

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

WILFRID HODGES

Groupes nilpotents existentiellement clos de classe fixée

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 16 (1984), p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_16__R1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GROUPES NILPOTENTS EXISTENTIELLEMENT CLOS DE CLASSE FIXEE

Wilfrid Hodges

Résumé. Nous démontrons que pour chaque $k \geq 2$, il y a une famille continupotente de groupes existentiellement clos nilpotents de classe k , telle que si G et H sont deux groupes distincts dans la famille, alors il existe une proposition du 1er ordre et de la forme $\exists \forall \exists$, qui est vraie dans G mais pas dans H . La forme $\exists \forall \exists$ est la meilleure possible.

Summary. We show that if $k \geq 2$, then there is a family of existentially closed nilpotent groups of class k which has the cardinality of the continuum, such that if G and H are two distinct groups in the family, then there is an $\exists \forall \exists$ first-order sentence which is true in G but not in H . The form $\exists \forall \exists$ is best possible.

Soit \mathcal{N}_k la classe des groupes nilpotents de classe k . On dit qu'un groupe $G \in \mathcal{N}_k$ est e.c. (pour existentiellement clos) dans \mathcal{N}_k si pour tout groupe $H \in \mathcal{N}_k$ avec $G \subseteq H$, et tout système fini E d'équations et d'inéquations avec paramètres dans G , si E est satisfait dans H alors E est satisfait dans G .

THEOREME. Pour tout $k \geq 2$, il y a 2^ω groupes e.c. dans \mathcal{N}_k , G_α ($\alpha < 2^\omega$), tels que si $\alpha \neq \beta$, alors il existe une proposition ϕ de la forme $\exists \forall \exists$ qui est vraie dans G_α mais pas dans G_β . (La forme $\exists \forall \exists$ est $\exists \bar{x} \forall \bar{y} \exists \bar{z} \psi$ avec ψ sans quanteurs.)

On sait déjà: (1) Le théorème est vrai avec 2 pour 2^ω (Saracino [10]). (2) Il y a 2^ω groupes e.c. dans \mathcal{N}_k , G_α ($\alpha < 2^\omega$), tels que si $\alpha \neq \beta$ alors $G_\alpha \not\cong G_\beta$ (Hodges [6]). (3) Si G, H sont e.c. dans \mathcal{N}_k , alors pour toute proposition ϕ de la forme $\forall \exists$, ϕ est vraie ou bien dans G et H , ou bien dans aucun des deux (cf. Prop. 1.14 dans Hirschfeld & Wheeler [5]). (Voir aussi Maier [9].) Le théorème remplit la lacune entre ces résultats. Au même temps sa démonstration

donne quelque substance algébrique au résultat (2).

Pour les groupes e.c., au lieu des groupes e.c. dans \mathcal{N}_k , le théorème au-dessus est un résultat bien connu de Belegradek [3] et Ziegler [12]. Pour les groupes e.c. dans \mathcal{N}_k qui sont périodiques, le théorème est tout à fait faux. Il n'y a qu'un groupe dénombrable et périodique qui soit e.c. dans \mathcal{N}_2 (Theorem 3.5 de Saracino & Wood [11], cf. aussi Apps [1]).

Nous procédons en deux coups. La première étape, c'est de bâtir 2^{ω} groupes e.c. dans \mathcal{N}_k qui "représentent" différents ensembles d'entiers. Et puis au second coup nous trouvons des formules ϕ_X qui expriment qu'un ensemble X est représenté dans un groupe e.c. Nous écrivons G' pour le sousgroupe dérivé de G . $[x_1, \dots, x_n]$ est le commutateur $[...[x_1, x_2], x_3, \dots, x_n]$ de poids n. G^*H est le produit libre de G et H dans le sens de \mathcal{N}_k . Pour plusieurs détails je renvoie à Hodges [6]. Nous fixons $k \geq 2$.

