

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

D. BERTRAND

M. EMSALEM

F. GRAMAIN

M. HUTTNER

M. LANGEVIN

M. LAURENT

M. MIGNOTTE

J.-C. MOREAU

P. PHILIPPON

E. REYSSAT

M. WALDSCHMIDT

Les nombres transcendants

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 13 (1984)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_13__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**LES NOMBRES
TRANSCENDANTS**

ERA 979

**D. BERTRAND, M. EMSALEM,
F. GRAMAIN, M. HUTTNER,
M. LANGEVIN, M. LAURENT,
M. MIGNOTTE, J.-C. MOREAU,
P. PHILIPPON, E. REYSSAT,
M. WALDSCHMIDT.**

SOMMAIRE

AVIS AU LECTEUR	3
PLAN-GUIDE	4
<i>CHAPITRE PREMIER</i>	
INTRODUCTION, PRÉSENTATION DU TEXTE	5
1. De Hermite à Siegel	5
2. Un exemple : le théorème de Thue	9
3. Un schéma de démonstration de transcendance	11
4. Remarques sur le texte	13
<i>CHAPITRE II</i>	
UN OUTIL ANALYTIQUE EN TRANSCENDANCE :	
LES LEMMES DE SCHWARZ	15
1. Le cas d'une variable	15
2. Le cas de plusieurs variables	15
3. Etude de $\alpha_t(S)$	16
4. Etude de $r_t(S)$	16
<i>CHAPITRE III</i>	
LES MÉTHODES ALGÈBRIQUES EN TRANSCENDANCE	17
1. Les lemmes de zéros	17
2. Elimination et critères de Gel'fond	19
<i>CHAPITRE IV</i>	
RÉSULTATS ET CONJECTURES	23
1. Fonctions entières arithmétiques	23
2. Le théorème de Gel'fond-Schneider	26
3. Fonctions elliptiques - Variétés abéliennes	28
4. Indépendance linéaire	29
5. Indépendance algébrique	30
6. Les E -fonctions de Siegel	32
7. Les G -fonctions	33
8. La méthode de Mahler	35
9. Mesures de transcendance	36

CHAPITRE V

APPLICATIONS DE LA THÉORIE	
DES NOMBRES TRANSCENDANTS	39
1. Equations diophantiennes	39
2. Le problème du nombre de classes	42
3. Le problème de Lehmer	43
4. Problèmes liés à la théorie de Kummer	44
5. Représentations de $\text{Gal } \bar{k}/k$ et régulateurs p -adiques	46
6. Conclusion	50
BIBLIOGRAPHIE	51

AVIS AU LECTEUR

Ceci est un travail collectif d'une équipe de recherche dont les membres ont ceci de commun qu'ils n'ont jamais pu s'arracher au mystère et à l'envoûtement transcendant des nombres. Cet aspect collectif a conduit à une grande pluralité de styles. Elles s'accompagne de plusieurs redites dont nous nous excusons ici. Mais sont-elles vraiment néfastes ? Un clou est rarement enfoncé d'un seul coup de marteau.

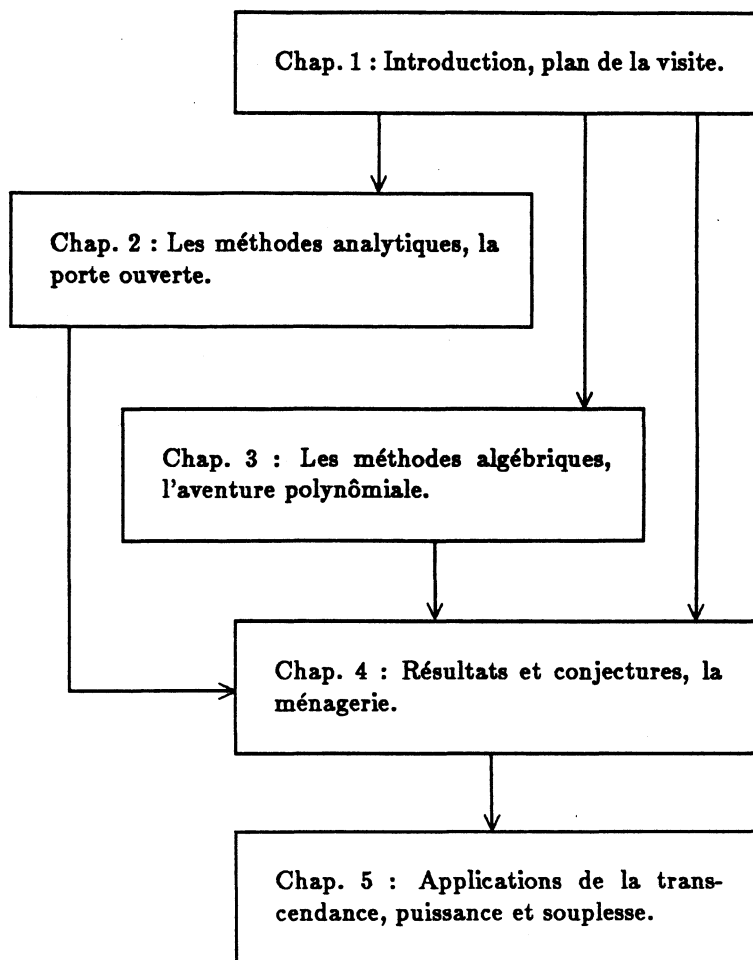
Un mot maintenant sur le contenu. Nous n'avons pas voulu faire un panorama encyclopédique de la théorie des nombres transcendants (un tel but étant hors de propos dans le cadre que nous nous étions fixé), aussi ne s'étonnera-t-on pas que beaucoup de travaux relatifs à la transcendance soient à peine mentionnés, voire passés sous silence. Que les auteurs de tels travaux qui liraient cette plaquette ne nous en tiennent pas rigueur. Nous avons développé les facettes de la théorie qui nous paraissent en ce moment (peut-être à tort) importantes et semblent devoir influencer les recherches ultérieures. Ce texte est donc parfaitement localisé dans l'espace et dans le temps, un simple coup d'oeil suffira au spécialiste pour affirmer en toute certitude qu'il a pris forme fin mil neuf cent quatre vingt deux parmi les gens qui se retrouvaient alors à l'I.H.P. pour travailler sur la théorie des nombres transcendants.

Nous remercions aussi Mme Lutting-Braun qui avait réalisé la frappe d'une première version de ce fascicule ; ceci en un temps fort limité.

Et maintenant, en piste

que commence la TRANSE
A
DANSE
S

* * * * *
* POUR NE PAS S'ÉGARER *
* * * * *



Posologie : Pour éviter toute allergie, il est fortement recommandé d'absorber en priorité le chapitre 1 dans son intégralité avant de goûter aux chapitres suivants.

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION - PRÉSENTATION DU TEXTE

Il vaudrait mieux que nous n'abordions pas le problème de la transcendance ; on ne peut rien dire de profitable là-dessus.

Julio CORTAZAR.
Les gagnants, chap. 29.

1. De Hermite à Siegel.

La théorie des Nombres Transcendants est née en 1844 lorsque Liouville construisit une classe "très étendue" de nombres ne vérifiant aucune équation polynômiale à coefficients entiers. Sa démonstration est bien connue : soit α un nombre algébrique irrationnel de degré d et soit p/q un nombre rationnel. Considérons le polynôme minimal P de α et supposons $|\alpha - p/q| \leq 1$. Le nombre non nul $P(p/q)$ vérifie alors

$$|P(p/q)| \geq q^{-d}$$

et

$$|P(p/q)| = |P(p/q) - P(\alpha)| \leq |\alpha - p/q| \sup_{|z-\alpha| \leq 1} |P'(z)|.$$

D'où l'inégalité

$$|\alpha - p/q| \geq Cq^{-d}$$

où

$$C = \max\{1, \sup_{|z-\alpha| \leq 1} |P'(z)|\}^{-1}.$$

Par conséquent, si un nombre irrationnel ξ est limite d'une suite (p_n/q_n) de rationnels telle que, pour tout entier D , on ait $q_n^D |\xi - p_n/q_n| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, alors ξ ne peut être algébrique (exemple :

$$\xi = \sum_{n \geq 1} 2^{-n!},$$

et même une infinité non dénombrable de nombres transcendants,

$$\xi_\epsilon = \sum_{n \geq 1} \epsilon_n 2^{-n!} \quad \text{où} \quad \epsilon_n \in \{0, 1\} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \epsilon_n = +\infty.$$

Trente ans plus tard, Cantor démontre que l'ensemble des réels est non dénombrable tandis que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, donc que "presque" tous les nombres réels ou complexes sont transcendants.

Mais, un an auparavant, en 1873, une autre grande étape a été franchie : Hermite a prouvé la transcendance de e . La technique consiste à approcher la fonction exponentielle par certaines fractions rationnelles. Plus précisément, pour tout système de nombres rationnels w_0, \dots, w_m et d'entiers r_0, \dots, r_m , avec $r_0 + \dots + r_m = s$, il construit explicitement $(m+1)$ polynômes à coefficients rationnels U_0, \dots, U_m de degrés respectifs majorés par

$$s - r_0, s - r_1, \dots, s - r_m$$

tels que pour $0 \leq k < l \leq m$ la fonction

$$U_k(z)e^{w_k z} - U_l(z)e^{w_l z}$$

s'annule à l'origine à un ordre au moins égal à s . En faisant $z = 1$ dans ces formules, il obtient des approximations rationnelles simultanées des nombres $1, e, e^2, \dots, e^m$, lesquelles sont si bonnes qu'elles permettent de démontrer l'indépendance linéaire (sur \mathbb{Q}) de ces nombres et donc la transcendance de e .

Vingt ans plus tard, Hermite obtiendra, toujours explicitement, de nouvelles relations fonctionnelles approchées reliant différentes fonctions exponentielles : il construit des polynômes à coefficients entiers A_0, \dots, A_m tels que la combinaison linéaire $A_0(z)e^{w_0 z} + \dots + A_m(z)e^{w_m z}$ s'annule en 0 à l'ordre $m + \deg A_0 + \dots + \deg A_m$. Hermite cependant n'appliqua pas cette construction à des problèmes de transcendance, peut-être en raison des progrès considérables qui avaient été réalisés dans ce domaine depuis sa découverte de la transcendance de e .

En 1882, Lindemann avait prouvé la transcendance du nombre π — et donc l'impossibilité de la quadrature du cercle — en développant les méthodes d'Hermite. Il énonça un théorème plus général, dont il esquissa la démonstration, et cette démonstration fut rédigée complètement par Weierstrass. Il s'agit du résultat suivant.

THÉORÈME 1 (Lindemann-Weierstrass). — *Soient w_1, \dots, w_k des nombres algébriques linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , alors les nombres e^{w_1}, \dots, e^{w_k} sont algébriquement indépendants sur le corps \mathbb{Q} des nombres algébriques.*

De 1885 à 1893, ces travaux ont suscité la recherche de nombreuses variantes ou simplifications des preuves d'Hermite et de Lindemann par Gordan, Hurwitz, Hilbert, ... Une étude comparée de ces diverses démonstrations se trouve en annexe du livre de Mahler [Mah 1]. On trouve une démonstration très courte (et très dense) de la transcendance de e et π et du théorème de Lindemann-Weierstrass dans le livre de Baker [Bak 3].

NOMBRES TRANSCENDANTS

Revenons aux approximations des fonctions exponentielles données par Hermite. Elles constituent ce qu'on appelle des "approximants de Padé", en raison d'un mémoire de H. Padé paru en 1892 "sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles". Comme Mahler l'a montré plus tard (en 1931), le mémoire d'Hermite de 1893 permettait aussi de démontrer la transcendance de e , en suivant la démarche des démonstrations actuelles de transcendance. Ultérieurement, Mahler a déduit par ces techniques des résultats totalement explicites et très remarquables (cf. [Mah 2]) comme $|e^n - m| \geq n^{-33n}$ (pour tout entier n assez grand et m entier quelconque) et $|\pi - p/q| > q^{-45}$ (pour q assez grand), ainsi que des mesures d'approximation diophantienne simultanée des logarithmes de nombres premiers... Cet exposant 45 fut abaissé par Mahler à 42, puis à 21 par Wirsing et à 20 par Mignotte.

