

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

F. BERTRANDIAS

J.-J. PAYAN

***p*-extensions abéliennes**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 25 (1971), p. 33-37

<[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1971\\_\\_25\\_\\_33\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__33_0)>

© Mémoires de la S. M. F., 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

p-EXTENSIONS ABELIENNES

par

Françoise BERTRANDIAS et Jean-Jacques PAYAN

(exposé par F. BERTRANDIAS)

-:-:-:-

On se propose de donner quelques propriétés des  $p$ -extensions abéliennes d'un corps  $k$  contenant, pour tout entier  $n \geq 1$ , les racines  $p^n$ -èmes de 1 ; on supposera  $k$  différent de  $k^p$ , et la caractéristique de  $k$  différente de  $p$ .

1. - Sous-groupe de  $k^*$  associés à une  $p$ -extension abélienne

Soit  $K$  une  $p$ -extension abélienne d'exposant non borné de  $k$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit le sous-groupe de  $k^*$  :

$$F_n = K^{*p^n} \cap k^*.$$

On voit facilement que  $K = \bigcup_{n \geq 1} k(F_n^{p^{-n}})$ .

On montre que la suite  $(F_n)$  vérifie les propriétés suivantes :

- (i) quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $K^{*p^n} \subset F_n \subset K^{*p}$ ,
- (ii) quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_n^p \subset F_{n+1}$ ,
- (iii) quels que soient  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $i \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+i} \cap K^{*p^i} \subset F_n^{p^i}$ .

Réciproquement, si une suite de sous-groupes  $F_n$  de  $k^*$  vérifie les conditions (i), (ii), (iii) on montre que le corps  $K = \bigcup_{n \geq 1} k(F_n^{p^{-n}})$  est une  $p$ -extension abélienne, et que  $K^{*p^n} \cap k^* = F_n$ .

D'où le résultat :

PROPOSITION 1. - L'ensemble des  $p$  extensions abéliennes d'exposant non borné  $K$  de  $k$  et l'ensemble des suites de sous-groupes  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $k^*$  vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) sont en bijection, cette bijection étant donnée par :

$$F_n = K^{*p^n} \cap k^* \quad \text{et} \quad K = \bigcup_{n \geq 1} k(F_n^{p^{-n}}).$$

## 2. - Limites

Soient  $n \leq m$  deux entiers ; la suite  $(F_n)$  vérifiant la condition (ii), on a l'inclusion :  $F_n^{p^{m-n}} \subset F_m$  ; l'application  $x \rightarrow x^{p^{m-n}}$  de  $F_n$  dans  $F_m$  définit par passage au quotient, une application  $i_{n,m} : F_n/k^{*p^n} \rightarrow F_m/k^{*p^m}$  ; on voit que  $(F_n/k^{*p^n} ; j_{n,m})$  est un système inductif de groupes, dont la limite inductive sera notée  $\lim_{\rightarrow} F_n/k^{*p^n}$ .

De manière analogue, la suite  $(F_n)$  vérifiant la condition (iii), on a l'inclusion :  $F_m \subset F_n$  ; l'injection canonique de  $F_m$  dans  $F_n$  définit par passage au quotient une application  $j_{n,m} : F_m/k^{*p^m} \rightarrow F_n/k^{*p^n}$  ; on voit que  $(F_n/k^{*p^n} ; j_{n,m})$  est un système projectif de groupes, dont la limite projective sera notée  $\lim_{\leftarrow} F_n/k^{*p^n}$ .

Notons  $G = \text{Gal}(K|k)$  et, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\mu_{p^n}$  le groupe des racines  $p^n$ -èmes de 1 contenues dans  $k$ . On pose  $\mu_{p^\infty} = \bigcup_{n \geq 1} \mu_{p^n}$ .  $\text{Hom}_c(G, X)$  désigne le groupe des homomorphismes continus du groupe  $G$  dans un groupe topologique  $X$ .

La théorie de Kummer ([1]) montre que l'application

$$f_n : F_n/k^{*p^n} \rightarrow \text{Hom}_c(G, \mu_{p^n}),$$

définie par :

$$f_n : x \in F_n/k^{*p^n} \mapsto (\sigma \in G \rightarrow \frac{\sigma(x^{p^{-n}})}{x^{p^{-n}}}),$$

est un isomorphisme de groupes.

On vérifie facilement que le système d'applications  $(f_n)$  est un morphisme inductif (resp. projectif) lorsqu'on munit  $(\text{Hom}_c(G, \mu_{p^n}))$  de sa structure naturelle de système inductif de groupes (resp. de système projectif de groupes). D'où le résultat suivant :

PROPOSITION 2. - Les applications :

$$\lim_{\rightarrow} f_n : \lim_{\rightarrow} F_n/k^{*p^n} \rightarrow \lim_{\rightarrow} \text{Hom}_c(G, \mu_{p^n})$$

et

$$\lim_{\leftarrow} f_n : \lim_{\leftarrow} F_n/k^{*p^n} \rightarrow \lim_{\leftarrow} \text{Hom}_c(G, \mu_{p^n})$$

sont des isomorphismes de groupes.

Si on munit  $(\mu_{p^n})$  de sa structure naturelle de système inductif, on voit que l'application canonique :

$$\lim_{\rightarrow} \text{Hom}_c(G, \mu_{p^n}) \rightarrow \text{Hom}_c(G, \lim_{\rightarrow} \mu_{p^n}) = \text{Hom}_c(G, \mu_{p^\infty})$$

est un isomorphisme de groupes ([2] exposé 6, prop. 7) ( $\mu_{p^\infty}$  est muni de la topologie discrète).