1. Construction d'un ensemble continupotent de groupes e.c. dans \mathcal{N}_k

LEMME 1. Soient p un nombre premier, $G \in \mathcal{N}_k$ et b un élément de G . Alors (a), (b) sont équivalents:

- (a) Il y a un groupe $H \supseteq G$, $H \in \mathcal{N}_k$, avec des éléments h_2, \dots, h_k tels que $[b, h_2, \dots, h_k] \neq 1$ et $h_k^p = 1$.
- (b) Dans G il n'y a pas d'élément a tel que $a^{p-1} \in G'$.

Démonstration. Soit F le groupe k -nilpotente libre de générateurs x_2, \dots, x_{k-1} . Considérons $K = G^*F^*Z_p$, où x_k engendre le groupe cyclique Z_p d'ordre p . La condition (a) est équivalente à

$$(1) \quad [b, x_2, \dots, x_k] \neq 1.$$

Supposons d'abord que (b) soit fausse. Prenant a tel que $a^{p-1} = c \in G'$, nous avons par les lois de \mathcal{N}_k :

$$[b, x_2, \dots, x_k] = [c^{-1}a^p, x_2, \dots, x_k] = [a, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k^p] = 1,$$

qui contredit (1). Puis supposons que (1) soit fausse. Alors d'après des faits connus sur \mathcal{N}_k , puisque aucun des x_2, \dots, x_k n'est de la forme y^p modulo K' , b est de cette forme modulo G' . (Cf. Lemma 2(a) de Hodges [6].) □

D'après le lemme 1, nous avons:

GROUPES NILPOTENTS

LEMME 2. Soit G e.c. dans \mathcal{N}_k , soit b un élément de G et soit p un nombre premier. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (a) b est de la forme a^p modulo G' .
- (b) $G \models \forall x_2, \dots, x_k (x_k^p = 1 \rightarrow [b, x_2, \dots, x_k] = 1)$. □

Maintenant soient $G \in \mathcal{N}_k$, b un élément de G et X un ensemble de nombres premiers. Nous disons que b représente X dans G si pour tout nombre premier p ,

- (2) $p \in X \Rightarrow b$ est de la forme a^p modulo G' , et
- (3) $p \notin X \Rightarrow$ il y a $h_2, \dots, h_k \in G$ avec $h_k^p = 1$ et $[b, h_2, \dots, h_k] \neq 1$.

Puisque les seconds membres de (2), (3) sont existentielles, il est clair que si b représente X dans G , alors b représente X aussi dans chaque $H \supseteq G$, $H \in \mathcal{N}_k$.

L'ensemble X de nombres premiers étant donné, nous construisons un groupe G_X avec un élément g_1^X qui représente X , comme suit. Soit Q_X le groupe des nombres rationnels q tels que si un nombre premier p divise le dénominateur de q , alors $p \in X$. Soit g_1^X le nombre 1 dans Q_X . Soit F le groupe libre $\in \mathcal{N}_k$ sur $k-1$ générateurs g_2^X, \dots, g_k^X . (Les éléments g_2^X, \dots, g_{k-1}^X suffisent ici, mais on a besoin de g_k^X plus tard.) Soit B_X le groupe $\bigoplus_{p \text{ premier } \notin X} \mathbb{Z}_p$. Alors G_X sera $Q_X * F * B_X$. On voit que g_1^X représente X dans G_X (c'est le Lemma 5 de Hodges [6]).

Notre but est de construire un groupe e.c. dans \mathcal{N}_k , dans lequel certains ensembles récursifs de nombres premiers sont représentés, et certains autres ne le sont pas. Pour ceci nous employons le forcing fini de Abraham Robinson (Barwise & Robinson [2]), pour omettre les ensembles que nous voulons laisser. Il faut ajouter quelques items aux définitions de Barwise & Robinson. Par exemple, dans le forcing correspondant à une théorie T , si ϕ_i ($i < \omega$) sont des propositions universelles du premier ordre, alors une condition π force $\bigwedge_{i < \omega} \phi_i$ ssi $T \cup \pi \vdash \phi_i$ pour tout $i < \omega$. (Pour justifier cela, et pour d'autres faits sur le forcing que nous ne démontrons pas ici, voir Hodges [7] ou Ziegler [12].) Nous écrivons A pour le modèle construit par forcing.