Les approximants de Padé restent d'actualité, comme en témoignent des travaux récents de G. Choodnovsky (cf. par exemple, [Ch 5]).

A un nombre réel irrationnel x associons la borne inférieure $t(x)$ des réels t pour lesquels l'inéquation $|x - p/q| \leq q^{-t}$ possède une infinité de solutions rationnelles. La théorie des fractions continues montre que l'on a toujours $t(x) \geq 2$, l'égalité ayant lieu pour les irrationnels quadratiques. Dans le cas où x est algébrique, le théorème de Liouville implique $t(x) \leq d$, où d désigne le degré de x . Lorsque x est au moins de degré 3, Thue a amélioré cette inégalité en $t(x) \leq (d/2) + 1$. D'autres progrès suivront avec Siegel (1921, $t(x) \leq 2d^{1/2}$), Dyson et Gelfond (1947, $t(x) \leq (2d)^{1/2}$) puis enfin Roth (1955, $t(x) = 2$). On trouvera une démonstration du théorème de Thue au prochain paragraphe.

Il peut paraître paradoxal de choisir la démonstration de ce résultat d'approximation diophantienne comme prototype de démonstration de transcendance, mais il s'agit d'une démonstration simple et qui met en jeu (pour la première fois dans l'histoire) un lemme sur la résolution des équations linéaires homogènes en nombres entiers — basé sur le fameux "principe des tiroirs" — et qui s'est avéré extrêmement fécond. Grâce à ce lemme, on démontre l'existence d'un polynôme non nul $A(X, Y)$ à coefficients entiers, et qui possède en un point convenable un zéro d'ordre élevé. Il est important de remarquer qu'une construction totalement explicite — comme celle d'Hermite — de ce polynôme n'est pas nécessaire, il suffit d'obtenir des bornes raisonnables pour son degré et la valeur absolue de ses coefficients. Le principe des tiroirs (Schubfachschluss, box principle, pigeon-hole principle — les tiroirs étant remplacés par des nids de pigeon) avait déjà été utilisé par Minkowski et Dirichlet. Avec Siegel, il deviendra un outil fondamental de la transcendance. Et il est notable qu'aujourd'hui — en dépit de la simplicité de l'argument de base (une application d'un ensemble fini dans un autre possédant moins

d'éléments prend une même valeur en deux points) — apparaissent encore et toujours de nouvelles variantes ou améliorations. Ces lemmes sont connus sous le nom générique de "lemme de Siegel". En voici un exemple élémentaire [Mah 3].

LEMME DE SIEGEL. — Soit $G = (g_{ij})$ une matrice à coefficients entiers possédant M lignes et N colonnes, avec $N > M$. Il existe alors un vecteur $X = (x_1, \dots, x_N)$ non nul, à coordonnées entières, tel que $GX = 0$ et qui vérifie

$$\max_i |x_i| \leq \left(\prod_{1 \leq i \leq M} L_i \right)^{1/(N-M)},$$

où $L_i = \max\{1, \sum_{1 \leq j \leq N} |g_{ij}|\}$.

Démonstration. — Pour tout nombre réel r , posons $r^+ = \sup(r, 0)$ et $r^- = (-r)^+$. De sorte que $|r| = r^+ + r^-$ et $r = r^+ - r^-$. Soient

$$L'_i = \sum_j g_{ij}^+, \quad L''_i = \sum_j g_{ij}^-, \quad \text{et} \quad L = [(L_1 \cdots L_M)^{1/(N-M)}].$$

L'image $Y = GX$ d'un vecteur X de Z^N dont les composantes vérifient $0 \leq x_j \leq L$, pour $j = 1, \dots, N$, est un vecteur de Z^M dont les composantes y_i vérifient $-LL''_i \leq y_i \leq LL'_i$, pour $i = 1, \dots, M$. Par conséquent le nombre d'éléments de l'ensemble image est majoré par les quantités

$$\prod_{1 \leq i \leq M} (1 + LL'_i + LL''_i) = \prod_{1 \leq i \leq M} (1 + LL_i) \leq (L+1)^M \left(\prod_{1 \leq i \leq M} L_i \right)^{1/(N-M)N-M};$$

il est donc plus petit que le cardinal de l'ensemble de départ (qui vaut $(L+1)^N$). On conclut aussitôt grâce au principe des tiroirs. ■

D'autres formes classiques de ce lemme se trouvent dans le second chapitre du livre de Gelfond [Gel], ou le premier chapitre du livre de Lang [La 1], ou le troisième chapitre du cours de Ramachandra [Ra], ou l'appendice de l'ouvrage de Schneider [Sch] ou le chapitre II du petit livre de Siegel [Si 2].

Le lemme de Siegel est utilisé dans les preuves des grands théorèmes qui marquent l'histoire des nombres transcendants. Il intervient d'abord dans la preuve des théorèmes de Siegel de 1929 : finitude du nombre de points à coordonnées entières dans un corps de nombres fixé et qui appartiennent à une courbe algébrique donnée (à coefficients algébriques) de genre non nul (cf. chap. 5.1) ; indépendance algébrique des valeurs de E -fonctions (cf. chap. 4.6). Puis dans le théorème de Gelfond-Schneider (cf. chap. 4.2), le théorème de Roth, les résultats de Baker sur l'indépendance linéaire des logarithmes de nombres algébriques (cf. chap. 4.4).

NOMBRES TRANSCENDANTS

2. Un exemple : le théorème de Thue.

Le théorème de Thue (1908) est le résultat suivant.

THÉOREME 2. — Soit α un nombre algébrique de degré $d \geq 3$. Alors pour tout ϵ positif, l'inégalité

$$|\alpha - p/q| < q^{-(d/2+1+\epsilon)} \quad (1)$$

ne possède qu'un nombre fini de solutions rationnelles p/q .

Démonstration.

1. *Construction d'une fonction auxiliaire A.* — On cherche à construire un polynôme non nul à coefficients entiers $A(X, Y) = P(X) - YQ(X)$ où les polynômes P et Q vérifient $\max\{\deg P, \deg Q\} \leq r$ et tel que

$$\frac{\partial^h}{\partial X^h} A(\alpha, \alpha) = 0 \quad \text{pour } h = 0, 1, \dots, l-1; \quad (2)$$

les paramètres r et l étant des entiers positifs qui seront choisis plus loin.

Si on pose $A(X, Y) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^l a_{ij} X^i Y^j$ et si on écrit les conditions (2) sur la base $(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$ du corps $\mathbb{Q}(\alpha)$, on voit qu'elles sont équivalentes à un système linéaire homogène de dl équations rationnelles à $2(r+1)$ inconnues. Soit η un nombre réel tel que $0 < \eta < 1/3$, et l un entier ≥ 2 ; posons $r = \lfloor (1+\eta)dl/2 \rfloor$. On a alors $2(r+1) > dl$ et le système ci-dessus admet donc une solution rationnelle non triviale et par conséquent aussi une solution entière non triviale. On note A le polynôme associé à cette dernière solution.

En fait on a besoin d'une majoration des coefficients de A en fonction de l . Le principe des tiroirs permet de montrer qu'il existe une solution A non triviale qui vérifie

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \leq C_1^{l/\eta},$$

où C_1 est une quantité qui ne dépend que de α .

2. *Construction d'une quantité γ non nulle associée à A.* — Considérons le polynôme $W(X) = P(X)Q'(X) - P'(X)Q(X)$. D'après le choix de A , α est une racine d'ordre au moins $l-1$ de W . Montrons que W n'est pas nul. En effet, dans le cas contraire, les polynômes P et Q seraient proportionnels et donc tous deux divisibles par $(X - \alpha)^l$; ceci est impossible puisque l'un au moins n'est pas nul et de degré plus petit que dl .

Il en résulte aisément que l'ordre w de W en un point rationnel p_1/q_1 vérifie $w \leq C_2 \eta^{-1} l / \log q_1$, où C_2 ne dépend que de α . Autrement dit, les quotients $P^{(j)}(p_1/q_1)/Q^{(j)}(p_1/q_1)$, $j = 0, \dots, w+1$ ne sont pas tous égaux. Ainsi, pour

tout nombre rationnel p_2/q_2 , il existe un entier j ($j \leq w+1$) tel que le nombre

$$\gamma := \frac{1}{j!} \frac{\partial^j A}{\partial X^j} \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \right) = \frac{1}{j!} \left(P^{(j)} \left(\frac{p_1}{q_1} \right) - \left(\frac{p_2}{q_2} \right) Q^{(j)} \left(\frac{p_1}{q_1} \right) \right)$$

soit non nul.

Supposons que l'inéquation (1) admette une infinité de solutions. On choisit alors une solution (p_1/q_1) de (1) avec q_1 assez grand pour que j vérifie

$$j \leq \eta l + 1,$$

puis une seconde approximation p_2/q_2 vérifiant (1) avec $\log q_2 / \log q_1$ suffisamment grand et on fixe $l = [\log q_2 / \log q_1]$.

3. *Majoration de $|\gamma|$.* — On a les relations

$$\begin{aligned} |\gamma| &\leq \frac{1}{j!} \left| P^{(j)} \left(\frac{p_1}{q_1} \right) - \alpha Q^{(j)} \left(\frac{p_1}{q_1} \right) \right| + \left| \alpha - \frac{p_2}{q_2} \right| \left| Q^{(j)} \left(\frac{p_1}{q_1} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{h \geq l} \left(\alpha - \frac{p_1}{q_1} \right)^{h-j} \binom{h}{j} \frac{\partial^h}{h! \partial X^h} A(\alpha, \alpha) \right| + \left| \alpha - \frac{p_2}{q_2} \right| \left| Q^{(j)} \left(\frac{p_1}{q_1} \right) \right| \\ &\leq C_3^{l/\eta} \max \{ q_1^{-(l-j)\rho}, q_2^{-\rho} \}, \end{aligned}$$

où C_3 est une quantité qui ne dépend que de α et $\rho = d/2 + 1 + \epsilon$.

4. *Minoration de $|\gamma|$.* — Le nombre $\gamma q_1^{r-j} q_2$ est un entier rationnel non nul, d'où la minoration $|\gamma| \geq q_1^{-r+j} q_2^{-1}$.

5. *Conclusion.* — D'après l'encadrement précédent de $|\gamma|$, et le choix de l , on a $C_3^{l/\eta} q_1^{r-j} q_2 \geq \min \{ q_1(l-j)\rho, q_2^\rho \} = q_1^{(l-j)\rho}$, et $q_2 \leq q_1^{l+1}$. D'où l'inégalité

$$(l-j)\rho \leq l+1+r-j + (l/\eta) \frac{\log C_3}{\log q_1}$$

avec $j \leq \eta l + 1$, $r \leq (1+\eta)dl/2$, q_1 arbitrairement grand, η arbitrairement petit. On en déduit, puisque l est arbitrairement grand, l'inégalité

$$\rho \leq 1 + d/2;$$

ce qui contredit la condition $\epsilon > 0$. En conséquence, l'inégalité (1) n'a qu'un nombre fini de solutions rationnelles. ■

De la démonstration précédente, nous retiendrons les quatre pas fondamentaux des numéros 1 à 4. Malgré sa simplicité, ces quatre pas apparaissaient déjà dans la démonstration du théorème de Liouville :

NOMBRES TRANSCENDANTS

1. On considère comme fonction auxiliaire le polynôme minimal de α , noté P ,
2. Le nombre γ considéré est la valeur de P au point p/q ,
3. On majore aussi $|\gamma|$ grâce à la formule de Taylor,
4. Un argument arithmétique fournit une minoration de $|\gamma|$.

