\|$.

Preuve. Soient $\tau_2,\ldots,\tau_p$ des champs de vecteurs unitaires le long de γ tels que, en posant $\tau_1(t) = X(t)$, $\tau_1(t),\ldots,\tau_p(t)$ soit une base orthonormée de $T_{\gamma(t)}V$ pour tout $t \in [a,b]$, et tels que les τ_i soient ∇-parallèles.

Posons $\tau(t) = \tau_1(t) \wedge \ldots \wedge \tau_p(t)$

et $B(t) = \tau(t) \llcorner X(t)$

i.e. $B(t) = \tau_2(t) \wedge \ldots \wedge \tau_p(t)$.

On a $X = (-1)^{p-1}\tau \llcorner B$, donc $\frac{\tilde{\nabla} X}{dt} = (-1)^{p-1}(\frac{\tilde{\nabla}\tau}{dt} \llcorner B + \tau \llcorner \frac{\tilde{\nabla} B}{dt})$.

Or $\frac{\tilde{\nabla} B}{dt}(t) = \sum_{2 \leqslant i \leqslant p} \tau_2(t) \wedge \ldots \wedge \frac{\tilde{\nabla}\tau_i}{dt}(t) \wedge \ldots \wedge \tau_p(t)$, et d'après l'hypothèse $\frac{\tilde{\nabla}\tau_i}{dt}(t) \in NV$.

Il en résulte que $\tau \llcorner \frac{\tilde{\nabla} B}{dt} = 0$.

Donc $\frac{\tilde{\nabla} X}{dt} = (-1)^{p-1} \frac{\tilde{\nabla}\tau}{dt} \llcorner B$, et comme B est pur :

$$\left\| \frac{\tilde{\nabla} X}{dt} \right\| \leqslant \left\| \frac{\tilde{\nabla}\tau}{dt} \right\| \cdot \|B\|$$

$$\text{i.e.} \quad \left\| \frac{\tilde{\nabla} X}{dt} \right\| \leqslant \left\| \frac{\tilde{\nabla}\tau}{dt} \right\|$$

$$\text{i.e.} \quad \left\| \frac{\tilde{\nabla} X}{dt} \right\| \leqslant \| \beta(\gamma'(t)) \| \quad \text{(cf. 0; 3.2).}$$

(4.2) Pour tous vecteurs u,v non nuls dans un espace euclidien nous noterons **ang(u,v)** le réel θ défini par $(u|v) = \|u\| \, \|v\| \cos\theta$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

(4.3) Proposition. *Soient* V *une sous-variété d'un espace euclidien* E, $\gamma : [a,b] \to V$ *une courbe paramétrée de* V, $X : [a,b] \to TV$ *un champ parallèle le long de* γ. *Alors :*

$$\text{ang}(X(a), X(b)) \leqslant \int_a^b \| \beta(\gamma'(t)) \| \, dt.$$

Preuve. On peut supposer que $\|X(t)\| = 1$ pour tout $t \in [a,b]$. Faisons-le. ang(X(a), X(b)) est alors la distance géodésique de X(a) à X(b) sur la sphère unité. Donc :

$$\text{ang}(X(a), X(b)) \leqslant \int_a^b \left\| \frac{dX}{dt} \right\| dt,$$

et il suffit d'appliquer la proposition (4.1).

(4.4) Corollaire. *Sous les hypothèses de la proposition (4.3), soit* $C > 0$. *Supposons que* $\|\beta(u)\| \leqslant C$ *pour tout* $u \in TV$ *tel que* $\|u\| = 1$. *Alors :*

$$\text{ang}(X(a), X(b)) \leqslant C \text{ long } \gamma .$$

(4.5) Corollaire. *Soient* V *une sous-variété minimale d'un espace euclidien* E *et* $\gamma : [a,b] \to V$ *une géodésique unitaire de* V.

Suppsons que k_o *est un réel* > 0 *tel que la courbure de Ricci* Q *de* V *vérifie* $-k_o \leqslant (Q(\gamma'(t)) | \gamma'(t))$ *pour tout* $t \in [a,b]$. *Alors :*

$$\operatorname{ang}(\gamma'(a), \gamma'(b)) \leqslant \sqrt{k_o} \operatorname{long} \gamma .$$

Preuve. Immédiate à partir de $\beta^2 = -Q$ et du corollaire (4.3).

(4.6) Corollaire. *Soient* V *une sous-variété d'un espace euclidien* E *et* $\gamma : [a,b] \to V$ *une courbe paramétrée de* V *telle que* $\gamma(a) = \gamma(b) = x_o$. *Soit* $L : T_{x_o} V \to T_{x_o} V$ *l'application linéaire définie par le transport parallèle le long de* γ. *Alors::*

$$\sup_{\|u\| = 1} \| (L-id)(u) \| \leqslant \int_a^b \| \beta(\gamma'(t)) \| \, dt.$$

Preuve. Lorsque $\|u\| = 1$, on a $\|L(u)-u\| \leqslant \operatorname{ang}(L(u),u)$, et il suffit d'appliquer (4.3).

Remarque.

La définition et les principales propriétés de l'endomorphisme de bascule s'étendent sans problème aux sous-variétés à bord.

Dans la proposition suivante, pour tout réel x *nous posons* $\hat{x} = (x)^\wedge = \operatorname{ang}(e^{io}, e^{ix})$.

(4.7) Proposition. *Soit* V *une sous-variété à bord d'un espace euclidien. Supposons que* V *est compacte et de dimension 2.*

Pour tout $x \in V$ *soit* $G(x)$ *la courbure de Gauss de* V *au point* x. *Pour tout* $x \in \partial V$ *soit* $\overline{\beta}(x)$ *le basculement de* V *suivant un vecteur unitaire tangent en* x *à* ∂V. *Alors :*

$$\left(\iint_V G\right)^\wedge \leqslant \int_{\partial V} \overline{\beta} .$$

Preuve. On peut supposer $\int_{\partial V} \overline{\beta} \leqslant \pi$.

En désignant par λ_g la courbure géodésique de ∂V dans V, relative au

vecteur unitaire normal à ∂V et de sens rentrant, on a, d'après le théorème de Gauss-Bonnet :

$$\iint_V G = -\int_{\partial V} \lambda_g + 2\pi \chi_V,$$

où χ_V est la caractéristique d'Euler-Poincaré de V.

Donc $(\iint_V G)^\wedge = (\int_{\partial V} \lambda_g)^\wedge$.

Notons $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n_o}$ les composantes connexes du bord ∂V de V. Soit Γ l'un quelconque des Γ_i et $\gamma : [a,b] \to V$ telle que $\| \gamma'(s) \| = 1$ pour tout $s \in [a,b]$, $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\gamma|[a,b]$ soit injective et $\operatorname{Im} \gamma = \Gamma$.

Soit $X : [a,b] \to TV$ un champ de vecteurs unitaires le long de γ, ∇-parallèle. Notons $\nu(s)$ le vecteur unitaire tangent à V au point $\gamma(s)$, normal à Γ et de sens rentrant. Orientons $T_{\gamma(s)}V$ par la base $(\gamma'(s), \nu(s))$ et soit $\varphi(s)$ un angle polaire de X(s) par rapport à $\gamma'(s)$, que l'on suit par continuité. On a $\lambda_g = -\frac{d\varphi}{ds}$ donc :

$$-\int_a^b \lambda_g ds = \varphi(b) - \varphi(a).$$

$\varphi(b) - \varphi(a)$ est une détermination de l'angle orienté à $2k\pi$ près de $(X(a),X(b))$, donc :

$$\int_a^b \lambda_g ds = \varepsilon \ \operatorname{ang}(X(a),X(b)) + k2\pi$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $\int_{\partial V} \lambda_g = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n_o} (\varepsilon_i \operatorname{ang}(X_i(a_i),X_i(b_i)) + k_i 2\pi)$

donc $(\int_{\partial V} \lambda_g)^\wedge = (\sum_{1 \leqslant i \leqslant n_o} \varepsilon_i \operatorname{ang}(X_i(a_i),X_i(b_i)))^\wedge$. Or d'après (4.3),

$\operatorname{ang}(X_i(a_i),X_i(b_i)) \leqslant \int_{\Gamma_i} \overline{\beta}$, donc $|\sum_i \varepsilon_i \operatorname{ang}(X_i(a_i),X_i(b_i))| \leqslant \int_{\partial V} \overline{\beta} \leqslant \pi$,

donc $(\sum_i \varepsilon_i \operatorname{ang}(X_i(a_i),X_i(b_i)))^\wedge = |\sum_i \varepsilon_i \operatorname{ang}(X_i(a_i), X_i(b_i))|$,

i.e. $(\iint_V G)^\wedge = |\sum_i \varepsilon_i \operatorname{ang}(X_i(a_i), X_i(b_i))|$, donc $(\iint_V G)^\wedge \leqslant \int_{\partial V} \overline{\beta}$.

(4.8) Corollaire. *Avec les mêmes hypothèses qu'à la proposition (4.7), supposons que* V *soit minimale. Alors :*

$$\left(\iint_V G\right)^{\wedge} \leqslant \int_{\partial V} \sqrt{|G|}\,.$$

En particulier, si $\iint_V |G| \leqslant \pi$, *on a :*

$$\iint_V |G| \leqslant \int_{\partial V} \sqrt{|G|}\,.$$

Preuve. V étant minimale dans l'espace euclidien E, on a $\beta^2 = -Q$; et comme dim V = 2, Q est l'homothétie de rapport G, d'où le résultat.

(4.9) Théorème. *Soit* $t \longmapsto V_t$, t *décrivant* [0,1], *une déformation continue d'une surface compacte à bord dans un espace euclidien de façon que :*

i) V_o *est plane et* V_t *est minimale pour tout* t ,

ii) $\int_{\partial V_t} \sqrt{|G|} < \pi$ *pour tout* t.

Alors $\iint_{V_t} |G| \leqslant \int_{\partial V_t} \sqrt{|G|}$ *pour tout* t.

Preuve. Notons A l'ensemble des $t \in [0,1]$ tels que pour tout $s \in [0,t]$ on ait

$$\iint_{V_s} |G| \leqslant \int_{\partial V_s} \sqrt{|G|}\,.$$

Par un raisonnement de type classique on démontre que sup A est un élément de A nécessairement égal à 1.

<u>Exemple concret d'une telle déformation</u> :

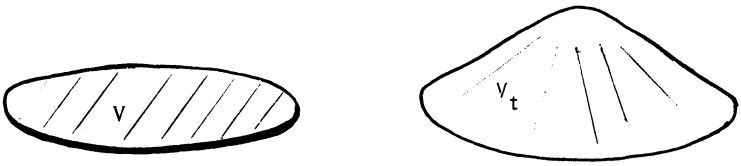
Dans l'espace où nous vivons, considérer une membrane savonneuse plane limitée par un ou plusieurs cycles en fil de fer, et déformer un peu les fils de fer.

Remarque.

Les énoncés (4.7), (4.8), (4.9) sont encore valables pour des immersions isométriques.

(4.8) et (4.9) montrent que, dans une certaine mesure, un contrôle de la courbure de Gauss sur le bord d'une surface minimale donne une majoration de $\iint_V |G|$.

De tels résultats ne sont pas valables pour des sous-variétés quelconques. Par exemple, on peut, dans $\mathbb{R}^3$, déformer un disque plan par une famille de cônes dont on a arrondi le sommet. On a alors $\int_{\partial V_t} \sqrt{|G|} = 0$, puisque G est nul sur ∂V_t, mais $\iint_{V_t} G = -\int_{\partial V_t} \lambda_g \neq 0$.



5. Courbure aréolaire et nombres de Betti.

(5.1) Rappels. Soient X_k et Y des K-espaces vectoriels de dimensions finies, $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathscr{L}(\overset{k}{\Lambda} X, \overset{k}{\Lambda} Y)$, $\psi \in \mathscr{L}(\overset{\ell}{\Lambda} X, \overset{\ell}{\Lambda} Y)$. On note $\varphi \square \psi$, (cf. [G.H.V.]) l'élément $\mathscr{L}(\overset{k+\ell}{\Lambda} X, \overset{k+\ell}{\Lambda} Y)$ défini par :

(5.1.1)

$$(\varphi \square \psi)(x_1 \wedge \dots \wedge x_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k,\ell}} \varepsilon_\sigma \, \varphi(x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(k)}) \wedge \psi(x_{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(k+\ell)})$$

où les x_i appartiennent à X et où $\mathfrak{S}_{k,\ell}$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1,2,\dots,k+\ell\}$ telles que $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ et $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+\ell)$.

$\mathscr{L}(\overset{k}{\Lambda} X, \overset{k}{\Lambda} Y)$ s'identifie canoniquement à $(\overset{k}{\Lambda} Y) \otimes \overset{k}{\Lambda} (X^*)$. Pour $\varphi = A \otimes U$ avec $A \in \overset{k}{\Lambda} Y$ et $U \in \overset{k}{\Lambda} X^*$, et $\psi = B \otimes V$ avec $B \in \overset{\ell}{\Lambda} Y$ et $V \in \overset{\ell}{\Lambda} X^*$, on a :

(5.1.2) $$\varphi \square \psi = (A \wedge B) \otimes (U \wedge V).$$

Il en résulte que l'opération $\square$ est commutative et associative.

Pour tout espace vectoriel euclidien Z notons $\mathscr{L}_s(Z)$ (resp. $\mathscr{L}_a(Z)$) l'espace vectoriel des endomorphismes de Z qui sont symétriques (resp. antisymétriques).

(5.1.3) Si $\varphi \in \mathscr{L}_s(\overset{k}{\Lambda} X)$ et $\psi \in \mathscr{L}_s(\overset{\ell}{\Lambda} X)$ alors $\varphi \square \psi \in \mathscr{L}_s(\overset{k+\ell}{\Lambda} X)$. De plus si

$\varphi \geqslant 0$ et $\psi \geqslant 0$ alors $\varphi \square \psi \geqslant 0$; si φ et ψ sont définis positifs et si $k+\ell \leqslant \dim X$, alors $\varphi \square \psi$ est défini positif. Toutes ces propriétés s'obtiennent par diagonalisation et en utilisant la formule (5.1.2).

Si $\varphi \in \mathscr{L}(\overset{k}{\Lambda} X)$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi^{\boxed{p}} = \varphi \square \varphi \square \ldots \square \varphi$, où φ figure p fois.

(5.1.4) Si $f \in \mathscr{L}(X)$ et $n = \dim X$ on a $\overset{n}{\Lambda} f = \frac{1}{n!} f^{\boxed{n}}$.

Lorsque $f \in \mathscr{L}_s(X)$ et $g \in \mathscr{L}_s(X)$ sont tels que $0 \leqslant f$ et $0 \leqslant g$ on a $\det(f+g) \geqslant \det f + \det g$. (Ceci découle aussitôt de la formule du binôme appliquée à $(f+g)^{\boxed{n}}$ et de (5.1.3).)

(5.1.5) Plus généralement si $f_1,\ldots,f_r$ sont des éléments $\geqslant 0$ de $\mathscr{L}(X)$ on a $\det(f_1+ \ldots +f_r) \geqslant \det f_1 + \ldots + \det f_r$. On voit en particulier que la fonction det est croissante sur l'ensemble des endomorphismes $\geqslant 0$ de X.

(5.1.6) Soient V une variété riemannienne, $x_o \in V$, $\rho_{x_o} : \overset{2}{\Lambda} T_{x_o} V \to \overset{2}{\Lambda} T_{x_o} V$ l'opérateur de courbure de V au point x_o, défini par :

$$(\rho(u \wedge v))|(w \wedge z) = -(R(u,v)w)|z,$$

(où $R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$).

Supposons que V a une dimension paire $p = 2k$. La **courbure de Gauss-Bonnet** de V au point x_o est le réel G_{x_o} défini par :

$$\frac{1}{(2k)!} 2^k \rho_{x_o}^{\boxed{k}} = G_{x_o} \cdot \mathrm{id}$$

(5.1.7) Rappelons enfin (cf. 0;4) que lorsque V est une sous-variété riemannienne de $\tilde{V}$ la **courbure aréolaire** de V relativement à $\tilde{V}$ au point x de V est le déterminant de l'endomorphisme de bascule β_x de V par rapport à $\tilde{V}$, au point x.

La proposition suivante a été établie à l'instigation de R. Langevin.

(5.2) Proposition. *Soit* V *une sous-variété de dimension* $p = 2k$ *d'un espace euclidien* E *de dimension* $n = p+q$. *Alors la courbure* G *de Gauss-Bonnet et la courbure aréolaire* $\mathscr{A}$ *de* V *vérifient :*

$$|G| \leqslant \frac{\omega_p \, \omega_{q-1}}{2\omega_{n-1}} \mathscr{A},$$

où ω_i *désigne le volume de la sphère unité de dimension* i *dans* $\mathbb{R}^{i+1}$.

Preuve. G_x est donné par :

$$G_x = \frac{\omega_p}{2\omega_{n-1}} \int_{\xi \in S^{<1>}N_{x_o}V} \det h_\xi, \text{ (cf. [Ch. La.])} .$$

(La normalisation de G *utilisée est telle que* $\chi(V) = \frac{2}{\omega_p}\int_V G$, *où* $\chi(V)$ *est la caractéristique d'Euler-Poincaré de* V *).*

Soient $\xi \in N_{x_o}V$ tel que $\|\xi\| = 1$ et $\nu_1,\dots,\nu_q$ une base orthonormée de $N_{x_o}V$ telle que $\nu_1 = \xi$. On a $\beta^2 = h^2_{\nu_1} + \dots + h^2_{\nu_q}$, donc $h^2_{\nu_1} \leqslant \beta^2$, donc $|h_\xi| \leqslant \beta$, donc d'après (5.1.6), $\det|h_\xi| \leqslant \det \beta$, d'où le résultat.

(5.3) Théorème. *Soit une sous-variété compacte* V *de dimension* p *d'un espace euclidien de dimension* n. *La somme des nombres de Betti de* V *est majorée à un facteur constant universel près par l'intégrale de la courbure aréolaire :*

$$b_o + b_1 + \dots + b_p \leqslant \frac{\omega_{q-1}}{\omega_{n-1}} \int_V \mathscr{A}.$$

Preuve. D'après un théorème de Chern et Lashof (cf. [Ch. La.]) on a :

$$b_o + b_1 + \dots + b_p \leqslant \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_V \left(\int_{\xi \in S^{<1>}N_{x_o}V} |\det h_\xi| \right)$$

On procède alors comme dans la preuve de (5.2).

L'inégalité de la proposition (5.2) peut être affinée dans certains cas. Par exemple on a l'énoncé suivant :

(5.4) Proposition. *Supposons que* $\tilde{V}$ *a une courbure sectionnelle constante* $a \geqslant 0$, *que* V *a une dimension paire et que la connexion normale de* V *est plate. Alors* $G^2 \leqslant \det(a\,\mathrm{id} + \beta^2)$. *En particulier, si* $a = 0$, *on a* $|G| \leqslant \mathscr{A}$.

Preuve. Comme $\tilde{V}$ a une courbure sectionnelle constante a :

$$\tilde{\rho} = a\ \mathrm{id} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \overset{2}{\Lambda} h_j.$$

Posons $h_o = \sqrt{a}\ \mathrm{id}(T_{x_o} V)$, alors $\rho = \sum_{0 \leqslant j \leqslant q} \overset{2}{\Lambda} h_j$.

Soit β' l'endomorphisme positif dont le carré est $\sum_{0 \leqslant j \leqslant q} h^2_j$.

On a $\beta'^2 = \sum_{0 \leqslant j \leqslant q} h^2_j$,

i.e. $\beta'^2 = a\ \mathrm{id} + \beta^2$.

Supposons $p = 2k$ ($p = \dim V$).

Soit H l'endomorphisme de $\overset{2k}{\Lambda} T_x V$ défini par :

(5.4.1)

$$H(u_1 \wedge \dots \wedge u_{2k}) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}} \varepsilon_\sigma\ \rho(u_{\sigma(1)} \wedge u_{\sigma(2)}) \wedge \dots \wedge \rho(u_{\sigma(2k-1)} \wedge u_{\sigma(2k)})$$

pour tous $u_i \in T_x V$.

$\overset{2k}{\Lambda} T_x V$ étant un espace vectoriel de dimension 1, H est une homothétie, et le rapport d'homothétie est la courbure de Gauss-Bonnet G.

Comme V est $\nabla^\perp$-plate et que la courbure sectionnelle de $\tilde{V}$ est constante, $h_1,\dots,h_q$ commutent ; a fortiori $h_o,h_1,\dots,h_q$ commutent ; on peut donc les diagonaliser sur une même base $a_1,\dots,a_{2k}$ de $T_x V$.

Posons $h_j(a_i) = \lambda_{j,i} a_i$.

Alors $\rho(a_\ell \wedge a_m) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant q} h_j(a_\ell) \wedge h_j(a_m)$,

i.e. $\rho(a_\ell \wedge a_m) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant q} \lambda_{j,\ell}\ \lambda_{j,m}) a_\ell \wedge a_m$.

Posons $\alpha_{\ell,m} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant q} \lambda_{j,\ell}\ \lambda_{j,m}$, alors $\rho(a_\ell \wedge a_m) = \alpha_{\ell,m} a_\ell \wedge a_m$, et d'après l'inégalité de Schwarz :

(5.4.2)

$$|\alpha_{\ell,m}| \leqslant \sqrt{\sum_{0 \leqslant i \leqslant q} \lambda^2_{j,\ell}}\ \sqrt{\sum_{0 \leqslant j \leqslant q} \lambda^2_{j,m}}.$$

D'autre part $\beta'^2(a_i) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant q} h^2_j(a_i)$,

$$\beta'^2(a_i) = (\sum_{0 \leqslant j \leqslant q} \lambda^2_{j,i}) a_i .$$

Posons $\beta'_i = \sqrt{\sum_{0 \leq j \leq q} \lambda^2_{j,i}}$, alors $\beta'(a_i) = \beta'_i\, a_i$ et d'après (5.4.2)

(5.4.3) $$|\alpha_{\ell,m}| \leq \beta'_\ell\ \beta'_m .$$

D'après (5.4.1) :

$$H(a_1 \wedge \dots \wedge a_{2k}) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}} \varepsilon_\sigma\, \alpha_{\sigma(1),\sigma(2)} \cdots \alpha_{\sigma(2k-1),\sigma(2k)} a_{\sigma(1)} \wedge a_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge a_{\sigma(2k)}$$

$$= \frac{1}{(2k)!} \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}} \alpha_{\sigma(1),\sigma(2)} \cdots \alpha_{\sigma(2k-1),\sigma(2k)} \Big) a_1 \wedge \dots \wedge a_{2k}$$

donc $G = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}} \alpha_{\sigma(1),\sigma(2)} \cdots \alpha_{\sigma(2k-1),\sigma(2k)}$,

donc, d'après (5.4.3) :

$$|G| \leq \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}} \beta'_{\sigma(1)} \beta'_{\sigma(2)} \cdots \beta'_{\sigma(2k-1)} \beta'_{\sigma(2k)}$$

i.e. $|G| \leq \det \beta'$

d'où $G^2 \leq \det(a\ \mathrm{id} + \beta^2)$.

*

CHAPITRE II

ROULIS ET ROTATIONS INSTANTANEES

1. Notations et rappels.

(1.1) Soient M une variété riemannienne, $\gamma : I \to M$ une courbe paramétrée de M, t_o et t_1 des éléments de I. $P^M_{t_1,t_o}$ ou simplement P_{t_1,t_o} désigne l'application linéaire de $T_{\gamma(t_o)}M$ dans $T_{\gamma(t_1)}M$ définie par le transport parallèle le long de $\gamma|[t_o,t_1]$. Nous notons de la même façon l'extension de P_{t_1,t_o} aux espaces de tenseurs. Lorsque $M = \tilde{V}$ nous posons $P^{\tilde{V}}_{t_1,t_o} = \tilde{P}_{t_1,t_o}$.

(1.2) Soient E un espace vectoriel euclidien, F_1 et F_2 deux sous-espaces de dimension k de E, $k > 0$, ω_1 et ω_2 deux multivecteurs unitaires associés respectivement à F_1 et F_2. Nous appelons **angle de F_1 et F_2** et nous notons **ang(F_1,F_2)** le réel θ défini par $|(\omega_1|\omega_2)| = \cos\theta$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ (cf. 0;2).

Nous aurons besoin dans la suite du résultat suivant :

(1.3) Lemme. *Soient* E *un espace vectoriel euclidien,* $k \in \mathbb{N}^*$, $A \in \overset{k}{\Lambda} E$, $B \in \overset{k}{\Lambda} E$, $u \in E$, $v \in E$. *Alors :*

(1.3.1) $$(A \wedge u)|(B \wedge v) = (A|B)(u|v) - (A \llcorner v)|(B \llcorner u).$$

Preuve. $$\begin{aligned}(A \wedge u)|(B \wedge v) &= (-1)^k(A \wedge u)|(v \wedge B) = (-1)^k[(A \llcorner v) \wedge u + (-1)^k A(u|v)]|B \\ &= -(B|(u \wedge (A \llcorner v))) + (A|B)(u|v) \\ &= -(B \llcorner u)|(A \llcorner v) + (A|B)(u|v).\end{aligned}$$

Remarque.

Pour A = B et u = v la formule (1.3.1) se réduit à l'identité de Lagrange, mais ne s'obtient pas par polarisation de celle-ci.

2. Un invariant conforme : le roulis.

(2.1) Théorème et définition. *Soient une sous-variété* V *d'une variété riemannienne* $\tilde{V}$ *, un vecteur* u *non nul tangent à* V *en* x_o*, une courbe paramétrée* $\gamma : I \to V$ *et* $t_o \in I$ *tels que* $\gamma'(t_o) = u$ *et* $\frac{\nabla\gamma'}{dt}(t_o) = 0$ *. Notons* $\theta(t)$ *l'angle de* $N_{x_o}V \oplus \mathbb{R}u$ *avec* $\tilde{P}_{t_o,t}(N_{\gamma(t)}V \oplus \mathbb{R}\gamma'(t))$ *.*

Alors $\frac{\theta(t)}{t-t_o}$ *a une limite quand* t *tend vers* t_o *par valeurs* $> t_o$ *. Cette limite ne dépend que de* u *, nous l'appellerons* ***le roulis de la variété*** V ***suivant*** u *et nous le noterons* r_u *.*

Ce théorème résulte du lemme suivant :

(2.1.1) Lemme. *Sous les hypothèses du théorème à l'exception de* $\frac{\nabla\gamma'}{dt}(t_o) = 0$, $\frac{\theta(t)}{t-t_o}$ *tend vers*

$$\|\beta(u)\|^2 - \frac{\|\alpha(u,u)\|^2}{\|u\|^2} + \frac{1}{\|u\|^2}\left\|\frac{\nabla\gamma'}{dt}(t_o)\right\|^2$$

quand t *tend vers* t_o *par valeurs* $> t_o$.

Preuve du lemme. Soit $t \longmapsto s(t)$ une abscisse curviligne le long de γ telle que $\frac{ds}{dt} > 0$.

Comme $\frac{\theta}{t-t_o} = \frac{\theta}{s-s_o} \cdot \frac{s-s_o}{t-t_o}$, il suffit de prouver la proposition avec l'hypothèse supplémentaire que $\frac{ds}{dt}$ est constante. Faisons cette hypothèse.

Soit $\nu(t)$ un multivecteur unitaire associé à $N_{\gamma(t)}V$ tel que ν soit continue, et posons $z(t) = \nu(t) \wedge \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

On a $\left\|\frac{\tilde{\nabla}z}{dt}(t_o)\right\| = \left\|\frac{d}{dt}(\tilde{P}_{t_o,t}(z(t)))\right\|$, et pour tout $t \in I$, $\tilde{P}_{t_o,t}z(t) \in S^1(\overset{q+1}{\Lambda} T_{x_o}\tilde{V})$, sphère unité de l'espace euclidien $T_{x_o}\tilde{V}$.

$\theta(t) \sim \|\tilde{P}_{t_o,t}(z(t)) - z(t_o)\|$, quand t tend vers t_o.

Donc $\frac{\theta}{t-t_o}$ tend vers $\left\|\frac{\tilde{\nabla}z}{dt}(t_o)\right\|$ quand t tend vers t_o par valeurs $> t_o$.

Posons $H = \left\|\frac{\tilde{\nabla}z}{dt}(t_o)\right\|$.

$$H^2 = \left\| \frac{\tilde{\nabla}}{dt}\left(\nu(t) \wedge \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)\right\|^2, \text{ donc } H^2\|\gamma'(t)\|^2 = \left\|\frac{\tilde{\nabla}\nu}{dt} \wedge \gamma'(t) + \right.$$
$$\left. + \nu(t) \wedge \left(\frac{\tilde{\nabla}\gamma'}{dt} + \alpha(\gamma'(t), \gamma'(t))\right)\right\|^2.$$

Comme $\alpha(u,u) \in N_{x_o} V$, on a $\nu(t_o) \wedge \alpha(u,u) = 0$, donc

$$H^2\|u\|^2 = \left\|\frac{\tilde{\nabla}\nu}{dt}(t_o) \wedge u + \nu(t_o) \wedge \frac{\nabla\gamma'}{dt}(t_o)\right\|^2.$$

De plus, d'après le lemme (1.3) :

$$\left(\frac{\tilde{\nabla}\nu}{dt}(t_o) \wedge u\right) \Big| \left(\nu(t_o) \wedge \frac{\nabla\gamma'}{dt}(t_o)\right) = 0.$$

(Car $\frac{\tilde{\nabla}\nu}{dt}(t_o) | \nu(t_o) = 0$ et $\nu(t_o) \llcorner u = 0$). Donc :

$$H^2\|u\|^2 = \left\|\frac{\tilde{\nabla}\nu}{dt}(t_o) \wedge u\right\|^2 + \left\|\nu(t_o) \wedge \frac{\nabla\gamma'}{dt}(t_o)\right\|^2,$$

donc, en calculant les deux termes par l'identité de Lagrange :

$$H^2\|u\|^2 = \left\|\frac{\tilde{\nabla}\nu}{dt}(t_o)\right\|^2 \|u\|^2 - \left\|\frac{\tilde{\nabla}\nu}{dt}(t_o) \llcorner u\right\|^2$$
$$+ \left\|\frac{\nabla\gamma'}{dt}(t_o)\right\|^2 - \left\|\nu(t_o) \llcorner \frac{\nabla\gamma'}{dt}(t_o)\right\|^2.$$

On a $\nu(t_o) \llcorner \frac{\nabla\gamma'}{dt}(t_o) = 0$.

De plus, pour tout $t \in I$, $\nu(t) \llcorner \gamma'(t) = 0$, donc $\frac{\tilde{\nabla}\nu}{dt}(t) \llcorner \gamma'(t) + \nu(t) \llcorner \frac{\tilde{\nabla}\gamma'}{dt}(t) = 0$, donc $\frac{\tilde{\nabla}\nu}{dt}(t_o) \llcorner u = -\nu(0) \llcorner \frac{\tilde{\nabla}\gamma'}{dt}(t_o)$

$= -\nu(0) \llcorner \alpha(u,u)$. Ainsi :

$$H^2\|u\|^2 = \left\|\frac{\tilde{\nabla}\nu}{dt}(t_o)\right\|^2 \|u\|^2 - \|\nu(t_o) \llcorner \alpha(u,u)\|^2 + \left\|\frac{\nabla\gamma'}{dt}(t_o)\right\|^2$$
$$H^2\|u\|^2 = \left\|\frac{\tilde{\nabla}\nu}{dt}(t_o)\right\|^2 \|u\|^2 - \|\alpha(u,u)\|^2 + \left\|\frac{\nabla\gamma'}{dt}(t_o)\right\|^2.$$

Or $\left\|\frac{\tilde{\nabla}\nu}{dt}(t_o)\right\| = \|\beta(u)\|$, (cf. 0;3.2), d'où le résultat.

Comme, par définition, $t_u = \frac{\|\alpha(u,u)\|}{\|u\|}$, on a d'après le lemme précédent $\|\beta(u)\|^2 = t_u^2 + r_u^2$. Ceci s'énonce :

(2.2) Théorème. *Le carré du basculement est égal à la somme du carré du tangage et du carré du roulis.*

Remarque.

$r_{\lambda u} = |\lambda| r_u$ pour tout réel $\lambda \neq 0$.

Ceci nous conduit à poser $r_u = 0$ lorsque $u = 0$.