Soit E un ensemble dénombrable d'ensembles infinis de nombres premiers. Nous écrivons G_E pour la somme directe $\bigoplus (G_X : X \in E)$. Alors G_E est dénombrable. Soit Δ_E le diagramme de G_E , et soit T la théorie de \mathcal{N}_k .

W. HODGES

LEMME 3. Dans le forcing correspondant à $T \cup \Delta_E$, la condition \emptyset force que le modèle A construit soit un groupe e.c. dans \mathcal{N}_k contenant G_E comme sousgroupe. □

Or, grâce aux lemmes 2, 3, la propriété "c est de la forme a^p modulo A'' " équivaut (pour A) à

$$(4) \quad \forall x_2 \dots x_k (x_k^p = 1 \rightarrow [c, x_2, \dots, x_k] = 1).$$

On remarque que (4) est une proposition universelle, et de là, si π est une condition de forcing qui force (4), alors $T \cup \Delta_E \cup \pi$ l'implique. Le même est vrai pour la propriété "c n'est pas de la forme a^p modulo A'' ", utilisant un nombre infini de propositions universelles.

LEMME 4. Dans le forcing correspondant à $T \cup \Delta_E$, soit c une constante de forcing (un témoin), soit π une condition, et soit Y un ensemble infini de nombres premiers, tel qu'il existe une infinité de nombres premiers $\notin Y$. Alors si π force "c représente Y", il y a $X \in E$ tel que $Y \setminus X$ soit fini.

Démonstration. Soient c, d_1, \dots, d_m les constantes de forcing qui apparaissent dans π . Soit K le groupe $\in \mathcal{N}_k$ présenté par l'ensemble d'équations dans $\Delta_E \cup \pi$. Puisque π est une condition, $T \cup \Delta_E \cup \pi$ a un modèle, d'où $\Delta_E \cup \pi$ toute entière est vérifiée dans K. Alors $G_E \subseteq K$ sans perte de généralité, et K est engendré sur G_E par c, d_1, \dots, d_m . Or pour chaque $p \in Y$, soit θ_p la proposition (4). Alors $T \cup \Delta_E \cup \pi \vdash \theta_p$, d'où nous deduirons que si $H \supseteq K$, $H \in \mathcal{N}_k$, alors $H \vdash \theta_p$ aussi. D'après le lemme 1 il suit que c est de la forme a^p modulo K' pour chaque $p \in Y$. Mais pareillement si q est un nombre premier $\notin Y$, alors c n'est pas de la forme a^q modulo K'.

Passons maintenant à K/K' . Soit a^* l'image dans K/K' d'un élément a de K. Alors K/K' est un groupe abélien finiment engendré sur G_E/G_E' par les generateurs c^*, d_1^*, \dots, d_m^* . Puisqu'il y a une infinité de nombres premiers qui ne divisent pas c^* dans K/K' , c^* est d'ordre infini. Dans $(K/K')/(G_E/G_E')$, qui est une somme directe finie de groupes cycliques, l'image de c^* est divisible par une infinité de nombres premiers. Alors il existe j tel que $jc^* \in G_E/G_E'$.