3. Un schéma de démonstration de transcendance, ou comment lire ce fascicule.

Dans une démonstration de transcendance, la situation générale est la suivante. On considère des fonctions f_1, \dots, f_s , analytiques sur \mathbb{C}^n et on veut montrer que ces fonctions ne prennent pas toutes des valeurs algébriques en un certain point α ou, ce qui est plus difficile, on cherche à minorer le degré de transcendance sur \mathbb{Q} du corps $\mathbb{Q}(f_1(\alpha), \dots, f_s(\alpha))$. Les quatre pas rencontrés ci-dessus ont maintenant les analogues suivants.

Pas 1. — On construit, comme au numéro 1 de la démonstration du théorème de Thue, une fonction auxiliaire qui est cette fois de la forme $A(z) = P(f_1(z), \dots, f_s(z))$, où $P = P^{(D)}$ est un polynôme en s variables et à coefficients entiers dont le degré est au plus égal à un certain paramètre D choisi suffisamment grand.

On requiert généralement que la fonction A s'annule (ou soit très petite) en un grand nombre de points, avec éventuellement au moins une certaine multiplicité ; on demande également que les coefficients de P ne soient pas trop grands (disons majorés en valeur absolue par $\sigma(D)$). Le lemme de Siegel constitue un outil très souple pour ce genre de construction. On obtient alors l'existence d'une telle fonction mais pas le moyen de la construire en pratique. Comme nous l'avons déjà dit, on peut parfois construire explicitement certains approximants de Padé et on obtient alors en général des résultats très fins. Parfois on utilise aussi des formules d'interpolation.

Pas 2 (développé au chapitre 2). — Notre fonction auxiliaire étant construite, grâce au fait qu'elle a "beaucoup de zéros" on montre — à l'aide d'un lemme dit de Schwarz — qu'elle est petite sur une boule de taille raisonnable. Dans la démonstration du théorème de Thue, ceci correspond à la majoration de $|\gamma|$ (numéro 3), obtenue en utilisant le développement de Taylor du polynôme $A(X, Y)$.

Les lemmes de Schwarz peuvent être vus comme une amélioration du principe du maximum. Si $|z|$ est une norme sur \mathbb{C}^n et si r et R sont deux réels, $r < R$, le principe du maximum est la relation

$$\sup_{|z| \leq r} |A(z)| \leq \sup_{|z| = R} |A(z)|.$$

Dans le cas d'une variable, il est facile de montrer que si la fonction A admet w zéros, comptés avec multiplicité, dans le disque $\{|z| \leq r\}$ on a (cf. chap. 2.1)

$$\sup_{|z| \leq r} |A(z)| \leq \left(\frac{2r}{R-r} \right)^w \sup_{|z|=R} |A(z)|.$$

Mais en plusieurs variables des difficultés surgissent qui font que l'on ne dispose actuellement que de quelques résultats utilisables. Le chapitre 2 introduit des problèmes non résolus ainsi que différents aspects analytiques de la question.

Pour revenir à notre schéma de démonstration, disons qu'à ce pas on obtient, dans les "bons" cas, une majoration de la forme

$$\sup_{|z| \leq r} |A(z)| \leq \epsilon(D) \quad \text{pour } r \geq r(D)$$

où ϵ est une fonction positive qui tend vers zéro avec $1/D$.

Pas 3 (développé au paragraphe 1 du chapitre 3). — Il correspond au numéro 2 de la démonstration du théorème de Thue, où il s'agissait de montrer que la fonction auxiliaire $A(X, Y)$ ne s'annule pas avec une trop grande multiplicité au point $(p_1/q_1, p_2/q_2)$. C'est pour cette raison que cette étape de la démonstration est souvent appelée "lemme de zéros". Dans la situation générale, on utilise une algèbre d'opérateurs. On rencontre des équations différentielles algébriques (méthodes de Siegel, de Gelfond...), des formules d'addition sur les groupes algébriques : (méthode de Schneider), des équations fonctionnelles (méthode de Mahler). On leur associe une infinité d'opérateurs T_1, \dots, T_M, \dots , de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_s]$ dans lui-même. Grâce à ces opérateurs, on fabrique un idéal $\tilde{I} = (T_1(P), \dots, T_M(P)) = \tilde{I}^{(D)}$, et un lemme de zéros consiste à montrer que la variété des zéros de \tilde{I} dans \mathbb{C}^s est petite (au minimum, on voudra montrer que le point $\omega = (f_1(\alpha), \dots, f_s(\alpha))$ qui nous intéresse n'est pas un zéro de \tilde{I}).

Les méthodes utilisées pour établir de tels énoncés sont actuellement aussi variées que les énoncés eux-mêmes. Mais il est certain qu'un progrès important a été réalisé ces derniers temps grâce à l'introduction de considérations algébrico-géométriques ; c'est pourquoi le paragraphe 1 du chapitre 3 met l'accent sur les résultats obtenus dans le cas des groupes algébriques.

Pas 4 (développé au paragraphe 2 du chapitre 3). — Il s'agit cette fois de l'analogue du numéro 4 de la démonstration du théorème de Thue donnée plus haut. On doit comparer les fonctions $\epsilon(D)$ du pas 2 et $\sigma(D)$ du premier pas. Dans le schéma général, on requiert d'abord que les opérateurs T_1, \dots, T_M utilisés pour construire l'idéal \tilde{I} du pas 3 permettent un contrôle du degré et de la taille des coefficients des polynômes $T_1(P), \dots, T_M(P)$ en fonction du

NOMBRES TRANSCENDANTS

paramètre D , et que ces mêmes opérateurs aient une interprétation analytique, c'est-à-dire que pour $i = 1, \dots, M$ il existe un multi-indice $t_i \in \mathbb{N}^n$, pas trop grand, et un élément $z_i = z_i(\alpha)$ de norme au plus $r(D)$ tels que

$$T_i(P)(\omega) = \frac{\partial^{|t_i|}}{\partial z^{t_i}} A(z_i).$$

Les conditions ci-dessus et la majoration obtenue au pas 2 montrent qu'on a essentiellement $|T_i(P)(\omega)| \leq \epsilon(D)$ et que les polynômes $T_i(P)$ ont des coefficients entiers, majorés en valeur absolue par $\sigma(D)$, et des degrés bornés par $\delta(D)$.

Le degré de transcendance sur \mathbb{Q} du corps $\mathbb{Q}(\omega)$ est égal à la dimension d de la plus petite sous-variété algébrique fermée de C^s définie sur \mathbb{Q} et contenant le point ω . Soit J_ω l'idéal de $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_s]$ des polynômes s'annulant sur cette variété. On considère les idéaux $(I^{(D)})_{D \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_s]$ engendrés respectivement par $(\tilde{I}^{(D)} \cup J_\omega)_{D \in \mathbb{N}}$.

Lorsqu'on suppose que la dimension d de la variété des zéros de J_ω est nulle, la comparaison de $\epsilon(D)$ et $\sigma(D)$ conduit à l'inégalité $\epsilon(D) \geq 1/\sigma(D)$, qui est essentiellement celle rencontrée dans la preuve du théorème de Thue lors de l'encadrement de $|\gamma|$ et qui est tout simplement la traduction du fait qu'un entier non nul a une valeur absolue ≥ 1 .

Mais lorsqu'on ne suppose plus que d est nulle, l'extension de cette banalité n'est pas triviale et fait intervenir de l'algèbre géométrique fine. On trouvera au paragraphe 2 du chapitre 3 les résultats les plus récents acquis dans ce domaine.

Pas 5 (ne nécessite aucun développement). — C'est aussi le niveau 5 de la démonstration du théorème de Thue. On veut montrer une certaine minoration de d , on suppose qu'elle n'a pas lieu et ... avec une bonne dose de chance, l'inégalité établie au pas 4 entre $\epsilon(D)$, $\sigma(D)$ et $\delta(D)$ se trouve être fausse pour D assez grand. Les mathématiciens n'admettant pas la contradiction, on en conclut que d est assez grand !

4. Remarques sur le texte.

Continuons notre tour d'horizon des chapitres ultérieurs. Le quatrième chapitre est une tentative de présentation des divers résultats qui ont marqué l'évolution de la théorie. Mais beaucoup d'entre eux ont été omis et notre catalogue doit être regardé plus comme une parade que comme une revue. Enfin, le dernier chapitre, le chapitre 5, concerne l'importante question des applications de la transcendance aux "autres domaines". Comme on le constatera, ces applications sont nombreuses et montrent que la transcendance

est souvent un outil puissant permettant de résoudre des problèmes laissés en suspens depuis longtemps ou fournissant les meilleurs résultats connus sur tels autres problèmes. Il faut malgré tout reconnaître que la plupart de ces applications sont relatives à la théorie des nombres (mais est-ce vraiment une restriction ?).

Les chapitres 2 à 5 sont deux à deux indépendants les uns des autres. Pour aborder la lecture d'un nouveau chapitre il sera avisé de relire le paragraphe 3 du présent chapitre.

CHAPITRE 2

UN OUTIL ANALYTIQUE EN TRANSCENDANCE : LES LEMMES DE SCHWARZ

1. Le cas d'une variable.

Dans le corps C , le lemme de Schwarz utilisé est souvent le suivant.

LEMME 1. — Soient r un nombre réel positif, t un entier positif, S un sous-ensemble fini du disque $|z| \leq r$. Alors, si f est une fonction entière ayant en chaque point de S un zéro d'ordre au moins t , pour tout réel positif R , $R > r$, on a la majoration

$$\sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \sup_{|z|=R} |f(z)| \left(\frac{2r}{R-r} \right)^{t \text{ card } S}.$$

Démonstration. — Elle généralise le lemme de Schwarz classique qui correspond au cas où S est réduit à un point. Soient z_1, \dots, z_s les points de S . On applique le principe du maximum à la fonction entière f/g où $g = ((z - z_1) \cdots (z - z_s))^t$. Plus précisément, on conclut en développant l'inégalité

$$\sup_{|z|=r} |f(z)/g(z)| \leq \sup_{|z|=R} |f(z)/g(z)|.$$

2. Le cas de plusieurs variables.

On cherche à généraliser le résultat précédent au cas de plusieurs variables. On démontre par exemple des résultats du type suivant.

LEMME 2. — Soient r_0 un nombre réel positif, S un sous-ensemble fini du polydisque de rayon r_0 de C^n centré à l'origine, t un entier positif. Alors, il existe des constantes positives $C(n)$, $\alpha_t(S)$ et $r_t(S) \geq r_0$ telles que, si f est une fonction entière ayant en chaque point de S un zéro d'ordre au moins t , pour tout couple de réels R et r , $R > r \geq r_t(S)$, on ait

$$\sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \sup_{|z|=R} |f(z)| \left(\frac{C(n)r}{R} \right)^{\alpha_t(S)},$$

où on a posé $|z| = \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}$ lorsque $z = (z_1, \dots, z_n)$.

Remarque. — On cherche bien entendu à obtenir une valeur de $\alpha_t(S)$ aussi grande que possible.

3. Etude de $\alpha_t(S)$.

Soit $\omega_t(S)$ le nombre défini par

$$\omega_t(S) = \inf_P \deg P$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des polynômes P non nuls de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ satisfaisant à $(\partial^{\tau_1 + \dots + \tau_n} / \partial z_1^{\tau_1} \dots \partial z_n^{\tau_n})P(\sigma) = 0$ pour tout σ dans S et tout τ tel que $\tau_1 + \dots + \tau_n < t$. Autrement dit, $\omega_t(S)$ est le plus petit des degrés des hypersurfaces de \mathbb{C}^n ayant en chaque point de S une singularité de multiplicité supérieure ou égale à t . La quantité $\alpha_t(S)$ est alors nécessairement majorée par $\omega_t(S)$. En fait, on possède des lemmes du type ci-dessus avec $\alpha_t = \omega_t$. La question est alors d'obtenir des minoration de ω_t en fonction de t . On sait estimer le comportement de ω_t en fonction de t .

LEMME 3. — On a l'inégalité : $\omega_t(S) \geq t\omega_1(S)/n$.