(2.3) Théorème. *Soient* V *une sous-variété de la variété riemannienne* V, $x_o \in V$, $u \in T_{x_o} V$, $u \neq 0$. *Alors* r_u *est un invariant conforme donné par :*

(2.3.1) $$r_u^2 = \frac{1}{\|u\|^2} \sum_{1 \leq j \leq q} \| h_{\nu_j}(u) \wedge u \|^2 .$$

Preuve. Posons $h_{\nu_j} = h_j$ pour alléger les notations. D'après (2.1) et (2.1.1)

$$\| u \|^2 r_u^2 = \| \beta(u) \|^2 \| u \|^2 - \| \alpha(u,u) \|^2 .$$

$$\begin{aligned} \| \beta(u) \|^2 &= (\beta^2(u) | u) \\ &= ((\sum_{1 \leq j \leq q} h_j^2(u)) | u) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq q} (h_j(u) | h_j(u)). \end{aligned}$$

(2.3.2) $$\| \beta(u) \|^2 = \sum_{1 \leq j \leq q} \| h_j(u) \|^2$$

$$\| \alpha(u,u) \|^2 = \sum_{1 \leq j \leq q} (h_j(u) | u)^2, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \| u \|^2 r_u^2 &= \sum_{1 \leq j \leq q} (\| h_j(u) \|^2 \| u \|^2 - (h_j(u) | u)^2) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq q} \| h_j(u) \wedge u \|^2 . \end{aligned}$$

Dans un changement conforme de métrique sur $\tilde{V}$, h_ξ est remplacé par lui-même plus une homothétie (cf. [Ch. B.2]) et le rapport de deux normes ne change pas, par suite r_u est un invariant conforme.

(2.4) Corollaire. *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème (2.3) les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $r_u = 0$;

ii) u *est vecteur propre de* h_ξ *pour tout* $\xi \in N_{x_o} V$.

Lorsque ces conditions sont remplies, u *est vecteur propre de* β.

Preuve. Immédiate à partir de (2.3.1) et du fait que tout vecteur unitaire ξ peut être considéré comme faisant partie d'une base orthonormée de $N_{x_o} V$.

(2.4.1) En particulier, **lorsque V est une hypersurface** un élément non nul u de TV vérifie $r_u = 0$ **si et seulement si $\mathbb{R}u$ est une direction principale de V.**

(2.5) Corollaire. *Soient* V *une sous-variété de la variété riemannienne* $\tilde{V}$ *et* $x_o \in V$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) x_o *est un ombilic ;*

ii) $r_u = 0$, *pour tout* $u \in T_{x_o} V$.

Preuve. D'après le corollaire (2.4), ii) équivaut à :

$$\forall u \in T_{x_o} V, (\forall \xi \in N_{x_o} V, \ \exists \lambda_{u,\xi}, h_\xi(u) = \lambda_{u,\xi} u)$$

$$\text{i.e. } \forall \xi \in T_{x_o} V, (\forall u \in T_{x_o} V, \ \exists \lambda_{u,\xi}, h_\xi(u) = \lambda_{u,\xi} u)$$

$$\text{i.e. } \forall \xi \in T_{x_o} V, h_\xi \text{ est une homothétie,}$$

(d'après une caractérisation classique des homothéties parmi les endomorphismes), i.e. x_o est un ombilic.

(2.5.1) En particulier **V est une sous-variété ombilicale de $\tilde{V}$ si et seulement si tous les roulis de V sont nuls.** Cette propriété est à rapprocher du fait que **V est une sous-variété** totalement géodésique de $\tilde{V}$ si et seulement si tous les basculements de V sont nuls.

3. Roulis et intersections de sous-variétés, théorème de Joachimsthal.

(3.1) Notations. Soit V une sous-variété de la variété riemannienne $\tilde{V}$. Nous notons $\nabla^\perp$ la connexion canonique du fibré normal NV de V. Si ξ est une section locale de NV au voisinage de $x_o \in V$ et si $u \in T_{x_o} V$, $\nabla^\perp_u \xi$ n'est autre que la projection orthogonale de $\tilde{\nabla}_u \xi$ sur $N_{x_o} V$. Nous noterons aussi $\nabla^\perp$ l'extension aux fibrés de tenseurs. Soit maintenant une courbe C de V passant par x_o. Nous désignerons par $\dot{\nabla}$ la connexion canonique du fibré normal à C relativement à $\tilde{V}$.

(3.2) Proposition. *Soient* V *une sous-variété de la variété riemannienne* $\tilde{V}$, $x_o \in V$, $u \in T_{x_o} V$, $u \neq 0$, $\gamma : I \to V$ *une courbe paramétrée de* V *et*

$t_o \in I$ *tels que* $\gamma(t_o) = x_o$ *et* $\gamma'(t_o) = u$.

Soit $t \mapsto \nu(t)$ *une application continue telle que* $\nu(t)$ *soit un multivecteur unitaire associé à* $N_{\gamma(t)}V$ *pour tout* $t \in I$. *Alors, en désignant par* $\dot{\nabla}$ *la connexion canonique du fibré normal de* γ *relativement à* $\tilde{\nabla}$ *on a :*

(3.2.1) $$r_u = \| \dot{\nabla}_u \nu \|.$$

Preuve. Soit, pour tout $t \in I$ une base orthonormée $\nu_1(t),\dots, \nu_q(t)$ de $N_{\gamma(t)}V$ telle que les ν_i soient C^∞ et $\nu(t) = \nu_1(t) \wedge \dots \wedge \nu_q(t)$

$$\dot{\nabla}_u(\nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_q) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} (-1)^{j-1} (\dot{\nabla}_u \nu_j) \wedge \nu_1 \wedge \dots \wedge \check{\nu}_j \wedge \dots \wedge \nu_q.$$

Supposons que $\| u \| = 1$. Alors :

$$\dot{\nabla}_u \nu_j = \tilde{\nabla}_u \nu_j - ((\tilde{\nabla}_u \nu_j) | u) u, \quad \dot{\nabla}_u \nu = \tilde{\nabla}_u \nu + \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} (-1)^j ((\nabla_u \nu_j) | u) u \wedge \nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_j \wedge \dots \wedge \nu_q.$$

Posons $A = \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} (-1)^j ((\tilde{\nabla}_u \nu_j) | u) u \wedge \nu_1 \wedge \dots \wedge \check{\nu}_j \wedge \dots \wedge \nu_q$ et $S = ((\tilde{\nabla}_u \nu) | A)$.

(3.2.2) Alors $$\| \dot{\nabla}_u \nu \|^2 = \| \tilde{\nabla}_u \nu \|^2 + \| A \|^2 + 2S.$$

Comme $(u, \nu_1,\dots, \nu_q)$ est orthonormée :

$$\| A \|^2 = \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} ((\tilde{\nabla}_u \nu_j) | u)^2$$

$$= \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} (h_{\nu_j}(u) | u)^2$$

(3.2.3) i.e. $$\| A \|^2 = \| \alpha(u,u) \|^2.$$

$$S = \Big(\sum_{1 \leqslant k \leqslant q} (-1)^{k-1} (\tilde{\nabla}_u \nu_k) \wedge \nu_1 \wedge \dots \wedge \check{\nu}_k \wedge \dots \wedge \nu_q \Big) \Big| \Big(u \wedge \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} (-1)^j (\tilde{\nabla}_u \nu_j) | u) \nu_1 \wedge \dots \wedge \check{\nu}_j \wedge \dots \wedge \nu_q \Big)$$

$$S = - \Big\| \sum_{1 \leqslant k \leqslant q} (-1)^{k-1} ((\tilde{\nabla}_u \nu_k) | u) \nu_1 \wedge \dots \wedge \check{\nu}_k \wedge \dots \wedge \nu_q \Big\|^2$$

$$S = - \sum_{1 \leqslant k \leqslant q} ((\tilde{\nabla}_u \nu_k) | u)^2$$

(3.2.4) $$S = - \| \alpha(u,u) \|^2.$$

(3.2.5) Finalement $\| \dot{\nabla}_u \nu \|^2 = \| \tilde{\nabla}_u \nu \|^2 - \| \alpha(u,u) \|^2$, et ceci lorsque $\| u \| = 1$. On a donc, pour u quelconque :

$$\| \dot{\nabla}_u \nu \|^2 = \| \beta(u) \|^2 - \frac{\| \alpha(u,u) \|^2}{\| u \|^2}$$

(Rappel : $\| \tilde{\nabla}_u \nu \| = \| \beta(u) \|$, (cf. [Ma. 1]).

(3.3) Remarque. $\| \dot{\nabla}_u \nu \|$ ne dépend que de V et de u. La courbe γ est seulement astreinte à être tracée sur V et à vérifier $\gamma'(t_o) = u$.

(3.4) Cas d'une hypersurface. Supposons que V est une hypersurface de $\tilde{V}$, que γ est paramétrée par l'abscisse curviligne et posons $e(s) = \gamma'(s)$. Par définition, la courbure $\lambda(s)$ de γ au point s relativement à $\tilde{V}$ est égale à $\| \frac{\tilde{\nabla} e}{ds}(s) \|$.

Supposons $\lambda(s_o) \neq 0$. Alors la torsion de γ au point x_o est définie (cf. par ex. [Di], tome 4). Si $\vec{n}(s)$ est le vecteur unitaire défini par $\frac{\tilde{\nabla} e}{ds}(s) = \lambda(s)\vec{n}(s)$, la torsion de γ au point s_o n'est autre que $\| \frac{\nabla \vec{n}}{ds}(s_o) \|$.

Il en résulte que si $u \in T_{x_o} V$ est un vecteur unitaire tel que $\alpha(u,u) \neq 0$, **le roulis r_u** est égal à la **torsion de la géodésique** de V issue de u.

(3.5) Définitions. *Soient* $V \subset \tilde{V}$ *et* D *une droite vectorielle de* $T_{x_o} V$. D ***est dite direction de courbure*** *de* V *au point* x_o *lorsque pour tout* $u \in D$ *on a* $r_u = 0$.

Une courbe C *tracée sur* V *est dite* ***ligne de courbure de V*** *lorsque* $T_x C$ *est une direction de courbure de* V *pour tout* $x \in C$.

Ainsi une sous-variété V est ombilicale si et seulement si toute courbe tracée sur V est ligne de courbure de V.

(3.6) Proposition. *Soient* V *(resp.* W*) une sous-variété d'une variété riemannienne* $\tilde{V}$ *(resp.* $\tilde{W}$*), et* $f : \tilde{V} \to \tilde{W}$ *une transformation conforme.*

Alors les images par Tf *des directions de courbure de* V *sont les directions de courbure de* f(V) *et par conséquent les lignes de courbure de* f(V) *sont les images par* f *des lignes de courbure de* V .

Preuve. Ceci résulte de l'invariance conforme du roulis.

(3.7) Théorème de Joachimsthal. *Soient* V_1 *et* V_2 *deux sous-variétés de* $\tilde{V}$, Γ *une courbe de* $\tilde{V}$ *telle que* $\Gamma \subset V_1$ *et* $\Gamma \subset V_2$.

Supposons que Γ *est connexe et que* Γ *est ligne de courbure à la fois de* V_1 *et de* V_2. *Alors l' "angle" de* T_xV_1 *et* T_xV_2 *est constant le long de* Γ.

Preuve. On verra à la fin de la preuve la signification qu'il faut donner au mot "angle" dans cet énoncé. Soient $t \longmapsto \gamma(t)$ une paramétrisation de Γ, $B_1(t)$ (resp. $B_2(t)$) un multivecteur unitaire associé à $N_{\gamma(t)}V_1$ (resp. $N_{\gamma(t)}V_2$), variant continûment.

D'après l'hypothèse et compte tenu de la proposition (3.2) :

$$\frac{\dot{\nabla} B_1}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\dot{\nabla} B_2}{dt} = 0.$$

Donc B_1 et B_2 sont parallèles dans le fibré normal de Γ relativement à $\tilde{V}$.

Il en résulte que $N_{\gamma(t)}V_1$ (resp. $N_{\gamma(t)}V_2$) est le transporté par $\dot{\nabla}$-parallélisme dans le fibré normal à Γ de $N_{\gamma(t_0)}V_1$ (resp. $N_{\gamma(t_0)}V_2$).

Comme ce transport est une isométrie il en résulte que le théorème de Joachimsthal est vrai pour toutes les définitions imaginables, invariantes par isométries, de l' "angle" de deux sous-espaces.

(3.8) Corollaire. *Soient* V_1 *et* V_2 *deux sous-variétés ombilicales de* $\tilde{V}$. *Supposons que* $V_1 \cap V_2$ *est connexe par arcs deux fois différentiables. Alors l' "angle" de* T_xV_1 *et* t_xV_2 *est constant quand* x *parcourt* $V_1 \cap V_2$.

(3.9) Théorème. *Soient* V_1 *et* V_2 *deux sous-variétés ombilicales de* $\tilde{V}$ *telles que* $\dim V_1 + \dim V_2 > \dim \tilde{V}$. *Supposons que* $V_1 \cap V_2$ *est connexe et que* V_1 *et* V_2 *se coupent transversalement en un point* $x_0 \in V_1 \cap V_2$. *Alors* V_1 *et* V_2 *sont transverses, elles se coupent suivant un angle constant, et* $V_1 \cap V_2$ *est une sous-variété ombilicale de* $\tilde{V}$.

Preuve. Pour tout $x \in V_1 \cap V_2$ soit $B_1(x)$ (resp. $B_2(x)$) un multivecteur unitaire associé à N_xV_1 (resp. N_xV_2).Posons $f(x) = \| B_1(x) \wedge B_2(x) \|$ où la norme est

la norme euclidienne. $f(x)$ ne dépend pas du choix des multivecteurs unitaires et f est une fonction continue sur $V_1 \cap V_2$. On a $f(x) \neq 0$ si et seulement si V_1 et V_2 se coupent transversalement au point x. Ainsi, par hypothèse, $f(x_o) \neq 0$.

Soit A l'ensemble des $x \in V_1 \cap V_2$ tels que $f(x) = f(x_o)$.

Comme f est continue, A est fermé relativement à $V_1 \cap V_2$. Soit $x_1 \in A$; alors $f(x_1 \neq 0$, donc $V_1 \cap V_2$ est une sous-variété au voisinage de x_1 dans $\tilde{V}$, donc d'après le corollaire (3.8) on a $f(x) = f(x_1)$ pour tout x de $V_1 \cap V_2$ suffisamment voisin de x_1. Donc A est ouvert dans $V_1 \cap V_2$. Il résulte alors de la connexité de $V_1 \cap V_2$ que $V_1 \cap V_2 = A$. Ainsi $f(x)$ est non nul pour tout $x \in V_1 \cap V_2$, ce qui traduit le fait que V_1 et V_2 se coupent transversalement en tout point de $V_1 \cap V_2$. En particulier $V_1 \cap V_2$ est une sous-variété de $\tilde{V}$.

Soit Γ une courbe tracée sur $V_1 \cap V_2$, et reprenons les notations de la preuve du théorème (3.7). D'après ce qui précède $\| B_1(t) \wedge B_2(t) \|$ est une constante. Par suite

$$\frac{\dot{\tilde{V}}}{dt}\left(\frac{B_1 \wedge B_2}{\| B_1 \wedge B_2 \|}\right) = \frac{1}{\| B_1 \wedge B_2 \|}\left(\frac{\dot{\tilde{V}} B_1}{dt} \wedge B_2 + B_1 \wedge \frac{\dot{\tilde{V}} B_2}{dt}\right)$$

$$= 0.$$

Or $\dfrac{B_1 \wedge B_2}{\| B_1 \wedge B_2 \|}$ est un multivecteur unitaire associé à l'orthogonal de $T_x V_1 \cap T_x V_2$, i.e. $\dfrac{B_1 \wedge B_2}{\| B_1 \wedge B_2 \|}$ est un multivecteur unitaire associé à $N_x(V_1 \cap V_2)$.

Donc, d'après la proposition (3.2) le roulis de $V_1 \cap V_2$ suivant $\gamma'(t)$ relativement à $\tilde{V}$ est nul. Comme Γ est une courbe quelconque de $V_1 \cap V_2$, il en résulte que $V_1 \cap V_2$ est ombilicale par rapport à $\tilde{V}$.

(3.10) Proposition. *Soient V_1 et V_2 deux sous-variétés de $\tilde{V}$ telles que $\dim V_1 + \dim V_2 > \dim \tilde{V}$. Supposons que V_1 et V_2 se coupent transversalement. Pour tout $x \in V_1 \cap V_2$, soit $B_1(x)$ (resp. $B_2(x)$) un multivecteur unitaire associé à $N_x V_1$ (resp. $N_x V_2$). Alors :*

$$r_u(V_1 \cap V_2) \leq \frac{1}{\| B_1(x) \wedge B_2(x) \|}\left(r_u(V_1) + r_u(V_2)\right)$$

pour tout $u \in T_x(V_1 \cap V_2)$. (Les trois roulis considérés sont des roulis par rapport à $\tilde{V}$).

Preuve. V_1 et V_2 étant transverses par hypothèse, on a $B_1(x) \wedge B_2(x) \neq 0$ pour tout $x \in V_1 \cap V_2$. Comme plus haut $B = \frac{B_1 \wedge B_2}{\|B_1 \wedge B_2\|}$ est un multivecteur unitaire associé à $N_x(V_1 \cap V_2)$. Pour tout $u \in T_x(V_1 \cap V_2)$, $\dot{\nabla}_u(B) = \dot{\nabla}_u(\frac{1}{\|B_1 \wedge B_2\|} B_1 \wedge B_2)$, $\dot{\nabla}_u B = -\frac{1}{\|B_1 \wedge B_2\|}((\dot{\nabla}_u(B_1 \wedge B_2))|B)B + \frac{1}{\|B_1 \wedge B_2\|} \dot{\nabla}_u(B_1 \wedge B_2)$. Il en résulte que : $\|\dot{\nabla}_u(B)\| \leqslant \frac{1}{\|B_1 \wedge B_2\|} \|\dot{\nabla}_u(B_1 \wedge B_2)\|$. Par suite :

$$r_u(V_1 \cap V_2) \leqslant \frac{1}{\|B_1 \wedge B_2\|} (\|(\dot{\nabla}_u B_1) \wedge B_2\| + \|B_1 \wedge \dot{\nabla}_u B_2\|).$$

Donc, puisque B_1 et B_2 sont des multivecteurs purs et unitaires :

$$r_u(V_1 \cap V_2) \leqslant \frac{1}{\|B_1 \wedge B_2\|} (\|\dot{\nabla}_u B_1\| + \|\dot{\nabla}_u B_2\|),$$ d'où le résultat.

(3.10.1) Exemple. Soit $\tilde{V}$ une variété kählérienne dont la courbure sectionnelle holomorphe est constante. Si V est une sphère géodésique de rayon pas trop grand, V est une hypersurface, et en désignant par ν_1 un vecteur unitaire normal à V, on sait (cf. [Ch. Va]) que la restriction de h_{ν_1} à l'orthogonal de $\mathcal{J}\nu_1$ est une homothétie. Par suite le roulis de V est nul suivant tout vecteur orthogonal à $\mathcal{J}\nu_1$. Il résulte alors de la proposition (3.10) que si V_1 et V_2 sont deux sphères géodésiques de rayons pas trop grands et transverses, il existe pour tout $x \in V_1 \cap V_2$ un sous-espace vectoriel F de $T_x(V_1 \cap V_2)$ de codimension $\leqslant 2$ tel que, pour tout $u \in F$, le roulis de $V_1 \cap V_2$ suivant u, relativement à $\tilde{V}$, est nul.

Les basculements d'une intersection vérifient une formule analogue à celle de la proposition (3.10) :

(3.11) Proposition. *Sous les hypothèses de la proposition (3.10), en notant* β *(resp.* β_i*) l'endomorphisme de bascule de* $V_1 \cap V_2$ *(resp.* V_i*) par rapport à* $\tilde{V}$ *on a :*

$$\|\beta(u)\| \leqslant \frac{1}{\|B_1(x) \wedge B_2(x)\|} (\|\beta_1(u)\| + \|\beta_2(u)\|)$$

pour tout $u \in T_x(V_1 \cap V_2)$.

Preuve. Comme $\|\beta(u)\| = \|\tilde{\nabla}_u B\|$ (resp. $\|\beta_i(u)\| = \|\tilde{\nabla}_u B_i\|$), il suffit de décalquer la preuve précédente en mettant partout $\tilde{\nabla}$ au lieu de $\dot{\nabla}$.

(3.12) Corollaire. *Soient* $\tilde{V}$ *une variété riemannienne dont la courbure est nulle,* V_1 *et* V_2 *deux sous-variétés minimales de* $\tilde{V}$ *telles que* $\dim V_1 + \dim V_2 > \dim \tilde{V}$. *Supposons que* V_1 *et* V_2 *se coupent transversalement au point* $x \in V_1 \cap V_2$.

Soient $B_1(x)$ *(resp.* $B_2(x)$ *) un multivecteur unitaire associé à* $N_x V_1$ *(resp.* $N_x V_2$ *),* β *l'endomorphisme de bascule de* $V_1 \cap V_2$ *et* Q_i *la courbure de Ricci de* V_i , $i = 1, 2$. *Alors :*

(3.12.1) $$\|\beta(u)\| \; \|B_1(x) \wedge B_2(x)\| \leqslant \sqrt{-Q_1(u)|u} + \sqrt{-Q_2(u)|u}$$

pour tout $u \in T_x(V_1 \cap V_2)$.

Preuve. On a $\|\beta_i(u)\| = \sqrt{-Q_i(u)|u}$, d'où le résultat.

Remarque.

Lorsque V_1 et V_2 sont des hypersurfaces d'une variété $\tilde{V}$, $\|\beta_1(x) \wedge B_2(x)\| = \mathrm{ang}(N_x V_1, N_x V_2) = \mathrm{ang}(T_x V_1, T_x V_2)$ (cf. (1.2) pour la définition de ang).

Cette propriété n'est plus valable pour des sous-variétés V_1, V_2 de même codimension $q > 1$.

4. Rotation instantanée g_u associée à un vecteur u tangent à V, relations avec courbures intrinsèques, basculements, tangages et roulis.

(4.1) Motivations et définitions. Nous avons jusqu'ici étudié comment $T_x V$ bascule, tangue ou roule quand on le suit le long d'une courbe γ de V.

Pour avoir des renseignements plus précis, nous allons lier de façon canonique $T_x V$ à un solide de $T_x \tilde{V}$ dont nous considèrerons la rotation instantanée.

Ce mouvement de solide glissant sur V le long de γ est complètement déterminé par la condition d'avoir un pivotement constamment nul.

Venons-en aux définitions précises.

Soit $\gamma : I \to \tilde{V}$ une application dérivable. Appelons repère vectoriel mobile le long de γ toute application $\varphi : t \mapsto (u_1(t),\ldots,u_n(t))$ telle que $u_1(t),\ldots,u_n(t)$ soit une base orthonormée de $T_{\gamma(t)}\tilde{V}$, avec u_i dérivable pour tout i.

Si $\psi : t \longmapsto (v_1(t),\dots,v_n(t))$ est un autre repère mobile le long de γ nous dirons que φ équivaut à ψ, notation $\varphi \sim \psi$, s'il existe une famille de constantes réelles α_{ji} telle que $v_j(t) = \sum_i \alpha_{ji}\, u_i(t)$ pour tous j,t.

La relation $\sim$ est évidemment une relation d'équivalence. Nous appellerons **mouvement de solide le long de γ** toute classe d'équivalence.

Tout mouvement $\mathscr{S}$ de solide le long de γ a à chaque instant t une **rotation instantanée** $\mathscr{R}_t$, qui est un endomorphisme antisymétrique de $T_{\gamma(t)}\tilde{V}$.

La rotation $\mathscr{R}_t$ est caractérisée par la propriété suivante :
si $t \to (u_1(t),\dots,u_n(t))$ représente $\mathscr{S}$, on a

$$\frac{\tilde{\nabla} u_i}{dt}(t) = \mathscr{R}_t(u_i(t)), \quad \text{pour tout } t.$$

Nous noterons $\hat{\mathscr{R}}_t$ l'élément de $\overset{2}{\Lambda} T_{\gamma(t)}\tilde{V}$ associé à $\mathscr{R}_t$.

(De façon générale, sauf mention du contraire, si H est un espace euclidien, nous notons $\mathscr{L}_a(H)$ l'espace vectoriel des endomorphismes antisymétriques de H et pour tout $f \in \mathscr{L}_a(H)$ nous désignons par f l'élément correspondant de $\overset{2}{\Lambda} H$. L'isomorphisme que nous utilisons est tel que $x \wedge y$ correspond à l'endomorphisme $v \longmapsto (x|v)y - (y|v)x$).

Soit maintenant V une sous-variété de $\tilde{V}$, et supposons que $\gamma(t) \in V$ pour tout t.

Un **repère vectoriel mobile** le long de γ sera dit **adapté à V** si ses p premiers vecteurs appartiennent à $T_{\gamma(t)}V$ pour tout t.

Un **mouvement de solide** le long de γ dans $\tilde{V}$ sera dit **adapté** à V s'il possède un représentant adapté à V.

Soit $\mathscr{S}$ un tel mouvement. On a

$$\overset{2}{\Lambda} T_{\gamma(t)}\tilde{V} = \overset{2}{\Lambda} T_{\gamma(t)}V \oplus ((T_{\gamma(t)}V) \wedge (N_{\gamma(t)}V)) \oplus \overset{2}{\Lambda} N_{\gamma(t)}V$$

(où $T_{\gamma(t)}V \wedge N_{\gamma(t)}V$ désigne l'espace vectoriel engendré par les $u \wedge v$ où $u \in T_{\gamma(t)}V$ et $v \in N_{\gamma(t)}V$), et une décomposition correspondante de $\mathscr{L}_a(T_{\gamma(t)}\tilde{V})$.

Nous appellerons **pivotement tangentiel** (resp. **normal**) de $\mathscr{S}$ à l'instant

t l'endomorphisme associé à la composante de $\hat{\mathscr{R}}_t$ dans $\overset{2}{\Lambda}TV$ (resp. $\overset{2}{\Lambda}NV$), et **pivotement** la somme du pivotement tangentiel et du pivotement normal.

On note que, lorsque V est une courbe (resp. une hypersurface) le pivotement tangentiel (resp. normal) est toujours nul.

On vérifie aisément que, pour tout t fixé, la condition $\hat{\mathscr{R}}_t \in T_{\gamma(t)} \wedge N_{\gamma(t)}$, qui traduit la nullité du pivotement à l'instant t, équivaut à :

$$\begin{cases} \mathscr{R}_t(T_{\gamma(t)}V) \subset N_{\gamma(t)}V \\ \mathscr{R}_t(N_{\gamma(t)}V) \subset N_{\gamma(t)}V \end{cases}$$

Ceci étant, on a :

(4.2) Proposition. *Soit* γ *une courbe paramétrée de* V . *Alors il existe un unique mouvement de solide dans* $\tilde{V}$, *adapté à* V *le long de* γ *ayant un pivotement constamment nul.*

Ce mouvement $\mathscr{M}$ *est représenté par*

$$t \longmapsto (\tau_1(t),\dots,\tau_p(t), \nu_1(t),\dots, \nu_q(t)),$$

repère mobile orthonormé où les τ_i *sont* ∇*-parallèles et les* ν_j $\nabla^{\perp}$*-parallèles.*

Preuve. Supposons que $t \longmapsto u_1(t),\dots,u_n(t)$ représente un mouvement de solide $\mathscr{S}$, adapté à V le long de γ et ayant un pivotement constamment nul.

Alors $\dfrac{\tilde{\nabla} u_i}{dt} = \mathscr{R}_t(u_i)$ pour tous i,t, et par suite :

i) Si $1 \leqslant i \leqslant p$ on a $\dfrac{\tilde{\nabla} u_i}{dt} \in N_{\gamma(t)}V$ pour tout t, donc u_i est ∇-parallèle ;

ii) Si $p+1 \leqslant i \leqslant n$ on a $\dfrac{\tilde{\nabla} u_i}{dt} \in T_{\gamma(t)}V$ pour tout t, donc u_i est $\nabla^{\perp}$-parallèle.

D'où l'unicité de $\mathscr{S}$.

Inversement un repère orthonormé mobile adapté à V le long de γ :

$t \longmapsto (\tau_1(t),\dots,\tau_p(t), \nu_1(t),\dots, \nu_q(t))$, où les τ_i sont ∇-parallèles et les ν_j $\nabla^{\perp}$-parallèles, représente un mouvement $\mathscr{M}$ de solide, adapté à V le long de γ.

On a $\frac{\tilde{\nabla}\tau_i}{dt} \in N_{\gamma(t)}V$, i.e. $\mathcal{R}_t(\tau_i) \in N_{\gamma(t)}V$ pour tout i et tout t, donc $\mathcal{R}_t(T_{\gamma(t)}V) \subset N_{\gamma(t)}V$ pour tout t.

De façon similaire $\mathcal{R}_t(N_{\gamma(t)}V) \subset T_{\gamma(t)}V$ pour tout t.

Donc le pivotement de $\mathcal{M}$ est nul.

Remarque.

Pour $\tilde{V} = \mathbb{R}^3$, p = 2 et q = 1 la proposition précédente se réduit à un énoncé classique dû à Levi-Civita.

(4.3) Proposition. *Avec les données et notations de la proposition précédente, soit* $t_o \in I$, $x_o = \gamma(t_o)$ *et* $u = \gamma'(t_o)$. *Alors la rotation instantanée* $\mathcal{R}_{t_o}$ *de* $\mathcal{M}$ *ne dépend que de* u . *Nous la noterons* g_u.

(4.3.1) Pour tout $v \in T_{x_o}V$, $g_u(v) = \alpha(u,v)$;

(4.3.2) pour tout $\xi \in N_{x_o}V$, $g_u(\xi) = -h_\xi(u)$.

Preuve. D'après les formules de Gauss et Weingarten :

$$\frac{\tilde{\nabla}\tau_i}{dt}(t_o) = \alpha(u,\tau_i(t_o)) \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{\nabla}\nu_j}{dt}(t_o) = -h_{\nu_j(t_o)}(u),$$

$$\text{i.e.} \quad \mathcal{R}_{t_o}(\tau_i(t_o)) = \alpha(u,\tau_i(t_o)) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{t_o}(\nu_j(t_o)) = -h_{\nu_j(t_o)}(u)$$

pour tous i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant q$; d'où le résultat.

g_u a déjà été considéré dans la littérature (cf. [G.V.]).

(4.4) Proposition. *Pour tous éléments* u,v *de* $T_{x_o}V$ *notons* $[g_u,g_v]_T$ *(resp.* $[g_u,g_v]_N$) *l'endomorphisme induit par* $[g_u,g_v]$ *dans* $T_{x_o}V$ *(resp.* $N_{x_o}V$). *Désignons par* R *(resp.* $R^\perp$ *) la courbure de la connexion* ∇ *(resp.* $\nabla^\perp$*) de* TV *(resp.* NV*). Supposons que la courbure de* $\tilde{V}$ *est nulle (resp. que* $\tilde{V}$ *est conformément plate), alors :*

(4.4.1) $$R(u,v) = -[g_u,g_v]_T$$

(4.4.2) $$(\text{resp. } R^\perp(u,v) = -[g_u,g_v]_N).$$

Preuve. Lorsque la courbure de $\tilde{V}$ est nulle, on a d'après la formule de Gauss:

$$(R(X,Y)Z)|W = -\alpha(X,Z)|\alpha(Y,W) + \alpha(Y,Z)|\alpha(X,W)$$

pour tous X,Y,Z,W tangents à V.

Lorsque $\tilde{V}$ est conformément plate, on a, d'après la formule de Ricci :

(4.4.3) $$(R^{\perp}(X,Y)\xi)|\eta = ([h_{\xi},h_{\eta}]X)|Y$$

pour tous X,Y tangents à V et tous ξ,η normaux à V.

Ces deux formules se traduisent en (4.4.1) et (4.4.2) par utilisation des formules (4.3.1) et (4.3.2).

Nous allons maintenant montrer que le basculement $\|\beta(u)\|$ est, à un facteur près, la norme euclidienne de la rotation instantanée g_u, et que le tangage et le roulis s'obtiennent à partir d'une décomposition canonique de g_u.

Soient V une sous-variété riemannienne $\tilde{V}$, $x_o \in V$, $u \in T_{x_o}V$, $u \neq 0$. Posons $E = T_{x_o}\tilde{V}$ et notons **F l'orthogonal de Ru** dans E.

On a la décomposition en somme directe orthogonale $\overset{2}{\Lambda}E = (u \wedge F) \oplus (\overset{2}{\Lambda}F)$, en notant $u \wedge F$ l'ensemble des $u \wedge v$, pour v décrivant F. Cette décomposition correspond par l'isomorphisme à une décomposition de $\mathscr{L}_a(E)$.

Posons $g_u = t_{e,u} + r_{e,u}$ où $\hat{t}_{e,u} \in u \wedge F$ et $\hat{r}_{e,u} \in \overset{2}{\Lambda}F$.