Or, par la construction de G_E , il y a des ensembles X_{i_1}, \dots, X_{i_n} , des entiers $\ell_1, \dots, \ell_n \leq k$, et un élément t d'ordre fini, tels que

$$(5) \quad jc^* = \alpha_1 g_{\ell_1}^{X_{i_1}} + \dots + \alpha_n g_{\ell_n}^{X_{i_n}} + t \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}).$$

GROUPES NILPOTENTS

Puisque jc^* est d'ordre infini, $n \geq 1$; nous prenons n aussi petit que possible. Considérons $p \in Y$ tel que p ne divise pas l'ordre de t . Si $p \notin X_{i_1}$, alors par la construction de G_E , il y a des éléments h_2, \dots, h_k tels que $h_k^p = 1$ et $[c^j, h_2, \dots, h_k] \neq 1$. Par le lemme 1, ce contredit le fait que p divise jc^* dans K/K' . On déduit que $p \in X_{i_1}$. Donc $Y \setminus X_{i_1}$ est fini. \square

Soit $\{P_n : n < \omega\}$ une partition de l'ensemble des nombres premiers en ensembles recursifs infinis. On sait qu'il existe une famille $\{S_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ de sous-ensembles S_α de ω , telle que si $\alpha \neq \beta$ alors $S_\alpha \setminus S_\beta \neq \emptyset$. Pour chaque $\alpha < 2^\omega$, soit E_α l'ensemble de tous P_n avec $n \in S_\alpha$. Dans le forcing relatif à $T \cup \Delta_{E_\alpha}$, il résulte des lemmes 3, 4 (et de faits standards sur le forcing) que nous avons un groupe G_α e.c. dans \mathcal{N}_k , qui contient G_{E_α} comme sousgroupe, et dans lequel aucun des ensembles P_n ($n \notin S_\alpha$) n'est représenté par un élément.

On peut ajouter: les groupes G_α ($\alpha < 2^\omega$) sont dénombrables, et si $\alpha \neq \beta$ alors G_α n'est pas isomorphe à aucun sousgroupe de G_β .

2. Propositions exprimant la différence entre les groupes

Il nous faut trouver, pour chaque ensemble récursif Y de nombres premiers, une proposition ϕ_Y qui exprime que "L'ensemble Y est représenté dans le groupe". Nous réussirons à le faire pour les groupes e.c. dans \mathcal{N}_k et avec une notion de représentation qui est légèrement plus forte qu'auparavant. La clé en est l'interprétation de l'arithmétique dans les groupes nilpotents, due à Mal'cev [8].

Comme dans Hodges [6], un k-uple de Mal'cev dans le groupe $G \in \mathcal{N}_k$ est un k-uple g_1, \dots, g_k d'éléments de G , tel que $[g_1, \dots, g_k]$ est d'ordre infini. Nous disons que le k-uple de Mal'cev g_1, \dots, g_k représente l'ensemble Y si g_1 le représente.

LEMME 5. Pour les groupes G_α définis dans la section 1, on a pour chaque ensemble P_n de nombres premiers: $n \in S_\alpha$ ssi il existe un k-uple de Mal'cev dans G_α qui représente P_n .

Démonstration. Dans la construction de G_α , le sousgroupe G_X contient un k-uple de Mal'cev, g_1^X, \dots, g_k^X , qui représente X . (C'est ici qu'on utilise g_k^X ;

W. HODGES

voir Lemma 2(b) de Hodges [6] pour la preuve que c'est un k-uple de Mal'cev.) Le reste est clair. \square

LEMME 6. Soit G un groupe e.c. dans \mathcal{N}_k , et soit g un élément de G. Sont équivalents:

- (a) g est d'ordre infini modulo G'.
 (b) $G \models \forall y_1 \dots y_k \exists z_1 \dots z_{k-1} [y_1, \dots, y_k] = [z_1, \dots, z_{k-1}, g]$.

Démonstration. Voir Lemma 4 de Hodges [6]. \square

LEMME 7. Soit G un groupe e.c. dans \mathcal{N}_k , et soient g, h des éléments de G. Sont équivalents:

- (a) g est une puissance de h modulo G'.
 (b) $G \models \forall y_1 \dots y_{k-1} ([y_1, \dots, y_{k-1}, h] = 1 \rightarrow [y_1, \dots, y_{k-1}, g] = 1)$.