Ce résultat a d'abord été obtenu comme conséquence d'estimées L^2 dues à Hörmander. Il vient d'être raffiné et généralisé par des méthodes de géométrie projective complexe par H. Esnault et E. Viehweg dans [Es-Vi].

Il faut maintenant étudier $\omega_1(S)$, au moins pour les ensembles intervenant dans les applications arithmétiques. C'est à ce type de problème que répondent, entre autres, les lemmes de zéros qui sont développés au chapitre 3.1.

Signalons enfin qu'il est intéressant, pour certaines applications, de considérer des singularités aux points de S plus compliquées que celles qui interviennent dans l'énoncé du lemme 3.

4. Etude de $r_t(S)$.

En plusieurs variables, il apparaît un phénomène qui n'existe pas pour une seule variable : en général le nombre $r_t(S)$ ne peut être choisi égal à r_0 , il dépend de la répartition de S . Ce phénomène est encore mal connu. On a cependant montré qu'on peut majorer $r_t(S)$ par $r(S)$, indépendant de t . Mais on ne sait estimer $r(S)$ que dans quelques rares cas. Une approche récente, plus explicite, est due à J. P. Demailly [Dem].

CHAPITRE 3

LES MÉTHODES ALGÈBRIQUES EN TRANSCENDANCE

La théorie des nombres transcendants fait de plus en plus appel, depuis quelques années, à l'algèbre commutative et à la géométrie algébrique. Le premier exemple que nous étudierons, connu sous le nom de "lemmes de zéros", a pris une importance majeure à la suite des travaux de Y. V. Nesterenko [Ne 1], [Ne 2], prolongés par W. D. Brownawell, D. W. Masser et G. Wüstholz (voir [Bro-Ma 2], [Mas 4], [Mas-Wü 1]...). G. Wüstholz a récemment annoncé de nouveaux résultats dans cette voie. Le deuxième exemple, que nous appellerons "élimination et critères de Gel'fond" concerne la caractérisation des nombres algébriquement (ou linéairement) indépendants. On y distingue après les premiers résultats de Siegel et Gel'fond, les travaux de Brownawell [Bro 1, 2, 3], de G. V. Choodnovsky [Ch 1], [Ch 2] et [Ch 3] raffinés par E. Reyssat dans [Re 3], ainsi que l'apparition de nouveaux procédés introduits dans [Phi 1], [Phi 2] et [Wü 2].

Nous allons successivement présenter ces deux questions dans les paragraphes 1 et 2 de ce chapitre.

1. Les lemmes de zéros.

On étudie le problème suivant. On considère des fonctions f_1, \dots, f_s analytiques sur une boule ouverte $B \subset \mathbb{C}^n$, et un polynôme P de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_s]$ de degré total D tel que la fonction $A = P(f_1, \dots, f_s)$ ne soit pas identiquement nulle. On cherche alors à majorer le nombre de zéros de la fonction A dans un sous-ensemble fermé de B . L'exemple de la fonction $f = \sum_{i \geq 0} z^{\alpha_i} / i!$, où (α_i) est une suite strictement croissante d'entiers, montre qu'une estimation de type polynomial en D est en général utopique.

Heureusement, les fonctions qui interviennent classiquement en transcendance vérifient certaines propriétés algébriques que l'on peut classer en deux types

équations différentielles algébriques,
équations fonctionnelles algébriques.

Le cas des équations différentielles linéaires a été traité de façon satisfaisante par A. B. Shidlovsky [Shi] puis Y. V. Nesterenko [Ne 1]. Pour les polynômes exponentiels, R. Tijdeman [Ti 2] a obtenu des résultats très fins.

Mais, dans des cas plus généraux, les meilleurs résultats connus [Bro-Ma 2] ne sont pas optimaux.

La méthode de Mahler, telle qu'elle est étudiée par exemple dans [Mas 5], se rattache aux équations fonctionnelles.

Le principe central de la méthode consiste à associer aux équations différentielles ou fonctionnelles satisfaites par les fonctions f_1, \dots, f_s des opérateurs T_0, T_1, \dots

$$T_i : \mathbb{C}[X_1, \dots, X_s] \rightarrow \mathbb{C}[X_1, \dots, X_s],$$

qui — en un certain sens — représentent les équations considérées, et tels qu'on puisse contrôler les degrés des polynômes $T_i(P)$ en fonction de celui de P . On montre alors, qu'en prenant M assez grand, les polynômes $T_0(P), \dots, T_M(P)$ n'ont pas de zéro commun dans \mathbb{C}^s ou, souvent, que les zéros communs sont bien là où on les attend.

Les meilleurs "lemmes de zéros" obtenus par voie algébrique se rapportent aux groupes algébriques commutatifs. Rappelons qu'un groupe algébrique commutatif G est une sous-variété algébrique (non nécessairement fermée pour la topologie de Zariski) d'un espace projectif \mathbb{P}_N de dimension N , munie d'une structure de groupe commutatif dont les lois sont définies par des morphismes algébriques. Les points à coordonnées complexes de G forment un groupe de Lie $G(\mathbb{C})$ dont l'espace tangent à l'origine $TG(\mathbb{C})$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de même dimension g que le groupe G . L'application exponentielle de G

$$\begin{aligned} \exp_G : TG(\mathbb{C}) &\rightarrow G(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}_N(\mathbb{C}) \\ z &\mapsto (\phi_0(z), \dots, \phi_N(z)) \end{aligned}$$

est un homomorphisme analytique surjectif. Si on prend un polynôme homogène $P \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$, ne s'annulant pas identiquement sur $G(\mathbb{C})$, alors la fonction $A = P(\phi_0, \dots, \phi_N)$ est non identiquement nulle et analytique sur $TG(\mathbb{C}) (\simeq \mathbb{C}^g)$. Le sous-ensemble fermé sur lequel on cherche à majorer le nombre des zéros de cette fonction A est ordinairement un sous-groupe de type fini de $TG(\mathbb{C})$. L'image de ce sous-groupe par l'application exponentielle est un sous-groupe de type fini Γ de $G(\mathbb{C})$. Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ des générateurs de Γ , pour tout entier positif H , on pose

$$\Gamma_H = \{a_1 \gamma_1 + \dots + a_m \gamma_m; a_i \in \mathbb{Z}, |a_i| \leq H\}.$$

Le lemme de zéros désiré s'énonce alors en termes purement géométriques.

THÉORÈME 1 (Masser-Wüstholz). — *Il existe un nombre réel $c > 0$ ne dépendant que de G et vérifiant la proposition suivante : si un polynôme*

NOMBRES TRANSCENDANTS

homogène $P \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$ de degré D ne s'annule pas identiquement sur G mais s'annule en tout point de Γ_M , on a

$$M \leq g(D/c)^{1/\mu},$$

où

$$\mu = \min_{G'} \frac{\text{rang}_{\mathbb{Z}}(\Gamma/\Gamma \cap G')}{\dim G/G'},$$

le minimum étant pris sur l'ensemble des sous-groupes algébriques de G distincts de G .

Le coefficient μ introduit dans le théorème ci-dessus caractérise, en un certain sens, la répartition du sous-groupe Γ dans G . Notamment, si Γ est contenu dans un sous-groupe algébrique propre, μ est nul. En prenant $G' = \{0\}$, on constate que l'on a toujours $\mu \leq \text{rang}_{\mathbb{Z}} \Gamma / \dim G$. On trouvera au chapitre 5, § 5 une application de ce résultat dans le cas où G est une puissance du groupe multiplicatif.

On sait qu'une dérivation sur un groupe algébrique G est un élément de TG agissant sur les fonctions rationnelles sur G . On peut représenter, dans un atlas convenable, ces dérivations de façon algébrique et ainsi on obtient des équations différentielles algébriques liant les quotients ϕ_i/ϕ_j . Dans cette situation, D. W. Masser et G. Wüstholz ont annoncé des généralisations du théorème 1 faisant intervenir une dérivation (cf. [Mas-Wü 1], § 9, th. A). Récemment, G. Wüstholz a annoncé une généralisation où apparaissent un nombre quelconque de dérivations [Wü 3]. Utilisant ces énoncés avec dérivation, Masser et Wüstholz ont pu démontrer l'indépendance algébrique des nombres $\wp(\beta u)$ et $\wp(\beta^2 u)$, lorsque \wp est une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants algébriques, u un nombre complexe où \wp est définie et prend une valeur algébrique et β un nombre algébrique cubique, voir [Mas-Wü 2], ce qui généralise un résultat antérieur de W. D. Brownawell et K. K. Kubota [Bro-Ku].

2. Elimination et critères de Gel'fond.

Nous reprenons les notations du chapitre 1, § 3, pas 4. Une remarque pour commencer. On a noté d la dimension de la variété des zéros de J_ω (l'idéal de $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_s]$ engendré par les "relations" vérifiées par les coordonnées du point ω que l'on étudie) ; soit X_1, \dots, X_d une base de transcendance sur \mathbb{Q} du domaine $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_s]/J_\omega$. A l'aide de l'application norme

$$N : \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_s]/J_\omega \rightarrow \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_d]$$

on peut se ramener à une situation similaire où l'on a en outre $J_\omega = (0)$. Notamment, si d est nul, on peut toujours se ramener au cas où s est aussi

nul (i.e. les polynômes sont des constantes rationnelles). Dans ce cas on a l'inégalité $\epsilon(D) \geq 1/\sigma(D)$, qui revient à dire qu'un entier non nul est de valeur absolue ≥ 1 .

Pour illustrer notre propos, étudions maintenant le cas $s = 1$. On suppose dorénavant, grâce à la remarque précédente, que J_ω est nul. On est amené à distinguer deux possibilités.

(A₁) Il existe des entiers D tels que $I^{(D)} = \mathbb{Q}[X_1]$, alors, pour ces valeurs de D , on sait calculer — grâce à l'algorithme d'Euclide — des polynômes A_1, \dots, A_M tels que $A_1 T_1(P) + \dots + A_M T_M(P) = 1$. Les majorations (cf. chap. 1, § 3, pas 4)

$$\begin{aligned} h(T_i(P)) &\leq \sigma(D), \quad \deg T_i(P) \leq \delta(D), \\ |T_i(P)(\omega)| &\leq \epsilon(D), \end{aligned} \tag{H}$$

conduisent aux inégalités

$$\deg A_i \leq \delta(D), \quad h(A_i) \leq 2\delta(D)(\sigma(D) + \log \delta(D))$$

(où $h(Q)$ désigne le logarithme du maximum des modules des coefficients d'un polynôme Q , la hauteur de Q). D'où l'existence d'une constante

$$C = C(M) > 0$$

pour laquelle on a

$$\epsilon(D) \geq \exp(-C\delta(D)(\sigma(D) + \delta(D))).$$

(B₁) Pour tout entier D on a $I^{(D)} \neq (0)$ et $I^{(D)} \neq \mathbb{Q}[X_1]$. On est alors dans la situation classique du "critère de Gel'fond" (cf. [Gel]) :

ou bien ω appartient à la variété des zéros de $I^{(D)}$ pour $D \geq D_0$ (en particulier ω est algébrique),

ou bien $\epsilon(D) \geq \exp(-C\delta(D)(\sigma(D) + \delta(D)))$ pour tout D .

Le cas (A₁) se présente rarement et c'est plutôt l'autre cas que l'on rencontre lorsqu'on veut démontrer l'indépendance algébrique de deux nombres.

Passons maintenant au cas $s \geq 2$. Envisageons d'abord le cas homogène. Si l'on suppose que la variété des zéros de l'idéal homogène $I^{(D)}$ est vide dans $\mathbb{P}_{s-1}(\mathbb{C})$ (cas A_{s-1}) ou de dimension zéro (cas B_{s-1}), on obtient la conclusion suivante (voir [Phi 1]) : il existe une constante $C = C(s, M, \omega) > 0$ telle que

ou bien ω appartient à la variété des zéros de $I^{(D)}$ pour $D \geq D_0$ (en particulier toutes les composantes de ω sont algébriques),

ou bien on a $\epsilon(D) \geq \exp(-C\delta(D)^{s-1}(\sigma(D) + \delta(D)))$ pour tout D .