(4.5) Proposition. *Avec les notations ci-dessus, en désignant par* $\nu_1,\dots,\nu_q$ *une base orthonormée de* $N_{x_o}V$ *et par* $(\tau_2,\dots,\tau_p)$ *une base orthonormée de* F *:*

i) $\hat{g}_u = \sum_{1\leqslant j\leqslant q} h_{\nu_j}(u)\wedge\nu_j$;

ii) $\hat{g}_u = u \wedge \frac{\alpha(u,u)}{\|u\|^2} + \sum_{2\leqslant i\leqslant p} \tau_i \wedge \alpha(u,\tau_i)$;

iii) $\|\hat{g}_u\| = \|\beta(u)\|$;

iv) $\|\hat{t}_{e,u}\| = \frac{\|\alpha(u,u)\|}{\|u\|}$;

v) $\|\hat{r}_{e,u}\| = r_u$.

Preuve. En posant $\tau_1 = \frac{u}{\|u\|}$, ii) s'écrit $\hat{g}_u = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \tau_i \wedge \alpha(u,\tau_i)$.

i) et ii) se vérifient à l'aide des formules (4.3.1) et (4.3.2).

De plus, pour $i \neq j$ on a :

$$(\tau_i \wedge \alpha(u,\tau_i)) \mid (\tau_j \wedge \alpha(u,\tau_j)) = 0, \text{ donc}$$

$$\|\hat{g}_u\|^2 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \|\tau_i \wedge \alpha(u,\tau_i)\|^2$$

$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \|\alpha(u,\tau_i)\|^2$$

$$= \|\beta(u)\|^2.$$

D'après ii), $\hat{t}_{e,u} = u \wedge \frac{\alpha(u,u)}{\|u\|^2}$ et $\hat{r}_{e,u} = \sum_{2 \leqslant i \leqslant p} \tau_i \wedge \alpha(u,\tau_i)$,

donc $\|\hat{t}_{e,u}\| = \frac{\|\alpha(u,u)\|}{\|u\|}$, et comme $r_u^2 = \|\beta(u)\|^2 - \frac{\|\alpha(u,u)\|^2}{\|u\|^2}$, on a $\|\hat{r}_{e,u}\| = r_u$.

(4.5.1) Remarque. La proposition précédente montre que (2.2) est une relation de Pythagore dans l'espace euclidien $\overset{2}{\Lambda} T_{x_o} \tilde{V}$.

5. Tangages, roulis et basculements dans les sous-variétés produits.

Soient, k entier $\geqslant 2$ et, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant k$, V_i une sous-variété de $\tilde{V}_i$.

Posons $V = \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} V_i$ et $\tilde{V} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} \tilde{V}_i$.

Notons α_i la deuxième forme vectorielle de V_i relativement à $\tilde{V}_i$, h_{i,ξ_i} l'endomorphisme fondamental de V_i associé à $\xi_i \in NV_i$, β_i l'endomorphisme de bascule de V_i relativement à $\tilde{V}_i$ et t_{i,u_i} (resp. r_{i,u_i}) le tangage (resp. le roulis) de V_i, relativement à $\tilde{V}_i$, suivant $u_i \in TV_i$.

Rappelons le :

(5.1) Lemme. *Pour tous éléments* u,v *de* $T_xV \simeq \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} T_{x_i}V_i$ *et tout* $\xi \in N_xV \simeq \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} N_{x_i}V_i$,

$$\alpha(u,v) = (\alpha_i(u_i,v_i))_{1 \leqslant i \leqslant k}$$

$$\textit{et} \quad h_\xi(u) = (h_{i,\xi_i}(u_i))_{1 \leqslant i \leqslant k}.$$

(5.2) Proposition. *Soient* V *une sous-variété produit,* $x = (x_1,\dots,x_k) \in V$ *et* $u = (u_1,\dots,u_k) \in T_xV$. *Alors :*

a) $\beta = \beta_1 \times \dots \times \beta_k$ *et, par suite*

$$\| \beta(u) \|^2 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \| \beta_i(u_i) \|^2 ;$$

b) i) $t_u^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} t_{i,u_i}^2$;

ii) Pour que $t_u = 0$ *il faut et il suffit que* $t_{i,u_i} = 0$ *pour tout* i ;

iii) (5.2.1) est une égalité si et seulement si u *vérifie la condition :*

(S) " $t_u = 0$ ou il existe $i_o \in I$ tel que $u_i = 0$ pour tout $i \neq i_o$ " ;

(5.2.2) *c) i)* $r_u^2 \geqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} r_{i,u_i}^2$;

ii) Pour que $r_u = 0$ *il faut et il suffit que* $r_{i,u_i} = 0$ *pour tout* i *et que* u *vérifie (S) ;*

iii) 5.2.2 est une égalité si et seulement si u *vérifie (S).*

Preuve. Rappelons qu'un tangage ou un roulis suivant un vecteur nul vaut 0 par définition. a) découle de (0; 3.3) ou (0 ; 3.4).

Prouvons b) i). Posons $I = \{1,2,\dots,k\}$ et soit A l'ensemble des $i \in I$ tels que $u_i \neq 0$.

Si $u = 0$, (5.2.1) est évidemment vraie.

Supposons $u \neq 0$. Alors :

$$t_u^2 = \frac{\| \alpha(u,u) \|^2}{\| u \|^2}$$

(5.2.3)

$$\text{i.e.} \quad t_u^2 = \frac{\sum_{i \in A} \| \alpha_i(u_i,u_i) \|^2}{\sum_{i \in A} \| u_i \|^2}$$

$$\text{donc} \quad t_u^2 = \sum_{i \in A} \frac{\| \alpha_i(u_i,u_i) \|^2}{\| u_i \|} = \sum_{i \in I} t_{i,u_i}^2 .$$

Prouvons b) ii). $t_u = 0$ équivaut à $\alpha(u,u) = 0$; de même $t_{i,u_i} = 0$ équivaut à $\alpha_i(u_i,u_i) = 0$; d'où b) ii) d'après (5.2.3).

Prouvons b) iii). Supposons que (5.2.1) est une égalité.

Si $u = 0$, alors $t_u = 0$.

Supposons $u \neq 0$. Alors

$$\frac{\sum_{i \in A} \|\alpha_i(u_i,u_i)\|^2}{\sum_{i \in A} \|u_i\|^2} = \sum_{i \in A} \frac{\|\alpha_i(u_i,u_i)\|^2}{\|u_i\|^2}$$

$$\text{i.e.} \quad \sum_{i \in A} \|\alpha_i(u_i,u_i)\|^2 \left(\frac{1}{\|u_i\|^2} - \frac{1}{\sum_{i \in A} \|u_i\|^2}\right) = 0.$$

Supposons qu'il existe $i_o \in I$ tel que $t_{i_o,u_{i_o}} \neq 0$, i.e. $\alpha_{i_o}(u_{i_o},u_{i_o}) \neq 0$, alors $u_i = 0$ pour tout $i \neq i_o$.

Donc si (5.2.1) est une égalité, alors u vérifie la condition (S). La réciproque découle de (5.2.3) et de b) ii).

Prouvons c). D'après a)

$$t_u^2 + r_u^2 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} t_{i,u_i}^2 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} r_{i,u_i}^2 .$$

b) i) et iii) entraînent donc c) i) et iii), d'où il résulte c) ii).

6. Indice de nullité de roulis et courbure de la connexion normale.

(6.1) Définition. *Soit* $x \in V \subset \tilde{V}$. *On appelle* ***indice de nullité de roulis*** *au point* x *de* V , *relativement à* $\tilde{V}$, *le nombre maximum de directions de courbure linéairement indépendantes de* V *au point* x .

Cet indice sera noté $\mathcal{IR}(x,V,\tilde{V})$ *ou sous les formes abrégées* $\mathcal{IR}(x,V)$, $\mathcal{IR}(x)$ *quand il n'y aura pas de risque de confusion.*

Ainsi $\mathcal{IR}(x)$ est le rang de l'ensemble des $u \in T_xV$ tels que $r_u = 0$. On a $0 \leqslant \mathcal{IR}(x) \leqslant p = \dim V$. Lorsque V est une hypersurface, on a toujours $\mathcal{IR}(x) = p$, mais si $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ on a en général $\mathcal{IR}(x) = 0$, d'après le corollaire (2.4).

Nous verrons plus loin que si k est un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant p$ et $k \neq p-1$ il existe des exemples où $\mathcal{IR}(x,V,\tilde{V}) = k$.

(6.2) Proposition. *Soient* $V = \Pi V_i$ *et* $\tilde{V} = \Pi \tilde{V}_i$ *comme en (5), et* $x \in V$. *Alors*

$$\mathcal{IR}(x,V,\tilde{V}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathcal{IR}(x_i,V_i,\tilde{V}_i).$$

Preuve. On peut supposer $k = 2$.

Posons $m_i = \mathcal{IR}(x_i,V_i,\tilde{V}_i)$, pour $i = 1,2$, et $m = \mathcal{IR}(x,V,\tilde{V})$.

Prouvons que $m_1 + m_2 \leqslant m$.

Soient $a_1,\dots,a_{m_1}$ des éléments linéairement indépendants de $T_{x_1}V_1$, tels que $r_{1,a_i} = 0$ pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant m_1$; et $b_1,\dots,b_{m_2}$ des éléments linéairement indépendants de $T_{x_2}V_2$ tels que $r_{2,b_j} = 0$ pour tout j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant m_2$.

D'après (5.2) c) on a $r_{(a_i,o)} = 0$ et $r_{(o,b_j)} = 0$.

Comme $(a_1,0),\dots,(a_{m_1},0)$, $(0,b_1)$, ... , $(0,b_{m_2})$ sont linéairement indépendants, il en résulte

$$m_1 + m_2 \leqslant m.$$

Prouvons que $m \leqslant m_1 + m_2$.

Soient $w_1,\dots,w_m$ des éléments linéairement indépendants de T_xV tels que $r_{w_i} = 0$ pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant m$.

Posons $w_i = (u_i,v_i)$. D'après (5.2) c), on a :

$$r^2_{w_i} \geqslant r^2_{1,u_i} + r^2_{2,v_i}.$$

Donc $r_{1,u_i} = 0$ et $r_{2,v_i} = 0$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant m$.

Soit A (resp. B) l'espace vectoriel engendré par les u_i (resp. v_i).

$w_i \in A \times B$, pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant m$, donc $m \leqslant \dim A + \dim B$.

A fortiori, $m \leqslant m_1 + m_2$.

Conclusion : $m = m_1 + m_2$.

Nous allons voir que l'indice de nullité de roulis d'une sous-variété V de dimension $p \geqslant 2$ d'une variété $\tilde{V}$ peut être n'importe quel entier compris au sens large entre 0 et p et différent de p-1. Plus précisément :

(6.3) Proposition.

i) L'indice de nullité de roulis d'une sous-variété V *de dimension* $p \geqslant 2$ *d'une variété* $\tilde{V}$ *ne peut être égal à* $p-1$.

ii) Pour tous entiers p,q *vérifiant* $p \geqslant 2$ *et* $q \geqslant 2$ *il existe une sous-variété* V *de dimension* p *et de codimension* q *d'un espace euclidien telle que* V *n'ait aucune direction de courbure (cas général).*

iii) Pour tous entiers p, q, k *tels que* $p \geqslant 2$, $q \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant p$ *et* $k \neq p-1$ *il existe une sous-variété* V *de dimension* p *et de codimension* q *d'un espace euclidien telle qu'en tout point de* V *l'ensemble des directions de courbure est constitué de* k *droites orthogonales.*

Preuve de i). Si $u_1,\dots,u_{p-1}$ sont linéairement indépendants dans T_xV, et sont vecteurs propres de h_ξ pour tout $\xi \in N_xV$, alors l'espace vectoriel F engendré par les u_i est stable par tous les h_ξ, donc $F^\perp$ aussi, et par suite $F^\perp$ est une direction de courbure. D'où i).

Preuve de ii). ii) découle du fait qu'il existe une sous-variété d'un espace euclidien ayant une deuxième forme vectorielle donnée en un point, et que dans un espace euclidien de dimension $\geqslant 2$ on peut toujours trouver deux endomorphismes symétriques n'ayant pas de vecteur propre commun.

Preuve de iii).

1° Supposons $k = p$.

Soit V_1 une hypersurface de $\mathbb{R}^{p+1}$ telle que V_1 ait en tout point p courbures principales distinctes. Posons

$$V = V_1 \times \{0\} \quad \text{et} \quad \tilde{V} = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q-1}.$$

On vérifie immédiatement qu'en tout point de V l'ensemble des directions de courbure de V est constitué de p droites orthogonales.

2° Supposons $1 \leqslant k \leqslant p-2$.

Soit V_1 une hypersurface de $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que V_1 ait en tout point k courbures principales distinctes.

Soit V_2 une sous-variété de dimension $p-k$ de $\mathbb{R}^{p+q-k-1}$ telle que V_2 n'ait pas de direction de courbure.

Posons $V = V_1 \times V_2$ et utilisons les notations de (5).

Soit $u = (u_1,u_2) \in T_xV$ tel que $u \neq 0$ et $r_u = 0$.

Alors d'après (5.2), $r_{1,u_1} = 0$ et $r_{2,u_2} = 0$. Comme V_2 n'a pas de direction de courbure on a $u_2 = 0$. Donc $u = (u_1,0)$, avec $u_1 \neq 0$ et $r_{1,u_1} = 0$.

Inversement, soit $a_1 \in T_{x_1}V_1$ tel que $a_1 \neq 0$ et $r_{1,a_1} = 0$ alors, d'après (5.2), $r_{(a_1,0)} = 0$. Il en résulte qu'au point x l'ensemble des directions de courbure de V est constitué de k droites orthogonales.

Remarque.

Les exemples construits dans la preuve précédente sont tels que, lorsque $k \neq 0$, il passe par chaque point de V exactement k lignes de courbure.

(6.4) Définition. *Soit* $x \in V \subset \tilde{V}$.

Notons $\mathcal{N}_x(R^\perp)$ *l'ensemble des* $u \in T_xV$ *tels que* $R^\perp(u,v) = 0$ *pour tout* $v \in T_xV$. $\mathcal{N}_x(R^\perp)$ *est un espace vectoriel, sa dimension sera appelée* ***indice de nullité*** *de* $R^\perp$ *et notée* $\mathcal{I}(R^\perp)(x)$.

(6.5) Proposition. *Supposons* $\tilde{V}$ *conformément plate. Alors* $\mathcal{N}_x(R^\perp)$ *contient les directions de courbure de* V *au point* x *; en particulier :*

$$\mathcal{I}\mathcal{R}(x) \leqslant \mathcal{I}(R^\perp)(x).$$

Preuve. Soit $u \in T_xV$ tel que $r_u = 0$. Supposons $u \neq 0$. Alors, d'après (2.4), u est vecteur propre de h_ξ, pour tout $\xi \in N_xV$.

Il en résulte, compte tenu de la formule (4.4.3) de Ricci, que

$$((R^\perp(u,v)\xi)|\eta) = 0, \quad \text{pour tout } v \in T_xV$$
$$\text{et tous } \xi, \eta \quad \text{éléments de } N_xV.$$

D'où $u \in \mathcal{N}_x(R^\perp)$.

Remarque. L'inégalité de (6.5) peut être stricte. C'est le cas par exemple de toute sous-variété V de dimension impaire et de codimension deux d'un espace euclidien telle que V n'ait aucune direction de courbure.

En effet, si (ν_1, ν_2) est une base de N_xV, on a compte tenu de la formule (4.4.3) de Ricci

$$\mathcal{N}_x(R^\perp) = \mathrm{Ker}[h_{\nu_1}, h_{\nu_2}]$$

Or $[h_{\nu_1}, h_{\nu_2}]$ est un endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel $T_x V$ de dimension impaire donc $\mathrm{Ker}[h_{\nu_1}, h_{\nu_2}] \neq \{0\}$.

(6.6) Proposition. *Supposons* $\tilde{V}$ *conformément plate. Soit* $x \in V \subset \tilde{V}$.
Pour que $\mathcal{IR}(x) = \dim V$ *il faut et il suffit que* $R^{\perp}$ *soit nulle au point* x.
Plus précisément les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une base $u_1, \ldots, u_p$ *de* $T_{x_o} V$ *telle que* $r_{u_i} = 0$ *pour tout* i *;*
ii) Il existe une base orthonormée $u_1, \ldots, u_p$ *de* $T_{x_o} V$ *telle que* $r_{u_i} = 0$ *pour tout* i *;*
iii) La courbure $R^{\perp}$ *de la connexion* $\nabla^{\perp}$ *est nulle au point* x_o.

Preuve. D'après un lemme classique sur les endomorphismes symétriques i) et ii) équivalent à chacun à a) :

a) Les h_ξ, $\xi \in N_{x_o} V$, commutent.

Comme $\tilde{V}$ est conformément plate, a) équivaut à iii) d'après la formule (4.4.3) de Ricci.

(6.7) Proposition. *Soient* V *une sous-variété complexe d'une variété kaehlérienne* $\tilde{V}$ *et* $u \in TV$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) $r_u = 0$ *;*
ii) $\|\beta(u)\| = 0$.

Si de plus la courbure sectionnelle holomorphe de $\tilde{V}$ *est constante égale à* c, *alors i) et ii) équivalent à iii) :*
iii) $Q(u) = \frac{1}{2} c(p+1)u$, *où* $p = \dim_{\mathbb{R}} V$.

Preuve. Puisque $0 \leqslant r_u \leqslant \|\beta(u)\|$, ii) entraîne toujours i).
Prouvons que i) entraîne ii).
Supposons $r_u = 0$.
Alors pour tout $\xi \in N_{x_o} V$ il existe $\lambda_\xi \in R$ tel que

$$h_\xi(u) = \lambda_\xi u.$$

Donc $(\mathcal{J} \circ h_\xi)(u) = \lambda_\xi \mathcal{J} u$
i.e. $h_{\mathcal{J}\xi}(u) = \lambda_\xi \mathcal{J} u$
donc $\lambda_{\mathcal{J}\xi} u = \lambda_\xi \mathcal{J} u$
donc $\lambda_\xi = 0$.

Par suite $h_\xi(u) = 0$ pour tout $\xi \in N_{x_o} V$, donc $\sum_{1 \leqslant j \leqslant q} h^2_{\nu_j}(u) = 0$, i.e. $\beta^2(u) = 0$ donc $\beta(u) = 0$, (car β est symétrique).

Lorsque la courbure sectionnelle holomorphe de $\tilde{V}$ est constante, égale à c, l'équivalence de i) et ii) avec iii) provient de la formule

$$Q = \frac{1}{2} c(p+1)\mathrm{id} - \beta^2, \quad \text{(cf. 0;5.5).}$$

7. Liaisons entre tangages, roulis et basculements.

Il résulte de (2.2) que toute majoration du basculement fournit une majoration du tangage et du roulis.

Nous allons voir qu'une majoration du tangage donne une majoration du roulis et du basculement.

Pour tout $x \in V \subset \tilde{V}$, posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{Basc}(x,V,\tilde{V}) &= \operatorname{Sup} \|\beta(u)\|, \\ \mathbf{Tang}(x,V,\tilde{V}) &= \operatorname{Sup}\ t_u, \\ \mathbf{Roul}(x,V,\tilde{V}) &= \operatorname{Sup}\ r_u, \end{aligned}$$

où tous les Sup sont étendus aux $u \in T_x V$ tels que $\|u\| = 1$.

On emploiera souvent les notations abrégées Basc(x), ou Basc, etc. .

Rappelons que **p** = **dim V** et **q** = **codim V.**

(7.1) Proposition.

i) $(\mathrm{Roul})^2 \leqslant 4(p-1)(\mathrm{Tang})^2$;

ii) $(\mathrm{Basc})^2 \leqslant (4p-3)(\mathrm{Tang})^2$.

Preuve. Soit $u \in T_x V$ un vecteur unitaire, et $(\tau_1,\dots,\tau_p)$ une base orthonormée de $T_x V$ telle que $\tau_1 = u$. On a :

$$\begin{aligned} r_u^2 &= \|\beta(u)\|^2 - t_u^2, \\ \text{i.e.}\quad r_u^2 &= (\beta^2(u)|u) - \|\alpha(u,u)\|^2, \\ \text{i.e.}\quad r_u^2 &= \sum_{2 \leqslant j \leqslant p} \|\alpha(u,\tau_j)\|^2 . \end{aligned}$$

Pour tout j tel que $2 \leqslant j \leqslant p$,

$$\alpha(u,\tau_j) = \alpha\left(\frac{u+\tau_j}{\sqrt{2}}, \frac{u+\tau_j}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\alpha(u,u)}{2} - \frac{\alpha(\tau_j,\tau_j)}{2}$$

d'où $\|\alpha(u,\tau_j)\| \leqslant 2$ Tang

donc $r_u^2 \leqslant (p-1)4(\text{Tang})^2$, d'où i).

ii) découle alors de $\|\beta(u)\|^2 = t_u^2 + r_u^2$.

Une majoration du roulis ne saurait, elle, fournir une majoration du basculement (une sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^n$ a tous ses roulis nuls et tous ses basculements égaux à $\frac{1}{R}$). Cependant :

(7.2) Proposition. $p \operatorname{Tr} \beta^2 \leqslant \|\operatorname{Tr} \alpha\|^2 + 2\, p^2 q(\text{Roul})^2$; *a fortiori,* $p(\text{Basc})^2 \leqslant \|\operatorname{Tr} \alpha\|^2 + 2p^2 q(\text{Roul})^2$.

Démontrons d'abord le :

(7.2.1.) Lemme. *Soient* $\xi \in N_{x_o} V$ *tel que* $\|\xi\| = 1$, *et* $\lambda_{\xi,1},\dots,\lambda_{\xi,p}$ *le spectre de* h_ξ. *Alors :*

i) $|\lambda_{\xi,i} - \lambda_{\xi,j}| \leqslant 2\,\text{Roul}$, *pour tous* i,j ;

ii) $p \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \lambda_{\xi,i}^2 - \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant p} \lambda_{\xi,i}\right)^2 \leqslant 2p^2(\text{Roul})^2$.

Preuve du lemme. Soit $\nu_1,\dots,\nu_q$ une base orthonormée de $N_{x_o} V$ telle que $\nu_1 = \xi$.

Pour tout $v \in T_{x_o} V$ tel que $\|v\| = 1$ on a :

$$r_v^2 = \sum_{1\leqslant j\leqslant q} \|h_{\nu_j}(v) \wedge v\|^2$$

donc $r_v^2 \geqslant \|h_\xi(v) \wedge v\|^2$.

D'après la formule de Lagrange :

$$\|h_\xi(v) \wedge v\|^2 = \|h_\xi(v)\|^2 - (h_\xi(v) \mid v)^2.$$

Soit $\tau_1 \dots \tau_p$ une base orthonormée de vecteurs propres de h_ξ de valeurs propres associées $\lambda_1,\dots,\lambda_p$.

Pour $v = (\cos\theta)\tau_i + (\sin\theta)\tau_j$, on a

$$h_\xi(v) = (\cos\theta)\lambda_i \tau_i + (\sin\theta)\lambda_j \tau_j$$

et donc $\| h_\xi(v) \wedge v \|^2 = (\cos^2\theta)\lambda_i^2 + (\sin^2\theta)\lambda_j^2 - (\lambda_i \cos^2\theta + \lambda_j \sin^2\theta)^2$

$$= (\lambda_i - \lambda_j)^2 \cos^2\theta \ \sin^2\theta$$

Donc $|\lambda_i - \lambda_j| \dfrac{|\sin 2\theta|}{2} \leqslant \text{Roul}$, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$.

D'où $|\lambda_i - \lambda_j| \leqslant 2\ \text{Roul}$.

Donc, pour tous i,j tels que $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant p$,

$$\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\lambda_i\lambda_j \leqslant 4(\text{Roul})^2.$$

En sommant sur i et j on obtient

$$2p \sum_i \lambda_i^2 - 2(\sum_i \lambda_i)^2 \leqslant 4p^2(\text{Roul})^2,$$

d'où ii), et le lemme est établi.

Preuve de la proposition (7.2). D'après le ii) du lemme, pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant q$,

$$p\ \text{Tr}(h^2_{\nu_k}) - (\text{Tr}\ h_{\nu_k})^2 \leqslant 2\ p^2(\text{Roul})^2$$

Or $\beta^2 = \sum_k h^2_{\nu_k}$, d'où, en sommant sur $k = 1,\dots,q$,

$$p\ \text{Tr}\ \beta^2 - \| \text{Tr}\,\alpha \|^2 \leqslant 2p^2q(\text{Roul})^2.$$

Pour tout $u \in T_{x_o} V$ tel que $\| u \| = 1$, on a

$$\| \beta(u) \|^2 = (\beta^2(u) | u) \leqslant \text{Tr}\ \beta^2.$$

Ceci achève la preuve de la proposition (7.2).

(7.3) Corollaire. *Soit* V *une sous-variété minimale de* $\tilde{V}$ *. Alors :*

(7.3.1) $$(\text{Basc})^2 \leqslant \text{Tr}\ \beta^2 \leqslant 2pq(\text{Roul})^2\ ;$$

si de plus la courbure de $\tilde{V}$ *est nulle au point* x_o *, on a en ce point :*

(7.3.2) $$-\text{Tr}\ Q \leqslant 2pq(\text{Roul})^2.$$

Preuve. L'hypothèse V minimale signifie Tr $\alpha = 0$; et si de plus la courbure de $\tilde{V}$ est nulle on sait que $Q = -\beta^2$ (cf. 0 ; 5.3).

Ainsi, pour une sous-variété minimale, toute majoration des roulis fournit une majoration des basculements.

D'après (7.3.2) si V est une hypersurface minimale de $\mathbb{R}^n$ et si la courbure scalaire de V au point x_o (qui est négative) est "grande" en valeur absolue, alors il existe, passant par x_o, une géodésique de V dont la torsion par rapport à $\tilde{V}$ est "grande" (cf. (3.4)).

Nous terminerons ce chapitre en calculant le tangage et le roulis des variétés de Véronèse $\mathcal{V}_k^n$, $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, considérées comme sous-variété de la sphère unité S de $\overset{k}{\odot} E$, où E est un espace euclidien de dimension n (cf. 0 ; 5.4.2).

Nous allons voir que $\mathcal{V}_k^n$ est relativement à S non seulement isobasculante, mais "isotangante" et "isoroulante".

(7.4) Proposition. *Pour* n *et* k *entiers* $\geqslant 2$ *soit* u *un vecteur unitaire tangent à* $\mathcal{V}_k^n$. *Alors, relativement à la sphère unité de* $\overset{k}{\odot} E$, *on a :*

$$\|\beta(u)\|^2 = n\frac{k-1}{k} \;;$$
$$t_u^2 = 2\frac{k-1}{k} \;;$$
$$r_u^2 = (n-2)\frac{k-1}{k} \;.$$

Preuve. $\|\beta(u)\|$ a été calculé dans [Ma.1]. t_u découle directement de l'expression de la deuxième forme vectorielle, et r_u se déduit de la relation $\|\beta(u)\|^2 = t_u^2 + r_u^2$.

CHAPITRE III

SOUS-ESPACES CENTRAUX, TRANSLATIONS INSTANTANEES ET POINTS FOCAUX DES SOUS-VARIETES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

1. Notations et préliminaires.

Dans tout ce chapitre V est une sous-variété de dimension $p \geqslant 1$ et de codimension $q \geqslant 1$ d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$.

Pour tout espace affine $\mathscr{A}$ nous noterons $\vec{\mathscr{A}}$ l'espace vectoriel associé.

Pour tout $x \in V$, T_xV est (comme d'habitude) la fibre de TV au point x, $\mathcal{T}_xV$ est l'espace affine tangent : $\mathcal{T}_xV \subset \mathscr{E}$ et $\vec{\mathcal{T}}_xV \subset \vec{\mathscr{E}}$. Quand il n'y aura pas de confusion à craindre nous identifierons T_xV et $\vec{\mathcal{T}}_xV$.

Les notations analogues N_xV, $\mathcal{N}_xV$, $\vec{\mathcal{N}}_xV$ sont utilisées pour les espaces normaux.

Nous aurons besoin du lemme classique suivant :

(1.1) Lemme. *Soient* E *un espace vectoriel euclidien,* $g \in \mathscr{L}(E)$ *un endomorphisme symétrique ou antisymétrique. Alors :*

i) $E = \operatorname{Ker} g \oplus \mathscr{I}m\, g$, *et cette somme directe est orthogonale ;*

ii) $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} g^2$.

Rappelons qu'un champ de Killing sur un espace euclidien $\mathscr{E}$ est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\vec{\mathscr{E}}$ dont l'application linéaire associée est antisymétrique.

A l'aide du lemme (1.1) on établit sans peine la proposition suivante :

(1.2) Proposition. *Soient* X *un champ de Killing sur un espace euclidien* $\mathscr{E}$, g *l'application linéaire associée à* X. *Notons* $\mathscr{C}$ *l'ensemble des points*

critiques de l'application $f : x \mapsto (X(x)|X(x))$ *de* $\mathscr{E}$ *dans* $\mathbb{R}$.

i) $\mathscr{C}$ *est un sous-espace affine (non vide) de direction* Ker g . $\mathscr{C}$ *est l'ensemble des* $x \in \mathscr{E}$ *tels que* $g(X(x)) = 0$.

ii) Les points de $\mathscr{C}$ *sont les points de* $\mathscr{E}$ *où* f *présente un minimum global.*

iii) La restriction de X *à* $\mathscr{C}$ *est un champ constant à valeurs dans* Ker g . *Notons* $\mathfrak{T}$ *cette valeur constante.*

iv) Pour tout $x \in \mathscr{E}$, $\mathfrak{T}$ *est la projection orthogonale de* X(x) *sur* $\vec{\mathscr{C}}$.

(1.3) Définitions. *Sous les hypothèses de la proposition précédente nous dirons que* $\mathscr{C}$ *est l'**espace central** et que* $\mathfrak{T}$ *est la **translation instantanée** du champ de Killing* X .

2. Champ de Killing X_u , sous-espace central $\mathscr{C}_u$, point central H_u et translation instantanée $\mathfrak{T}_u$ associés à un vecteur u tangent à la sous-variété V.

Soient V une sous-variété de $\mathscr{E}$, $x_o \in V$ et $u \in T_{x_o} V$.

Reprenons les notations du chapitre II, section 4, avec maintenant $\tilde{V} = \mathscr{E}$.

Pour tout $t \in I$, notons $\overline{M}_t$ l'application affine qui transforme x_o en $\gamma(t)$ et dont l'application linéaire associée est M_t. L'application $t \longmapsto \overline{M}_t$ définit un mouvement affine de solide dans $\mathscr{E}$ dont la rotation instantanée à $t = 0$ est g_u, et dont le champ des vitesses à $t = 0$ est le champ de Killing X_u donné par

$$X_u(x) = u + g_u(x-x_o), \text{ pour tout } x \in \mathscr{E}.$$

(2.1) L'espace central (resp. la translation instantanée) de X_u sera noté $\mathscr{C}_u$ (resp. $\mathfrak{T}_u$) et appelé **espace central de V associé à u** (resp. **translation instantanée de V associée à u**).

La projection orthogonale de x_o sur $\mathscr{C}_u$ sera notée H_u et appelée **point central de V associé à u.**

Remarque. Pour tout réel $\lambda \neq 0$ on a

$$\mathscr{C}_{\lambda u} = \mathscr{C}_u \quad \text{et} \quad \mathfrak{T}_{\lambda u} = \lambda \mathfrak{T}_u.$$

(2.2) Proposition. *Avec les notations ci-dessus :*

i) $H_u - x_o$ *est orthogonal à* V ;

ii) $((H_u-x_o)|\alpha(u,u)) = (u|u) - (\tau_u|\tau_u)$.

Preuve de i).

$X_u(H_u) = X_u(x_o) + g_u(H_u-x_o)$, donc $g_u(X_u(H_u)) = g_u(X_u(x_o)) + g_u^2(H_u-x_o)$, i.e. puisque $H_u \in \mathscr{C}_u$,

(2.2.1) $$g_u(X_u(x_o)) + g_u^2(H_u-x_o) = 0.$$

H_u-x_o est, par définition de H_u, orthogonal à $\vec{\mathscr{C}}_u = \operatorname{Ker} g_u$, donc

(2.2.2) $$H_u-x_o \in \mathscr{I}m\, g_u.$$

D'après le lemme (1.1) $\mathscr{E} = \operatorname{Ker} g_u \oplus \mathscr{I}m\, g_u$ et g_u induit une bijection de $\mathscr{I}m\, g_u$ sur $\mathscr{I}m\, g_u$. Par suite g_u^2 fait de même. H_u-x_o est donc complètement déterminé par (2.2.1) et (2.2.2). g_u^3 induit une bijection de $\mathscr{I}m\, g_u$ sur $\mathscr{I}m\, g_u$, donc il existe $w \in \mathscr{I}m\, g_u$ tel que

(2.2.3) $$g_u(u) + g_u^3(w) = 0.$$

Posons $w = w_1+w_2$, où $w_1 \in TV$ et $w_2 \in NV$. Alors $g_u^3(w) = g_u^3(w_1) + g_u^3(w_2)$, $g_u^3(w_1) \in NV$ et $g_u^3(w_2) \in TV$.