Démonstration. Voir Lemma 3 de Hodges [6]. \square

LEMME 8. Il y a une formule $\psi(x_1, \dots, x_k)$ de la forme $\forall \exists$ telle que pour tout groupe G e.c. dans \mathcal{N}_k et tous éléments g_1, \dots, g_k de G, g_1, \dots, g_k est un k-uple de Mal'cev ssi $G \models \psi(g_1, \dots, g_k)$.

Démonstration. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ dit que:

$(x_1 \text{ est d'ordre infini modulo } G') \wedge \forall y (y \text{ est une puissance de } x_1 \text{ modulo } G' \wedge [y, x_2, \dots, x_k] = 1 \rightarrow y \in G')$.

C'est de la forme $\forall \exists \wedge \forall y (\forall \rightarrow \forall)$, c'est-à-dire $\forall \exists$. \square

Etant donné un k-uple de Mal'cev g_1, \dots, g_k dans un groupe G e.c. dans \mathcal{N}_k , nous interprétons l'anneau Z des entiers, en interprétant n comme g_1^n , de la manière suivante:

$$(6) \quad \|x \in z\| \equiv (x \text{ est puissance de } g_1 \text{ mod } G') \quad (\forall)$$

$$(7) \quad \|x = n\| \equiv (xg_1^{-n} \in G') \quad (\forall)$$

$$(8) \quad \|x+y = z\| \equiv (xyz^{-1} \in G') \quad (\forall)$$

$$(9) \quad \|x \cdot y = z\| \equiv \exists w (w \text{ est puissance de } g_k \text{ modulo } G' \\ \wedge [x, g_2, \dots, g_k] = [g_1, g_2, \dots, g_{k-1}, w] \\ \wedge [z, g_2, \dots, g_k] = [y, g_2, \dots, g_{k-1}, w]) \quad (\exists \forall)$$

GROUPES NILPOTENTS

D'après le théorème de Matiyasevič (cf. par ex. Chapter 6 de Bell & Machover [4]), si Y est un ensemble récursivement énumérable d'entiers, alors il y a une formule $\theta_Y(x)$ de la forme

$$(\exists y_1 \in Z) \dots (\exists y_m \in Z) \theta'(x, y_1, \dots, y_m),$$

ou θ' est une conjonction de formules de la forme $x = n$, $x+y = z$ ou $x.y = z$, et pour tout $n \in Z$, $n \in Y$ ssi $\theta_Y(n)$ est vraie dans Z . Interprétant θ_Y par (6)-(9), nous avons

$$(10) \quad \|x \in Y\| \equiv \text{une formule } \chi_Y(x) \text{ de la forme } \exists V.$$

Finalement nous avons besoin de formules $\psi(g_1, x)$ qui expriment que " $(g_1)^{1/p}$ existe modulo G' , où x est l'interprétation du nombre premier p ", de la forme $\exists V$ et aussi de la forme $\forall \exists$. La forme $\exists V$ n'offre aucune difficulté:

$$(11) \quad \begin{aligned} \exists y (g_1 \text{ est puissance de } y \text{ mod } G' \wedge \exists w (w \text{ est puissance de } g_k \text{ mod } G' \\ \wedge [x, g_2, \dots, g_k] = [g_1, \dots, g_{k-1}, w] \\ \wedge [g_1, \dots, g_k] = [y, g_2, \dots, g_{k-1}, w])). \end{aligned}$$

Pour la forme $\forall \exists$ nous utilisons le lemme qui suit:

LEMME 9. Soit G un groupe e.c. dans \mathcal{N}_k et soient a, b_1, \dots, b_k, c des éléments de G , tels que a est d'ordre infini modulo G' . Alors sont équivalents:

- (a) Pour tout entier n , si $[b_1, \dots, b_k]^n = 1$ alors $c.a^{-n} \notin G'$.
- (b) $G \models \exists w_2 \dots w_k ([a, w_2, \dots, w_k] = [b_1, \dots, b_k] \wedge [c, w_2, \dots, w_k] \neq 1)$.