NOMBRES TRANSCENDANTS

Ces résultats permettent de démontrer l'indépendance algébrique de s nombres (cf. [Phi 2], [Wü 2]).

Contrairement au cas $s = 1$, pour $s \geq 2$ le passage du cas homogène au cas inhomogène présente de sérieuses difficultés (on ne sait en général pas contrôler la variété des zéros à l'infini). Un des problèmes fondamentaux dans le cas non homogène est de rendre effectif le théorème des zéros de Hilbert. Dans cette direction on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2. — *Il existe des réels $C(s)$ et $\delta(s) > 0$ tels que l'assertion suivante soit vraie : si $P_1, \dots, P_M \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_s]$ sont des polynômes de degré au plus D , sans zéro commun dans \mathbb{C}^s , il existe des polynômes A_1, \dots, A_M de $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_s]$ de degré au plus $C(s)D^{\delta(s)}$ tels que*

$$A_1 P_1 + \dots + A_M P_M = 1.$$

Mais on veut plus, à savoir expliciter $\delta(s)$. On a le théorème suivant (voir [Sei] et [Her]) :

THÉORÈME 2 (G. Herman, A. Seidenberg, D. W. Masser). — *On a*

$$s \leq \delta(s) \leq 2^{s-1}.$$

Et enfin le problème fascinant :

PROBLÈME. — *A-t-on $\delta(s) = s$?*

Cette dernière question, si elle était résolue positivement, permettrait d'améliorer certains des résultats connus sur les grands degrés de transcendance.

Lorsqu'on ne fait pas d'hypothèse sur les dimensions des variétés des zéros des idéaux $I^{(D)}$ dans $\mathbb{P}_{s-1}(\mathbb{C})$ un théorème de J. W. S. Cassels [Ca] montre qu'un résultat comme ceux qui précèdent est faux. Néanmoins, en introduisant des hypothèses de minoration sur les $|T_i(P)(\omega)|$, $i = 1, \dots, M$, G. V. Choodnovsky puis E. Reyssat ont obtenu, pour les idéaux de codimension 1, des résultats utilisables en transcendance, (cf. [Ch 1], [Re 3]).

Dans un énoncé typique de ce style on suppose que pour tout D on a $I^{(D)} = (P^{(D)}) \neq (0)$ et que $P^{(D)}$ vérifie, outre les hypothèses (H), la minoration $|P^{(D)}(\omega)| \geq \eta(D)$ où $\eta(D)$ est une fonction décroissante de D telle que $\limsup(\epsilon(D)/\eta(D)) < \infty$. La conclusion est alors la suivante : il existe $C > 0$ tel que $\epsilon(D) \geq \exp\{-C(\sigma(D) + \delta(D))^{2^s}\}$ pour tout D .

Enfin, il faut noter que dans certaines méthodes de démonstration de transcendance, comme celle de Siegel [Si 2], on arrive à construire des familles

de polynômes $A_1^{(D)}, \dots, A_M^{(D)}$ telles que

$$A_1^{(D)}T_1(P^{(D)}) + \dots + A_M^{(D)}T_M(P^{(D)}) = 1.$$

Le problème de l'élimination est alors traité à l'intérieur même de la démonstration de transcendance. Cette méthode est l'une des plus puissantes connues à ce jour, mais son domaine d'application reste pour l'instant limité à la théorie des E -fonctions et des G -fonctions (voir les chapitres 1 et 4).

Pour conclure ce chapitre, donnons quelques exemples d'applications de ces divers résultats, exemples que l'on retrouvera au chapitre 4.

Utilisant le critère de Gel'fond (B_1), G. V. Choodnovsky a démontré en 1976 l'indépendance algébrique de π et $\Gamma(1/3)$, puis de π et $\Gamma(1/4)$. C'est ainsi que l'on a appris que $\Gamma(1/3)$ et $\Gamma(1/4)$ sont transcendants !

La démonstration du théorème de Lindemann-Weierstrass (voir chap. 1 et 4) est à l'origine de la méthode de Siegel. En remplaçant la fonction exponentielle par une fonction elliptique de Weierstrass \wp ayant des multiplications complexes on démontre, à l'aide de (A_s) et de (B_s) pour tous les $s \leq n$, que pour des nombres algébriques $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ linéairement indépendants sur le corps des multiplications complexes de \wp les nombres $\wp(\alpha_1), \dots, \wp(\alpha_n)$ sont algébriquement indépendants (cf. [Phi 2], [Wü 2]).

CHAPITRE 4

RÉSULTATS ET CONJECTURES

(LISTE NON EXHAUSTIVE)

Il catalogo è questo,
Delle belle, che amò il padron mio :
Un catalogo gli è ch'ho fatto io :
Osservate, leggete con me !

Lorenzo da Ponte.

A. Le XIX^e siècle.

Le premier exemple de nombre transcendant a été donné en 1844 par J. Liouville (*cf.* chap. 1). En 1873, Ch. Hermite établissait pour la première fois la transcendance d'une constante classique de l'analyse, le nombre e (base des logarithmes népériens), puis en 1882 F. Lindemann montrait que π est transcendant. Le développement des idées de Ch. Hermite par F. Lindemann puis leur mise en forme complète par K. Weierstrass fournit le

THÉORÈME DE LINDEMANN-WEIERSTRASS (1885). — *Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des nombres algébriques linéairement indépendants sur le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels, alors $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} .*

En particulier, si α est un nombre algébrique non nul, alors e^α est transcendant (théorème de Hermite-Lindemann) ; d'où l'on déduit que le logarithme d'un nombre algébrique β (avec $\beta \neq 0$ et $\log \beta \neq 0$) est transcendant.

B. Le XX^e siècle (jusqu'à nos jours seulement).

Les recherches en transcendance au début du siècle ont été fortement marquées par le 7^e problème posé par D. Hilbert au congrès de Paris en août 1900 (c'était encore le XIX^e siècle !) : si α et β sont des nombres algébriques ($\alpha \neq 0$, $\log \alpha \neq 0$, et β irrationnel), alors $\alpha^\beta = e^{\beta \log \alpha}$ est-il transcendant ?

1. Fonctions entières arithmétiques. — Pour introduire son 7^e problème, Hilbert disait : "Le fait que certaines fonctions transcendentes, importantes en analyse, prennent des valeurs algébriques en certains points algébriques me semble particulièrement remarquable et digne de recherches à venir".

En fait, on est tenté d'affirmer qu'une fonction entière transcendante prend des valeurs transcendantes en tout point algébrique, ou algébrique irrationnel (penser à $f(z) = e^z$ et au théorème de Hermite-Lindemann). Mais depuis les travaux de Weierstrass et P. Stäckel on sait construire des fonctions entières transcendantes prenant des valeurs rationnelles en tout point algébrique ; on ne peut donc pas montrer de résultats aussi généraux.

Dès 1914, G. Pólya montrait le

THÉORÈME 1.1. — *Soit f une fonction entière de type exponentiel inférieur à $\log 2$ (i.e.*

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log |f|_r}{r} < \log 2, \quad \text{où } |f|_r = \sup\{|f(z)|; |z| \leq r\}$$

envoyant l'ensemble N des entiers naturels dans lui-même, alors f est un polynôme. (La constante $\log 2$ est la meilleure possible : regarder $f(z) = 2^z$.)

Pólya utilisait la série d'interpolation de f aux points de N , mais Ch. Pisot, utilisant la transformation de Laplace, éclaircissait presque complètement la situation en 1946 :

THÉORÈME 1.2. — *Soient $\alpha > 0$ et $S = \exp\{|z| \leq \alpha\}$. Soit, d'autre part, W l'ensemble de tous les entiers algébriques situés, ainsi que tous leurs conjugués, dans S . Si le diamètre transfini $\tau(S)$ de S est inférieur à 1, alors W est fini. En outre, toute fonction entière f de type exponentiel au plus α telle que $f(N) \subset N$, est un polynôme exponentiel de la forme*

$$f(z) = \sum_{w \in W} P_w(z) w^z \quad \text{où } P_w \in \mathbb{Q}[W][z].$$

Le diamètre transfini τ d'un compact $S \subset \mathbb{C}$ est défini par

$$\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(S)^{1/n(n-1)}$$

où

$$M_n(S) = \sup_{z_i \in S} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2.$$

On sait généraliser ces résultats aux cas où $f(N)$ ou $f(\mathbb{Z}) \subset O_K$, l'anneau des entiers d'un corps de nombres K , moyennant quelques hypothèses techniques. Dans le cas des fonctions de plusieurs variables, on a l'analogue des théorèmes de Pólya et de Pisot (Baker, Avanissian et Gay) mais le cas où $f(\mathbb{Z}^m) \subset O_K$ reste un problème ouvert.

NOMBRES TRANSCENDANTS

Une autre extension du problème consiste à étudier les fonctions envoyant un sous-groupe additif Γ du corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques complexes dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Les résultats les plus récents sont les suivants (rappelons que, pour $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, on note $|\alpha|$ le maximum des modules des conjugués de α) :

THÉOREME 1.3. — *Soient Γ un sous-groupe additif de \mathbb{C} engendré par l nombres algébriques $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ linéairement indépendants sur le corps des rationnels, et O_K l'anneau des entiers du corps de nombres K . On note $\Gamma(S)$ l'ensemble*

$$\Gamma(S) = \{\gamma \in \Gamma; \gamma = a_1 \gamma_1 + \dots + a_l \gamma_l, a_i \in \mathbb{Z}, \max |a_i| \leq S\}.$$

Il existe une constante effective $C > 0$ qui ne dépend que des γ_j et de K telle que, si f est une fonction entière qui vérifie $f(\Gamma) \subset O_K$ et $|f(z)| \leq \exp(C|z|^l)$ pour $|z|$ assez grand, ainsi que $\log |f(\gamma)| \leq CS^l$ pour $\gamma \in \Gamma(S)$, alors f est un polynôme.

THÉOREME 1.4. — *Soient $K \subset \mathbb{C}$ un corps de nombres et*

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\gamma_{2n}$$

le réseau de $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ engendré par les $2n$ vecteurs $\gamma_i \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ linéairement indépendants sur le corps des nombres réels. Il existe une constante effective $C > 0$, ne dépendant que de K et de Γ , telle que, si $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction entière qui envoie Γ dans O_K et vérifie, pour R suffisamment grand,

$$\log |f(z)| \leq CR^2 \quad \text{pour } |z| \leq R,$$

$$\log |\overline{f(\gamma)}| \leq CR^2 \quad \text{pour } \gamma \in \Gamma \quad \text{et } |\gamma| \leq R,$$

alors f est un polynôme.

La méthode de démonstration est une variante de la méthode de Schneider (cf. § 2 ci-dessous) : on montre que f est solution d'équations fonctionnelles de la forme $\sum_n P_n(z) f(z + n\gamma) \equiv 0$ où les P_n sont des polynômes, ce qui permet de voir que f a une croissance plus faible que celle imposée par les hypothèses (dans la plupart des cas) et alors de réutiliser la méthode de Schneider ou un théorème du genre du théorème 2.2. Dans certains cas particuliers, cette méthode fournit la meilleure valeur possible pour la constante C , par exemple dans le théorème 1.3, si $\Gamma = O_K$ et K est un corps quadratique imaginaire. Le théorème 1.4 ne traite que le cas où Γ est un réseau car c'est le seul où les lemmes de Schwarz sont suffisamment précis (cf. chap. 2). Voir aussi les théorèmes 2.2 à 2.5 ci-dessous.

Références : [Bu], [Gra 2], [Gra-Mi], [Mah 1].

2. Le théorème de Gel'fond-Schneider. — En 1934, indépendamment l'un de l'autre, Th. Schneider et A. O. Gel'fond montraient que la réponse au 7^e problème de Hilbert est positive.