La relation (2.2.3) s'écrit :

$$g_u(u) + g_u^3(w_1) + g_u^3(w_2) = 0.$$

Comme $g_u(u) \subset NV$, on a donc :

$$g_u(u) + g_u^3(w_1) = 0,$$
$$\text{i.e.} \quad g_u(u) + g_u^2(g_u(w_1)) = 0,$$

donc $H_u-x_o = g_u(w_1)$, et comme $w_1 \in TV$, $H_u-x_o \in NV$.

Preuve de ii).

On a $X_u(H_u) = u + g_u(H_u-x_o)$.

$$\begin{aligned}(H_u-x_o)|\alpha(u,u) &= ((H_u-x_o)|g_u(u))\\ &= -((g_u(H_u-x_o))|u)\\ &= ((u-X_u(H_u))|u)\\ &= ((u|u) - (X_u(H_u)|X_u(H_u)).\end{aligned}$$

(2.3) *Lorsque* $\alpha(u,u) \neq 0$ ***la géodésique de*** V ***issue de*** u ***a un centre de courbure*** *que* ***nous noterons*** C_u.

(2.4) Corollaire. *Si le point central* H_u *de* V *associé à* u *coïncide avec le centre de courbure* C_u *de la géodésique de* V *issue de* u *, alors la translation instantanée* τ_u *est nulle.*

Preuve. On peut supposer $\|u\| = 1$. Alors $C_u-x_o = \frac{\alpha(u,u)}{\|\alpha(u,u)\|^2}$, et le corollaire découle de (2.2) ii).

(2.5) Proposition. $\vec{\mathscr{C}}_u$ *est la somme directe d'un sous-espace vectoriel de* $T_{x_o}V$ *et d'un sous-espace vectoriel de* $N_{x_o}V$. *Plus précisément :*

$$\vec{\mathscr{C}}_u = (g_u(N_{x_o}V))^{\perp'} \oplus (g_u(T_{x_o}V))^{\perp''}$$

où $\perp'$ *(resp.* $\perp''$*) veut dire orthogonal dans* $T_{x_o}V$ *(resp. dans* $N_{x_o}V$*).*

Preuve. Soit $w \in \vec{\mathscr{C}}$.

$$w = w_1 + w_2 \quad \text{avec} \quad w_1 \in T_{x_o}V \text{ et } w_2 \in N_{x_o}V.$$

La condition $g_u(w) = 0$ s'écrit :

$$g_u(w_1) + g_u(w_2) = 0 \ ;$$

comme $g_u(w_1) \in N_{x_o}V$ et $g_u(w_2) \in T_{x_o}V$, elle équivaut à $g_u(w_1) = 0$ et $g_u(w_2) = 0$.

1) $g_u(w_1) = 0$ équivaut à :

$$(g_u(w_1)|\xi) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \xi \in N_{x_o}V,$$

i.e. $\quad w_1|g_u(\xi) = 0 \quad$ pour tout $\xi \in N_{x_o}V$,

i.e. w_1 appartient à l'orthogonal dans $T_{x_o}V$ de $g_u(N_{x_o}V)$.

2) $g_u(w_2) = 0$ équivaut à :

$$(g_u(w_2) | v) = 0 \quad \text{pour tout } v \in T_{x_o} V,$$

i.e. $$(w_2 | g_u(v)) = 0 \quad \text{pour tout } v \in T_{x_o} V,$$

i.e. w_2 appartient à l'orthogonal dans $N_{x_o} V$ de $g_u(T_{x_o} V)$.

3. Vecteurs tangents non dégénérés.

(3.1) Proposition. *Soit* $u \in T_{x_o} V$. *Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\alpha(u, \tau_1) \wedge \dots \wedge \alpha(u, \tau_p) \neq 0$;

ii) $g_u | T_{x_o} V$ *est injective ;*

iii) $g_u \circ g_u$ *induit une bijection de* $T_{x_o} V$ *sur* $T_{x_o} V$ *;*

iv) g_u *induit une surjection de* $N_{x_o} V$ *sur* $T_{x_o} V$ *;*

v) $\vec{\mathscr{C}}_u \subset N_{x_o} V$.

Preuve.

1° $\alpha(u, \tau_1) \wedge \dots \wedge \alpha(u, \tau_p) \neq 0$ s'écrit $g_u(\tau_1) \wedge \dots \wedge g_u(\tau_p) \neq 0$ et traduit l'indépendance linéaire de $g_u(\tau_1), \dots, g_u(\tau_p)$. Il en résulte que i) équivaut à ii).

2° Prouvons que ii) entraîne iii).

Supposons $g_u | T_{x_o} V$ injective.

Comme $\vec{\mathscr{E}} = \operatorname{Ker} g_u \oplus \mathscr{I}m\, g_u$, g_u induit une bijection de $\mathscr{I}m\, g_u$ sur $\mathscr{I}m\, g_u$. Il en résulte que $(g_u \circ g_u) | (T_{x_o} V)$ est injective. Comme $g_u \circ g_u$ applique $T_{x_o} V$ dans $T_{x_o} V$ (g_u envoie $T_{x_o} V$ dans $N_{x_o} V$ et $N_{x_o} V$ dans $T_{x_o} V$) $g_u \circ g_u$ induit une bijection de $T_{x_o} V$ sur $T_{x_o} V$.

3° Prouvons que iii) entraîne v).

Supposons iii) vrai.

En particulier on a $T_{x_o} V \subset \mathscr{I}m\, g_u$, donc en passant aux orthogonaux :

$$N_{x_o} V \supset \operatorname{Ker} g_u$$

i.e. $$N_{x_o} V \supset \vec{\mathscr{C}}_u.$$

4° L'équivalence de iv) et v) résulte de la proposition (2.5).

5° Prouvons que v) entraîne ii).

Supposons $\vec{\mathscr{C}}_u \subset N_{x_o} V$. Alors $T_{x_o} V \subset \mathscr{I}m\, g_u$. $g_u | \mathscr{I}m\, g_u$ étant injective, a fortiori $g_u | T_{x_o} V$ est injective.

(3.2) Proposition. *Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $h_{\nu_1}(u) \wedge \ldots \wedge h_{\nu_q}(u) \neq 0$;

ii) $g_u | N_{x_o} V$ *est injective ;*

iii) $g_u \circ g_u$ *induit une bijection de* $N_{x_o} V$ *sur* $N_{x_o} V$ *;*

iv) g_u *induit une surjection de* $T_{x_o} V$ *sur* $N_{x_o} V$ *;*

v) $\vec{\mathscr{C}}_u \subset T_{x_o} V$.

Preuve abrégée.

$h_{\nu_1}(u) \wedge \ldots \wedge h_{\nu_q}(u) \neq 0$ s'écrit

$g_u(\nu_1) \wedge \ldots \wedge g_u(\nu_q) \neq 0$, et traduit l'indépendance linéaire de $g_u(\nu_1),\ldots,g_u(\nu_q)$. Il en résulte que i) équivaut à ii). Le reste de la preuve est analogue à celui de la proposition (3.1).

(3.3) Définition. *Soit* $u \in T_{x_o} V$. u *est dit non dégénéré lorsque l'une des deux conditions suivantes est remplie :*

i) $g_u | T_{x_o} V$ *est injective ;*

ii) $g_u | N_{x_o} V$ *est injective.*

(3.4) Proposition. *Lorsque* $p = q$, u *est non dégénéré si et seulement si* g_u *est bijective.*

Preuve. Supposons $g_u | T_{x_o} V$ injective.

Alors, d'après la proposition 2.5 puisque p=q, on a $\vec{\mathscr{C}}_u = 0$, i.e. Ker $g_u = 0$, donc g_u est bijective.

De façon analogue on voit que si $g_u | N_{x_o} V$ est injective alors g_u est bijective.

(3.4.1) Remarque. *D'après les propositions (3.1) et (3.2),* u *est non dégénéré si et seulement si l'application* $\alpha(u,.)$ *de* $T_{x_o} V$ *dans* $N_{x_o} V$ *est de rang maximum, i.e. est injective lorsque* $p \leqslant q$ *, et surjective lorsque* $p \geqslant q$ *. Il*

en résulte que ***la non-dégénérescence de*** **u** ***est "le cas général".***

(3.5) Proposition. *Supposons* $p \leqslant q$ *et soit* u *un élément non dégénéré de* $T_{x_o}V$. *Alors :*

i) $\vec{\mathscr{C}}_u$ *est l'orthogonal dans* $N_{x_o}V$ *de* $g_u(T_{x_o}V)$, $\dim \mathscr{C}_u = q-p$ *et* $\mathscr{C}_u \subset \mathscr{N}_{x_o}V$;

ii) $\mathcal{T}_u = 0$;

iii) En désignant par $(g_u \circ g_u)_T$ *l'endomorphisme induit dans* $T_{x_o}V$ *par* $g_u o g_u$ *on a :*

(3.5.1) $$H_u - x_o = -g_u(((g_u \circ g_u)_T)^{-1} \cdot u).$$

Preuve.

1° i) résulte de la proposition (2.5).

2° Prouvons que $\mathcal{T}_u = 0$.

D'après la proposition (3.1) $\vec{\mathscr{C}}_u \subset N_{x_o}V$.

Donc u est orthogonal à $\vec{\mathscr{C}}_u$.

Or $\mathcal{T}_u$ est la projection orthogonale de u sur $\vec{\mathscr{C}}_u$, donc $\mathcal{T}_u = 0$.

3° On a $\mathcal{T}_u = X_u(H_u)$ et $X_u(H_u) = u + g_u(H_u - x_o)$,

donc $0 = u + g_u(H_u - x_o)$.

D'après la définition du point H_u, $H_u - x_o$ est orthogonal à $\mathscr{C}_u$, i.e. $H_u - x_o \in \mathscr{I}m\, g_u$.

Soient $x_1 \in T_{x_o}V$ et $x_2 \in N_{x_o}V$ tels que

$$H_u - x_o = g_u(x_1 + x_2).$$

Alors $H_u - x_o = g_u(x_1) + g_u(x_2)$ avec $g_u(x_1) \in N_{x_o}V$ et $g_u(x_2) \in T_{x_o}V$, donc :

(3.5.2) $$H_u - x_o = g_u(x_1),$$

$$g_u(H_u - x_o) = g_u(g_u(x_1))$$

$$\text{i.e.} \quad -u = (g_u \circ g_u)_T \cdot x_1$$

$$\text{donc} \quad x_1 = -((g_u \circ g_u)_T)^{-1} \cdot u$$

d'où iii) d'après (3.5.2).

(3.6) Proposition. *Supposons* $q \leqslant p$ *et soit* u *un élément non dégénéré de* $T_{x_o}V$. *Alors :*

i) $\vec{\mathscr{C}}_u$ *est l'orthogonal dans* $T_{x_o}V$ *de* $g_u(N_{x_o}V)$, $\dim \mathscr{C}_u = p-q$ *et* $\mathscr{C}_u \cap \mathscr{N}_{x_o}V = \{H_u\}$;

ii) En désignant par $(g_u \circ g_u)_N$ *l'endomorphisme induit dans* $N_{x_o}V$ *par* $g_u \circ g_u$ *on a :*

(3.6.1) $$H_u - x_o = -((g_u \circ g_u)_N)^{-1}.\alpha(u,u).$$

Preuve.

1° i) résulte de la proposition (2.5) et de la proposition (2.2) i).

2° On a $X_u(H_u) = u + g_u(H_u - x_o)$, donc $0 = g_u(u) + g_u g_u(H_u - x_o)$.

D'après la proposition (2.2) i), $H_u - x_o \in N_{x_o}V$, d'où ii).

(3.7) Cas des courbes réelles ou complexes.

(3.7.1) Proposition. *Soient* V *une courbe de* $\mathscr{E}$ $(p = 1)$ *de courbure* λ *au point* x_o *et* u *un élément non nul de* $T_{x_o}V$. *Alors :*

i) $(g_u \circ g_u)_T = -\lambda^2 \|u\|^2 \, id(T_{x_o}V)$;

pour que u *soit non dégénéré il faut et il suffit que la courbure* λ *de* V *au point* x_o *soit non nulle ;*

ii) Si $\lambda \neq 0$, *on a* $H_u = C_u$.

Preuve.

1° Soit $\tau \in T_{x_o}V$ tel que $\|\tau\| = 1$. Alors $\lambda = \|\alpha(\tau,\tau)\|$. Donc τ est non dégénéré si et seulement si $\lambda \neq 0$. De plus, pour tout $\xi \in N_{x_o}V$:

$$\begin{aligned} g_\tau(\xi) &= (g_\tau(\xi)|\tau)\tau \\ &= -(\xi|g_\tau(\tau))\tau, \end{aligned}$$

donc $g_\tau(g_\tau(\tau)) = -\|g_\tau(\tau)\|^2\tau$.

Par conséquent, $(g_\tau \circ g_\tau)_T = -\lambda^2 id(T_{x_o}V)$ et $(g_u \circ g_u)_T = -\lambda^2\|u\|^2 \, id(T_{x_o}V)$, pour tout $u \in T_{x_o}V$.

2° Supposons $\lambda \neq 0$, alors :

$$((g_\tau \circ g_\tau)_T)^{-1} = -\frac{1}{\lambda^2} id(T_{x_o}V),$$

donc, d'après la formule (3.5.1) :

$$\begin{aligned} H_u - x_o &= \frac{1}{\lambda^2} g_u(u) \\ &= \frac{\alpha(u,u)}{\|\alpha(u,u)\|^2} \\ &= C_u - x_o . \end{aligned}$$

(3.7.2) Proposition. *Soient* V *une courbe complexe* $(p=2)$ *de* $\mathbb{C}^\delta$, δ *entier* $\geqslant 2$, $x_o \in V$, G *la courbure de Gauss de* V *au point* x_o *et* u *un élément non nul de* $T_{x_o}V$. *Alors :*

i) $(g_u \circ g_u)_T = \frac{G}{2} \|u\|^2 \, id(T_{x_o}V)$;

pour que u *soit non dégénéré il faut et il suffit que la courbure de Gauss de* V *au point* x_o *soit non nulle ;*

ii) Si $G \neq 0$, *on a* $H_u = C_u$.

Preuve.

1° Soient (τ_1, τ_2) une base orthonormée de $T_{x_o}V$ telle que $\tau_2 = i\tau_1$. La formule de Gauss donne, compte tenu de la $\mathbb{C}$-linéarité de α :

(3.7.2.1) $$G = -2\|\alpha(\tau_1, \tau_1)\|^2.$$

Du fait que g_u est antisymétrique et que $g(\tau_i) = \alpha(u,\tau_i)$ il résulte que la matrice de $-(g_u \circ g_u)_T$ sur la base τ_1, τ_2 est le produit de la matrice unité par $\|\alpha(u,\tau_1)\|^2$. Donc :

$$\begin{aligned} (g_u \circ g_u)_T &= -\|\alpha(u,\tau_1)\|^2 \, id(T_{x_o}V) \\ &= -\|u\|^2 \, \|\alpha(\tau_1,\tau_1)\|^2 \, id(T_{x_o}V) \\ &= \frac{G}{2} \|u\|^2 \, id(T_{x_o}V). \end{aligned}$$

2° Supposons $G \neq 0$ et soit $u \in T_{x_o}V$ tel que $\|u\| = 1$. Alors u est non dégénéré et $((g_u \circ g_u)_T)^{-1} = \frac{2}{G} \, id(T_{x_o}V)$, donc, d'après la formule (3.5.1) :

$$H_u - x_o = \frac{-2g_u(u)}{G} ,$$

i.e., d'après (3.7.2.1) appliquée avec $\tau_1 = u$:

$$H_u - x_o = \frac{\alpha(u,u)}{\|\alpha(u,u)\|^2}, \text{ donc } H_u = C_u.$$

3.8. Cas des hypersurfaces réelles ou complexes.

(3.8.1) Proposition. *Soient* V *une hypersurface de* $\mathscr{E}$ *et* u *un élément non nul de* $T_{x_o}V$ *. Alors :*

$$(g_u \circ g_u)_N = - \|h_{\nu_1}(u)\|^2 \, id(N_{x_o}V).$$

Pour que u *soit dégénéré il faut et il suffit que* $\mathbb{R}u$ *soit une direction principale ayant une courbure principale associée nulle.*

Preuve. Soit $\nu_1 \in N_{x_o}V$ tel que $\|\nu_1\| = 1$.

On a $((g_u \circ g_u)(\nu_1)|\nu_1) = -(g_u(\nu_1)|g_u(\nu_1))$

$$= -(h_{\nu_1}(u)|h_{\nu_1}(u))$$

d'où la proposition.

(3.8.2) Proposition. *Soient* V *une hypersurface complexe* $(q = 2)$ *de* $\mathbb{C}^\delta$, δ *entier* $\geqslant 2$ *, et* $u \in T_{x_o}V$ *.Notons* Q *la courbure de Ricci de* V *au point* x_o *. Alors :*

i) $(g_u \circ g_u)_N = \frac{1}{2}(Q(u)|u)id(N_{x_o}V)$.

ii) u *est non dégénéré si et seulement si* $Q(u) \neq 0$.

Preuve. Soit (ν_1, ν_2) une base de $N_{x_o}V$ telle que $\nu_2 = i\nu_1$. Du fait que g_u est antisymétrique et que $g_u(\nu_k) = -h_{\nu_k}(u)$, il résulte que la matrice de $-g_u \circ g_u$ sur la base (ν_1, ν_2) est le produit de la matrice unité par $(h_1(u)|h_1(u))$, donc

$$(g_u \circ g_u)_N = -((h_1 \circ h_1)(u)|u)id(N_{x_o}V).$$

Or, V étant une sous-variété complexe de $\mathbb{C}^\delta$, $\beta^2 = -Q$, et V étant une hypersurface complexe, $\beta^2 = 2h_1 \circ h_1$. Donc

$$(g_u \circ g_u)_N = \frac{1}{2}(Q(u)|u)id(N_{x_o}V).$$

Donc u est dégénéré si et seulement si

$$(Q(u)|u) = 0.$$

Cette condition équivaut, compte tenu de la relation $Q = -\beta^2$ à $Q(u) = 0$.

(3.8.3) Remarque. Les valeurs propres de la courbure de Ricci d'une hypersurface complexe de $\mathbb{C}^\delta$ sont toujours d'ordre $\geqslant 2$, du fait de la $\mathbb{C}$-linéarité de la courbure de Ricci d'une variété kahlérienne. Ceci résulte aussi du lemme algébrique suivant utile pour la suite.

(3.8.4) Lemme. *Soient* F *un espace hermitien de dimension complexe* k, $F_{\mathbb{R}}$ *l'espace euclidien sous-jacent,* f *un endomorphisme symétrique de* $F_{\mathbb{R}}$ *tel que* $f \circ \mathcal{J} = -\mathcal{J} \circ f$, *où* $\mathcal{J}$ *est la multiplication par* i. *Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres de* f *de la forme* $a_1, \mathcal{J}a_1, a_2, \mathcal{J}a_2, a_k, \mathcal{J}a_k$. *Sur une telle base la matrice de* f *est diagonale, avec pour diagonale* $\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \ldots, \lambda_k, -\lambda_k$. *Par suite les valeurs propres de* f^2 *sont toutes d'ordre au moins deux.*

(3.8.5) Proposition. *Avec les hypothèses de la proposition (3.8.2), supposons* $\alpha(u,u) \neq 0$. *Alors* u *est non dégénéré et les conditions suivantes a) et b) sont équivalentes :*

a) $H_u = C_u$;

b) $\tau_u = 0$.

De plus les propriétés a) et b) entraînent c) :

c) u *est vecteur propre de* Q.

Supposons en outre que les valeurs propres de Q *sont d'ordre deux, alors c) est équivalente à a) et b).*

Preuve.

1° Comme $\alpha(u,u) \neq 0$ il existe $\xi \in N_{x_o}V$ tel que $\|\xi\| = 1$ et $(h_\xi(u)|u) \neq 0$. Posons $\nu_1 = \xi$ et $\nu_2 = i\nu_1$. Alors $h_1(u) \neq 0$.

Comme, d'après (3.8.2) i)

(3.8.5.1) $$(g_u \circ g_u)_N = -\|h_1(u)\|^2 \, \mathrm{id}(N_{x_o}V),$$

il en résulte que u est non dégénéré.

$$((g_u \circ g_u)_N)^{-1} = -\frac{1}{\|h_1(u)\|^2} \, \mathrm{id}(N_{x_o}V),$$

donc, d'après la formule (3.6.1) :

(3.8.5.2) $$H_u - x_o = \frac{1}{\|h_1(u)\|^2}\alpha(u,u).$$

(3.8.5.3) On a $C_u - x_o = \frac{1}{\|\alpha(u,u)\|^2}\alpha(u,u)$, donc H_u et C_u sont tous deux sur la droite affine $x_o + R\,\alpha(u,u)$. Il résulte alors de la formule (2.2.1) que $H_u = C_u$ si et seulement si $\mathcal{T}_u = 0$.

2° $\alpha(u,u) = (h_1(u)|u)\nu_1 + (h_2(u)|u)\nu_2$ donc $\|\alpha(u,u)\|^2 = (h_1(u)|u)^2 + (\mathcal{J}h_1(u)|u)^2$
$= (h_1(u)|u)^2 + (h_1(u)|\mathcal{J}u)^2.$

La condition $H_u = C_u$ équivaut donc à :

(3.8.5.4) $$\|h_1(u)\|^2 = (h_1(u)|u)^2 + (h_1(u)|\mathcal{J}u)^2.$$

En complétant u, $\mathcal{J}u$ en une base orthonormée de $T_{x_o}V$ on voit que 3.8.5.4. équivaut à $h_1(u) \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}\mathcal{J}u$, i.e. $h_1(u) \in \mathbb{C}u$.

Prouvons que a) entraîne c). Supposons $H_u = C_u$.

Alors $h_1(u) = zu$ et comme h_1 est antilinéaire : $h_1(h_1(u)) = |z|^2u$.

V étant une hypersurface complexe de $\mathbb{C}^\delta$, $Q(u) = -2h_1^2(u)$, donc $Q(u) = |z|^2u$.

3° D'après la remarque (3.8.3) les valeurs propres de $Q = -2h_1^2$ sont toutes d'ordre $\geqslant 2$. Supposons qu'elles sont d'ordre deux, ce qui est le cas général. Alors d'après le lemme (3.8.4) il existe une base orthonormée de vecteurs propres de h_1 de la forme $a_1, ia_1, \ldots, a_k, ia_k$ et les sous-espaces propres de Q sont les $\mathbb{C}a_\ell$.

Supposons que u soit vecteur propre de Q :

$$u = z a_\ell \quad \text{avec} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Alors $h_1(u) = \bar{z}h_1(a_\ell)$
$= \bar{z}\lambda\, a_\ell$
donc $h_1(u) \in \mathbb{C}u$, i.e. $H_u = C_u$.

Ainsi, lorsque les valeurs propres de Q sont d'ordre deux, c) entraîne a).

4. Vecteurs tels que $g_u = 0$ ou $\mathcal{T}_u = 0$, relations avec les points focaux.

Parmi les vecteurs dégénérés se trouvent évidemment les u tels que $g_u = 0$. La proposition suivante donne diverses caractérisations de ces derniers.

(4.1) Proposition. *Soient* V *une sous-variété d'un espace affine euclidien* $\mathscr{E}$, $x_o \in V$ *et* $u \in T_{x_o} V$. *Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $g_u = 0$;

ii) $\mathscr{C}_u = \mathscr{E}$;

iii) $\beta(u) = 0$;

iv) $\alpha(u,.) = 0$;

v) $u \in \cap \operatorname{Ker} h_\xi$ *pour* $\xi \in N_{x_o} V$.

Preuve. iii), iv) et v) sont équivalentes de façon générale (cf. (I.1.6)).

Comme $\mathscr{C}_u$ est un sous-espace affine d'espace vectoriel associé $\operatorname{Ker} g_u$, $g_u = 0$ si et seulement si $\mathscr{C}_u = \mathscr{E}$, donc i) équivaut à ii).

On a vu (II.4.5) que $\| \hat{g}_u \| = \| \beta(u) \|$, donc i) équivaut à iii).

L'énoncé suivant précise, dans le cas des courbes et hypersurfaces réelles ou complexes, quelles sont les directions de $\mathbb{R}u$ pour lesquelles $g_u = 0$.

(4.2) Proposition. *Soit* u *un élément non nul de* $T_{x_o} V$.

i) Supposons que V *est une courbe (resp. une courbe complexe dans* $\mathbb{C}^\delta$, *entier* $\geqslant 2$ *). Alors* $g_u = 0$ *si et seulement si la courbure (resp. la courbure de Gauss) de* V *au point* x_o *est nulle.*

ii) Supposons que V *est une hypersurface de* $\mathscr{E}$. *Alors* $g_u = 0$ *si et seulement si la droite* $\mathbb{R}u$ *est une direction principale de* V *au point* x_o , *dont la courbure principale associée est nulle.*

iii) Supposons que V *est une hypersurface complexe de* $\mathbb{C}^\delta$, δ *entier* $\geqslant 2$. *Notons* Q *la courbure de Ricci de* V *au point* x_o . *Alors* $g_u = 0$ *si et seulement si* $Q(u) = 0$.

Preuve. La propriété $g_u = 0$ entraîne évidemment que u est dégénéré. Prouvons que la réciproque est vraie dans les cas considérés.

Supposons u dégénéré.

1° Supposons que V est une courbe. Alors d'après (3.7.1) la courbure λ de V au point x_o est nulle. Or $\beta = \lambda \operatorname{id}(T_{x_o} V)$, donc $g_u = 0$, d'après le lemme (1.1).

2° Supposons que V est une courbe complexe. Alors d'après (3.7.2) la courbure de Gauss G de V au point x_o est nulle.

Or $Q = G \operatorname{id}(T_{x_o} V)$, donc $Q = 0$.

V étant une sous-variété complexe de $\mathbb{C}^{\delta}$, on a $Q = -\beta^2$, donc $\beta^2 = 0$, donc $\beta = 0$ (car β est symétrique), donc $g_u = 0$.

3° Supposons que V est une hypersurface de $\mathscr{E}$. Alors d'après (3.8.1), $h_1(u) = 0$. Or $\beta = |h_1|$, donc Ker β = Ker h_1.

Donc $\beta(u) = 0$, donc $g_u = 0$.

4° Supposons que V est une hypersurface complexe de $\mathbb{C}^{\delta}$. Alors d'après (3.8.2), $Q(u) = 0$. Or $Q = -\beta^2$, donc $\beta(u) = 0$, donc $g_u = 0$.

La proposition découle alors de (3.7.1), (3.7.2), (3.8.1) et (3.8.2).

Nous allons maintenant étudier la condition $\tau_u = 0$.

(4.3) Proposition. *Soit* $u \in T_{x_o} V$.

A) Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\tau_u = 0$;

ii) u *est orthogonal à* $\mathscr{C}_u$;

iii) Il existe un élément $\xi \neq 0$ *de* $N_{x_o} V$ *et un réel* $\lambda \neq 0$ *tel que* $h_\xi(u) = \lambda u$.

B) Supposons $u \neq 0$ *et* $\tau_u = 0$.

Alors l'ensemble des $\xi \in (N_{x_o} V) \setminus \{0\}$ *tels que* u *soit vecteur propre de* h_ξ *avec une valeur propre associée non nulle est l'ensemble des* $\xi \in N_{x_o} V \setminus \{0\}$ *tels que la droite affine* $x_o + \mathbb{R}\xi$ *rencontre le sous-espace central* $\mathscr{C}_u$.

Preuve de A. Si $u = 0$, i), ii), iii) sont évidemment vraies. Supposons $u \neq 0$.

1° i) équivaut à ii) du fait que τ_u est la projection orthogonale de u sur $\vec{\mathscr{C}}_u$.

2° Supposons $\tau_u = 0$.

$$\tau_u = X_u(H_u) \text{ et } X_u(H_u) = u + g_u(H_u - x_o), \text{ donc } 0 = u + g_u(H_u - x_o).$$

Puisque $u \neq 0$, on a $H_u - x_o \neq 0$.

Posons $\xi_o = \dfrac{H_u - x_o}{\|H_u - x_o\|}$, alors $\xi_o \in N_{x_o} V$ et $h_{\xi_o}(u) = \dfrac{1}{\|H_u - x_o\|} u$, donc i) entraîne iii).

3° Supposons $h_\xi(u) = \lambda u$ avec $\xi \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, i.e. $-g_u(\xi) = \lambda u$.
Puisque $\lambda \neq 0$, $u = -\frac{1}{\lambda} g_u(\xi)$. Donc $u \in \mathcal{I}m\, g_u$,

$$\text{i.e.} \quad u \in (\mathrm{Ker}\, g_u)^\perp$$
$$\text{i.e.} \quad u \in (\vec{\mathscr{C}}_u)^\perp .$$

Donc iii) entraîne ii).

Conclusion : i), ii), iii) sont équivalentes.

Preuve de B.

1° Supposons $h_\xi(u) = \lambda u$ avec $\xi \neq 0$ et $\lambda \neq 0$. On a pour tout réel t :

$$X_u(x_o + t\xi) = u + g_u(t\xi)$$
$$X_u(x_o + t\xi) = i - \mathrm{th}_\xi(u)$$
$$X_u(x_o + t\xi) = (1 - t\lambda)u,$$

donc, pour $t_1 = \frac{1}{\lambda}$, on a $X_u(x_o + t_1\xi) = 0$ et par conséquent $x_o + t_1\xi \in \mathscr{C}_u$.

Donc $x_o + \mathbb{R}\xi$ rencontre $\mathscr{C}_u$.

2° Réciproquement supposons que ξ est non nul et que $x_o + \mathbb{R}\xi$ rencontre $\mathscr{C}_u$.
Soit t réel tel que $x_o + t\xi \in \mathscr{C}_u$ i.e. $X_u(x_o + t\xi) = 0$ (car $\mathcal{T}_u = 0$).

On a vu que $X_u(x_o + t\xi) = u - \mathrm{th}_\xi(u)$, donc $\mathrm{th}_\xi(u) = u$.

Puisque $u \neq 0$, on a $t \neq 0$, donc $h_\xi(u) = \frac{1}{t} u$.

Donc u est vecteur propre de h_ξ avec une valeur propre associée non nulle.

(4.4) Remarques.

(4.4.1) Si $u \in T_{x_o} V$ et $u \neq 0$, on ne peut avoir simultanément $\mathcal{T}_u = 0$ et $g_u = 0$.

En effet : $X_u(H_u) = u + g_u(H_u - x_o)$

(4.4.1.1) i.e. $\mathcal{T}_u = u + g_u(H_u - x_o)$

(4.4.2) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $u \in \vec{\mathscr{C}}_u$;
ii) $\mathcal{T}_u = u$;
iii) $x_o \in \mathscr{C}_u$;
iv) $\alpha(u,u) = 0$.

En effet :

1° τ_u est la projection orthogonale de u sur $\vec{\mathscr{C}}_u$, donc $u \in \vec{\mathscr{C}}_u$ équivaut à $\tau_u = u$.

2° $\tau_u = u$ équivaut, d'après (4.4.1.1), à :

$$H_u - x_o \in \operatorname{Ker} g_u$$
$$\text{i.e. } H_u - x_o \in \vec{\mathscr{C}}_u$$
$$\text{i.e. } x_o \in \mathscr{C}_u \quad (\text{puisque } H_u \in \mathscr{C}_u).$$

3° $x_o \in \mathscr{C}_u$ équivaut à $g_u(X_u(x_o)) = 0$, i.e. $g_u(u) = 0$, i.e. $\alpha(u,u) = 0$.

Conclusion : i), ii), iii), iv) sont équivalentes.

(4.5) Relations avec les points focaux.

Rappelons qu'un point $y \in \mathscr{E}$ est un point focal de V relatif au point x_o si et seulement si il est de la forme $y = x_o + \frac{1}{\lambda}\xi$, où ξ est un vecteur unitaire normal au point x_o à V, et λ une valeur propre non nulle de h_ξ (cf. [Mil.]).

Si $h_\xi(u) = \lambda u$ avec $u \neq 0$, nous dirons que y **est un point focal associé à u.**

(4.5.1) Théorème (Interprétation cinématique des points focaux).