Démonstration. (b) implique (a) par multilinearité des commutateurs $[x_1, \dots, x_k]$ dans \mathcal{N}_k . Pour la réciproque, supposons (a); puisque G est e.c. dans \mathcal{N}_k , il suffit de trouver un groupe $H \supseteq G$, $H \in \mathcal{N}_k$, avec des éléments w_2, \dots, w_k comme dans (b). Soit F le groupe $\in \mathcal{N}_k$ libre de générateurs x_2, \dots, x_k . Dans $G*F$, soit N le sousgroupe normal engendré par $[a, x_2, \dots, x_k][b_1, \dots, b_k]^{-1}$. Il faut montrer que $G \cap N = \{1\}$, et que $[c, x_2, \dots, x_k] \notin N$.

Tous les éléments de N ont la forme

$$(12) \quad ([a, x_2, \dots, x_k][b_1, \dots, b_k]^{-1})^m \quad (m \in Z)$$

puisque les commutateurs de poids k sont centraux. Supposons que (12) soit égal

à un élément h de G . Alors $[a, x_2, \dots, x_k]^m \in G$, ça qui implique que $[a, x_2, \dots, x_k]^m = 1$ (envoyez x_2, \dots, x_k sur 1). Puisque a est d'ordre infini modulo G' , $m = 0$ (voir Lemma 2(b) de Hodges [6]), et alors $h = 1$ comme demandé.

Maintenant supposons que $[c, x_2, \dots, x_k] = ([a, x_2, \dots, x_k][b_1, \dots, b_k]^{-1})^m$. Alors $[b_1, \dots, b_k]^m = [a^m c^{-1}, x_2, \dots, x_k]$, et comme ci-dessus on déduit que $[a^m c^{-1}, x_2, \dots, x_k] = 1$, d'où $a^m c^{-1} \in G'$ (voir Lemma 2 de Hodges [6]). Par (a), cela implique que $[b_1, \dots, b_k]^m \neq 1$; contradiction. \square

En conséquence nous avons une formule de la forme $\forall \exists$ qui équivaut à (11) dans le groupe G e.c. $\in \mathcal{N}_k$ avec le k -uple de Mal'cev g_1, \dots, g_k . D'après le lemme 2 et les lois de \mathcal{N}_k , nous pouvons exprimer (11) comme

$$(13) \quad \bigwedge_{m \in \mathbb{Z}} (xg_1^{-m} \in G' \rightarrow \forall y_2 \dots y_k (y_k^m \in G' \rightarrow [g_1, y_2, \dots, y_k] = 1)).$$

Arrangée de nouveau, ce devient:

$$(14) \quad \forall y_2 \dots y_k (\bigwedge_{m \in \mathbb{Z}} (y_k^m \in G' \rightarrow xg_1^{-m} \notin G') \vee [g_1, y_2, \dots, y_k] = 1),$$

ou en utilisant le lemme 7 et les lois de \mathcal{N}_k ,

$$(15) \quad \forall y_2 \dots y_k (\exists z_1 \dots z_{k-1} \bigwedge_{m \in \mathbb{Z}} ([z_1, \dots, z_{k-1}, y_k]^m = 1 \rightarrow xg_1^{-m} \notin G') \vee [g_1, y_2, \dots, y_k] = 1).$$

D'après le lemme 9, la conjonction infinie dans (15) peut être remplacée par une formule existentielle, ce qui donne une forme $\forall \exists$ pour (11).