THÉORÈME 2.1 (Gel'fond-Schneider). — *Soit α et β deux nombres algébriques. Si $\alpha \neq 0$, $\log \alpha \neq 0$ et β est irrationnel, alors α^β est transcendant.*

En particulier, $2^{2^{1/2}}$ et $e^\pi = (e^{-i\pi})^i$ sont transcendants. Voici une description schématique des deux démonstrations.

Méthode de Schneider.

Pas (0) : Supposer que le résultat à démontrer est faux : $\alpha^\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Pas (1) : Construire une fonction auxiliaire $F \neq 0$ ayant de nombreux zéros.

Les fonctions z et $f(z) = \alpha^z$ prennent des valeurs algébriques en tout point de $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\beta$. Par le lemme de Siegel (cf. chap. 1) on construit

$$F(z) = \sum_{0 \leq m \leq M} \sum_{0 \leq n \leq N} a(m, n) z^m \alpha^{nz}$$

avec des $a(m, n) \in \mathbb{Z}$ non tous nuls, telle que F soit nulle en tout point de $\Gamma(S)$ (défini au théorème 1.3 ci-dessus).

Pas (2) : Choisir $z_0 \in \Gamma$ tel que le nombre algébrique $\gamma = F(z_0)$ soit non nul.

Les fonctions z et $f(z)$ sont algébriquement indépendantes donc $F \neq 0$, de plus F est de type exponentiel donc ne peut être identiquement nulle sur Γ .

Pas (3) : Majorer $|\gamma|$.

On utilise pour cela un lemme de Schwarz (cf. chap. 2) tenant compte des nombreux zéros de F .

Pas (4) : Minorer $|\gamma|$.

Cette minoration est donnée par une inégalité du type Liouville (cf. chap. 1).

Pas (5) : Conclure à la contradiction.

Les estimations des *Pas (3)* et *Pas (4)* sont contradictoires pour des choix convenables des paramètres M , N et S .

Méthode de Gel'fond.

Dans le schéma précédent, il suffit de modifier les *Pas (1)* et *Pas (2)*.

Pas (1)' : Construire une fonction auxiliaire $F \neq 0$ ayant de nombreux zéros.

Les fonctions e^z et $e^{\beta z}$ prennent des valeurs algébriques en tous les points de $\Gamma = \mathbb{Z} \log \alpha$, et elles vérifient des équations différentielles à coefficients dans $\mathbb{Q}(\beta) \subset \overline{\mathbb{Q}}$:

$$(e^z)' = e^z \quad \text{et} \quad (e^{\beta z})' = \beta(e^{\beta z}),$$

NOMBRES TRANSCENDANTS

donc leurs dérivées successives prennent des valeurs algébriques en tout point de Γ . Par le lemme de Siegel (cf. chap. 1) on peut donc construire

$$F(z) = \sum_{0 \leq m \leq M} \sum_{0 \leq n \leq N} a(m, n) e^{mz} e^{n\beta z}$$

avec des $a(m, n) \in \mathbb{Z}$ non tous nuls, telle que F et ses Q premières dérivées s'annulent en tout point de $\Gamma(S)$.

Pas (2)' : Choisir $z_0 \in \Gamma$ et k tels que $F^{(k)}(z_0) = \gamma \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $\gamma \neq 0$.

Là encore $F \not\equiv 0$ car les fonctions e^z et $e^{\beta z}$ sont algébriquement indépendantes, donc un tel (z_0, k) existe.

Pour conclure au *Pas (5)* on joue sur les paramètres M, N, S et Q .

La méthode de Schneider se généralise de manière à donner le théorème suivant ainsi que des énoncés analogues dans le cas de fonctions méromorphes d'une ou plusieurs variables (cf. [Wa 3], chap. 8).

THÉORÈME 2.2 (Waldschmidt). — Soient f_1, \dots, f_d des fonctions entières sur \mathbb{C} algébriquement indépendantes sur \mathbb{Q} , et Γ un sous-groupe de \mathbb{C} , de rang l sur \mathbb{Z} . On suppose que les fonctions f_j sont d'ordre arithmétique $\leq \rho_j$ sur Γ , alors $l \leq (\rho_1 + \dots + \rho_d)/(d-1)$.

On dit qu'une fonction f est d'ordre arithmétique $\leq \rho$ sur Γ si

- (1) f est une fonction entière d'ordre $\leq \rho$.
- (2) Il existe un corps de nombres K , tel que $f(\Gamma) \subset K$.
- (3) Il existe une constante C , telle que pour tout entier $S \geq 0$ et tout γ appartenant à $\Gamma(S)$, la hauteur $H_K(f(\gamma))$ du nombre algébrique $f(\gamma)$ est majorée par $\exp(CS^\rho)$. (Voir le § 5.3 pour la notion de hauteur.)

Le théorème 2.2 contient le théorème 2.1 et on en déduit aussi que si x_1 et x_2 (resp. y_1, y_2, y_3) sont des nombres complexes linéairement indépendants sur le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels, alors l'un au moins des 6 nombres $\exp(x_i y_j)$ est transcendant (théorème des 6 exponentielles).

PROBLÈME (des 4 exponentielles). — Soient x_1 et x_2 (resp. y_1 et y_2) deux nombres complexes linéairement indépendants sur le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels, parmi les quatre nombres $\exp(x_i y_j)$ y a-t-il (au moins) un nombre transcendant ?

De même, la généralisation de la méthode de Gel'fond conduit au

THÉORÈME 2.3 (critère de Schneider-Lang). — Soient K un corps de nombres, et f_1, \dots, f_d des fonctions méromorphes sur \mathbb{C} . On suppose f_1 et f_2 algébriquement indépendantes sur \mathbb{Q} et d'ordre au plus ρ_1, ρ_2 (respectivement). On suppose de plus que la dérivation d/dz laisse stable l'algèbre $K[f_1, \dots, f_d]$. Alors, l'ensemble des $w \in \mathbb{C}$, qui ne sont pas pôles

des f_j , et qui sont tels que $f_j(w) \in K$ pour $1 \leq j \leq d$, est fini, de cardinal au plus $(\rho_1 + \rho_2)[K : \mathbb{Q}]$.

Ici encore, le théorème 2.1 est un corollaire du théorème 2.3. L'analogue pour les fonctions de plusieurs variables, conjecturé par Nagata (cf. [La 1]), a été obtenu par E. Bombieri ([Bo 1]), grâce à un lemme de Schwarz en plusieurs variables (chapitre 2) :

THÉORÈME 2.4. — Soient K un corps de nombres et f_1, \dots, f_d des fonctions méromorphes dans \mathbb{C}^n , avec $d \geq n + 1$. On suppose que f_1, \dots, f_{n+1} sont algébriquement indépendantes sur \mathbb{Q} et d'ordre au plus $\rho_1, \dots, \rho_{n+1}$ (respectivement). On suppose de plus que les dérivations $\partial/\partial z_i$ ($1 \leq i \leq n$) laissent stable l'algèbre $K[f_1, \dots, f_d]$. Alors, l'ensemble des $w \in \mathbb{C}^n$ où f_1, \dots, f_d sont définies et ont leurs valeurs dans K , est contenu dans une hypersurface algébrique de degré au plus $n(\rho_1 + \dots + \rho_{n+1})[K : \mathbb{Q}]$.

Un autre aménagement de la méthode de Gel'fond a permis à G. Choodnovsky de montrer le

THÉORÈME 2.5. — Soient f une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , d'ordre $\leq \rho$ et transcendante. L'ensemble des points algébriques, en lesquels f et toutes ses dérivées sont définies et ont pour valeurs des entiers rationnels, est fini, de cardinal au plus ρ .

Les généralisations au cas des fonctions de plusieurs variables ont des énoncés plus compliqués.

Références : [Bak 3], [Be-Wa], [Ch 4], [La 1], [Wa 1].

3. Fonctions elliptiques - Variétés abéliennes. — Soit $\wp(z)$ une fonction elliptique de Weierstrass, solution de l'équation différentielle

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

avec g_2 et $g_3 \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $g_2^3 \neq 27g_3^2$. Une telle fonction est méromorphe sur \mathbb{C} et admet le réseau de périodes $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 = \Lambda$.

Dès 1932, C. L. Siegel montra par des méthodes d'interpolation la transcendance de l'une des périodes ω_i . En 1937, Th. Schneider, adaptant la solution par Gel'fond du septième problème de Hilbert, obtint des résultats de transcendance généraux pour des nombres liés aux fonctions \wp (intégrales elliptiques de première et deuxième espèce). Par exemple il démontre l'analogue elliptique du théorème de Hermite-Lindemann : si α est un nombre algébrique non nul, alors α n'est pas pôle de \wp , et $\wp(\alpha)$ est transcendant (en particulier les périodes non nulles de \wp sont des nombres transcendents). Il démontre aussi l'analogue elliptique du théorème de Gel'fond-Schneider, d'où il déduit le corollaire suivant : si $\tau = \omega_2/\omega_1$ n'est pas quadratique, (c'est-à-dire s'il n'y

NOMBRES TRANSCENDANTS

a pas multiplication complexe), alors l'invariant modulaire

$$j = 1728g_2^3/(g_2^3 - 27g_3^2),$$

étant algébrique, τ est transcendant.

En 1940, Schneider étend cette étude aux variétés abéliennes. Il obtient ainsi la transcendance de $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ quand a et b sont rationnels avec a, b et $a+b$ non entiers.

Enfin dans les années 1960, S. Lang, sur une suggestion de Cartier, montre que le cadre approprié pour ces résultats est celui des groupes algébriques. L'énoncé suivant contient une proportion importante des résultats connus sur les valeurs des fonctions exponentielles, elliptiques, abéliennes et logarithmes.

THÉOREME 3.1. — *Soient G un groupe algébrique commutatif défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, T_G son espace tangent à l'origine, $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow G(\mathbb{C})$ un homomorphisme analytique dont la différentielle à l'origine $\mathbb{C}^n \rightarrow T_G(\mathbb{C})$ est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et Γ un sous-groupe de \mathbb{C}^n contenant n éléments \mathbb{C} -linéairement indépendants, tels que $\phi(\Gamma) \subset G(\overline{\mathbb{Q}})$. Alors $\phi(\mathbb{C}^n)$ est contenu dans un sous-groupe algébrique de G de dimension $\leq n$.*

4. Indépendance linéaire. — Conjecturé par Gel'fond, l'énoncé suivant a été démontré par Baker en 1966.

THÉOREME 4.1. — *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres algébriques non nuls. Pour $i \leq j \leq n$, soit $\log \alpha_j$ une détermination du logarithme de α_j . On suppose $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$ linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors les nombres $1, \log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

La méthode de Baker a été étendue aux fonctions elliptiques, puis aux fonctions abéliennes. Il faut citer en particulier les résultats de Masser sur les périodes d'intégrales elliptiques de première et deuxième espèce, de Laurent sur celles de troisième espèce, et aussi l'analogue elliptique du théorème de Baker, qui a été démontré d'abord dans le cas de multiplication complexe par Masser (utilisant la méthode de Baker), et plus tard dans le cas où il n'y a pas multiplication complexe par Bertrand et Masser (utilisant de manière inattendue le théorème 3.1).

L'énoncé suivant contient maintenant tous les résultats de transcendance et d'indépendance linéaire que l'on obtient ou que l'on espère obtenir par la méthode de Baker.

4.2. — *Soient G un groupe algébrique commutatif défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, v_1, \dots, v_r des éléments de $T_G(\mathbb{C})$ tels que $\exp_G v_j \in G(\overline{\mathbb{Q}})$, ($1 \leq j \leq r$),*

$$V = Cv_1 + \dots + Cv_r$$

le sous- C -espace vectoriel de $T_G(C)$ qu'ils engendrent, et enfin n la dimension du plus petit sous-espace vectoriel de $T_G(C)$, défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, contenant V . Alors $\exp_G V$ est contenu dans un sous-groupe algébrique de G de dimension au plus égale à n .

