B. BENZAGHOU

Suites d'unité algébriques satisfaisant à une relation de récurrence linéaire

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 29-31
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__29_0>

Colloque Th. Nombres [1969, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 25, 1971, p. 29 à 31

SUITES D'UNITE ALGEBRIQUES SATISFAISANT A UNE RELATION DE RECURRENCE LINEAIRE

par

Benali BENZAGHOU

-:-:-:-

THEOREME 1. Soit (a_n) une suite de S-unités d'un corps de nombres algébriques k satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. Alors il existe des S-unités $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$, $m \geq 1$ telles que pour $\mu = 0,1,\dots,m-1$:

$$a_{\mu+tm} = a_\mu \cdot \alpha_\mu^t \quad , \quad \forall t \in N \ .$$

Pour démontrer ce théorème, introduisons les notations suivantes :

Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro.

$\mathcal{R}(K) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \ , \ a_n \in K \ , \ (a_n)$ satisfait à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants $\}$.

Munie de l'addition des séries habituelles et du produit (de Hadamard) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n X^n \ .$$

$\mathcal{R}(K)$ est une K-algèbre (pour $K = \mathbb{C}$, c'est une algèbre de convolution de fractions rationnelles).

Pour $E \subset K$, notons

$$\mathcal{R}(E,K) = \{ \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K) \ , \ a_n \in E \ \text{pour tout} \ n \}.$$

LEMME 1. Soit k un corps de nombres, $\mathcal{U}$ son groupe d'unités. Alors $\mathcal{R}(\mathcal{U},k)$ est un sous-groupe du groupe des unités de $\mathcal{R}(k)$.

Nous pouvons toujours supposer k galoisien sur $\mathbb{Q}$ et soit $G = \mathrm{Gal}(k/Q)$. Soit $a = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$, alors pour $\sigma \in G$, $\sigma a = \sum \sigma(a_n) X^n \in \mathcal{R}(k)$ et

$$b = \prod_{\sigma \in G} \sigma a = \sum N(a_n) X^n \in \mathcal{R}(k)$$

Comme $b^2 = \delta = \sum X^n$ (unité de $\mathcal{R}(k)$)

a est inversible dans $\mathcal{R}(k)$.

LEMME 2. [1] - Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro. Un élément $a = \sum a_n X^n$ de $\mathcal{R}(K)$ est inversible dans $\mathcal{R}(K)$ si et seulement s'il existe des éléments non nuls $\alpha_o, \dots, \alpha_{m-1}$ de K, $m \geq 1$, tels que pour $\mu = 0,1,\dots,m-1$, on ait :

$$a_\mu \neq 0$$

et
$$a_{\mu+tm} = a_\mu \cdot \alpha_\mu^t \quad , \quad \forall t \in \mathbb{N} .$$

Par ces deux lemmes, le théorème 1 est démontré dans le cas des unités d'un corps de nombres.

Définition : Une suite (a_n) de $\mathbb{Q}$ est dite de Polya si presque toutes les valuations de $\mathbb{Q}$ sont triviales sur la suite (a_n).

Une suite de nombres algébriques (a_n) est de Polya si la suite $(N(a_n))$, où $N(a)$ est la norme absolue de a, est de Polya dans $\mathbb{Q}$.

La démonstration du théorème 1 s'achève par la généralisation suivante d'un résultat de Polya [3] :

LEMME 3. [2] - Soit (a_n) une suite de Polya de nombres algébriques. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\bar{\mathbb{Q}}) \Leftrightarrow \exists \alpha_o, \dots, \alpha_{m-1} \in \bar{\mathbb{Q}}, \quad m \geq 1 \quad \text{tels que}$$
$$\alpha_{\mu+tm} = a_\mu \, \alpha_\mu^t \quad \text{pour} \quad \mu = 0,1,\dots,m-1 \; ; t \in \mathbb{N}$$

Soit K un corps commutatif, notons :

$$\mathcal{S}_j(K) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n , \exists P_o, \dots, P_{m-1} \in K[X] \text{ tels que}$$
$$d^o P_\mu \leq j \quad \text{et} \quad a_{\mu+tm} = P_\mu(t) \}$$

et
$$\mathcal{S}_j(E,K) = \{ \sum a_n X^n \in \mathcal{S}_j(K) , \; a_n \in E \text{ pour tout } n \}.$$

THEOREME 2. Soit k un corps de nombres, $\mathfrak{A}$ son anneau d'entiers, $\mathcal{U}$ son groupe d'unités. Alors :

a) $\mathcal{R}(\mathfrak{A}, k)$ est une $\mathcal{R}(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$-algèbre entière, libre de type fini.

b) $\mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$ est son groupe d'unités et
$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, k) \simeq \mathcal{S}_o' \times \mathcal{S}_1^r$$

où $\mathcal{S}_o'$ est un groupe abélien dont tous les éléments sont d'ordre $\leq e$ (ordre du groupe des racines de l'unité de k)

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$$

r <u>le nombre de Dirichlet de</u> k .

PROPOSITION. <u>Si</u> k_s <u>est le groupe des S-unités de</u> k , <u>alors</u>

$$\mathcal{R}(k_s,k) \simeq \mathcal{S}'_o \times \mathcal{S}_1^{\ell}$$

<u>où</u> ℓ <u>est le nombre de</u> S-<u>unités fondamentales de</u> k_s .

Si une suite d'éléments d'un sous-groupe multiplicatif de type fini de $\bar{\mathbb{Q}}$ satisfait à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, alors elle est formée d'un nombre fini de progressions géométriques régulièrement emboitées.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. BENZAGHOU. - Comptes rendus de l'Ac. des Sc. Paris, série A, t. 266 (1968) 652-654.

[2] B. BENZAGHOU. - Comptes rendus de l'Ac. des Sc. Paris, série A, t. 267 (1968) p. 212-214.

[3] G. POLYA. - J. für reine und angew. Math. t. 151, (1921), 1-31.

-:-:-:-

Université de Paris 6
U.E.R. de mathématiques
Tour 46
9, quai Saint-Bernard
75-PARIS 5e (France)