Finalement nous exprimons, pour chaque ensemble récursif Y de nombres premiers, que g_1, \dots, g_k est un k -uple de Mal'cev dans lequel g_1 représente Y :

$$(16) \quad (g_1, \dots, g_k \text{ est un } k\text{-uple de Mal'cev}) \wedge \forall x (\|x \text{ est premier}\| \rightarrow ((11) \rightarrow \|x \in Y\|) \wedge (\neg \|x \in \omega \setminus Y\| \rightarrow (15))).$$

Par (10) et le lemme 8, c'est une formule $\phi_Y^!(g_1, \dots, g_k)$ de la forme $\forall \exists$. Alors la proposition $\exists y_1 \dots y_k \phi_Y^!(y_1, \dots, y_k)$ exprime qu'il y a un k -uple de Mal'cev qui représente Y , et cette proposition ϕ_Y est de la forme $\exists \forall \exists$.

Par la construction de la section 1, il y a une famille $\{G_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$

GROUPES NILPOTENTS

de groupes e.c. dans \mathcal{N}_k , telle que si $\alpha \neq \beta$ alors il existe Y tel que $G_\alpha \not\models \phi_Y$ et $G_\beta \models \neg\phi_Y$. Le théorème est démontré.

Il y a des questions naturelles.

(1) Quels sont les ensembles E d'ensembles de nombres premiers, tels qu'il existe un groupe G e.c. dans \mathcal{N}_k , pour quel E est l'ensemble des ensembles de nombres premiers qui sont représentés (par des k -uples de Mal'cev) dans G ?

(2) Peut-on caractériser un groupe G dénombrable e.c. dans \mathcal{N}_k par les ensembles de nombres premiers qui sont représentés (a) par des éléments et (b) par des k -uples de Mal'cev dans G ? Si non, alors quelle information complémentaire est nécessaire pour caractériser G ?

J'exprime mes remerciements à Gabriel Sabbagh et aux autres organisateurs de la table ronde de logique à Paris (Octobre 1983); au British Council qui a soutenu une visite à Paris; et à Bruno Poizat pour ses corrections linguistiques (ce qui était très nécessaire).

REFERENCES

- [1] A. B. Apps, On \mathcal{N}_0 -categorical class two groups, *J. Algebra* 82 (1983) 516-538.
- [2] Jon Barwise & Abraham Robinson, Completing theories by forcing, *Ann. Math. Logic* 2 (1970) 119-142.
- [3] O. B. Белерадек (O. V. Belegradek), Элементарные свойства алгебраически замкнутых групп, *Fundamenta Math.* 98 (1978) 83-101.
- [4] J. L. Bell & M. Machover, *A course in mathematical logic*, North-Holland, Amsterdam 1977.
- [5] Joram Hirschfeld & William H. Wheeler, *Forcing, Arithmetic, Division rings*, *Lecture Notes in Mathematics* 454, Springer, Berlin 1975.
- [6] Wilfrid Hodges, Interpreting number theory in nilpotent groups, *Arch. Math. Logik Grundlag.* 20 (1980) 103-111.
- [7] Wilfrid Hodges, *Building models by games*, Cambridge U.P. (à paraître).
- [8] A. I. Mal'cev, A correspondence between rings and groups, dans *The metamathematics of algebraic systems, collected papers*, North-Holland, Amsterdam 1971, pp. 124-137.
- [9] Berthold Maier, On existentially closed and generic nilpotent groups (à paraître).
- [10] D. Saracino, Existentially complete nilpotent groups, *Israel J. Math.* 25 (1976) 241-248.

W. HODGES

- [11] Dan Saracino & Carol Wood, Periodic existentially closed nilpotent groups,
J. Algebra 58 (1979) 189-207.
- [12] Martin Ziegler, Algebraisch abgeschlossene Gruppen, dans Word Problems II,
The Oxford Book, ed. S. I. Adian et al., North-Holland, Amsterdam 1980,
pp. 449-576.

Wilfrid Hodges
Bedford College
Regent's Park
LONDON NW1 4NS