On retrouve évidemment le théorème 3.1 en choisissant $r = n$ dans (4.2). Dans cette direction, G. Wüstholz a annoncé le résultat suivant [Wü 3].

THÉORÈME 4.3. — Soient G un groupe algébrique commutatif de dimension d , défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et ϕ un homomorphisme analytique injectif de \mathbb{C}^{d-1} dans $G(\mathbb{C})$ dont la différentielle à l'origine est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors, si $\phi^{-1}(G(\overline{\mathbb{Q}}))$ n'est pas réduit à 0, il existe un sous-groupe algébrique H de G , de dimension strictement comprise entre 0 et d , tel que $H(\mathbb{C})$ soit contenu dans $\phi(\mathbb{C}^{d-1})$.

Un des aspects essentiels des méthodes qui sont en jeu est la possibilité d'obtenir des minoration explicites. Ainsi Gel'fond, après avoir donné des minoration d'expressions de la forme $|\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2|$, avait mis en évidence l'importance qu'aurait une généralisation de son résultat à des expressions $|\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n|$, en particulier pour le problème du nombre de classes de corps quadratiques imaginaires, pour la résolution d'équations diophantiennes, et pour donner des améliorations effectives de l'inégalité de Liouville.

La première minoration générale a été donnée par Baker en 1966, et raffinée ensuite par différents auteurs, notamment Baker, Stark, Feldman et Ramachandra, puis Shorey, van der Poorten, Waldschmidt... Voici un exemple d'une telle inégalité.

Soient a_1, \dots, a_n des entiers rationnels positifs, b_1, \dots, b_n des entiers rationnels. On note $A_j = \max(a_j, 3)$, ($1 \leq j \leq n$), $A = \max_{1 \leq j \leq n} A_j$, $B = \max(2, \max_{1 \leq j \leq n} |b_j|)$. Si le nombre $a_1^{b_1} \dots a_n^{b_n}$ est différent de 1, alors

$$|a_1^{b_1} \dots a_n^{b_n} - 1| \geq \exp\{-2^{10n+53} n^{2n} (\log A_1) \dots (\log A_n) (\log \log A) (\log B)\}.$$

La conjecture la plus optimiste dans cette direction est la suivante :

$$|a_1^{b_1} \dots a_n^{b_n} - 1| > \frac{C(\epsilon)B}{(B_1 \dots B_n A_1 \dots A_n)^{1+\epsilon}}.$$

Références : [La 2], [Bak 3], [Ba-Ma], [Mas 1], [Wa 1], [Wa 2], [Be-Ma], [Mas 2], [Be-Lau], [Lau 2], [Lau 3], [Sho].

5. Indépendance algébrique. — Le premier résultat d'indépendance algébrique connu est le théorème de Lindemann-Weierstrass (cf. partie A ci-dessus). En 1949, Gel'fond prouva l'indépendance algébrique de $2^{2^{1/3}}$ et $2^{4^{1/3}}$ et plus généralement le cas particulier $d = 3$ de la

NOMBRES TRANSCENDANTS

CONJECTURE DE GEL'FOND. — Si β est un nombre algébrique de degré $d = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] \geq 2$ et si α est algébrique, différent de 0 et de 1, alors

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2}, \dots, \alpha^{\beta^{d-1}}) = d - 1.$$

Cet énoncé est équivalent au suivant :

Soit α un nombre algébrique différent de 0 et 1 et soient $1, \beta_1, \dots, \beta_n$ des nombres algébriques linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , alors les α^{β_i} sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} .

Plus généralement, on a la

CONJECTURE DE SCHANUEL. — Si x_1, \dots, x_n sont des nombres complexes linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , alors

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n, e^{x_1}, \dots, e^{x_n}) \geq n.$$

Cette conjecture contient la plupart des résultats de transcendance connus sur les valeurs de la fonction exponentielle et aussi la plupart des conjectures (cf. par exemple le problème des 4 exponentielles au § 2). Les meilleurs résultats dans ce sens sont dus à Choodnovsky ([Ch 2]).

THÉORÈME 5.1. — Pour α algébrique, avec $\alpha \neq 0$ et $\log \alpha \neq 0$, et β algébrique, avec $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = d \geq 2$ on a

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2}, \dots, \alpha^{\beta^{d-1}}) \geq \left\lfloor \frac{\log(d+1)}{\log 2} \right\rfloor.$$

Sur ce sujet on pourra consulter [Ne 2]. Assez paradoxalement, on connaît de meilleurs résultats dans le cas des fonctions elliptiques.

THÉORÈME 5.2 (P. Philippon 1982). — Soient \wp une fonction elliptique d'invariants g_2 et g_3 algébriques et k le corps de multiplication de \wp . Si β est un nombre algébrique avec $[k(\beta) : k] = d \geq 2$, et si u est un nombre complexe tel que $u, \beta u, \dots, \beta^{d-1}u$ ne sont pas pôles de \wp , alors

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\wp(u), \wp(\beta u), \dots, \wp(\beta^{d-1}u)) \geq \frac{d}{4 - [k : \mathbb{Q}]} - 1.$$

P. Philippon et G. Wüstholz ont aussi prouvé, indépendamment, l'analogue elliptique du théorème de Lindemann-Weierstrass dans le cas de multiplication complexe :

THÉORÈME 5.3. — *Sous les hypothèses du théorème 5.2, si $k \neq \mathbb{Q}$ et si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des nombres algébriques linéairement indépendants sur k , alors $p(\alpha_1), \dots, p(\alpha_n)$ sont algébriquement indépendants.*

Les démonstrations reposent sur des généralisations du critère de transcendance de Gel'fond (voir [Wa 1] chap. 5) et des lemmes de zéros (cf. chap. 3). Le lecteur trouvera d'autres résultats d'indépendance algébrique, mais pour des fonctions peut-être moins naturelles, dans les § 6 et 8 ci-dessous. Il faut aussi mentionner l'indépendance algébrique de π et de $\Gamma(1/4)$ (seul moyen actuel de prouver la transcendance de $\Gamma(1/4)$) et, plus généralement, de π/ω et η/ω montrées par G. V. Choodnovsky dans les années 70. Enfin, il est irritant de devoir avouer qu'on ne sait toujours rien de l'indépendance algébrique de e et π et de π et e^π . On ne sait même pas si $e + \pi$ est irrationnel !

Références : [Ch 1], [Ch 2], [Ch 3], [Bak 3], [Phi 1], [Phi 2], [Wa 1].

6. Les E -fonctions de Siegel. — Dans son célèbre article [Si 1] de 1929, C. L. Siegel donnait une méthode générale pour établir des résultats d'indépendance algébrique. Cette méthode s'appliquait aux fonctions entières qu'il baptisa E -fonctions, en particulier la fonction exponentielle, la fonction de Bessel normalisée

$$K_\lambda(x) = \Gamma(\lambda + 1)(x/2)^{-\lambda} J_\lambda(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! (\lambda + 1) \dots (\lambda + n)}$$

pour $-\lambda \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, et certaines autres fonctions hypergéométriques.

Ces résultats furent généralisés en 1954 par A. B. Shidlovsky.

DÉFINITION. — Une série entière $f(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n/n!)z^n$ est dite E -fonction relative au corps de nombres K si

- (i) $a_n \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) pour tout $\epsilon > 0$, $|a_n| = O(n^{\epsilon n})$ pour $n \rightarrow +\infty$,
- (iii) si $d_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est le plus petit dénominateur commun aux a_i ($0 \leq i \leq n$), de sorte que $d_n a_i$ est un entier de K pour $0 \leq i \leq n$, alors pour tout $\epsilon > 0$, on a $d_n = O(n^{\epsilon n})$ pour $n \rightarrow +\infty$.

THÉORÈME 6.1 (Shidlovsky). — *Soient E_1, \dots, E_n des E -fonctions relatives au corps de nombres K , solutions du système différentiel*

$$y'_i = r_{i,0} + \sum_{1 \leq j \leq n} r_{i,j} y_j \quad (1 \leq i \leq n),$$

où les $r_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n$) sont des fractions rationnelles de $C(x)$ (ou, de manière équivalente, de $K(x)$). Si E_1, \dots, E_n sont algébriquement indépendantes sur $C(x)$ et si α est un nombre algébrique non nul et non pôle des $r_{i,j}$, alors $E_1(\alpha), \dots, E_n(\alpha)$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} .

On obtient évidemment comme corollaire le théorème de Lindemann-Weierstrass (cf. partie A ci-dessus), et de nombreux autres résultats d'indépendance algébrique ; entre autres :

Pour $-\lambda \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ tel que $2\lambda + 1 \notin \mathbb{Z}$ et α algébrique non nul, les nombres $\Gamma(\lambda + 1)J_\lambda(\alpha)$ et $\Gamma(\lambda + 1)J'_\lambda(\alpha)$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} .

Pour α algébrique non nul, les nombres e^α et $\sum_{n \geq 1} (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) \frac{\alpha^n}{n!}$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} .

Pour α algébrique non nul et $\beta > -1$ rationnel non entier, et pour tout entier N les nombres $I_n = \int_0^1 x^\beta (\log x)^n e^{-\alpha x} dx$ ($n = 0, 1, \dots, N$) sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} .

La méthode de Shidlovsky utilise en particulier de l'algèbre linéaire effective sur le corps de base $K(x)$ (par exemple des estimations du rang de systèmes de formes linéaires sur l'espace des solutions du système différentiel du théorème 6.1) et, grâce aux travaux de Nesterenko [Ne 1], elle permet d'obtenir des mesures de transcendance ou d'indépendance algébrique (mais pas très bonnes en fonction du degré) :

THÉORÈME 6.2. — *Sous les hypothèses du théorème 6.1, soit $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ un polynôme non nul de hauteur H et de degré d . Alors*

$$|P(E_1(\alpha), \dots, E_n(\alpha))| \geq \exp \exp(-\tau d^n) H^{-bd^n}$$

où $\tau > 0$ ne dépend que des E_j , de n , du système différentiel et de $[K(\alpha) : \mathbb{Q}]$, alors que b ne dépend que de $[K(\alpha) : \mathbb{Q}]$ et de n .

Références : [Mah 1], [La 1], [Bak 3], [Ne 1], [Shi], [V], [Si 1].

7. Les G -fonctions. — Elles aussi ont été baptisées par Siegel dans son article de 1929, et si elles sont "moins particulières" que les E -fonctions, elles n'ont pas un comportement aussi agréable : on n'obtient pas de résultat sur la transcendance de leurs valeurs mais seulement leur irrationalité ou des minorations d'expressions polynômiales en leurs valeurs lorsque les polynômes considérés ont des degrés et hauteurs pas trop grands.

DÉFINITION. — Soient K un corps de nombres, $C > 0$, $Q \geq 1$ et $\Lambda \geq 1$. On dit que la famille de fonctions

$$g_i(z) = \sum_{n \geq 0} a_{in} z^n \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

appartient à la classe $G(K, C, Q, \Lambda)$ si pour tous $C_1 > C$ et $Q_1 > Q$ il existe $\gamma_1 = \gamma_1(g_1, \dots, g_m, C_1)$ et $\gamma_2 = \gamma_2(g_1, \dots, g_m, Q_1)$ tels que

- (i) $a_{in} \in K$ et $|a_{in}| \leq \gamma_1 C_1^n$ pour tout i et tout n
- (ii) il existe des $q_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $q_n a_{ij} \in O_K$ pour $0 \leq j \leq n$, avec $q_n \leq \gamma_2 Q_1^n$
- (iii) (g_1, \dots, g_m) est solution du système différentiel

$$y'_i = r_{i,0} + \sum_{1 \leq j \leq m} r_{i,j} y_j \quad (1 \leq i \leq m) \quad (1)$$

où les $r_{i,j}$ sont dans $K(z)$. (Par récurrence on en déduit que

$$g_i^{(k)} = r_{k,i,0} + \sum_{1 \leq j \leq m} r_{k,i,j} g_j$$

avec des $r_{k,i,j} \in K(z)$.)