Soit $u \in T_{x_o}V$, $u \neq 0$. *Alors :*

1. Un point $y \in \mathscr{N}_{x_o}V$ *est un point focal associé à* u *si et seulement si* $X_u(y) = 0$;

2. Pour qu'il existe un point focal associé à u *, il faut et il suffit que* $\tau_u = 0$;

et quand cette condition est remplie, l'ensemble des points focaux associés à u *est* $\mathscr{C}_u \cap \mathscr{N}_{x_o}V$.

En particulier, lorsque $\tau_u = 0$:

i) Si $p \leqslant q$ *et si* u *est non dégénéré, l'ensemble des points focaux associés à* u *est égal à* $\mathscr{C}_u$;

ii) Si $p \geqslant q$ *et si* u *est non dégénéré, l'ensemble des points focaux associés à* u *est réduit au point* H_u *qui est, sous les hypothèses faites, l'unique élément de* $\mathscr{C}_u \cap \mathscr{N}_{x_o}V$.

1° Soit $y \in \mathscr{N}_{x_o}V$ un point focal associé à u : $h_\xi(u) = \lambda u$, avec $\lambda \neq 0$, et $y = x_o + \frac{1}{\lambda}\xi$. Alors $h_{y-x_o}(u) = u$, i.e. $0 = u + g_u(y-x_o)$, i.e. $0 = X_u(y)$.

2° Inversement, soit $y \in \mathcal{N}_{x_o} V$ tel que $X_u(y) = 0$. Comme $u \neq 0$, on a $y-x_o \neq 0$.

Posons $\xi = \dfrac{y-x_o}{\|y-x_o\|}$.

Alors en remontant le calcul du 1° on voit que y est un point focal de V associé à u.

3° La deuxième partie du théorème (4.5.1) découle directement de la première et de (3.1) et (3.2).

5. Limites d'intersections d'espaces normaux, tangents ... etc.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

(5.1) Lemme. *Soient* $\mathcal{J}$ *une partie de* $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, 0 *un point adhérent à* $\mathcal{J}$, *et pour tout* $t \in \mathcal{J}$, $A_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *une application affine.*

Supposons que :

i) A_t *tend vers* A *quand* t *tend vers 0 ;*

ii) $A^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ *et* $A_t^{-1}(\{0\}) \neq 0$ *pour tout* $t \in \mathcal{J}$. *Alors :*

1° Il existe $\eta > 0$ *tel que* $|t| < \eta$ *entraîne* $\dim A_t^{-1}(\{0\}) \leq \dim A^{-1}(\{0\})$;

2° S'il existe $\eta > 0$ *tel que* $|t| < \eta$ *entraîne* $\dim A_t^{-1}(\{0\}) = \dim A^{-1}(\{0\})$,

alors $A_t^{-1}(\{0\})$ *tend vers* $A^{-1}(\{0\})$ *dans la grassmannienne affine, quand* t *tend vers 0.*

(5.2) Théorème. *Supposons* $p \leq q$. *Soient* u *un élément non dégénéré de* $T_{x_o} V$ *et* $\gamma : I \to V$ *telle que* $\gamma(0) = x_o$ *et* $\gamma'(0) = u$. *Alors il existe* $\eta > 0$ *tel que* $0 < |t| < \eta$ *entraîne* $\dim \mathcal{N}_{\gamma(t)}V \cap \mathcal{N}_{x_o} V = q-p$, *et* $\mathcal{N}_{\gamma(t)}V \cap \mathcal{N}_{x_o} V$ *tend vers* $\mathcal{C}_u$ *quand* t *tend vers 0 par valeurs différentes de 0.*

Preuve. On peut supposer que $\mathcal{E}$ est vectoriel et que $x_o = 0$. Posons $T_{\gamma(t)}V = T_t$, $N_{\gamma(t)}V = N_t$, $\mathcal{T}_{\gamma(t)}V = \mathcal{T}_t$ et $\mathcal{N}_{\gamma(t)}V = \mathcal{N}_t$. On sait que, au voisinage de 0, V est l'ensemble des éléments $x+z$ tels que $x \in T_o$, $z \in N_o$ et $z = f(x)$, où f est une application C^∞ définie sur un voisinage ouvert de 0 dans T_o et à valeurs dans N_o, telle que $f(0) = 0$, $(Df)(0) = 0$ et $(D^2f)(0).v = \alpha(v,.)$ pour tout $v \in T_o$.

Posons $\gamma(t) = x(t) + f(x(t))$, où $x(t) \in T_o$. $\frac{\gamma(t)}{t} \to u$ quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$, et $u \in T_o$, donc $\frac{x(t)}{t} \to u$.

Par suite $\frac{(Df)(x(t))}{t} \to (D^2f)(0).u$ quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$

(5.2.1) i.e. $\frac{(Df)(x(t))}{t} \to \alpha(u,.)$ quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$.

Posons $M = \gamma(t)$, et pour tout $P \in \mathscr{E}$,

$$P = x_p + z_p \quad \text{où} \quad x_P \in T_o \quad \text{et} \quad z_P \in N_o,$$
$$P \in \mathscr{N}_o \cap \mathscr{N}_t \iff (x_P = 0 \quad \text{et} \quad P\text{-}M \in N_t).$$

$P\text{-}M \in N_t$ se traduit par :

$$((P-M)\,|\,(v+(Df)(x).v)) = 0 \quad \text{pour tout} \quad v \in T_o$$
$$\text{i.e.} \quad (x_P-x_M)\,|\,v + (z_P-z_M)\,|\,((Df)(x).v) = 0$$
$$\text{i.e.} \quad (x_P-x_M)\,|\,v + ((Df)(x))^*(z_P-z_M)\,|\,v = 0,$$

pour tout $v \in T_o$.

Comme $x_P - x_M + ((Df)(x))^*(z_P-z_M) \in T_o$, ceci équivaut à :

$$x_P - x_M + ((Df)(x))^*(z_P-z_M) = 0.$$

Ainsi $P \in \mathscr{N}_o \cap \mathscr{N}_t$ si et seulement si :

(5.2.2) $$x_P = 0 \quad \text{et} \quad -x_M + ((Df)(x))^*(z_P-z_M) = 0.$$

Notons $g_{u,2,1}$ (resp. $g_{u,1,2}$) l'application de $T_{x_o}V$ dans $N_{x_o}V$ (resp. de $N_{x_o}V$ dans $T_{x_o}V$) induite par g_u.

On déduit de l'antisymétrie de g_u que :

$$(g_{u,2,1})^* = -g_{u,1,2}.$$

Il résulte alors de (5.2.1) que le système ($x_P = 0$ et $-\frac{1}{t}x_M + \frac{((Df)(x))^*}{t}(z_P-z_M) = 0$) qui définit $\mathscr{N}_o \cap \mathscr{N}_t$, tend vers le système limite :

$$(x_P = 0 \text{ et } -u - g_u(z_P) = 0), \text{ quand } t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0.$$

Ce dernier équivaut à $(x_P = 0$ et $P \in \mathscr{C}_u)$, i.e. à $(P \in \mathscr{C}_u)$, puisque sous les hypothèses faites $\mathscr{C}_u \subset \mathscr{N}_o$.

Ainsi le système limite a pour ensemble de solutions l'espace central $\mathscr{C}_u$.

Or dim $\mathscr{C}_u = q-p$. Donc, d'après le lemme (5.1), il existe $\eta > 0$ tel que $0 < |t| < \eta$ entraîne $\dim(N_o \cap N_t) \leqslant q-p$. Comme $\dim(N_o \cap N_t) \geqslant q-p$, on a

$$\dim(N_o \cap N_t) = q-p, \quad \text{et par conséquent}$$
$$\dim(N_o + N_t) = n.$$

Donc $\mathscr{N}_o \cap \mathscr{N}_t \neq \emptyset$ et dim $\mathscr{N}_o \cap \mathscr{N}_t = q-p$, d'où le théorème (5.2), d'après le lemme (5.1), 2° .

(5.3) Théorème. *Supposons* $p \geqslant q$. *Soient* u *un élément non dégénéré de* $T_{x_o}V$ *et* $\gamma : I \to V$ *telle que* $\gamma(0) = x_o$ *et* $\gamma'(0) = u$. *Alors il existe* $\eta > 0$ *tel que pour tout* t *vérifiant* $0 < |t| < \eta$ *on a* $\vec{\mathscr{N}}_{\gamma(t)}V \cap \vec{\mathscr{N}}_{x_o}V = \{0\}$.

Pour $0 < |t| < \eta$ *notons* $\mathscr{P}_t$ *l'espace affine de dimension* $n-2q$ *qui rencontre orthogonalement* $\mathscr{N}_{\gamma(t)}V$ *et* $\mathscr{N}_{x_o}V$. $\mathscr{P}_t$ *tend vers* $\mathscr{C}_u$ *quand* $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$.

De plus soit $K_o(t)$ *(resp.* $K(t)$ *) le point intersection de* $\mathscr{P}_t$ *avec* $\mathscr{N}_{x_o}V$ *(resp.* $\mathscr{N}_{\gamma(t)}V$ *), alors* $K_o(t)$ *et* $K(t)$ *tendent vers* H_u *et* $\frac{1}{t}(K(t) - K_o(t))$ *tend vers* $\mathscr{T}_u$ *quand* $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$. *Enfin* $\mathscr{T}_{\gamma(t)}V \cap \mathscr{T}_{x_o}V$ *tend vers l'espace affine passant par* x_o *et de direction* $\vec{\mathscr{C}}_u$.

Preuve. Posons $\vec{\mathscr{P}}_t = (\mathscr{N}_o + \mathscr{N}_t)^{\perp}$,

i.e. $\vec{\mathscr{P}}_t = \vec{\mathscr{T}}_o \cap \vec{\mathscr{T}}_t$.

Ainsi dim $\vec{\mathscr{P}}_t \geqslant p-q$.

Représentons V comme au n° (5.2) à l'aide d'une application f et supposons $t \neq 0$.

Soit $w \in \mathscr{E}$. $w = w_1 + w_2$, avec $w_1 \in T_o$ et $w_2 \in N_o$. $w \in \vec{\mathscr{T}}_o \cap \vec{\mathscr{T}}_t$ équivaut à :

$$(w_2 = 0 \text{ et } w_2 = (Df)(x).w_1)$$

$$\text{i.e. } (w_2 = 0 \text{ et } \frac{(Df)(x)}{t} w_1 = 0).$$

Ce système a pour système limite :

$$(w_2 = 0 \text{ et } ((D^2f)(0).u).w_1 = 0) \text{ quand } t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0,$$

$$\text{i.e. } (w_2 = 0 \text{ et } g_u(w_1) = 0).$$

Or par hypothèse u est non dégénéré, i.e. Ker $g_u \subset T_{x_o} V$, donc le système limite équivaut à $(g_u(w) = 0)$, i.e. $(w \in \text{Ker } g_u)$.

On a vu que sous les hypothèses faites dim Ker g_u = p-q.

Le même type de raisonnement que pour le théorème (5.2) montre alors que $\vec{\mathcal{T}}_o \cap \vec{\mathcal{T}}_t$ tend vers $\vec{\mathcal{C}}_u$ (= Ker g_u).

En particulier il existe $\eta > 0$ tel que $0 < |t| < \eta$ entraîne dim $\vec{\mathcal{P}}_t$ = p-q .

Comme $\vec{\mathcal{N}}_o + \vec{\mathcal{N}}_t + \vec{\mathcal{P}}_t = \vec{\mathcal{E}}$, la relation $0 < |t| < \eta$ entraîne $\dim(\vec{\mathcal{N}}_o + \vec{\mathcal{N}}_t) = 2q$, et par conséquent $\vec{\mathcal{N}}_o \cap \vec{\mathcal{N}}_t = \{0\}$.

Il en résulte que pour $0 < |t| < \eta$ il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{P}_t$ de $\mathcal{E}$ ayant pour direction $\vec{\mathcal{P}}_t$ et qui rencontre à la fois $\mathcal{N}_o$ et $\mathcal{N}_t$. $\mathcal{P}_t$ a un unique point commun $K_o(t)$ (resp. $K(t)$) avec $\mathcal{N}_{x_o} V$ (resp. $\mathcal{N}_t V$).

Posons $M(t) = x(t) + f(x(t))$, où $x(t) \in T_o$, et

(5.3.1) $$K(t) - M(t) = \lambda + \mu, \text{ où } \lambda \in T_o \text{ et } \mu \in N_o.$$

Dans la suite de la démonstration x(t) sera parfois noté x pour alléger l'écriture.

Prouvons que $K(t) - M(t)$ tend vers une limite $\mu_o \in N_o$ quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$.

$K(t) - M(t) \in N_t$ se traduit par :

$$(\lambda | v) + (\mu | (Df)(x).v) = 0 \text{ pour tout } v \in T_o,$$

$$\text{i.e. } (\lambda | v) + ((((Df)(x))^*.\mu) | v) = 0.$$

Or $\lambda + ((Df)(x))^* . \mu \in T_o$, donc

(5.3.2) $$\lambda + ((Df)(x))^* . \mu = 0.$$

$$\begin{aligned} K(t) &= (K(t) - M(t)) + M(t) \\ &= \lambda + \mu + x(t) + f(x(t)) \\ &= (\lambda + x(t)) + (\mu + f(x(t))) \end{aligned}$$

avec $\lambda + x(t) \in T_o$ et $\mu + f(x(t)) \in N_o$.

On a aussi $K(t) = (K(t) - K_o(t)) + K_o(t)$, avec $K(t) - K_o(t) \in T_o$ et $K_o(t) \in N_o$.

Donc $K(t) - K_o(t) = \lambda + x(t)$.

Or $K(t) - K_o(t) \subset (\vec{\mathcal{N}}_t)^\perp$,

i.e. $K(t) - K_o(t) \subset \vec{\mathcal{T}}_t$,

i.e. $0 = (Df)(x).(\lambda + x(t))$

(5.3.3) $$0 = (Df)(x).\ \lambda + (Df)(x).x.$$

Les relations (5.3.2) et (5.3.3) donnent :

(5.3.4) $$(Df)(x).x - (Df)(x).((Df)(x))^* \mu = 0$$

$\frac{(Df)(x)}{t} \circ \frac{((Df)(x))^*}{t}$ tend vers $g_{u,2,1} \circ (g_{u,2,1})^*$, i.e. vers $-g_{u,2,1} \circ g_{u,1,2}$ quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi $\frac{(Df)(x)}{t} \circ \frac{((Df)(x))^*}{t}$ tend vers $-(g_u \circ g_u)_N$. Comme u est non dégénéré $(g_u \circ g_u)_N$ est bijective. Il en résulte que pour t assez petit non nul $(Df)(x) \circ ((Df)(x))^*$ est bijective, et par conséquent μ est déterminé par (5.3.4)

$$\mu = \left(\frac{(Df)(x)}{t} \circ \frac{((Df)(x))^*}{t}\right)^{-1} . \left(\frac{(Df)(x)}{t} . \frac{x}{t}\right).$$

$\frac{(Df)(x)}{t} . \frac{x}{t}$ tend vers $g_u(u)$ quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$.

Donc μ tend vers une limite μ_o :

$$\mu_o = -((g_u \circ g_u)_N)^{-1} . g_u(u)$$

i.e. $\mu_o = H_u - x_o$.

Montrons que $\dfrac{K(t) - K_o(t)}{t}$ tend vers une limite quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$

$$\frac{K(t) - K_o(t)}{t} = \frac{\lambda + x(t)}{t}$$

D'après (5.3.2) on a :

$$\frac{\lambda}{t} + \frac{((Df)(x))^*}{t} \cdot \mu = 0,$$

donc $\dfrac{\lambda}{t}$ tend vers $-(g_{u,2,1})^* \cdot \mu_o$ i.e. vers $g_u(\mu_o)$, quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$.

En particulier λ tend vers 0 quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\dfrac{K(t) - K_o(t)}{t}$ tend vers $u + g_u(\mu_o)$

$$= u + g_u(H_u - x_o)$$
$$= X_u(H_u)$$
$$= \mathcal{T}_u.$$

En particulier $K(t) - K_o(t)$ tend vers 0 quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$.

Or $K(t) - M(t) = \lambda + \mu$, donc $K(t) \to x_o + \mu_o$, i.e. $K(t) \to H_u$ quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$. Par suite $K_o(t)$ tend vers H_u aussi.

$K(t) \in \mathcal{P}_t$ et $K(t)$ tend vers H_u quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$.

De plus $\vec{\mathcal{P}}_t$ tend vers Ker g_u quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$.

Il en résulte que $\mathcal{P}_t$ tend vers l'espace central $\mathcal{C}_u$ lorsque $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$.

Montrons pour finir que $\mathcal{T}_t \cap \mathcal{T}_o$ tend vers l'espace affine passant par x_o et dont la direction est $\vec{\mathcal{C}}_u$.

Posons $P = \alpha + \beta$ où $\alpha \in T_o$ et $\beta \in N_o$, $P \in \mathcal{T}_t \cap \mathcal{T}_o$ équivaut à :

$$(\beta = 0 \quad \text{et} \quad \beta - f(x) = (Df)(x).(\alpha - x))$$
$$\text{i.e. à } (\beta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(x)}{t} + \frac{(Df)(x)}{t} \cdot (\alpha - x) = 0).$$

$\gamma(t) = x + f(x)$, donc $\dfrac{x+f(x)}{t}$ tend vers u quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$. Comme $u \in T_o$,

$\frac{f(x)}{t}$ tend vers 0 quand $t \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$, et le système précédent a pour système limite :

$$(\beta = 0 \text{ et } g_u(\alpha) = 0)$$

i.e. $(g_u(P) = 0)$, puisque sous les hypothèses faites $\operatorname{Ker} g_u \subset T_o$.

Cette équation limite a pour ensemble de solutions l'espace affine passant par x_o de direction $\operatorname{Ker} g_u$. Cet espace (non vide) est de dimension p-q. On a vu que pour $0 < |t| < \eta$, $\vec{\mathcal{T}}_o \cap \vec{\mathcal{T}}_t$ a pour dimension p-q, donc $\vec{\mathcal{T}}_o + \vec{\mathcal{T}}_t = \vec{\mathcal{E}}$. Il en résulte $\mathcal{T}_o \cap \mathcal{T}_t \neq \emptyset$ et $\dim \mathcal{T}_o \cap \mathcal{T}_t = p-q$. Par suite, d'après le lemme (5.1) 2°, $\mathcal{T}_o \cap \mathcal{T}_t$ tend vers le sous-espace affine passant par x_o de direction $\vec{\mathcal{C}}_u = \operatorname{Ker} g_u$.

CHAPITRE IV

SUR LES SOUS-ESPACES "LONGITUDINAUX" ET LES DIRECTIONS PRINCIPALES DES TUBES AUTOUR D'UNE SOUS-VARIETE

Nous étudions d'abord le cas où la variété ambiante $\tilde{V}$ est un espace euclidien. Les choses sont alors beaucoup plus simples que dans le cas général. En particulier toutes les notions raisonnables d'espaces longitudinaux se confondent en une seule.

1. Cas où $\tilde{V}$ est un espace euclidien.

(1.1) Notations et définitions relatives aux tubes autour de V.

Soit r réel > 0. Pour tout $x \in V$, notons $\mathrm{Tub}_x^{<r>} V$ la sphère de l'espace affine normal $\mathcal{N}_x V$ qui a pour centre x et pour rayon r. Pour toute partie A de V notons $\mathrm{Tub}_A^{<r>} V$ la réunion des $\mathrm{Tub}_x^{<r>} V$ pour x décrivant A.

Soient $x_o \in V$ et $\lambda_o = \mathrm{Sup}\, \| h_\xi(v) \|$ pour v (resp. ξ) décrivant la sphère unité de $T_{x_o} V$ (resp. $N_{x_o} V$). Dans la suite nous supposerons toujours $r < \frac{1}{\lambda_o}$. On sait qu'il existe alors U ouvert de V contenant x_o tel que $\mathrm{Tub}_U^{<r>} V$ soit une hypersurface de $\mathcal{E}$ réunion disjointe des $\mathrm{Tub}_x^{<r>} V$ pour $x \in U$, et que l'application $\varpi : \mathrm{Tub}_u^{<r>} V \to U$ définie par $\varpi(y) = x$ pour tout $y \in \mathrm{Tub}_x^{<r>} V$ soit une submersion.

Dans la suite nous écrirons souvent Tub V pour $\mathrm{Tub}^{<r>} V$, etc. . Nous noterons ℓ l'endomorphisme fondamental du tube au point y, associé à $\xi = \frac{y-x}{\| y-x \|}$.

On a $\vec{\mathcal{T}}_y(\mathrm{Tub}\ V) = \vec{\mathcal{T}}_y(\mathrm{Tub}_x V) \oplus \vec{\mathcal{T}}_x V$, où la somme directe est orthogonale.

$\vec{\mathcal{T}}_y(\mathrm{Tub}_x V)$ est stable par ℓ (pour tout $b \in \vec{\mathcal{T}}_y(\mathrm{Tub}_x V)$, $\ell(b) = -\frac{1}{r} b$). Comme ℓ est symétrique, l'orthogonal $\vec{\mathcal{T}}_x V$ est aussi stable par ℓ.

Nous noterons $\hat{\ell}$ l'endomorphisme induit par ℓ dans $\vec{\mathcal{T}}_{x_o} V$.

Les objets relatifs à $\hat{\ell}$ seront qualifiés par l'adjectif "longitudinal". On parlera, par exemple, des courbures principales longitudinales, des directions principales longitudinales, etc. .

(1.2) Lemme. *Soient* $y \in \mathrm{Tub}_x V$ *et* $\xi = \frac{y-x}{\|y-x\|}$. *Avec les hypothèses et notations ci-dessus,* $\hat{\ell}$ *et* h_ξ *ont les mêmes sous-espaces propres.*
Si u *est vecteur propre de* $\hat{\ell}$ *et* h_ξ, $\hat{\ell}(u) = \mu u$ *et* $h_\xi(u) = \lambda u$, *alors* $\lambda = \frac{\mu}{1 + r\mu}$ *et* $\mu = \frac{\lambda}{1 - r\lambda}$.

Preuve. Soit b un vecteur propre de $\hat{\ell}$:

$$\ell(b) = \mu b, \quad b \neq 0.$$

Posons $\xi(y) = \frac{y-x}{\|y-x\|}$ où $x = \varpi(y)$.

Alors $-(D\xi)(y).b = \mu b$.

On a $y = \varpi(y) + r\xi(y)$, donc $b = (T_y\varpi).b + r(D\xi)(y).b$, donc, en posant $a = (T_y\varpi).b$,

$$a = (1+r\mu)b.$$

$T_y\varpi$ s'annule sur $T_y(\mathrm{Tub}_x V)$ et $T_y\varpi$ est surjective. Il en résulte que $T_y\varpi$ induit une bijection de $\vec{\mathcal{T}}_x V$ sur $\vec{\mathcal{T}}_x V$. Donc $a \neq 0$, et par conséquent $1 + r\mu \neq 0$.

Par ailleurs $-(((D\xi)(y).b)|v) = (h_\xi(a)|v)$, pour tout $v \in T_{x_o} V$, i.e. $(\mu b|v) = (h_\xi(a)|v)$ donc $h_\xi(a) = \mu b$, donc $h_\xi(b) = \frac{\mu}{1+r\mu} b$.

$T_y\varpi$ induisant un isomorphisme de $T_{x_o} V$ sur $T_{x_o} V$ et l'application $\mu \to \frac{\mu}{1+r\mu}$ étant injective il en résulte que $\hat{\ell}$ et h_ξ ont les mêmes sous-espaces propres.

(1.3) Corollaire. *Les points focaux de* V *sont les points focaux de* $\mathrm{Tub}^r V$ *qui n'appartiennent pas à* V. *Plus précisément, soit* $y \in \mathrm{Tub}_x^{<r>} V$. *Suppo-*

sons que $\mathbb{R}u$, $u \neq 0$, *est une direction principale longitudinale du tube au point* y *dont la courbure principale associée est non nulle. Notons* I_u *le centre de courbure principal du tube associé à* $\mathbb{R}u$.
Alors I_u *est un point focal de* V *associé à* u *:*

$$I_u - x = \frac{1}{\lambda}\xi \quad \text{où} \quad \xi = \frac{y-x}{\|y-x\|} \quad \textit{et} \quad h_\xi(u) = \lambda u.$$

De plus, tous les points focaux de V *associés à* u *sont obtenus de cette façon.*

Preuve. Soit μ la courbure principale du tube associée à $\mathbb{R}u$. Par définition de I_u :

$$I_u - y = \frac{1}{\mu}\xi .$$

$$\begin{aligned} I_u - x &= I_u - y + y-x \\ &= \frac{1}{\mu}\xi + r\xi \\ &= \frac{1}{\lambda}\xi \text{ , d'après (1.2).} \end{aligned}$$

(1.4) Proposition. *Supposons* $p \geqslant q$, $u \in T_{x_o}V$, u *non dégénéré et* $\tau_u = 0$.
Alors :
i) L'ensemble des $\xi \in N_{x_o}V$ *tels que* u *soit vecteur propre de* h_ξ *est une droite vectorielle* D_u *;*
ii) La droite affine $x_o + D_u$ *rencontre* $\mathrm{Tub}_{x_o}V$ *en deux points* y_1 *et* y_2 *. Au point* y_i $(i = 1,2)$, $\mathbb{R}u$ *est une direction principale longitudinale de* Tub V *et le centre de courbure principal correspondant n'est autre que* H_u .

(On rappelle (cf. (III.3.5)) que lorsque $p = q$, *la non dégénérescence de* u *implique* $\tau_u = 0$.*)*

Preuve de i). Puisque $\tau_u = 0$, il résulte de la proposition (III.4.3) que l'ensemble D_u des $\xi \in N_{x_o}V$ tels que u soit vecteur propre de h_ξ n'est pas réduit à 0.

Soit $\xi \neq 0$ tel que $\xi \in D_u$: $h_\xi(u) = \lambda u$. Alors nécessairement $\lambda \neq 0$ (sinon : $h_\xi(u) = 0$, i.e. $g_u(\xi) = 0$, avec $\xi \neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse u non dégénéré).

Soient $\xi_1 \in D_u$, $\xi_1 \neq 0$ et $\xi_2 \in D_u$, $\xi_2 \neq 0$.

Alors $h_{\xi_i}(u) = \lambda_i u$, avec $\lambda_i \neq 0$, pour $i = 1,2$, i.e. $g_u(\xi_1) = -\lambda_1 u$ et $g_u(\xi_2) = -\lambda_2 u$.

Donc $\lambda_2 g_u(\xi_1) - \lambda_1 g_u(\xi_2) = 0$,

i.e. $g_u(\lambda_2 \xi_1 - \lambda_1 \xi_2) = 0$,

donc $\lambda_2 \xi_1 - \lambda_1 \xi_2 = 0$ d'après la non dégénérescence de u.

Ainsi D_u est une droite vectorielle.

Preuve de ii). Soit i = 1 ou 2.

Posons $\xi = \frac{y_i - x_o}{\|y_i - x_o\|}$ et $\xi_o = \frac{H_u - x_o}{\|H_u - x_o\|}$. D'après (III.4.3) $\xi_o \in D_u$ et $\xi = \varepsilon \xi_o$ où $\varepsilon = \pm 1$.

On a vu dans la démonstration de (III.4.3) que $h_{\xi_o}(u) = \frac{1}{\|H_u - x_o\|} u$, donc $h_\xi(u) = \lambda u$ où $\lambda = \frac{\varepsilon}{\|H_u - x_o\|}$.

D'après le lemme (1.2), $\mathbb{R}u$ est donc une direction principale de Tub V au point y_i.

D'après le corollaire (1.3), en notant I_u le centre de courbure principal correspondant :

$$I_u - x_o = \frac{\|H_u - x_o\|}{\varepsilon} \xi$$

$$= H_u - x_o .$$

Comme $h_{-\xi} = -h_\xi$ pour tout $\xi \in N_{x_o} V$, il résulte du lemme (1.2) que si y_o et y_1 sont deux éléments quelconques antipodaux de $\mathrm{Tub}_{x_o} V$ et si $\mathbb{R}u$ est une direction principale longitudinale de Tub V au point y_o, $\mathbb{R}u$ l'est aussi au point y_1. Mais, lorsque $q \geqslant 2$, si on suit par continuité $\mathbb{R}u$ en allant de y_o à y_1 sur $\mathrm{Tub}_{x_o} V$, on aboutit en général à une direction principale autre que $\mathbb{R}u$:

(1.5) Théorème. *Supposons* $q \geqslant 2$ *et qu'en tout point de* $\mathrm{Tub}_{x_o} V$ *les* p *courbures principales longitudinales sont distinctes. Soient* $D_1, \dots, D_p$ *les directions principales longitudinales en un point* y_o *de* $\mathrm{Tub}_{x_o} V$ *, indexées de façon que les courbures principales correspondantes aillent en croissant. Alors si on suit* $(D_1, D_2, \dots, D_p)$ *par continuité le long d'un chemin dans* $\mathrm{Tub}_{x_o} V$ *, allant de* y_o *à son antipode* y_1 *, la position finale est* $(D_p, D_{p-1}, \dots, D_1)$.

Preuve. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathrm{Tub}_{x_o} V$ un chemin continu allant de y_o à y_1 dans $\mathrm{Tub}_{x_o} V$. Notons $\Delta_1(t), \dots, \Delta_p(t)$ les directions principales longitudinales au point $\gamma(t)$ et $\mu_1(t), \dots, \mu_p(t)$ les courbures principales correspondantes indexées de façon que $\mu_1(0) < \dots < \mu_p(0)$.

Il s'agit de démontrer que $\Delta_i(1) = \Delta_{p+1-i}(0)$.

Pour tout vecteur $t \in [0,1]$ posons $y_t = \gamma(t)$, $\xi_t = \dfrac{y_t - x_o}{\| y_t - x_o \|}$, et pour tout $i = 1,2,\dots,p$ soit $\tau_i(t)$ un vecteur unitaire appartenant à $\Delta_i(t)$ et dépendant continûment de t. D'après le lemme (1.2) :

$$h_{\xi_t}(\tau_i(t)) = \lambda_i(t)\, \tau_i(t).$$

Les λ_i sont des fonctions continues.

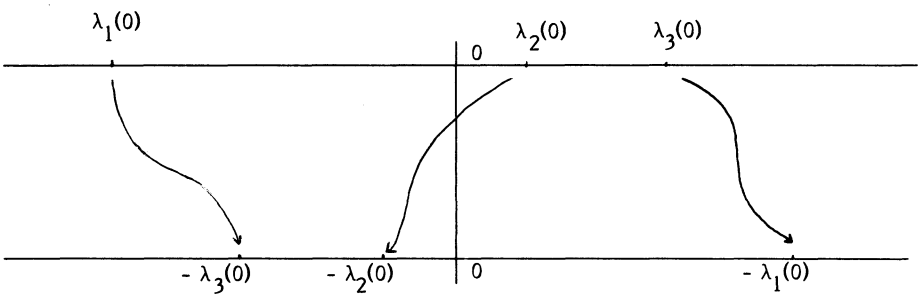
Soit S_t le spectre de h_{ξ_t}. Comme $h_{\xi_1} = -h_{\xi_o}$, on a $S_1 = -S_o$.

Il en résulte que :

(1.5.1) $$\lambda_i(1) = -\lambda_{p+1-i}(0)$$

pour tout $i = 1,2,\dots,p$, sinon il y aurait des "croisements", les valeurs propres de h_{ξ_t} ne seraient pas constamment distinctes.

Schéma pour le cas p = 3 :



De plus $h_{\xi_o}(\tau_i(1)) = \lambda_{p+1-i}(0)\tau_i(1)$, donc $\Delta_i(1) = \Delta_{p+1-i}(0)$. Notons que la relation (1.5.1) équivaut à :

$$\frac{\mu_i(1)}{1+r\mu_i(1)} = -\frac{\mu_{p+1-i}(0)}{1+r\mu_{p+1-i}(0)} ,$$

$$\text{d'où } \mu_i(1) = \frac{-\mu_{p+1-i}(0)}{1+2r\mu_{p+1-i}(0)} .$$

(1.6) Proposition.

i) Supposons $q \geqslant 2$ *et qu'en tout point* $y \in \mathrm{Tub}_{x_o} V$ *les* p *courbures principales longitudinales sont non nulles et distinctes. Alors en tout point* $y \in \mathrm{Tub}_{x_o} V$ *il y a autant de courbures longitudinales* > 0 *que de* <0.

ii) Si V *est compacte et si* $q \geqslant 2$ *il est impossible qu'en tout point de* V *les courbures principales longitudinales soient distinctes et non nulles.*

Preuve.

i) Soit $y_o \in \mathrm{Tub}_{x_o} V$. Supposons qu'il n'y a pas autant de courbures longitudinales > 0 que de < 0 au point y_o. Soit γ un chemin continu de $\mathrm{Tub}_{x_o} V$ allant de y_o à son antipode y_1. Alors, avec les notations de la preuve de (1.5), une valeur propre $\lambda_i(t)$ de h_{ξ_t} s'annulerait pour au moins un $t \in [0,1]$, la courbure principale longitudinale correspondante $\mu_i(t)$ serait nulle. Contradiction. Par exemple, sur le schéma relatif au cas p=3 considéré dans la preuve de (1.5), $\lambda_2(t)$ s'annule au moins une fois.

ii) Le ii) découle du i) et du fait que si V est compacte, Tub V l'est aussi, et par conséquent Tub V possède au moins un point où toutes les courbures principales sont non nulles et de même signe. Remarquons que ii) est encore valable si on considère une immersion isométrique au lieu d'une sous-variété V.