De manière analogue, si on munit  $(\mu_p^n)$  de sa structure naturelle de système projectif, on vérifie que l'application canonique :

$$\text{Hom}_c(G, \mathbb{Z}_p) = \text{Hom}_c(G, \varprojlim \mu_p^n) \rightarrow \varprojlim \text{Hom}_c(G, \mu_p^n)$$

est un isomorphisme de groupes. ( $\mathbb{Z}_p$  est le groupe additif des entiers p-adiques).

La proposition 2 permet donc d'énoncer le :

COROLLAIRE. - On a les isomorphismes canoniques de groupes :

$$\begin{aligned} \varprojlim F_n/k^{*p^n} &\simeq \text{Hom}_c(G, \mu_{p^\infty}) \\ \varprojlim F_n/k^{*p^n} &\simeq \text{Hom}_c(G, \mathbb{Z}_p). \end{aligned}$$

### 3. - p-extensions abéliennes sans torsion

$G$ , comme pro-p-groupe, est muni d'une structure de  $\mathbb{Z}_p$ -module. On montre le résultat suivant :

PROPOSITION 3. -  $G$  est sans torsion si, et seulement si, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'application  $j_{n,n+1} : F_{n+1}/k^{*p^{n+1}} \rightarrow F_n/k^{*p^n}$  est surjective.

On remarque que la suite  $F_n = k^*$  satisfait les conditions (i), (ii), (iii) et les hypothèses de la proposition 3. On en déduit le :

COROLLAIRE. - La p-extension abélienne maximale de  $k^*$  est d'exposant non borné, et son groupe de Galois est sans torsion.

Si on munit, pour tout entier  $n \geq 1$ ; le groupe  $F_n/k^{*p^n}$  de la topologie discrète, et le groupe  $\varprojlim F_n/k^{*p^n}$  de la topologie de la limite projective, on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 4. - Si  $G$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module de type fini, le groupe topologique  $\varprojlim F_n/k^{*p^n}$  est compact.

Si le groupe  $\varprojlim F_n/k^{*p^n}$  est compact, et si  $G$  est sans torsion, alors  $G$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module de type fini. Dans ce cas, le groupe  $\varprojlim F_n/k^{*p^n}$  est (non canoniquement) isomorphe à  $G$ .

#### 4. - Etude d'un cas particulier

Dans ce paragraphe, on suppose que  $k$  est le complété d'une extension algébrique du corps  $\mathbb{Q}_p$  des nombres  $p$ -adiques, contenant pour tout entier  $n$ , les racines  $p^n$ -èmes de 1, et vérifiant :  $k \neq k^p$ .

On note  $|\cdot|$  la valeur absolue  $p$ -adique de  $k$ . On munit  $k^*$  de la topologie définie par cette valeur absolue, et les groupes quotients de  $k^*$  de la topologie quotient.

On démontre les résultats suivants (les lemmes 1 et 2 servant d'étapes pour démontrer le lemme 3) :

LEMME 1. - Tout disque de centre  $x$  et de rayon  $|p x|$  de  $k^*$  rencontre  
 $\bigcap_{n \geq 1} k^{*p^n}$ .

LEMME 2. - La famille de sous-groupes ouverts  $(k^{*p^i} \cap k^{*p^n})_{i \in \mathbb{N}^*}$  du groupe topologique  $k^* \cap k^{*p^n}$  est une base de voisinages de l'élément neutre.  
 $n \geq 1$

LEMME 3. - Soit  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $k^*$  telle que la famille  $(\alpha_n k^{*p^n})_{n \geq 1}$  soit décroissante. Alors  $\bigcap_{n \geq 1} \alpha_n k^{*p^n}$  est non vide.

Le lemme 3 permet de démontrer les 2 propositions suivantes :

PROPOSITION 5. - L'application canonique du groupe  $k^* \cap k^{*p^n}$  dans le groupe  $\lim_{\leftarrow} k^*/k^{*p^n}$  (muni de la topologie de la limite projective, les groupes  $k^*/k^{*p^n}$  étant discrets) est un isomorphisme de groupes topologiques.

PROPOSITION 6. - Soit  $K$  une  $\Gamma$ -extension de  $k$ , c'est-à-dire une extension abélienne telle que  $\text{Gal}(K|k) \simeq \mathbb{Z}_p$ . Il existe un élément  $\alpha$  de  $k$  tel que  
 $k = \bigcup_{n \geq 1} k(\alpha^{p^{-n}})$ .

Remarque. - Si on ne suppose plus  $k$  complet, la proposition 6 devient fausse.

Soit par exemple  $k = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Q}_p(\zeta_n)$ , où  $\zeta_n$  est une racine primitive  $p^n$ -ème de 1. Il est facile de voir que l'extension  $K = \bigcup_{n \geq 1} k(\alpha^{p^{-n}})$ , où :

$$\alpha_n = (1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2)^p \dots (1 - \zeta_n)^{p^{n-1}},$$

est une  $\Gamma$ -extension de  $k$ , et qu'elle n'est pas de la forme  $\bigcup_{n \geq 1} k(\alpha^{p^{-n}})$ , avec  $\alpha \in k$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B.J. BIRCH. - Cyclotomic fields and Kummer extensions in : Cassels-Fröhlich.  
Algebraic Number Theory Acad. Press, 1967.
- [2] G. POITOU. - Cohomologie galoisienne des modules finis. Dunod, 1967.

-:-:-:-

Faculté des Sciences de Grenoble  
Département de Mathématiques  
Boîte Postale n° 116  
38 - Saint-Martin-d'Hères (France)