(1.7) Proposition. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) Les courbures principales longitudinales de Tub V *aux points de* $\mathrm{Tub}_{x_o} V$ *sont toutes non nulles ;*

ii) Pour tout élément ξ *non nul de* $N_{x_o} V$, h_ξ *est bijectif ;*

iii) $p \geqslant q$ *et tous les vecteurs non nuls de* $T_{x_o} V$ *sont non dégénérés.*

Preuve. D'après le lemme (1.2) les valeurs propres λ_i de h_ξ sont toutes non nulles si et seulement si les courbures principales longitudinales correspondantes sont toutes non nulles. Il en résulte que i) est équivalente à ii).

ii) équivaut à :

$$\forall \xi \in (N_{x_o} V) \setminus \{0\}, \quad \forall v \in (T_{x_o} V) \setminus \{0\}, \quad h_\xi(v) \neq 0.$$

iii) équivaut à :

$$\forall v \in (T_{x_o} V) \setminus \{0\}, \quad \forall \xi \in (N_{x_o} V) \setminus \{0\}, \quad g_v(\xi) \neq 0.$$

Il résulte alors de la relation $h_\xi(v) = -g_v(\xi)$ que ii) est équivalente à iii).

(1.7.1) Corollaire. *Supposons* $p \geqslant q$, $q \geqslant 2$, *et que la courbure de Lipschitz-Killing de* V *au point* x_o *est nulle. Alors il existe dans* $T_{x_o} V$ *un élément non nul et dégénéré.*

(On rappelle que lorsque p *est impair la courbure de Lipschitz-Killing est nulle .)*

Preuve. Notons $S^{<1>} N_{x_o} V$ la sphère unité de $N_{x_o} V$. L'hypothèse que la courbure de Lipschitz-Killing (cf. [Ch.La.]) au point x_o est nulle, s'écrit :

$$\int_{S^{<1>} N_{x_o} V} \det h_\xi = 0$$

La fonction intégrée est continue sur la sphère $S^{<1>} N_{x_o} V$ qui est connexe

car $q \geqslant 2$, si elle ne s'annulait pas elle garderait un signe constant, d'où une contradiction. Donc il existe $\xi_o \in N_{x_o}V$ tel que $\|\xi_o\| = 1$ et $\det h_\xi = 0$, d'où le résultat.

(1.7.2) Corollaire. *Supposons* $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$, V *connexe et compacte et que la caractéristique d'Euler-Poincaré de* V *est nulle. Alors il existe dans* TV *un élément non nul et dégénéré.*

Preuve. D'après le théorème de Gauss-Bonnet la nullité de la caractéristique d'Euler-Poincaré de V se traduit par :

$$\int_V \left(\int_{S^{<1>}N_{x_o}V} \det h_\xi\right) = 0.$$

V étant connexe, il existe $x_o \in V$ tel que :

$$\int_{S^{<1>}N_{x_o}V} \det h_\xi = 0.$$

On est donc ramené au corollaire (1.7.1).

Remarquons que (1.7.2) est encore valable si on considère une immersion isométrique au lieu d'une sous-variété V.

(1.8) Théorème. *Supposons* $p=q=2$ *et supposons qu'en tout point de* $\mathrm{Tub}_{x_o}V$ *les deux courbures principales longitudinales sont distinctes.*
Soit (u_1,u_2) *(resp.* (ν_1,ν_2)*) une base orthonormée de* $T_{x_o}V$ *(resp.* $N_{x_o}V$*).*
Posons $\xi_t = (\cos t)\nu_1 + (\sin t)\nu_2$, $y_t = x_o + r\xi_t$ *et soit* $\tau(t)$ *un vecteur unitaire tel que* $\mathbb{R}\tau(t)$ *soit une direction principale longitudinale du tube au point* y_t *, suivi par continuité. Posons* $k_\xi = 2h_\xi - (\mathrm{Tr}\, h_\xi)\mathrm{id}$ *et notons* $\varphi(t)$ *un angle polaire de* $k_{\xi_t}(u_1)$ *(resp.* $\theta(t)$ *un angle polaire de* $\tau(t)$ *) relativement à* u_1, $T_{x_o}V$ *étant orienté par* (u_1,u_2).
Alors, pour des déterminations continues convenables de φ *et* θ *on a :* $\theta = \frac{\varphi}{2}$ *ou* $\theta = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}$.
Ainsi, par exemple, ***lorsque*** y_t ***fait un demi-tour sur*** $\mathrm{Tub}_{x_o}V$, $k_{\xi_t}(u_1)$*décrit une demi-ellipse, et* τ ***décrit un quart de cercle dans*** $T_{x_o}V$.

Preuve. Soit $\begin{pmatrix} r(\xi) & s(\xi) \\ s(\xi) & t(\xi) \end{pmatrix}$ la matrice de h_ξ sur la base (u_1,u_2) de $T_{x_o}V$. L'endomorphisme $k_\xi = 2h_\xi - (\mathrm{Tr}\ h_\xi)\mathrm{id}$ a pour matrice sur la base (u_1,u_2) :

$$\begin{pmatrix} D(\xi) & S(\xi) \\ S(\xi) & -D(\xi) \end{pmatrix},$$

en posant $D(\xi) = r(\xi) - t(\xi)$ et $S(\xi) = 2s(\xi)$.

Les valeurs propres de h_ξ sont :

$$\lambda_\varepsilon = \frac{r(\xi) + t(\xi) + \varepsilon\sqrt{(r(\xi) - t(\xi))^2 + 4s(\xi)^2}}{2},$$

où $\varepsilon = \pm 1$.

Celles de k_ξ sont donc :

$$2\lambda_\varepsilon - (r(\xi) + t(\xi)),$$

$$\text{i.e.} \quad \varepsilon\sqrt{D(\xi)^2 + S(\xi)^2}\ .$$

Posons $\tau(t) = X(t)u_1 + Y(t)u_2$.

Dans la suite $r(\xi)$, $s(\xi)$, $D(\xi)$, etc. seront notés parfois r,s,D, etc. pour alléger l'écriture.

On a $\begin{cases} rX + sY = \lambda_\varepsilon X \\ sX + tY = \lambda_\varepsilon Y \end{cases}$

Ce système est équivalent à :

(1.8.1) $$\begin{cases} DX + SY = \varepsilon\sqrt{D^2 + S^2}\ X \\ SX - DY = \varepsilon\sqrt{D^2 + S^2}\ Y \end{cases}$$

D'après le lemme (1.2), les valeurs propres de h_ξ sont distinctes : $\lambda_1 \neq \lambda_{-1}$. Donc $D(\xi)^2 + S(\xi)^2 \neq 0$.

On vérifie que (1.8.1) équivaut à :

$$\frac{D+iS}{|D+iS|} = \varepsilon \frac{X+iY}{X-iY}.$$

Ainsi $$\frac{D(\xi_t) + iS(\xi_t)}{|D(\xi_t) + iS(\xi_t)|} = \varepsilon (X+iY)^2$$

Donc, si $\varepsilon = 1$, on a $\varphi = 2\theta + k2\pi$;
et si $\varepsilon = -1$, $\varphi = 2\theta + \pi + k2\pi$.

Un phénomène analogue à celui de la proposition (1.8) a lieu dans le cas d'une hypersurface complexe. Le vecteur τ tourne alors dans un plan fixe, sous-espace propre de la courbure de Ricci au point x_o. Etablissons d'abord un lemme.

(1.9) Lemme. *Soient* V *une hypersurface complexe de* $\mathbb{C}^\delta$, δ *entier* $\geqslant 2$ $x_o \in V$, $\nu_1 \in S^{<1>}N_{x_o}V$ *et* $\xi_t = e^{it}\nu_1$. *Notons* R_t *l'application* $u \to e^{it}u$ *de* $T_{x_o}V$ *dans* $T_{x_o}V$. *Alors :*

$$h_{\xi_t} = R_{\frac{t}{2}} \circ h_{\nu_1} \circ (R_{\frac{t}{2}})^{-1},$$

et par conséquent le spectre de h_{ξ_t} *est indépendant de* t.

En particulier $\det h_{\xi_t}$ *est une constante (cf. [La]).*

Preuve. Soit (ν_1, ν_2) une base orthonormée de $N_{x_o}V$ telle que $\nu_2 = i\nu_1$. On a $\xi_t = e^{it}\nu_1$, et l'application $(\xi, u) \to h_\xi(u)$ de $N_{x_o}V \times T_{x_o}V$ dans $T_{x_o}V$ est $\mathbb{C}$-linéaire en ξ et antilinéaire en u, donc :

$$h_{\xi_t}(u) = e^{it}h_{\nu_1}(u),$$

$$\text{i.e. } h_{\xi_t}(u) = e^{i\frac{t}{2}} h_{\nu_1}(e^{-i\frac{t}{2}}u), \text{ pour tout } u \in T_{x_o}V.$$

$$\text{Ainsi } h_\xi = R_{\frac{t}{2}} \circ h_{\nu_1} \circ (R_{\frac{t}{2}})^{-1}.$$

Par suite, $h_\xi - \lambda\, id = R_{\frac{t}{2}} \circ (h_{\nu_1} - \lambda\, id) \circ (R_{\frac{t}{2}})^{-1}$ pour tout réel λ,

$$\text{donc } \det(h_\xi - \lambda\ \mathrm{id}) = \det(h_{\nu_1} - \lambda\ \mathrm{id}),$$

donc le spectre de h_ξ est indépendant de ξ .

(1.10) Proposition. *Soient* V *une hypersurface complexe de* $\mathbb{C}^\delta$, δ *entier* $\geqslant 2$, *et* $x_o \in V$.

i) Les p *courbures principales longitudinales de* Tub V *au point* $y \in \mathrm{Tub}_{x_o} V$ *ne dépendent que de* x_o.

ii) Soit $\nu_1 \in S^{<1>} N_{x_o} V$ *et posons, pour tout* $t \in \mathbf{R}$, $y_t = x_o + re^{it}\nu_1$.

Supposons que les p *courbures principales longitudinales de* Tub V *au point* y_o *sont distinctes. Soit* $\tau(t)$ *un vecteur unitaire tel que* $\mathbf{R}\,\tau(t)$ *soit une direction principale longitudinale de* Tub V *au point* y_t , *suivi par continuité. Alors :*

$$\tau(t) = e^{i\frac{t}{2}}\,\tau(0).$$

Preuve.

i) D'après les lemmes (1.2) et (1.9) les p courbures principales longitudinales en un point $y \in \mathrm{Tub}_{x_o} V$ ne dépendent pas du choix de y dans $\mathrm{Tub}_{x_o} V$.

ii) Pour tout réel t, en posant $\xi_t = e^{it}\nu_1$:

$$h_{\xi_t}(\tau(t)) = \lambda(t)\tau(t),$$

i.e. d'après le lemme (1.9) :

$$R_{\frac{t}{2}} \circ h_{\nu_1} \circ R_{-\frac{t}{2}}\tau(t) = \lambda(t)\tau(t)$$

$$h_{\nu_1}(R_{-\frac{t}{2}}\tau(t)) = \lambda(t) R_{-\frac{t}{2}}\tau(t).$$

D'après (1.2), h_{ν_1} a des valeurs propres distinctes ; ses sous-espaces propres sont donc des droites. Il en résulte que $R_{-\frac{t}{2}}\tau(t)$ garde une direction constante. Or les R_α sont des isométries, donc $R_{-\frac{t}{2}}\tau(t)$ est constant.

Ainsi $R_{-\frac{t}{2}}\tau(t) = \tau(0)$, donc $\tau(t) = R_{\frac{t}{2}}\tau(0)$.

(1.10.1) Remarque. V étant une hypersurface complexe de $\mathbb{C}^{\delta}$, la courbure de Ricci Q de V vérifie :

$$Q = -\beta^2 = -2h_{\nu_1} \circ h_{\nu_1} .$$

Supposons vérifiées les hypothèses de (1.10) ii). h_{ν_1} a alors ses p valeurs propres distinctes, donc, d'après le lemme (III.3.8.4) les sous-espaces propres de Q sont de dimension deux et les valeurs propres de h_{ν_1} sont toutes non nulles. Par suite $\mathbb{C}\,\tau(0)$ est un sous-espace propre de Q et les courbures principales longitudinales de Tub V aux points de $\mathrm{Tub}_{x_0} V$ sont toutes non nulles.

2. Définition et propriétés des champs de sous-espaces "longitudinaux" $\mathcal{O}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{J}$ (pour $\tilde{V}$ quelconque).

(2.1) Notations. Pour tout réel $r > 0$ et tout $x \in V$, $S^{<r>}N_xV$ est la sphère de centre 0_x et de rayon r dans N_xV et $B^{<r>}N_xV$ la boule ouverte de centre O_x et de rayon r dans N_xV.

Pour toute partie A de V on pose :

$$N_AV = \bigcup_{x \in A} N_xV$$
$$B^{<r>}N_AV = \bigcup_{x \in A} B^{<r>}N_xV$$
$$S^{<r>}N_AV = \bigcup_{x \in A} S^{<r>}N_xV,$$

et, $\exp^N$ désignant la restriction à NV de l'application exponentielle de $\tilde{V}$,

$$\mathrm{Tub}_A^{<r>}V = \exp^N(S^{<r>}N_AV)$$
$$\mathcal{E}_A^{<r>}V = \exp^N(B^{<r>}N_AV).$$

$\mathrm{Tub}_{\{x\}}^{<r>}V$ (resp. $\mathcal{E}_{\{x\}}^{<r>}V$) seront notés plus simplement $\mathrm{Tub}_x^{<r>}V$ (resp. $\mathcal{E}_x^{<r>}V$) pour tout $x \in V$.

On sait que pour tout $x_0 \in V$ il existe un ouvert U contenant x_0 et $\eta > 0$ tel que si $r < \eta$, $\exp^N$ induit un difféomorphisme Φ de $B^{<r>}N_UV$ sur $\mathcal{E}_U^{<r>}V$.

$\mathscr{E}_U^{<r>}V$ est alors réunion disjointe des $\mathscr{E}_x^{<r>}V$ pour $x \in U$, et on a une application $\varpi : \mathscr{E}_U^{<r>}V \to U$ définie par $\varpi(y) = x$ pour tout $y \in \mathscr{E}_x^{<r>}V$.

Pour tout élément y de $\mathscr{E}_x^{<r>}V \setminus \{x\}$, $\gamma_{x,y}$ est la géodésique $s \mapsto \exp^N(s \frac{\Phi^{-1}(y)}{\|\Phi^{-1}(y)\|})$ et on pose $\sigma(y) = \|\Phi^{-1}(y)\|$ et $\vec{n}(y) = \gamma'_{xy}(\sigma(y))$ (cf. [Gr.]). $\mathrm{Tub}_U^{<r>}V$ est une hypersurface de $\tilde{V}$. L'endomorphisme fondamental associé à $\vec{n}(y)$ sera noté ℓ_y.

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion à craindre, nous écrirons $\mathscr{E}_x$ au lieu de $\mathscr{E}_x^{<r>}V$, ℓ au lieu de ℓ_y, etc. .

(2.2) Définitions. *Soient* $x_o \in V$, $u \in T_{x_o}V$, $\nu_1 \in N_{x_o}V$, γ *la géodésique* $s \to \exp_{\tilde{V}}(s\nu_1)$. *Un champ de Jacobi* W *le long de* γ *sera dit adapté à* V *lorsque:*

i) $W(s) \mid \gamma'(s) = 0$ *pour tout* s ;

ii) $W(0) \in T_{x_o}V$;

iii) $\frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(0) + h_{\nu_1}(W(0)) \in N_{x_o}V$.

(Un tel champ W est appelé V-champ de Jacobi dans le livre [Bi, Cri]

Nous dirons que W est strictement adapté à V lorsque $\frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(0) + h_{\nu_1}(W(0)) = 0$.

Notons qu'un champ de Jacobi W strictement adapté à V est normal tout le long de la géodésique ainsi que sa dérivée $\frac{\tilde{\nabla} W}{ds}$. (D'après une propriété classique, si un champ de Jacobi Y vérifie $(Y(s_o) \mid \gamma'(s_o)) = 0$ et $(\frac{\tilde{\nabla} Y}{ds}(s_o) \mid \gamma'(s_o)) = 0$ en un point s_o, alors on a $(Y(s) \mid \gamma'(s)) = 0$ et $(\frac{\tilde{\nabla} Y}{ds}(s) \mid \gamma'(s)) = 0$ pour tout s .)

(2.3) Lemme.

i) Soit $t \mapsto x(t)$ *une courbe paramétrée de* V *et* $t \mapsto \xi(t)$ *telle que* $\xi(t) \in S^{<1>}N_{x(t)}V$ *pour tout* t.

Posons $c(s,t) = \gamma_t(s) = \exp_{\tilde{V}}(s\xi(t))$.

Alors W *défini par :* $W(s) = \frac{\partial c}{\partial t}(s,0)$ *est un champ de Jacobi adapté à* V *le long de* γ_o . *Si* $t \to \xi(t)$ *est* $\nabla^\perp$ *parallèle, alors* W *est strictement adapté à* V .

ii) Réciproquement, soient $\nu_1 \in S^{<1>}N_{x_o}V$ *et* γ_o *la géodésique* $s \to \exp_{\tilde{V}}(s\nu_1)$.

Alors tout champ de Jacobi adapté (resp. strictement adapté) à V *le long de* γ_o *est le champ de Jacobi d'une variation de* γ_o *du type considéré au i).*

Preuve.

i) $W(s) = \frac{\partial c}{\partial t}(s,0)$, donc

$$\frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(s) = \frac{\tilde{\nabla}}{\partial s}\frac{\partial c}{\partial t}(s,0) = \frac{\tilde{\nabla}}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}(s,0),$$

(2.3.1) $$\text{donc } \frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(0) = \frac{\tilde{\nabla}\xi}{dt}(0).$$

Or $-(\frac{\tilde{\nabla}\xi}{dt}(0)|u) = (h_{\nu_1}(W(0))|u)$ pour tout $u \in T_{x_o}V$, donc $\frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(0) + h_{\nu_1}(W(0))) \in N_{x_o}V$.

Si $t \mapsto \xi(t)$ est $\nabla^{\perp}$-parallèle, $\frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(0) \in T_{x_o}V$, donc $\frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(0) + h_{\nu_1}W(0)) = 0$.

ii) Tout champ de Jacobi adapté à V le long de γ est le champ de Jacobi d'une variation du type considéré au i) (cf. [Bi. Cri.]).

Supposons que W_1 est un champ de Jacobi **strictement** adapté à V le long de γ.

Posons $u = W_1(0)$. On a $u \in T_{x_o}V$ et $\frac{\tilde{\nabla} W_1}{ds}(0) = -h_{\nu_1}(u)$.

Soient $t \longmapsto x(t)$ une courbe paramétrée de V telle que $x'(0) = u$, et soit $t \mapsto \xi(t)$ le $\nabla^{\perp}$-transport parallèle de ν_1 le long de $t \mapsto x(t)$.

Posons $c(s,t) = \exp_{\tilde{V}}(s\,\xi(t))$ et $W(s) = \frac{\partial c}{\partial t}(s,0)$.

Alors on a $W(0) = u$ et $\frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(0) = -h_{\nu_1}(u)$, d'après i). Donc $W = W_1$.

Nous allons définir sur $\mathscr{E}^r_U(V)$ trois champs $\mathcal{O}$, $\mathscr{P}$, $\mathcal{J}$ de sous-espaces vectoriels de dimension p.

(2.4) Définition de $\mathcal{O}$.

Pour tout $y \in \mathscr{E}_x$, $\mathcal{O}_y = (\mathscr{E}_x)^{\perp}$, où $\perp$ désigne **l'orthogonal** dans l'espace euclidien $T_y\tilde{V}$.

(2.5) Définition de $\mathscr{P}$.

Pour tout $y \in \mathscr{E}_x$, $\mathscr{P}_y$ est l'espace vectoriel obtenu par $\tilde{\nabla}$-transport **parallèle** de T_xV depuis x jusqu'à y le long de la géodésique γ_{xy}.

(2.6) Définition de $\mathcal{J}$.

Pour tout $y \in \mathcal{E}_x$ et tout $u \in T_xV$ il existe un unique champ de **Jacobi** W le long de γ_{xy} défini par : $W(0) = u$

$$\text{et } \frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(0) = -h_{\nu_1}(u), \quad \text{où} \quad \nu_1 = \gamma'_{xy}(0).$$

Soient $t \longmapsto c(t)$ une courbe paramétrée de V telle que $c(0) = x$ et $c'(0) = u$, $t \longmapsto \xi(t)$ le déplacement $\nabla^{\perp}$-parallèle de ν_1 le long de c et γ_t la géodésique $s \longmapsto \exp_{\tilde{V}}(s\,\xi(t))$ de $\tilde{V}$. On a vu dans la preuve de (2.3) ii) que $t \mapsto \gamma_t$ est une variation de $\gamma_{x,y}$ dont le champ de Jacobi associé est W.

Il en résulte en particulier, en posant $r = \sigma(y)$, que $(T\varpi)(y).W(r) = u$, par suite l'application linéaire $u \longmapsto W(r)$ de T_xV dans $T_y\tilde{V}$ est injective ; son image sera notée $\mathcal{J}_y$.

Pour tout $y \in \mathcal{E}_x$, les sous-espaces $\mathcal{O}_y$, $\mathcal{P}_y$, $\mathcal{J}_y$ sont orthogonaux à γ_{xy}, c'est-à-dire tangents à $\mathrm{Tub}_U^{<r>}V$.

La proposition qui suit montre l'intérêt de $\mathcal{J}$.

(2.7) Proposition. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) La connexion normale de V est plate (cf. [Ch. B.]) ;

ii) $\mathcal{J}$ est localement intégrable.

La preuve résultera des deux lemmes suivants :

(2.7.1) Lemme. *Soient $y \in \mathrm{Tub}_U^{<r>}V$, $x_o = \varpi(y_o)$ et V_1 une sous-variété intégrale de dimension p de $\mathcal{J}$ passant par y_o. Posons $\nu_{1,o} = \gamma'_{x_oy_o}(0)$.*
Alors $\nu_{1,o}$ se prolonge au voisinage de x_o dans V en un champ normal à V et $\nabla^{\perp}$-parallèle.

Preuve du lemme. Soient $u \in T_{x_o}V$, $t \to x(t)$ une courbe paramétrée de V telle que $x'(0) = u$, $t \to \xi(t)$ le transport par $\nabla^{\perp}$-parallélisme de $\nu_{1,o}$ le long de $t \mapsto x(t)$.

Posons $c(s,t) = \exp_{\tilde{V}}(s\,\xi(t))$, $y_t = c(r,t)$ et $W_t(s) = \frac{\partial c}{\partial t}(s,t)$.

D'après (2.3), W_t est un champ de Jacobi strictement adapté à V, et par définition de $\mathcal{J}$ on a $W_t(r) \in \mathcal{J}_{y_t}$.

Ainsi $t \mapsto y_t$ est une courbe intégrale de $\mathcal{F}$ passant par y_o. Elle est donc contenue dans V_1.

On a $\varpi(y(t)) = x(t)$ pour tout t, donc :

$$T_{y_o}\varpi \cdot y'(0) = x'(0) = u.$$

Ainsi $(T_{y_o}\varpi)|(T_{y_o}V_1)$ est surjective, donc bijective (car $\dim V_1 = p$) ; donc le théorème d'inversion locale appliqué à $\varpi|V_1 : V_1 \to V$ donne un difféomorphisme g d'un ouvert V_1' de V_1 contenant y_o sur un ouvert de V contenant x_o.

g permet de définir un champ de vecteurs normaux, ν_1, sur $\varpi(V_1')$ en posant :

$$\nu_1(x) = \gamma'_{x,g^{-1}(x)}(0).$$

Ce champ ν_1 coïncide le long de γ avec le champ $t \mapsto \xi(t)$ précédent (car $\varpi(y(t)) = x(t)$) lequel champ $t \mapsto \xi(t)$ était $\nabla^\perp$-parallèle.

Il en résulte que ν_1 est un champ de vecteurs normaux $\nabla^\perp$-parallèle, défini sur $\varpi(V_1')$ et prolongeant $\nu_{1,o}$.

(2.7.2) Lemme. *Soient* $\nu_1,\dots,\nu_q$ *unitaires constituant une base (non nécessairement orthonormée) de* $N_{x_o}V$. *Pour tout* $i = 1,2,\dots,q$ *soit* $y_i = \exp_V(r_i\,\nu_i)$. *Supposons qu'il passe par chaque* y_i *une sous-variété intégrale* V_i *de dimension* p *de* $\mathcal{F}$. *Alors* V *est* $\nabla^\perp$*-plate au voisinage de* x_o.

Preuve. D'après le lemme (2.7.1) $\nu_1,\dots,\nu_q$ se prolongent chacun en un champ $\nabla^\perp$-parallèle défini au voisinage de x_o. Il en résulte que tout vecteur appartenant à $N_{x_o}V$ se prolonge en un champ $\nabla^\perp$-parallèle sur V (prendre des coefficients constants). Ainsi le déplacement par $\nabla^\perp$-parallélisme ne dépend pas du chemin suivi sur V au voisinage de x_o, donc V est $\nabla^\perp$-plate au voisinage de x_o.

Il résulte aussitôt de (2.7.2) que si $\mathcal{F}$ est localement intégrable alors V est $\nabla^\perp$-plate. Prouvons la réciproque.

Supposons que V est $\nabla^\perp$-plate.

Soient $y_o \in \mathrm{Tub}_{x_o}^{<r>}V$ et $\nu_{1,o} = \gamma'_{x_o y_o}(0)$.

D'après l'hypothèse $\nu_{1,0}$ se prolonge au voisinage de x_o en un champ ν_1 $\nabla^{\perp}$-parallèle.

Posons $f(x) = \exp_{\tilde{V}}(r\,\nu_1(x))$.

On a $(T_x f)(T_x V) = \mathcal{J}_{f(x)}$, d'après l'interprétation des champs de Jacobi strictement adaptés. f est donc une immersion et l'image par f d'un voisinage suffisamment petit U_o de x_o dans V est une sous-variété intégrale de $\mathcal{J}$ passant par y_o.

Donc $\mathcal{J}$ est localement intégrable.

Ceci achève la preuve de la proposition (2.7).

3. Cas où $\tilde{V}$ est une variété riemannienne (resp. kählérienne) dont la courbure sectionnelle (resp. sectionnelle holomorphe) est constante.

Nous aurons besoin d'un certain nombre de lemmes.

(3.1) Lemme. *Soit* $Y : I \to T\tilde{V}$ *un champ le long d'une courbe paramétrée* $c : I \to \tilde{V}$. *Supposons que* Y *ne s'annule pas. Alors pour que* $t \longmapsto \dfrac{Y(t)}{\|Y(t)\|}$ *soit parallèle, il faut et il suffit qu'il existe une fonction* $k : I \to \mathbb{R}$ *telle que* $\dfrac{\tilde{\nabla} Y}{dt} = k(t)\,Y(t)$ *pour tout* $t \in I$.

Preuve. Posons $\overline{Y}(t) = P_{t_o t} Y(t)$ pour tout $t \in I$.

La condition $Y(t) = \varphi(t)Z(t)$ pour tout $t \in I$, avec Z parallèle, équivaut à $\overline{Y}(t) = \varphi(t)Z(t_o)$; et $\dfrac{\tilde{\nabla} Y}{dt} = k(t)Y(t)$ équivaut à $\dfrac{d\overline{Y}}{dt} = k(t)\overline{Y}(t)$. D'où le résultat.

(3.2) Lemme. *Supposons que* $\tilde{V}$ *a une courbure sectionnelle constante* a .

Soient $\gamma : I \to \tilde{V}$ *une géodésique unitaire* ($\|\gamma'(s)\| = 1$),

$Z : I \to T\tilde{V}$ *un champ parallèle non nul normal à* γ *le long de* γ, *et*

$\theta : I \to \mathbb{R}$ *une application deux fois dérivable.*

Posons $W(s) = \theta(s)Z(s)$.

Alors W *est un champ de Jacobi si et seulement si* $\theta'' + \theta a = 0$.

Preuve. W champ de Jacobi signifie :

$$\frac{\tilde{\nabla}^2 W}{ds^2} + (\tilde{\rho}(\dot{\gamma} \wedge W) \llcorner \dot{\gamma} = 0$$

i.e., puisque $\tilde{\rho} = a\ \mathrm{id}$,

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} Z + \theta\, a(\dot{\gamma} \wedge Z) \llcorner \dot{\gamma} = 0,$$

i.e., puisque Z est normal à γ,

$$(\frac{d^2\theta}{ds^2} + \theta\ a)Z = 0.$$

(3.3) Lemme. *Soient* $\tilde{V}$ *une variété à courbure sectionnelle constante* a ,
$\gamma : I \to \tilde{V}$ *une géodésique unitaire de* $\tilde{V}$,
$W : I \to T\tilde{V}$ *un champ de Jacobi le long de* γ , *et* $s_o \in I$. *Supposons que :*

i) $W(s_o) | \dot{\gamma}(s_o) = 0$;

ii) $\frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(s_o) = k_o W(s_o)$, $k_o \in \mathbb{R}$.

Alors $W = \theta Z$, *où* Z *est le champ parallèle* $s \to \tilde{P}_{ss_o} W(s_o)$ *et* θ *est la solution de l'équation différentielle* $\theta'' + a\theta = 0$ *telle que* $\theta(s_o) = 1$ *et* $\theta'(s_o) = k_o$.

Preuve. Posons $W_1(s) = \theta(s)Z(s)$.

Si $W(s_o) = 0$ alors $W_1 = 0$, donc W_1 est un champ de Jacobi.

Si $W(s_o) \neq 0$, W_1 est un champ de Jacobi d'après (3.2).

On a $W_1(s_o) = W(s_o)$

$$\text{et } \frac{\tilde{\nabla} W_1}{ds}(s_o) = \theta'(s_o)Z(s_o)$$

$$= k_o\ W(s_o)$$

$$= \frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(s_o).$$

Donc $W = W_1$.

Lorsque $\tilde{V}$ est une variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante a, on a pour tout $y \in \tilde{V}$ et tous u,v éléments de $T_y\tilde{V}$:

(3.4) $$\tilde{\rho}(u \wedge v) = \frac{a}{4}(u \wedge v + \mathcal{J}u \wedge \mathcal{J}v + 2(\mathcal{J}(u)|\, v)\mathcal{J}'),$$

où $\mathcal{J}'$ est le bivecteur associé à $\mathcal{J}$, ($\mathcal{J}' \llcorner w = \mathcal{J}(w)$ pour tout $w \in T\tilde{V}$).

On a alors les lemmes (3.2') et (3.3') suivants, analogues, ainsi que leurs démonstrations, aux lemmes (3.2) et (3.3) :

(3.2') Lemme. *Soient* $\tilde{V}$ *une variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante* a, $\gamma : I \to \tilde{V}$ *une géodésique unitaire de* $\tilde{V}$, $Z : I \to T\tilde{V}$ *un champ parallèle non nul le long de* γ *tel que* $(Z(s)|\, \gamma'(s)) = 0$ *et* $(Z(s)|\, \mathcal{J}\gamma'(s)) = 0$ *pour tout* $s \in I$, $\theta : I \to \mathbb{R}$ *une application deux fois dérivable.*
Posons $W(s) = \theta(s)Z(s)$.
Alors W *est un champ de Jacobi si et seulement si* $\theta'' + \frac{a}{4}\theta = 0$.

(3.3') Lemme. *Soient* $\tilde{V}$ *une variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante* a, $\gamma : I \to \tilde{V}$ *une géodésique unitaire de* $\tilde{V}$, $W : I \to T\tilde{V}$ *un champ de Jacobi le long de* γ, *et* $s_o \in I$. *Supposons que :*
i) $(W(s_o)|\, \dot{\gamma}(s_o)) = 0$;
ii) $(W(s_o)|\, \mathcal{J}\dot{\gamma}(s_o)) = 0$;
iii) $\frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(s_o) = k_o\, W(s_o)$, $k_o \in \mathbb{R}$.
Alors $W(s) = \theta(s)Z(s)$ *où* Z *est le champ parallèle* $s \mapsto \tilde{P}_{ss_o}W(s_o)$ *et* θ *est la solution de l'équation différentielle* $\theta'' + \frac{a}{4}\theta = 0$ *telle que* $\theta(s_o) = 1$ *et* $\theta'(s_o) = k_o$.

(3.5) Proposition. *Si* $\tilde{V}$ *est une variété riemannienne (resp. kählérienne) dont la courbure sectionnelle (resp. courbure sectionnelle holomorphe) est constante, et si* V *est une sous-variété réelle (resp. complexe) de* $\tilde{V}$, *alors* $\mathcal{O}$ *est stable par* ℓ *et on a* $\mathcal{O} = \mathcal{P} = \mathcal{J}$.

Preuve. Supposons que la courbure sectionnelle de $\tilde{V}$ est constante et soit $y_o \in \mathrm{Tub}^r_{x_o} V$.

1° Prouvons que $T_{y_o}(\mathrm{Tub}^r_{x_o} V)$ est stable par ℓ. Soient $v \in T_{y_o}(\mathrm{Tub}^r_{x_o} V)$ et $t \mapsto y_t$ une courbe paramétrée de $\mathrm{Tub}_{x_o} V$ telle que $\frac{dy_t}{dt}(0) = v$.

Posons $c(s,t) = \gamma_{x_o,y_t}(s)$.

On a $c(s,t) \in \mathscr{E}_{x_o}$ pour tous s,t, donc $\frac{\partial c}{\partial s} \in T(\mathscr{E}_{x_o})$.

Comme $\tilde{V}$ a une courbure sectionnelle constante $\mathscr{E}_{x_o}$ est une sous-variété totalement géodésique de $\tilde{V}$, i.e. $\mathscr{E}_{x_o}$, a une deuxième forme vectorielle nulle,

$$\text{donc } \frac{\tilde{\nabla}}{\partial t} \frac{\partial c}{\partial s} \in T(\mathscr{E}_{x_o}),$$

i.e. $(\vec{\nabla}\vec{n})(y_o).v \in T(\mathscr{E}_{x_o})$.

Par ailleurs $T_{y_o}(\mathscr{E}_{x_o}) = T_{y_o}(\mathrm{Tub}_{x_o} V) \oplus \mathbb{R}\vec{n}(y_o)$ et $((\tilde{\nabla}\vec{n})(y_o).v) \mid \vec{n}(y_o)) = 0$, donc $(\tilde{\nabla}\vec{n})(y_o).v \in T_{y_o}(\mathrm{Tub}^r_{x_o} V)$.

2° Prouvons que $\mathscr{O}_{y_o} = \mathscr{P}_{y_o}$.

$\mathscr{E}_{x_o}$ étant totalement géodésique, un déplacement parallèle dans $T\mathscr{E}_{x_o}$ est aussi un déplacement parallèle dans $T\tilde{V}$.

Par suite, $T_{x_o}(\mathscr{E}_{x_o})$ se transporte en $T_{y_o}(\mathscr{E}_{x_o})$ par le $\tilde{\nabla}$-parallélisme le long de $\gamma_{x_o y_o}$.

Le déplacement par $\tilde{\nabla}$-parallélisme conservant le produit scalaire, il en résulte que l'espace normal en x_o à $\mathscr{E}_{x_o}$, c'est-à-dire $T_{x_o}V$, se transporte en l'espace normal en y_o à $\mathscr{E}_{x_o}$, c'est-à-dire en $\mathscr{O}_{y_o}$. Donc $\mathscr{O} = \mathscr{P}$.

3° Prouvons que $\mathscr{P}_{y_o} = \mathscr{J}_{y_o}$.

Posons $\nu_1 = \gamma'_{x_o y_o}(0)$ et soit $(\tau_1, \ldots, \tau_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de h_{ν_1}.

Pour tous $i = 1,2,\ldots,p$ soit W_i le champ de Jacobi le long de $\gamma_{x_o y_o}$ défini par :

$$\begin{cases} W_i(0) = \tau_i \\ \dfrac{\tilde{\nabla} W_i}{ds}(0) = -h_{\nu_1}(\tau_i) \end{cases}$$

$$\text{Alors} \qquad \frac{\tilde{\nabla} W_i}{ds}(0) = -\lambda_i W_i(0).$$

D'après le lemme (3.3) :

$$W_i(s) = \theta_i(s)\tilde{P}_{so}\,\tau_i\,.$$

Or les $W_i(r)$ forment une base de $\mathcal{J}_{y_o}$ (cf. la définition de $\mathcal{J}_{y_o}$), donc $\mathcal{P}_{y_o} = \mathcal{J}_{y_o}$. Ceci achève la preuve de la proposition (3.5) dans le cas où la courbure sectionnelle de $\tilde{V}$ est constante.

Lorsque $\tilde{V}$ est une variété kaehlérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante on procède de façon analogue. $\exp_{\tilde{V}} N_{x_o} V$ est totalement géodésique du fait que $N_{x_o} V$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $T_{x_o}\tilde{V}$, et le lemme (3.3') remplace le lemme (3.3). □

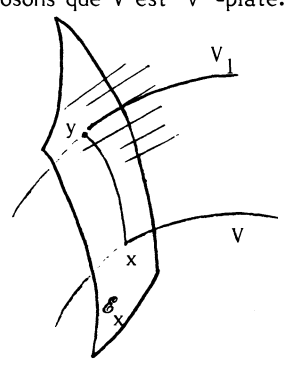
(3.5) Corollaire. *Supposons que la courbure sectionnelle de $\tilde{V}$ est constante.*

i) Si la connexion normale de V est plate, alors $\mathcal{O}$ est localement intégrable et la connexion normale de chaque sous-variété intégrale est plate.

ii) Supposons que la codimension de V dans $\tilde{V}$ est deux, et soit $y_o \in (\mathcal{E}_{x_o} V) \setminus \{x_o\}$. S'il existe une sous-variété intégrale de $\mathcal{O}$ passant par y_o alors la connexion normale de V est plate au voisinage de x_o.

Preuve.

i) Supposons que V est $\nabla^{\perp}$-plate.



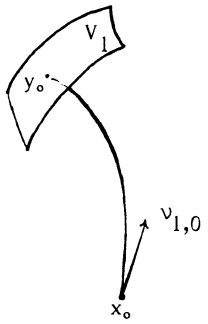
Alors $\mathcal{O}_V$ est intégrable (car $\mathcal{O}_V = \mathcal{J}_V$). Soient V_1 une sous-variété intégrale de $\mathcal{O}_V$, ($V_1 \subset \mathcal{E}^{<r>}_U V$), $y \in V_1$ et $x = \varpi(y)$.

Puisque V_1 est une sous-variété intégrale de $\mathcal{O}_V$, $N_y V_1 = T_y(\mathcal{E}_x V)$.

Comme $\mathcal{E}_x V$ est totalement géodésique, $\mathcal{E}_y V_1$ coïncide avec $\mathcal{E}_x V$ au voisinage de y. Il en résulte que $\mathcal{O}_{V_1}$ coïncide avec $\mathcal{O}_V$ au voisinage de y.

Donc $\mathcal{O}_{V_1}$ est intégrable au voisinage de y, donc V_1 a une connexion normale plate (car $\mathcal{O}_{V_1} = \mathcal{J}_{V_1}$).

ii) Soit V_1 une sous-variété intégrale de $\mathcal{O}$ passant par y_o. Alors, avec les notations du lemme (2.7.1), $\nu_{1,o}$ se prolonge au voisinage de x_o en un champ ν_1 $\nabla^{\perp}$-parallèle.



Choisissons une orientation continue au voisinage de x_o des plans N_xV, et soit $\nu_2(x)$ le vecteur se déduisant de $\nu_1(x)$ par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ dans N_xV. Alors ν_2 est aussi $\nabla^{\perp}$-parallèle. Il en résulte que V est ∇ -plate au voisinage de x_o. □

Dans la suite nous utiliserons souvent les lemmes suivants :

(3.6) Lemme. *Soient* $\tilde{V}$ *une variété riemannienne,* π *un plan vectoriel orienté dans* $T_{x_o}\tilde{V}$, (a_1,a_2) *une base orthonormée positive de* π.

Posons $u(\theta) = e^{i\theta}a_1$ *et* $c(s,\theta) = \exp_{\tilde{V}}(su(\theta))$. *Alors* $\frac{\tilde{\nabla}}{\partial s}(\frac{\partial c}{\partial \theta})(0,\theta) = i\frac{\partial c}{\partial s}(0,\theta)$.

En particulier, le champ de Jacobi Y *défini le long de la géodésique de* $\tilde{V}$ *issue de* a_1 *par* $Y(s) = \frac{\partial c}{\partial \theta}(s,0)$ *vérifie* $\frac{\tilde{\nabla} Y}{ds}(0) = a_2$.

Preuve. On a $\frac{\partial c}{\partial s}(0,\theta) = u(\theta)$, donc, en dérivant dans le plan π :

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\partial c}{\partial s})(0,\theta) = iu(\theta)$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{\tilde{\nabla}}{\partial \theta}(\frac{\partial c}{\partial s})(0,\theta) = i\frac{\partial c}{\partial s}(0,\theta)$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{\tilde{\nabla}}{\partial s}(\frac{\partial c}{\partial \theta})(0,\theta) = i\frac{\partial c}{\partial s}(0,\theta). \qquad \square$$

(3.7) Lemme de E. Cartan (cf. [Ch. B.]).

Soit $\tilde{V}$ *une variété riemannienne de dimension* $\geqslant 3$. *Alors la courbure sectionnelle de* $\tilde{V}$ *est constante si et seulement si, pour tout* $x \in \tilde{V}$ *et tout triplet orthonormé* (X,Y,Z) *d'éléments de* $T_x\tilde{V}$ *on a* $((\tilde{R}(X,Y)X) \mid Z) = 0$.

Pour toute variété M, $\mathcal{S}_p(M)$ désignera l'ensemble des sous-variétés de dimension p de M.

(3.8) Proposition. *Supposons* $n \geqslant 3$ *et* $1 \leqslant p \leqslant n-2$. *Si* $\tilde{V}$ *possède* ***l'une*** *des trois propriétés suivantes :*

i) $\mathcal{O}_V = \mathcal{P}_V$ *pour tout* $V \in \mathcal{S}_p(\tilde{V})$,

ii) $\mathcal{P}_V = \mathcal{J}_V$ *pour tout* $V \in \mathcal{S}_p(\tilde{V})$,

iii) $\mathcal{J}_V = \mathcal{O}_V$ *pour tout* $V \in \mathcal{S}_p(\tilde{V})$,

alors $\tilde{V}$ *a une courbure sectionnelle constante.*

Preuve.

1° Supposons que i) est vérifiée.

Soit (A,B,C) un triplet orthonormé d'éléments de $T_{x_0}\tilde{V}$.

Prouvons que $(\tilde{\rho}(A \wedge B)) \mid (A \wedge C) = 0$.

Dans l'orthogonal de C relativement à $T_{x_0}\tilde{V}$, soit F un sous-espace vectoriel de dimension q contenant A et B. Ainsi $C \in F^{\perp}$.

Soit V la variété (au voisinage de x_0) $\exp_{\tilde{V}}(F^{\perp})$.

On a $N_{x_0}V = F$ et $C \in T_{x_0}V$.

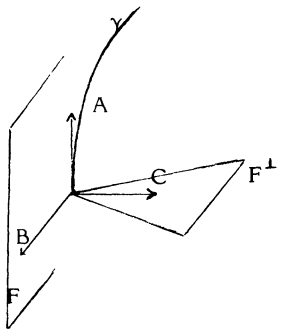
Soient $\gamma : I \to \tilde{V}$ la géodésique $s \longmapsto \exp_{\tilde{V}} sA$, et Y le champ de Jacobi le long de γ défini par $Y(0) = 0$ et $\frac{\tilde{\nabla}Y}{ds}(0) = B$.

D'après le lemme (1.9) on a :

$$Y(s) \in T(\mathcal{E}_{x_0}) \text{ pour tout } s \in I.$$

Soit $Z : I \to \tilde{V}$ le champ $\tilde{\nabla}$-parallèle le long de γ tel que $Z(0) = C$.

Comme $\mathcal{O}_V = \mathcal{P}_V$ on a $(Y(s) \mid Z(s)) = 0$ pour tout $s \in I$; donc $(\frac{\tilde{\nabla}^2 Y}{ds^2}(s) \mid Z(s)) = 0$.



Il en résulte que :

$$((\tilde{\rho}(\dot{\gamma}(s) \wedge \frac{Y(s)}{s})) \mid (\dot{\gamma}(s) \wedge Z(s))) = 0,$$

pour tout $s \in I \setminus \{0\}$, d'où à la limite quand $s \xrightarrow[\neq]{} 0$:

$$(\tilde{\rho}(A \wedge B)) \mid (A \wedge C)) = 0.$$

Donc, d'après le lemme de E. Cartan, la courbure sectionnelle de $\tilde{V}$ est constante.

2° Supposons que ii) est vérifiée.

Soient A,B,C,V et γ comme au 1° ; W le champ de Jacobi strictement adapté à V,

le long de γ, tel que $W(0) = C$; B_1 le champ $\tilde{\nabla}$-parallèle le long de γ tel que $B_1(0) = B$.

Comme $\mathcal{P}_V = \mathcal{J}_V$ on a $(W(s) \mid B_1(s)) = 0$ pour tout $s \in I$, donc $(\frac{\tilde{\nabla}^2 W}{ds^2}(s) \mid B_1(s)) = 0$, i.e. $(\tilde{\rho}(\dot{\gamma}(s) \wedge W(s)) \mid (\dot{\gamma}(s) \wedge B_1(s))) = 0$.

En particulier, pour s=0 :

$$((\tilde{\rho}(A \wedge C)) \mid (A \wedge B)) = 0,$$

d'où le résultat.

3° Supposons que iii) est vérifiée.

Soient A,B,C,V, γ et Y comme au 1° ; W le champ de Jacobi le long de γ, strictement adapté à V tel que $W(0) = C$.

Comme $\mathcal{J}_V = \mathcal{O}_V$ on a $(Y(s) \mid W(s)) = 0$ pour tout $s \in I$, donc, en dérivant deux fois :

$$-(\tilde{\rho}(\dot{\gamma} \wedge Y) \llcorner \dot{\gamma}) \mid W + 2(\frac{\tilde{\nabla} Y}{ds} \mid \frac{\tilde{\nabla} W}{ds}) - (\tilde{\rho}(\dot{\gamma} \wedge W) \llcorner \dot{\gamma}) \mid Y = 0$$

$$\text{i.e. } -(\tilde{\rho}(\dot{\gamma} \wedge Y)) \mid (\dot{\gamma} \wedge W) + (\frac{\tilde{\nabla} Y}{ds} \mid \frac{\tilde{\nabla} W}{ds}) = 0.$$

Dérivons encore une fois et faisons s=0, on obtient :

$$-(\tilde{\rho}(\dot{\gamma}(0) \wedge \frac{\tilde{\nabla} Y}{ds}(0)) \mid (\dot{\gamma}(0) \wedge W(0))) + (\frac{\tilde{\nabla}^2 Y}{ds^2}(0) \mid \frac{\tilde{\nabla} W}{ds}(0)) + (\frac{\tilde{\nabla} Y}{ds}(0) \mid \frac{\tilde{\nabla}^2 W}{ds^2}(0)) = 0$$

i.e., compte tenu de l'équation de Jacobi, de la symétrie de $\tilde{\rho}$ et du fait que $Y(0) = 0$:

$$-2((\tilde{\rho}(\dot{\gamma}(0) \wedge \frac{\tilde{\nabla} Y}{ds}(0))) \mid (\dot{\gamma}(0) \wedge W(0))) = 0$$

$$\text{i.e. } ((\tilde{\rho}(A \wedge B)) \mid (A \wedge C)) = 0,$$

d'où le résultat.

Ceci achève la preuve de la proposition (3.8)□

(3.9) Proposition. *Supposons* $n \geqslant 3$ *et* $1 \leqslant p \leqslant n-2$. *Si* $\tilde{V}$ *possède* ***l'une*** *des trois propriétés suivantes :*

i) $\mathcal{O}_V$ *est stable par* ℓ *pour tout* $V \in \mathcal{S}_p(\tilde{V})$,

ii) $\mathcal{P}_V$ *est stable par* ℓ *pour tout* $V \in \mathcal{S}_p(\tilde{V})$,

iii) $\mathcal{J}_V$ *est stable par* ℓ *pour tout* $V \in \mathcal{S}_p(\tilde{V})$,

alors $\tilde{V}$ *a une courbure sectionnelle constante.*

Preuve.
1° Supposons que i) est vérifiée.

Soient A,B,C,V,γ comme dans la preuve de (3.8) ; $B_1,\dots,B_q$ une base orthonormée de $N_{x_o}V$ telle que $B_1 = \gamma'(0)$ et $B_2 = B$.

Pour tout $j = 2,\dots,q$ soit Y_j le champ de Jacobi le long de γ défini par :

$$\begin{cases} Y_j(0) = 0 \\ \dfrac{\tilde{\nabla} Y_j}{ds}(0) = B_j \end{cases}$$

D'après le lemme (3.6) on a $Y_j(s) \in T_{\gamma(s)}(\mathscr{E}_{x_o})$, pour tous $j = 2,\dots,q$.

$\mathcal{O}_{\gamma(s)}$ est, d'après l'hypothèse, stable par $\tilde{\nabla}\vec{n}$, et $\tilde{\nabla}\vec{n}$ est symétrique, donc $T_{\gamma(s)}(\mathscr{E}_{x_o})$ est stable par $\tilde{\nabla}\vec{n}$. (On rappelle que ℓ est induit dans l'espace tangent au tube par l'endomorphisme $-\tilde{\nabla}\vec{n}$.)

Soit H_s l'orthogonal de $\gamma'(s)$ dans $T_{\gamma(s)}(\mathscr{E}_{x_o})$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout $s \in]0,\eta[$, $Y_2(s),\dots,Y_q(s)$ forment une base de H_s.

Comme $(\tilde{\nabla} n).Y_j$ est orthogonal à $\vec{n}(\gamma(s)) = \gamma'(s)$, on a donc $(\tilde{\nabla} n).Y_j = \sum_{2 \leqslant k \leqslant q} \varphi_{j,k} Y_k$, pour tout $j = 2,\dots,q$, où les $\varphi_{j,k}$ sont des fonctions numériques définies sur $]0,\eta[$. Ainsi, d'après un calcul déjà fait :

$$\frac{\tilde{\nabla} Y_j}{ds} = \sum_{2 \leqslant k \leqslant q} \varphi_{j,k} Y_k .$$

Par suite $\dfrac{\tilde{\nabla}^2 Y_j}{ds} = \sum_{2 \leqslant k \leqslant q} \varphi'_{j,k} Y_k + \varphi_{j,k} \dfrac{\tilde{\nabla} Y_k}{ds}$, d'où l'on déduit en particulier :

$$\frac{\nabla^2 Y_2}{ds} \in T_{\gamma(s)}(\mathscr{E}_{x_o}) .$$

Il en résulte que :

$$\tilde{\rho}\left(\dot{\gamma}(s) \wedge \frac{Y_2(s)}{s}\right) \llcorner \dot{\gamma}(s) \in T(\mathscr{E}_{x_o}), \text{ pour tout } s \in]0,\eta[.$$

Donc, à la limite quand $s \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$,

$$(\tilde{\rho}(A \wedge B)) \llcorner A \in N_{x_o}V,$$

donc $(\tilde{\rho}(A \wedge B)) \mid (A \wedge C) = 0$, d'où le résultat d'après le lemme de E. Cartan.

Nous utiliserons, à deux reprises dans la suite de la démonstration, le lemme suivant :

(3.9.1)Lemme. *Soient, pour tout* $s \in I \setminus \{0\}$, L_s *une partie de* $T_{\gamma(s)}\tilde{V}$, *stable par* $\tilde{\nabla}\vec{n}$; $v : I \setminus \{0\} \to T\tilde{V}$ *un champ de vecteurs le long de* γ *tel que* $v(s) \in L_s$ *pour tout* $s \in I \setminus \{0\}$. *Alors* $((\tilde{\nabla}^2\vec{n}).v(s))\vec{n} \in L_s$, *pour tout* $s \in I \setminus \{0\}$.

Preuve. On a $(\tilde{\nabla}\vec{n}).\vec{n} = 0$ (cf. la définition de $\vec{n}$) donc $((\tilde{\nabla}^2\vec{n}).v).\vec{n} + (\tilde{\nabla}\vec{n}).v = 0$, pour tout $v \in L_s$; d'où le résultat. []

2° Supposons que ii) est vérifiée.

Soient A,B,C,V,γ comme au 1° et $C_1,\dots,C_p$ une base de $T_{x_0}V$ telle que $C_1 = C$.

Pour tout $i = 1,\dots,p$ soit $s \to Z_i(s)$ le champ $\tilde{\nabla}$-parallèle le long de γ tel que $Z_i(0) = C_i$.

Comme $\mathscr{P}_{\gamma(s)}$ est, d'après l'hypothèse, stable par $\tilde{\nabla}\vec{n}$:

$$(\tilde{\nabla}\vec{n})Z_1(s) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \theta_i(s)Z_i(s),$$

pour tout $s \in I \setminus \{0\}$, donc

$$((\tilde{\nabla}^2\vec{n})\vec{n})Z_1(s) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \theta_i'(s)Z_i(s), \text{ donc :}$$

(3.9.2) $$((\tilde{\nabla}^2\vec{n}).\vec{n})Z_1(s) \in \mathscr{P}_{\gamma(s)}, \text{ pour tout } s \in I \setminus \{0\}.$$

D'autre part, $Z_1(s) \in \mathscr{P}_{\gamma(s)}$ et $\mathscr{P}_{\gamma(s)}$ est stable par $\tilde{\nabla}\vec{n}$, pour tout $s \in I \setminus \{0\}$, donc d'après le lemme (3.9.1) :

(3.9.3) $$((\tilde{\nabla}^2\vec{n}).Z_1(s))\vec{n} \in \mathscr{P}_{\gamma(s)}$$

Donc $\tilde{R}(\vec{n},Z_1(s))\vec{n} \in \mathscr{P}_{\gamma(s)}$, pour tout $s \in I \setminus \{0\}$, donc, à la limite quand $s \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$,

$$\tilde{R}(A,C)A \in T_{x_0}V ;$$

donc $((\tilde{R}(A,C).A) \mid B) = 0$, d'où le résultat.

3° Supposons que iii) est vérifiée.

Soient A,B,C,V,γ, $C_1,\dots,C_p$ comme au 2°.

Pour tous $i = 1,\dots,p$ soit W_i le champ de Jacobi le long de γ, strictement adapté à V, tel que $W_i(0) = C_i$.

Comme $\mathcal{J}_{\gamma(s)}$ est, d'après l'hypothèse, stable par $\tilde{\nabla}\vec{n}$:

$$(\tilde{\nabla}\vec{n}).W_i(s) \in \mathcal{J}_{\gamma(s)}, \text{ pour tout } s \in I\setminus\{0\},$$

i.e., d'après un calcul déjà fait :

$$\frac{\tilde{\nabla}W_i}{ds}(s) \in \mathcal{J}_{\gamma(s)}, \text{ pour tout } s \in I\setminus\{0\}$$

et tous $i = 1,\dots,p$.

Posons $(\tilde{\nabla}n)W_1(s) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \theta_i(s)W_i(s)$, alors :

$$((\tilde{\nabla}^2\vec{n})\vec{n})W_1 + (\tilde{\nabla}\vec{n}).\frac{\tilde{\nabla}W_1}{ds} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \theta_i'(s)W_i(s) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \theta_i(s)\frac{\tilde{\nabla}W_i}{ds},$$

(3.9.4) donc $((\tilde{\nabla}^2\vec{n}).\vec{n}).W_1 \in \mathcal{J}_{\gamma(s)}$, pour tout $s \in I\setminus\{0\}$.

D'autre part, $W_1(s) \in \mathcal{J}_{\gamma(s)}$ et $\mathcal{J}_{\gamma(s)}$ est stable par $\tilde{\nabla}\vec{n}$ pour tout $s \in I\setminus\{0\}$, donc d'après le lemme (3.9.1) :

(3.9.5) $$((\tilde{\nabla}^2\vec{n})W_1(s))\vec{n} \in \mathcal{J}_{\gamma(s)}.$$

Donc $\tilde{R}(\vec{n},W_1(s))\vec{n} \in \mathcal{J}_{\gamma(s)}$ pour tout $s \in I\setminus\{0\}$, donc à la limite quand $s \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$,

$$\tilde{R}(A,C)A \in T_{x_0}V ;$$

donc $((\tilde{R}(A,C)A)\,|\,B) = 0$, d'où le résultat.

Ceci achève la démonstration de la proposition(3.9).□

4. Le champ de sous-espaces $\mathcal{L}$. Définition des directions principales longitudinales (pour $\tilde{V}$ quelconque). Relations entre l'intégrabilité de $\mathcal{L}$ et la platitude de la connexion normale.

Nous définissons dans cette section en tout point y de $\mathrm{Tub}^{<r>}V$, pour r assez petit, un espace **"longitudinal"** $\mathcal{L}_y$ stable par ℓ et qui dans le cas où $\tilde{V}$ est

une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante (resp. une variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante) vérifie $\mathcal{L}_y = \mathcal{O}_y = \mathcal{P}_y = \mathcal{J}_y$.

(4.1) Lemme. *Soient* $x_o \in V$ *et* $\mathcal{E}_U^{<r>} V$ *comme au n° 1.*

i) $\sigma \vec{n}$ *est la restriction d'un champ* C^∞ *sur* $\mathcal{E}_U^{<r>} V$ *que nous noterons encore* $\sigma \vec{n}$ *et* $\tilde{\nabla}(\sigma \vec{n})(x_o)$ *est le projecteur orthogonal de* $T_{x_o} \tilde{V}$ *sur* $N_{x_o} V$.

ii) Pour tout $y \in (\mathrm{Tub}_U^{<r>} V) \setminus V$ *on a :*

$$\tilde{\nabla}(\sigma n)(y).\vec{n}(y) = \vec{n}(y),$$

$T_y(\mathrm{Tub}_U^{<r>} V)$ *est stable par* $\tilde{\nabla}(\sigma \vec{n})(y)$ *, et l'endomorphisme induit par* $\tilde{\nabla}(\sigma \vec{n})(y)$ *dans* $T_y(\mathrm{Tub}_U^{<r>} V)$ *est* $-r\ell$.

Preuve.

1° Soient $x \in U$, $\nu_1 \in S^{<1>} N_x V$, $\gamma : [0,r[\to \tilde{V}$ la géodésique de $\tilde{V}$ telle que $\gamma'(0) = \nu_1$, $\varphi : [0,r[\to NV$ l'application définie par $\varphi(s) = s\,\nu_1$.

On a $\gamma(s) = (\exp^N)(\varphi(s))$ et $\vec{n}(\gamma(s)) = \gamma'(s)$ pour tout $s \in]0,r[$, il en résulte que

$$(\sigma \vec{n})(\gamma(s)) = (\exp^N).L(\varphi(s)), \text{ pour tout } s \in]0,r[\ ,$$

où L est le champ de Liouville (cf. [Go]) du fibré vectoriel NV.

Comme $\exp^N$ induit un difféomorphisme Φ de $B^{<r>} N_U V$ sur $\mathcal{E}_U^{<r>} V$, $\sigma \vec{n}$ est la restriction d'un champ C^∞, $\tilde{L}$, sur $\mathcal{E}_U^{<r>} V$.

On a $\tilde{L}(x) = 0$ pour tout $x \in U$,
donc $\tilde{\nabla}_u \tilde{L} = 0$ pour tout $u \in T_x V$.

De plus, $\tilde{\nabla}_{\nu_1} \tilde{L} = \frac{d}{ds} (\tilde{P}_{o,s}(\tilde{L}(\gamma(s)))) \Big|_{s=o}$, où $\tilde{P}_{o,s}$ désigne le transport parallèle le long de γ,

$$\text{i.e.} \quad \tilde{\nabla}_{\nu_1} \tilde{L} = \frac{d}{ds} (\tilde{P}_{o,s}(s\,\gamma'(s))) \Big|_{s=o}$$

$$\text{i.e.} \quad \tilde{\nabla}_{\nu_1} \tilde{L} = \frac{d}{ds}(s\,\nu_1) \Big|_{s=o} = \nu_1 .$$

Donc $(\tilde{\nabla}\tilde{L})(x).u = u$, pour tout $u \in N_x V$. Finalement $(\tilde{\nabla}\tilde{L})(x)$ est le projecteur orthogonal de $T_x\tilde{V}$ sur $N_x V$.

2° Pour tout $y \in (\mathscr{E}^r_U V) \setminus V$ et tout $v \in T_y\tilde{V}$ on a

$$\tilde{\nabla}(\sigma\vec{n}).u = ((\text{grad}\ \sigma) \mid v)\vec{n} + r(\tilde{\nabla}\vec{n}).v.$$

Or grad $\sigma = \vec{n}$, (cf. [Gr.]),

$$\text{donc}\quad \tilde{\nabla}(\sigma\vec{n}).v = (\vec{n} \mid v)\vec{n} + r(\tilde{\nabla}\vec{n})v.$$

En particulier $\tilde{\nabla}(\sigma\vec{n}).\vec{n} = \vec{n}$ et pour tout $v \in T_y(\text{Tub}^{<r>}_U V)$,

$$\tilde{\nabla}(\sigma\vec{n}).v = r(\tilde{\nabla}\vec{n}).v.$$
$$\text{i.e.}\ \tilde{\nabla}(\sigma\vec{n}).v = -r\,\ell(v).$$

Ainsi $T_y(\text{Tub}^{<r>}_U V)$ est stable par $\tilde{\nabla}(\sigma\vec{n})(y)$ et l'endomorphisme induit par $\tilde{\nabla}(\sigma\vec{n})(y)$ dans $T_y(\text{Tub}^{<r>}_U V)$ est $-r\ell$. □

(4.2) Lemme. *Soient* $y \in \mathscr{E}^{<r>}_U V$ *et* $(t_1(y),\dots,t_n(y))$ *le spectre de* $\tilde{\nabla}(\sigma\vec{n})(y)$, $t_1(y) \leqslant t_2(y) \leqslant \dots \leqslant t_n(y)$. *Il existe* $r_o > 0$ *tel que si* $r < r_o$ *on a*

$$|t_i(y)| < \frac{1}{2} \quad \textit{pour}\ 1 \leqslant i \leqslant p \ \textit{et}\ |t_j(y)-1| < \frac{1}{2}\ \textit{pour}\ p+1 \leqslant j \leqslant n.$$

Preuve. D'après le lemme (4.1), $\tilde{\nabla}(\sigma\vec{n})(y)$ tend vers le projecteur orthogonal $P_{N_{x_o}V}$ de $T_{x_o}\tilde{V}$ sur $N_{x_o}V$ quand y tend vers x_o ; son spectre tend donc vers $(0,0,\dots,0,1,1,\dots,1)$ où 0 est répété p fois et 1 l'est q fois, quand y tend vers x_o.

(4.3) Définitions. *Dans les conditions du lemme précédent, nous noterons* $\mathscr{L}_y$ *l'espace vectoriel de dimension* p *, somme directe des sous-espaces propres de* $\tilde{\nabla}(\sigma\vec{n})(y)$ *relatifs aux valeurs propres dont le module est* $< \frac{1}{2}$.

Pour tout y *n'appartenant pas à* V *l'endomorphisme induit par* ℓ *dans* $\mathscr{L}_y$ *sera noté* $\hat{\ell}$.

Les vecteurs propres de $\hat{\ell}$ *, ses valeurs propres, etc. seront qualifiés par l'adjectif "longitudinal".*

Observons que, d'après le lemme (4.1), $\vec{n}(y) \in \mathscr{L}_y^{\perp}$, et que si $y \in V$, on a $\mathscr{L}_y = T_y V$.

(4.4) Théorème. *Le champ de sous-espaces $\mathscr{L}$ est de classe C^{∞}.*

Preuve. Posons $f_y = \tilde{\nabla}(\sigma \vec{n})(y)$, $A_y = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (X - t_i(y))$,

$$A_{1,y} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} (X - t_i(y)),$$

$$A_{2,y} = \prod_{p+1 \leqslant j \leqslant n} (X - t_j(y)).$$

Comme $A_{1,y}$ et $A_{2,y}$ sont premiers entre eux et que $A_y = A_{1,y} \cdot A_{2,y}$ on a, d'après un lemme classique : $\operatorname{Ker} A_y(f_y) = \operatorname{Ker} A_{1,y}(f_y) \oplus \operatorname{Ker} A_{2,y}(f_y)$ donc, d'après Hamilton Cayley :

$$T_y \tilde{V} = \operatorname{Ker} A_{1,y}(f_y) \oplus \operatorname{Ker} A_{2,y}(f_y).$$

Comme $\operatorname{Ker}(f_y - t_i(y)I) \subset \operatorname{Ker} A_{1,y}(f_y)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$,

$\operatorname{Ker}(f_y - t_j(y)I) \subset \operatorname{Ker} A_{2,y}(f_y)$ pour $p+1 \leqslant j \leqslant n$,

il en résulte $\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \operatorname{Ker}(f_y - t_i(y)I) = \operatorname{Ker}(A_{1,y}(f_y))$

et $\bigoplus_{p+1 \leqslant j \leqslant n} \operatorname{Ker}(f_y - t_j(y)I) = \operatorname{Ker}(A_{2,y}(f_y))$.

(4.4.1) Ainsi $\mathscr{L}_y = \operatorname{Ker}(A_{1,y}(f_y))$.

Pour terminer la démonstration nous utiliserons le lemme suivant :

(4.4.2) Lemme. *Pour tout k entier $\geqslant 1$ soit E_k l'ensemble des polynômes unitaires de degré k à coefficients dans un corps K. Soient p et q entiers $\geqslant 1$. Soit $H : E_p \times E_q \to E_{p+q}$ l'application $(A,B) \longmapsto AB$.*

Alors le jacobien de H au point (A,B) est égal au résultant de A et B quand on identifie E_k à K^k par l'application $\sum_{0 \leqslant i \leqslant k-1} \alpha_i X^i + X^k \longmapsto (\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant k-1}$

Preuve. Il suffit d'écrire le jacobien.]]

Puisque A_y est le polynôme caractéristique de f_y et que $y \to f_y$ est C^∞, l'application $y \to A_y$ est C^∞. Comme $A_{1,y}$ et $A_{2,y}$ sont premiers entre eux, il résulte du lemme (4.4.2)et du théorème d'inversion locale que $y \to A_{1,y}$ est C^∞.

Par suite $y \to A_{1,y}(f_y)$ est C^∞.

Comme, pour tout y, dim Ker $A_{1,y}(f_y) = p$ (= dim $\mathscr{L}_y$) il en résulte, d'après la version C^∞ du lemme (5.1) du chapitre III, que $y \longmapsto \text{Ker } A_{1,y}(f_y)$ est C^∞ en tant que fonction à valeurs dans la grassmannienne. $\square$

(4.5) Nous allons étudier dans cette section ce que devient $\hat{\ell}_y$ quand $\sigma(y) \xrightarrow[\neq]{} 0$.

La difficulté provient de ce que $\vec{n}$ est défini autour de V mais pas sur V. Nous utiliserons le lemme suivant :

(4.5.1)Lemme. *Soient* $x_o \in V$, $\nu_1 \in S^{\langle k \rangle} N_{x_o} V$, $\gamma : [0,r] \to \tilde{V}$ *la géodésique de* $\tilde{V}$ *telle que* $\gamma'(0) = \nu_1$, $s \longmapsto u(s)$ *un champ de vecteurs le long de* γ *tel que* $u(0) \in T_{x_o} V$.
Alors il existe $\eta > 0$ *et une application* C^∞, $c : [0,r] \times [0, \eta] \to \tilde{V}$ *telle que :*

i) $c(s,0) = \gamma(s)$ *et* $\frac{\partial c}{\partial t}(s,0) = u(s)$ *pour tout* $s \in [0,r]$; *et* $c(0,t) \in V$ *pour tout* $t \in [0, \eta]$;
ii) l'application $g :]0,r] \times [0, \eta]$ *dans* $T\tilde{V}$ *définie par* $g(s,t) = \vec{n}(c(s,t))$ *se prolonge en une fonction* C^∞ *sur* $[0,r] \times [0, \eta]$.

Preuve. Soit $\mathscr{E}^{\langle r \rangle}_U V$ comme au n° 1.

Supposons que U est l'ensemble de définition d'une carte $c : x \longmapsto x_1$ de V au voisinage de x_o et qu'il existe sur U des champs ν_j, $1 \leqslant j \leqslant q$, tels que pour tout $x \in V$, $(\nu_j(x))_{1 \leqslant j \leqslant q}$ soit une base orthonormée de $N_x V$. Posons $U_1 = c(U)$.

Soit $B^{\langle r \rangle}$ la boule ouverte de rayon r de $\mathbb{R}^q$, centrée à l'origine. L'application $(x_1, \zeta_1, \ldots, \zeta_q) \longmapsto \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \zeta_j \nu_j(x)$ de $U_1 \times B^{\langle r \rangle}$ dans $B^{\langle r \rangle} N_U V$ est un difféomorphisme

qui, par composition avec Φ, fournit un difféomorphisme k^{-1} de $U_1 \times \mathring{B}^{\langle r\rangle}$ sur $\mathring{\mathcal{O}}^{\langle r\rangle}_U V$.

k est donc une carte de $\tilde{V}$.

Posons $\nu_{11} = (Tk).\nu_1$,

$$u_1(s) = (Tk).u(s),$$
$$c_1(s,t) = s\nu_{11} + tu_1(s) .$$

L'application $c : [0,r] \times [0,\eta] \to \tilde{V}$, définie pour η assez petit par :

$$c(s,t) = k^{-1}(c_1(s,t)),$$

vérifie les conditions de i).

Posons $T_1 = \mathbb{R}^p \times \{0\}$ et $N_1 = \{0\} \times \mathbb{R}^q$, ainsi $\mathbb{R}^n = T_1 \oplus N_1$, et notons P_{N_1} le projecteur orthogonal sur N_1.

Pour tout $y_1 \in \mathbb{R}^n \setminus T_1$, posons $n_1(y_1) = \dfrac{P_{N_1}(y_1)}{\| P_{N_1}(y_1)\|}$ et $\sigma_1(y_1) = \| P_{N_1}(y_1)\|$.

k est ainsi faite que $\sigma(y) = \sigma_1(k(y))$ et $(T_y k)\vec{n}(y) = n_1(k(y))$.

Posons $g_1(s,t) = n_1(c_1(s,t))$, pour tout $(s,t) \in [0,r] \times [0,\eta]$.

Il suffit de montrer que g_1 se prolonge en une fonction C^∞ sur $[0,r] \times [0,\eta]$.

$$g_1(s,t) = \frac{P_{N_1}(s\nu_{11} + tu_1(s))}{\| P_{N_1}(s\nu_{11} + tu_1(s))\|}$$

$$g_1(s,t) = \frac{\nu_{11} + t\dfrac{P_{N_1}(u_1(s))}{s}}{\left\| \nu_{11} + t\dfrac{P_{N_1}(u_1(s))}{s} \right\|}$$

Comme $u_1(0) \in T_{x_0}V$, on a $P_{N_1}(u_1(0)) = 0$, donc la fonction $s \longmapsto \dfrac{P_{N_1}(u(s))}{s}$ admet un prolongement C^∞ à $[0,r]$, d'où le résultat. □

(4.5.2)Proposition. *Soient* $x \in V$, $\nu_1 \in S^{\langle 1\rangle}N_x V$, $\gamma : [0,r] \to \tilde{V}$ *la géodésique de* $\tilde{V}$ *telle que* $\gamma'(0) = \nu_1$, u *et* v *deux champs de vecteurs le long de* γ *tels que* $u(0) \in T_x V$ *et* $v(0) \in T_x V$.

Alors $(-((\tilde{\nabla}\vec{n})(\gamma(s)).u(s)) \mid v(s))$ *tend vers* $h_{\nu_1}(u(0)) \mid v(0)$ *quand* $s \xrightarrow[s>0]{} 0$.

Preuve. Soit g la fonction du lemme précédent.

$$(\tilde{\nabla}\vec{n})(\gamma(s)).u(s) = \frac{\tilde{\nabla} g}{\partial t}(s,0).$$

On a vu que $\frac{\tilde{\nabla} g}{\partial t}(s,0)$ tend vers $\frac{\tilde{\nabla} g}{\partial t}(0,0)$ quand s tend vers 0.

De plus pour tout $t \in [0, \eta]$, $g(0,t)$ est un vecteur normal à V (car $g_1(0,t) \in N_1$ en tant que limite d'un vecteur appartenant à N_1)

$$\text{donc} \quad -\frac{\tilde{\nabla} g}{\partial t}(0,0) \mid v(0) = h_{\nu_1}(u(0)) \mid v(0),$$

d'où le résultat. □

(4.5.3) Corollaire. *Soit* γ *comme dans (4.5.2).*

Pour tous $i = 1, \dots, p$ *soit* $u_i : [0,r] \to \tilde{V}$ *un champ de vecteurs le long de* γ

tel que $u_i(0) \in T_{x_0} V$. *Supposons que, pour tout* $s \in [0,r]$:

i) $u_i(s)$ $_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *est orthonormée,*

ii) $\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathbb{R} u_i(s)$ *est stable par* $(\tilde{\nabla}\vec{n})(\gamma(s))$.

Notons L_s *l'endomorphisme induit par* $-(\tilde{\nabla}\vec{n})(\gamma(s))$ *dans* $\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathbb{R} u_i(s)$.

Alors la matrice de L_s *sur la base* $(u_i(s))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *tend vers la matrice de* h_{ν_1}, *quand* $s \xrightarrow[s>0]{} 0$. En particulier le spectre de L_s tend vers celui de h_{ν_1}.

Si de plus les valeurs propres de h_{ν_1} *sont simples alors il existe* r_0 *tel que pour* $0 < s < r_0$, L_s *a des valeurs propres simples ; et les directions propres de* L_s *tendent vers les directions propres de* h_{ν_1}.

(4.6) Théorème. *Supposons que* $\tilde{V}$ *a une courbure sectionnelle constante (resp. que* $\tilde{V}$ *est une variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante et que* V *est une sous-variété complexe de* $\tilde{V}$.

Alors $\mathscr{L}_y = \mathcal{O}_y = \mathscr{P}_y = \mathscr{J}_y$.

Preuve. D'après la proposition (3.5) $\mathcal{O}_{\gamma(s)}$ est stable par $(\tilde{\nabla}\vec{n})(\gamma(s))$. Soit L_s l'endomorphisme induit par $(\tilde{\nabla}\vec{n})(\gamma(s))$ dans $\mathcal{O}_{\gamma(s)}$. D'après le corollaire précédent le spectre $(\mu_1(s),\dots,\mu_p(s))$ de L_s tend vers celui de h_{ν_1}.

Il existe donc r_0 tel que si $|s| < r_0$ on a $|s\,\mu_i(s)| < \frac{1}{2}$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant p$, et par suite $\mathcal{O}_y = \mathcal{L}_y$, d'où le résultat. []

En utilisant la proposition (4.4) et en généralisant la proposition (4.5.2) nous allons voir que certaines propriétés des tubes de rayon assez petit autour de V, démontrées en (IV,1) dans le cas où $\tilde{V}$ est un espace euclidien, s'étendent au cas d'une variété $\tilde{V}$ quelconque.

L'idée est de "descendre" de $\mathrm{Tub}^{<r>} V$ sur V le long des géodésiques $t \to \exp_{\tilde{V}} t\,\xi$, où $\xi \in S^{<1>} N_{x_0} V$ en suivant les vecteurs propres longitudinaux de $\tilde{\nabla}\vec{n}$ par continuité. On est ainsi ramené à l'étude faite en (IV,1) du comportement des vecteurs propres de h_ξ quand ξ varie dans $S^{<1>} N_{x_0} V$.

(4.7) Proposition. *Soit V une sous-variété de $\tilde{V}$. Supposons que pour tout $\xi \in S^{<1>} N_{x_0} V$, h_ξ a toutes ses valeurs propres simples et non nulles.*
Alors il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $y \in \mathcal{B}_{x_0}^{<r_0>} \setminus \{x_0\}$, les courbures longitudinales de Tub V *au point y sont distinctes et non nulles.*

Preuve. Pour tout $\xi \in S^{<1>} N_{x_0} V$ notons γ_ξ la géodésique issue de ξ. Soient $y \to a_i(y)$, $1 \leqslant i \leqslant p$ des champs locaux C^∞ définis au voisinage de x_0 dans $\tilde{V}$, tels que pour tout y, $(a_i(y))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ soit une base orthonormée de $\mathcal{L}_y$.

Posons $u_i(s,\xi) = a_i(\gamma_\xi(s))$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

On peut alors, comme dans le lemme (4.5.1) définir une fonction $(s,t,\xi) \to c_i(s,t,\xi)$ de $[0,r] \times [0,\eta] \times S^{<1>} N_{x_0} V$ dans $\tilde{V}$ telle que $\frac{\partial c_i}{\partial t}(s,0,\xi) = u_i(s,\xi)$, etc. et montrer que l'application g_i de $]0,r] \times [0,\eta] \times S^{<1>} N_{x_0} V$ dans $T\tilde{V}$ définie par $g_i(s,t,\xi) = \vec{n}(c_i(s,t,\xi))$ se prolonge en une application C^∞ de $[0,r] \times [0,\eta] \times S^{<1>} N_{x_0} V$ dans $T\tilde{V}$. (Comme $u_i(0,\xi) = a_i(x_0)$ pour tout $\xi \in S^{<1>} N_{x_0} V$ on a $P_{N_1}(u_i(0,\xi)) = 0$ pour tout $\xi \in S^{<1>} N_{x_0} V$, donc l'application $(s,\xi) \to \dfrac{P_{N_1}(u_i(s,\xi))}{s}$ se prolonge en une fonction C^∞ d'après un lemme classique sur la division des fonctions C^∞.)

On en déduit que la matrice $\hat{\mathcal{L}}_{\gamma_\xi(s)}$ par rapport à la base $(u_i(s,\xi))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est fonction C^∞ de (s,ξ) sur $[0,r] \times S^{<1>}N_{x_o}V$ et en particulier qu'elle tend vers la matrice de h_ξ **uniformément par rapport à** $\xi \in S^{<1>}N_{x_o}V$ quand s tend vers 0. D'où le résultat. □

(4.7.1)Remarque. Si $\tau(s,\xi)$ est, pour tout $s \in]0,r]$, vecteur propre de $\hat{\mathcal{L}}_{\gamma_\xi(s)}$ et si $\tau(s,\xi)$ dépend continûment de s, on a vu que, pour ξ fixé, $\tau(s,\xi)$ tendait vers un vecteur propre u_ξ de h_ξ quand $s \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$. Il résulte de ce qui précède que $\tau(s,\xi)$ tend vers u_ξ, uniformément par rapport à $\xi \in S^{<1>}N_{x_o}V$, quand $s \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$.

(4.8) Théorème.

A. Soient V une sous-variété de dimension deux et de codimension deux dans $\tilde{V}$, et $x_o \in V$.

Supposons que pour tout $\xi \in S^{<1>}N_{x_o}V$, h_ξ a toutes ses valeurs propres simples et non nulles et soit $r_o > 0$ tel que, pour tout $y \in \mathcal{B}_{x_o}^{<r_o>} \setminus \{x_o\}$, les courbures longitudinales de Tub V au point y soient distinctes et non nulles.

Alors si $r < r_o$, tout vecteur unitaire principal longitudinal τ au point $y \in \mathrm{Tub}^{<r>}V$ suivi par continuité quand y fait un tour sur $\mathrm{Tub}_{x_o}^{<r>}V$ a pour position finale $-\tau$.

B. Soient V une hypersurface complexe d'une variété kaehlérienne $\tilde{V}$ et $x_o \in V$.

Les basculements principaux (cf.(0.3.2)) au point x_o sont d'ordre $\geqslant 2$. S'ils sont tous d'ordre 2 et non nuls, alors on a la même conclusion qu'au A.

C. Soient $\tilde{V}$ une variété kaehlérienne dont la courbure sectionnelle holomorphe est constante et V une hypersurface complexe de $\tilde{V}$.

Alors le spectre de $\hat{\mathcal{L}}$ en un point $y \in \mathrm{Tub}_x^{<r>}V$ ne dépend que de x.

Preuve.

A. Soit $\bar{\tau}$ un vecteur propre unitaire longitudinal au point $y_o \in \mathrm{Tub}_{x_o}^{<r>}V$. Orientons $N_{x_o}V$ et posons $\xi_t = e^{it}\gamma'_{x_o y_o}(0)$.

Soit $s \to \tau(s)$ l'unique application continue de $[0,r]$ dans $T\tilde{V}$ telle que $\tau(s)$ soit vecteur propre unitaire de $\hat{\ell}_{\gamma_{\xi_o}(s)}$ pour tout $s \in [0,r]$, et $\tau(r) = \bar{\tau}$.

Pour tout $s \in]0,r]$ soit $t \to A(s,t)$ l'unique application continue de $[0,2\pi]$ dans $T\tilde{V}$ telle que $A(s,t)$ soit vecteur propre unitaire de $\hat{\ell}_{\gamma_{\xi_t}(s)}$ pour tout $t \in [0,2\pi]$ et $A(s,0) = \tau(s)$.

L'application $(s,t) \to A(s,t)$ de $]0,r] \times [0,2\pi]$ est continue, et on a vu que pour tout t fixé $A(s,t)$ tendait vers un vecteur propre $u(t)$ de h_{ξ_t} quand s tend vers 0 et que $A(s,t)$ tendait vers $u(t)$ uniformément par rapport à t quand s tend vers 0. Il en résulte que $t \longmapsto u(t)$ est une fonction continue. D'après la preuve du théorème (1.8), on a $u(2\pi) = -u(0)$,

$$\text{i.e.} \quad A(0,2\pi) = -A(0,0).$$

La fonction $s \to (A(s,2\pi) \mid A(s,0))$ est continue et comme $A(s,2\pi)$ et $A(s,0)$ sont deux vecteurs propres unitaires de $\hat{\ell}_{\gamma_{\xi_o}(s)}$, elle ne peut prendre que les valeurs -1, 0, ou 1. Sa valeur en 0 étant -1, on a $(A(s,2\pi) \mid A(s,0)) = -1$, et donc $A(s,2\pi) = -A(s,0)$ pour tout $s \in [0,r]$.

B. Rappelons que les basculements principaux sont les valeurs propres de l'endomormorphisme de bascule β. Lorsque V est une hypersurface complexe d'une variété kählérienne, β est $\mathbb{C}$-linéaire (cf. (0 ; 3.4.2)) donc les basculements principaux de V au point x_o sont d'ordre $\geqslant 2$.

On procède ensuite comme au A. en utilisant cette fois la preuve de la proposition (1.10).

C. Soient $x_o \in V$, $y_o \in \mathrm{Tub}_{x_o}^{<r>} V$, $\xi_o = \gamma'_{x_o y_o}(0)$, $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base orthonormée de vecteurs propres de h_{ξ_o}. Pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant p$ notons W_i le champ de Jacobi le long de $\gamma_{x_o y_o}$ défini par :

$$\begin{cases} W_i(0) = u_i \\ \dfrac{\tilde{\nabla} W_i}{ds}(0) = -h_{\xi_o}(u_i). \end{cases}$$

On a $\xi_o \in N_{x_o}V$ et $\mathscr{J}\xi_o \in N_{x_o}V$, donc $(W_i(0) \mid \xi_o) = 0$ et $(W_i(0) \mid \mathscr{J}(\xi_o)) = 0$; de plus $\dfrac{\tilde{\nabla} W_i}{ds}(0) = -\lambda_i u_i$,

i.e. $\dfrac{\tilde{\nabla} W_i}{ds}(0) = -\lambda_i W_i(0)$,

donc, d'après le lemme (3.3'), $W_i(s) = \theta_i(s) Z_i(s)$, où Z_i est le champ parallèle $s \to \tilde{P}_{s,s_o} u_i$ et θ_i est la solution de l'équation différentielle $\theta'' + \frac{a}{4}\theta = 0$ telle que $\theta(0) = 1$ et $\theta'(0) = -\lambda_i$.

On a alors $\dfrac{\tilde{\nabla} W_i}{ds}(s) = \dfrac{\theta_i'(s)}{\theta_i(s)} W_i(s)$

et donc $-(\tilde{\nabla}\vec{n}).W_i(s) = -\dfrac{\theta_i'(s)}{\theta_i(s)} W_i(s)$

i.e. $\mathfrak{L}(W_i(s)) = \mu_i(s) W_i(s)$,

où $\mu_i(s) = -\dfrac{\theta_i'(s)}{\theta_i(s)}$.

Ainsi le spectre longitudinal au point y_o est déterminé par r et le spectre de h_{ξ_o}. Or on a vu (cf. Lemme (1.9)) que le spectre de h_ξ était indépendant du choix de ξ dans $S^{<1>}N_{x_o}V$, d'où le résultat. □

Ceci achève la preuve du théorème (4.8).

(4.9) Théorème. *Soit* V *une sous-variété d'une variété riemannienne* $\tilde{V}$. *Si* $\mathscr{L}_V$ *est localement intégrable, alors la connexion normale de* V *est plate.*

Preuve. Supposons $\mathscr{L}_V$ intégrable.

Soient $x_o \in V$, $y_o \in \mathrm{Tub}_{x_o}^{<r>} V$, $\gamma = \gamma_{x_o y_o}$, X et Y des champs adaptés à $\mathscr{L}$ au

voisinage de x_o, (i.e. $X(y) \in \mathscr{L}_y$ et $Y(y) \in \mathscr{L}_y$). Pour tout $s \in [0,r]$ soit $(\nu_j(s))_{1 \leq j \leq q}$ une base de $(\mathscr{L}_{\gamma(s)})^{\perp}$ telle que $\nu_1(s) = \vec{n}(\gamma(s))$.

On a, pour tout $s > 0$, au point $\gamma(s)$:

$$(\tilde{\rho}(X \wedge Y)) \,|\, (\vec{n} \wedge \nu_k) = ((\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \vec{n} - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \vec{n} - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} \vec{n}) \,|\, \nu_k).$$

Soit $C_X : (s,t_1) \to C_X(s,t_1)$ l'application de $[0,r] \times [0,\eta]$ dans $\tilde{V}$, définie comme dans la preuve du lemme (4.5.1) telle que $\frac{\partial C_X}{\partial t_1}(s,0) = X(\gamma(s))$ pour tout $s \in [0,r]$, et $C_X(0,t) \in V$ pour tout $t_1 \in [0,\eta]$, et posons $\nu_{1,X}(s,t_1) = \vec{n}(C_X(s,t_1))$.

Pour $k = 2,\ldots,q$ soit $\bar{\nu}_{k,X} : [0,r] \times [0,\eta] \to T\tilde{V}$ de classe C^1 telle que $\bar{\nu}_{k,X}(s,t_1) \in (\mathscr{L}_{C_X(s,t_1)})^{\perp}$ pour tout $(s,t) \in [0,r] \times [0,\eta]$; et définissons de même $\nu_{1,Y}$, C_Y et $\bar{\nu}_{k,Y}$.

$$\tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}_Y \vec{n})(\gamma(s)) = \frac{\tilde{\nabla}}{\partial t_1}((\tilde{\nabla}_Y \vec{n})(C_X(s,t_1)))\Big|_{t_1=0}.$$

Comme $\mathscr{L}$ est stable par $\tilde{\nabla}\vec{n}$, $\tilde{\nabla}_Y \vec{n} \in \mathscr{L}$, donc $((\nabla_Y \vec{n})(C_X(s,t_1)) \,|\, \nu_{k,X}(s,t_1)) = 0$ pour tout t_1 ;

$$\text{donc } ((\frac{\tilde{\nabla}}{\partial t_1}((\nabla_Y \vec{n})(C_X(s,t_1)))) \,|\, \nu_{k,X}(s,t_1)) + ((\tilde{\nabla}_Y \vec{n})(C_X(s,t_1)) \,\Big|\, \frac{\tilde{\nabla}\nu_{k,X}}{\partial t_1}(s,t_1)) = 0$$

$$\text{donc } (\tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}_Y \vec{n})_{\gamma(s)} \,|\, \nu_k(s)) = -((\tilde{\nabla}_Y \vec{n})(\gamma(s)) \,\Big|\, \frac{\tilde{\nabla}\nu_{k,X}}{\partial t_1}(s,0))$$

$$= -(\frac{\tilde{\nabla}\nu_{i,Y}}{\partial t_2}(s,0) \,\Big|\, \frac{\tilde{\nabla}\nu_{k,X}}{\partial t_1}(s,0)),$$

et ceci tend vers :

$$A_{X,Y,k} = -\left(\frac{\tilde{\nabla}\nu_{l,Y}}{\partial t_2}(0,0)\,\middle|\,\frac{\tilde{\nabla}\nu_{k,X}}{\partial t_1}(0,0)\right), \text{ quand s tend vers 0}$$

$$A_{X,Y,k} = \left(h_{\nu_l(0)}(Y(x_o))\,\middle|\,\left(\frac{\tilde{\nabla}\nu_{k,X}}{\partial t_1}\right)(0,0)\right)$$

$$= -h_{\nu_k(0)}(X(x_o))\,\middle|\,h_{\nu_l(0)}(Y(x_o)).$$

Comme $\mathscr{L}$ est intégrable, $[X,Y]$ est adapté à $\mathscr{L}$ et, puisque $\mathscr{L}$ est stable par $\tilde{\nabla}\vec{n}$, $\tilde{\nabla}_{[X,Y](y)}\vec{n} \in \mathscr{L}_y$ pour tout y, donc

$$(\tilde{\nabla}_{[X,Y]}\vec{n})_{\gamma(s)}\,\middle|\,\nu_k(s) = 0.$$

Finalement, au point x_o :

$$(\tilde{\rho}(X \wedge Y))\,|\,(\nu_l \wedge \nu_k) = -h_{\nu_k}(X)\,|\,h_{\nu_l}(Y) + h_{\nu_k}(Y)\,|\,h_{\nu_l}(X)$$

$$= -h_{\nu_l} h_{\nu_k}(X)\,|\,Y + h_{\nu_k} h_{\nu_l}(X)\,|\,Y$$

i.e. $(\tilde{\rho}(X \wedge Y))\,|\,(\nu_l \wedge \nu_k) = (h_{\nu_k} h_{\nu_l} - h_{\nu_l} h_{\nu_k})(X)\,|\,Y$ au point x_o,

donc la connexion normale de V est plate, (cf. [Ch. B]). □

Index

Angle de deux sous-espaces vectoriels	p. 15
Basculements principaux	p. 16
Basculement suivant le vecteur u	p. 15
Champ de Jacobi adapté (resp. strictement adapté)	p. 118,119
*-convexe, fortement *-convexe, e-convexe	p. 27
Convexoïde, fortement convexoïde, e-convexoïde	p. 29
Courbure aréolaire	p. 18
Courbure de Gauss-Bonnet	p. 53
Dégénéré (vecteur tangent)	p. 87
Direction asymptotique	p. 14
Direction de basculement principal	p. 17
Direction principale longitudinale	p. 133
Direction de courbure	p. 63
Endomorphisme de bascule	p. 16
Espace central	p. 84
Géodésique unitaire	p. 14
Indice de nullité de roulis	p. 74
Isobasculante (sous-variété)	p. 18
Joachimsthal (théorème de)	p. 64
Ligne de courbure	p. 63
Longitudinal	p. 108,118,133
Méplat	p. 27
Ombilical	p. 25
Pivotement	p. 68, 69
Point central	p. 84
Points focaux (interprétation cinématique)	p. 98
Rotation instantanée	p. 67
Roulis	p. 58
Tangage	p. 13
Translation instantanée	p. 84
Véronésienne (sous-variété)	p. 20

Principales notations

ang (u,v)	p. 48	P_{t_1,t_0}	p. 57
$\mathrm{ang}(F_1,F_2)$	p. 57	$\mathscr{P}$	p. 120
α , α_ξ	p. 13	Q	p. 14
$B^{<r>}N_A V$	p. 118	R	p. 14
β	p. 16	$R^\perp$	p. 70
$\mathscr{C}_u$	p. 84	ρ	p. 14
C_u	p. 86	r_u	p. 58
$\delta_M(A)$	p. 39	$\$_k$	p. 14
$\mathscr{E}_A^{<r>}V$	p. 118	$S^{<r>}N_A V$	p. 118
φ, φ_e	p. 16	$\mathscr{S}_p(M)$	p. 128
G	p. 49, 53	t_u	p. 13
g_u	p. 70	$T_x V$	p. 83
h	p. 13	$\mathcal{T}_x V$, $\vec{\mathcal{T}}_x V$	p. 83
H_u	p. 84	$\mathcal{T}_u$	p. 84
$\mathscr{J}$	p. 121	$\mathrm{Tub}_A^{<r>} V$	p. 107, 118
ℓ	p. 107	X_u	p. 84
$\hat{\ell}$	p. 108, 135	$(\nabla A).u$	p. 14
$\mathscr{L}$	p. 120	$\nabla^i A$	p. 14
$\vec{n}$	p. 119	$\nabla^\perp$	p. 61
$N_x V$	p. 83	$\dot{\nabla}$	p. 61
$\mathcal{N}_x V$, $\vec{\mathcal{N}}_x V$	p. 83	$\square$	p. 52
$\mathscr{P}$	p. 120	$\overline{\omega}$	p. 107

BIBLIOGRAPHIE

[Bi. Cri.] **R.L. BISHOP, R.J. CRITTENDEN,** *Geometry of Manifolds,* Academic Press (1964).

[Ch. B.] **B.Y. CHEN,** *Geometry of submanifolds,* Marcel Dekker, Inc. New-York (1973).

[Ch. B.2] **B.Y. CHEN,** *Geometry of Submanifolds and its Applications,* Science Univ. of Tokyo (1981).

[Ch. Va.] **B.Y. CHEN, L. VANHECKE,** *Differential geometry of geodesic spheres,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 325, p. 28-67.

[Ch.] **S.S. CHERN,** *La géométrie des sous-variétés d'un espace euclidien à plusieurs dimensions,* Enseignement Math. 40, (1951-54), p. 26-46.

[Ch. Ku.] **S.S. CHERN, N. KUIPER,** *Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space,* Ann. of Math. 56 (1952), p. 422-430.

[Ch. La.] **S.S. CHERN, R.K. LASHOF,** *On the total curvature of immersed manifolds,* Amer. J. Math. 79 (1957).

[Di.] **J. DIEUDONNE,** *Eléments d'Analyse,* tome 4, Gauthier-Villars (1971).

[God.] **C. GODBILLON,** *Géométrie différentielle et Mécanique analytique,* Hermann (1969).

[Gr.] **A. GRAY,** *Comparison theorems for the volumes of tubes as generalizations of the Weyl tube formula,* Topology, Vol. 21, n° 2, p. 201-228 (1982).

[G.V.] **A. GRAY, L. VANHECKE,** *The volumes of tubes in a riemannian manifold,* Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino, vol. 39, 3, p. 1-50 (1981).

[G.H.V.] **W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE,** *Connections, Curvature, and Cohomology,* Academic Press (1973).

[K.N.] **S. KOBAYASHI, K. NOMIZU,** *Foundations of differential geometry,* Interscience Publishers (1969).

[La.] **R. LANGEVIN,** *Courbures, feuilletages et surfaces,* Thèse, Orsay (1980).

[Ma. 1] **H. MAILLOT,** *Endomorphisme de bascule et courbure aréolaire d'une sous-variété d'une variété riemannienne,* Geometriae Dedicata 12 (1982), p. 1-15.

[Ma. 2] **H. MAILLOT,** *Sur la courbure des sous-variétés d'un espace euclidien,* Compte rendu Acad. Sci. Paris, t. 297 (1983), Série I, p. 651.

[Ma. 3] **H. MAILLOT,** *Sur les droites privilégiées en un point d'une sous-variété V d'un espace euclidien et les directions principales des tubes autour de V.* Compte rendu Acad. Sci. Paris, t. 298, Série I, n: 3, 1984, p. 51.

[Ma. 4] **H. MAILLOT,** *Sur certains champs de sous-espaces vectoriels et sur les sous-variétés riemanniennes dont la connexion normale est plate,* Compte rendu Acad. Sci. Paris, t. 297, p. 497 (1983).

[Mil.] **J. MILNOR,** *Morse Theory,* Princeton Univ. Press (1963).

[Mo.] **J.M. MORVAN,** *Quelques propriétés géométriques et topologiques des sous-variétés riemanniennes,* Thèse, Limoges (1979).

[Si. J.] **J. SIMONS,** *Minimal varieties in Riemannian manifolds,* Ann. of Math. 88 (1968), p. 62-105.

[Spi.] **M. SPIVAK,** *A comprehensive Introduction to Differential Geometry,* Publish or Perish, Inc. (1975).

Henry MAILLOT

Université Claude Bernard - Lyon I
Institut de Mathématiques de l'I.S.M.
U.A. (C.N.R.S.) n° 04 0746
43, boulevard du 11 novembre 1918

69622 VILLEURBANNE CEDEX