(iv) il existe un polynôme non nul $T \in O_K[z]$ et des entiers non nuls a_n tels que

$$\frac{a_n}{k!} T^k r_{k,i,j} \in O_K[z] \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n$$

et que, pour tout $\Lambda_1 > \Lambda$ il existe $\gamma_3 = \gamma_3(g_1, \dots, g_m, \Lambda_1)$ avec $a_n \leq \gamma_3 \Lambda_1^n$.

Une fonction g est une G -fonction si c'est un élément d'une famille d'une des classes $G(K, C, Q, \Lambda)$.

Les fonctions algébriques régulières en 0, $g(x) = \log(1 + \alpha x)$ pour $\alpha \in K$, les polylogarithmes $L_k(z) = \sum_{n \geq 1} z^n / n^k$, certaines fonctions hypergéométriques sont des G -fonctions.

Les G -fonctions ne sont pas entières (leur rayon de convergence est majoré par $C^{d-1}Q^d$, où d désigne le degré de K sur \mathbb{Q}) et, contrairement aux E -fonctions, l'indépendance algébrique sur $\mathbb{C}(z)$ de G -fonctions n'entraîne pas l'indépendance algébrique sur \mathbb{Q} de leurs valeurs en tout point rationnel non nul.

Un exemple des résultats qu'on peut obtenir sur les G -fonctions est le suivant :

THÉORÈME 7.1. — Soient f_1, \dots, f_m des fonctions ne vérifiant aucune équation algébrique de degré $\leq N$ et telles que $(f_1, \dots, f_m) \in G(K, C, Q, \Lambda)$. Il existe des nombres n_2 et n_3 (dépendant de N, K, C, Q, Λ), tels que, si q est un entier suffisamment grand (en fonction de N, K, C, Q, Λ) tel que $T(1/q) \neq 0$, alors pour tout $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$, non nul, de degré $\leq N$ et de hauteur $\leq H$, on a

$$|P(f_1(1/q), \dots, f_m(1/q))| \geq q^{-n_2} H^{-n_3}.$$

On peut ainsi obtenir, par exemple, l'irrationalité de $\log(1+1/q) \log(1-1/q)$ pour q entier supérieur à 10^{350} .

L'étude des G -fonctions connaît actuellement, de concert avec celle des approximants de Padé, un regain d'activité en raison de la preuve par R. Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$ et des travaux conséquents de F. Beukers (notamment). On pourra voir à ce sujet l'important article [Bo 2] de E. Bombieri.

Références : [Beu], [Si 1], [Bo 2], [Re 2].

8. La méthode de Mahler. — Elle concerne des fonctions qui vérifient des équations fonctionnelles du type

$$(1) \quad f(z) = a(z)f(z^\rho) + b(z)$$

avec ρ entier ≥ 2 , $a(z)$ et $b(z) \in \mathbb{C}(z)$; par exemple la série de Fredholm $f(z) = \sum_{n \geq 0} z^{\rho^n}$ ou $f(z) = \prod_{n \geq 0} (1 - z^{\rho^n})$. Une telle fonction, si elle est analytique à l'origine est rationnelle ou transcendante.

En 1929, K. Mahler montra que, si f est une solution transcendante de (1), analytique en 0 avec des coefficients de Taylor algébriques, et si α est algébrique, alors $f(\alpha)$ est transcendant, pourvu que $0 < |\alpha| < 1$, que f soit définie en α et que, pour tout entier naturel k , le point α^{ρ^k} ne soit ni pôle de $b(z)$, ni zéro de $a(z)$.

Pour la démonstration, on construit une fonction auxiliaire de la forme $F(z) = \sum a(m, n)z^m f(z)^n$ ayant un zéro d'ordre élevé à l'origine. Puis l'équation fonctionnelle permet d'étudier les $F(z^{\rho^k})$ qui remplacent les dérivées de F de la méthode de Gel'fond (cf. § 2 ci-dessus). Des raffinements permettent d'obtenir de bonnes mesures de transcendance.

La méthode se généralise pour fournir des résultats d'indépendance algébrique, y compris pour des fonctions de plusieurs variables. Par exemple, si u_n est la suite de Fibonacci et si $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont des nombres algébriques vérifiant $0 < |\alpha_j| < 1$ ($1 \leq j \leq m$) et tels que les $|\alpha_j|$ soient multiplicativement indépendants, alors les nombres $\sigma_{k,j} = \sum_{n \geq 0} u_n^k \alpha_j^{u_n}$ ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq m$) sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} .

Les résultats les plus récents sont dus à J.H. Loxton et A.J. van der Poorten [Lo-Po 1] :

THÉORÈME 8.1. — Soient $T = (t_{ij})$ une matrice $n \times n$ à coefficients entiers naturels, et $A(z)$ une matrice $m \times m$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z_1, \dots, z_n)$

telle que $A(0)$ soit définie et inversible. Pour $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on note

$$Tz = ((Tz)_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n \quad \text{avec} \quad (Tz)_i = \prod_{1 \leq j \leq n} z_j^{t_{ij}}.$$

On suppose que T est non singulière et n'a pas de racine de l'unité comme valeur propre. Si $f(z)$ est un vecteur colonne formé de fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ analytiques à l'origine de \mathbb{C}^n , à coefficients de Taylor algébriques et vérifiant $f(z) = A(z)f(Tz)$, alors

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = \deg \operatorname{tr}_{\mathbb{C}(z)} \mathbb{C}(z)(f_1(z), \dots, f_m(z))$$

où $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^n$, sous des hypothèses techniques sur Γ , A et α , en particulier des conditions d'indépendance multiplicative des $T^k \alpha$.

La preuve utilise un lemme de zéros très récent (cf. chap. 3) dû à D. Masser [Mas 5], et on en déduit facilement un énoncé d'indépendance algébrique pour les valeurs des f_j en divers points $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}^n$. Par exemple, si $S(k)$ désigne l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture en base b utilise au plus k fois le chiffre a et si $f_k(z) = \sum_{n \in S(k)} z^n$, et si les nombres algébriques $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ multiplicativement indépendants sont assez petits, alors les nombres $f_k(\alpha_j)$ ($0 \leq k \leq m$, $1 \leq j \leq s$) sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} . Cette méthode permet aussi d'étudier les fonctions génératrices de suites engendrées par des automates finis.

Références : [Lo-Po 1], [Lo-Po 2], [Ku], [Mas 5].

9. Mesures de transcendance. — Pour ne pas alourdir ce bref chapitre de résultats nous n'avons pas (ou presque pas) donné de mesures de transcendance ou d'irrationalité, c'est-à-dire de minoration de la forme suivante : un nombre transcendant θ étant donné, on a $|\theta - \alpha| > f(d, H)$ pour tout nombre algébrique α de degré $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \leq d$ et de hauteur $\leq H$, avec f fonction positive.

On peut cependant en obtenir par presque tous les procédés évoqués ci-dessus, et de tels résultats sont utiles, par exemple dans certaines preuves d'indépendance algébrique. Mais il serait déraisonnable de passer sous silence les résultats concernant π et e^π :

THÉORÈME 9.1 ([Mi 1]). — Soit p/q un nombre rationnel positif, alors

$$|\pi - p/q| > 1/q^{20,6} \quad \text{si} \quad q \geq 2,$$

$$|\pi - p/q| > 1/q^{20} \quad \text{si} \quad q \geq \exp(\exp 110).$$

NOMBRES TRANSCENDANTS

THÉORÈME 9.2 ([Bak 3]). — Soit p/q un nombre rationnel positif, alors

$$|e^\pi - p/q| > q^{-2^{60} \log q \log q} \text{ pour } q \geq 4.$$

Ce dernier résultat est conséquence des minoration de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques par A. Baker (cf. § 4 ci-dessus).

Le problème de savoir si e^π est un nombre de Liouville ou s'il existe une constante C telle que $|e^\pi - p/q| \geq q^{-C}$ est toujours ouvert. De même, on ne sait si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C(\epsilon) > 0$ tel que $|\pi - p/q| \geq C(\epsilon)q^{-(2+\epsilon)}$.

Références : [Bak 3], [Ci], [Du], [Mi 1], [Re 1], [Wa 6].

CHAPITRE 5

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES NOMBRES TRANSCENDANTS

1. Equations diophantiennes.

On sait, depuis Lagrange, que les solutions de l'équation de Pell-Fermat $X^2 - AY^2 = \pm 1$ (où A est un entier positif sans facteur carré) s'obtiennent à partir des réduites du développement en fraction continue de \sqrt{A} . Mais ce n'est qu'au début de notre siècle (à partir des travaux de Thue, vers 1909) qu'ont été mis en évidence, de façon générale, les liens entre les approximations diophantiennes et la recherche des points entiers sur les courbes algébriques. Ce sujet est actuellement dominé par l'important théorème de finitude suivant, dû à C. L. Siegel (1929) [Si 1], et dont voici une version raffinée par Mahler, S. Lang...

THÉOREME. — Soient K un corps de type fini sur \mathbb{Q} , et R un sous-anneau de K , de type fini sur \mathbb{Z} . Soient C une courbe projective lisse, définie sur K , et ϕ une fonction rationnelle sur C . On suppose que C est de genre non nul, ou bien que ϕ possède au moins trois pôles distincts. Alors les points de C , à coordonnées dans K , et dont l'image par ϕ appartient à R , sont en nombre fini.

Par exemple, si f est un polynôme irréductible de $\mathbb{Z}[X, Y]$ tel que la courbe plane $f(X, Y) = 0$ soit de genre non nul, il n'existe qu'un nombre fini de couples (x, y) d'entiers rationnels tels que $f(x, y) = 0$. Citons aussi une application d'un type différent : soit P un polynôme en une variable, à coefficients entiers, possédant au moins deux zéros distincts (dans \mathbb{C}), alors le plus grand facteur premier de $|P(n)|$ tend vers l'infini avec l'entier n . Pour ce genre de résultats, on se pose immédiatement des questions d'effectivité : peut-on donner un majorant de la hauteur $\max\{|x|, |y|\}$ des points entiers de la courbe (explicitement calculable en fonction des coefficients de f), ou bien peut-on minorer effectivement le plus grand facteur premier de $P(n)$ (en fonction de $|n|$ et des coefficients de P) ?

En fait, A. Robinson et P. Roquette [Ro-Ro] ont montré que la preuve de Siegel ne comportait qu'un seul point ineffectif : l'utilisation d'un résultat d'approximation d'un nombre algébrique α par les éléments d'un corps de nombres donné (le théorème de Thue-Siegel-Roth), pour lequel on sait majorer

le nombre des "très" bonnes approximations de α , mais non leur hauteur. Quelques travaux de Baker, et tout récemment de Bombieri (cf. [Bo 3]) permettent — peut-être — d'espérer une effectivisation future de ce théorème.

Utilisant une autre voie, la théorie des formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques (voir le chapitre 4, § 4) a permis d'apporter certaines réponses à ces problèmes d'effectivité (voir [Gy]). Avant d'examiner quelques résultats généraux ainsi obtenus, décrivons un cas particulier de l'équation de Thue, qui peut être abordé simplement par plusieurs méthodes d'approximation diophantienne.

Considérons l'équation

$$X^3 + 2Y^3 = 1,$$

où X et Y sont des inconnues entières. On sait en fait que les seules solutions sont $(1, 0)$ et $(-1, 1)$ (cf. [Bo-Cha], ex. 5, p. 336). Nous allons majorer $\max\{|X|, |Y|\} = |X|$ de diverses manières. La méthode utilisée par Siegel consiste, dans ce cas, à remarquer simplement que, pour $|X|$ grand, le point (X, Y) est très proche de l'asymptote d'équation $X + \sqrt[3]{2}Y = 0$. De façon plus précise, on vérifie l'inégalité $|X + \sqrt[3]{2}Y| \leq (4/3)|X|^{-2}$. En utilisant des approximations de Padé de fonctions hypergéométriques — voir le chapitre 1 — Thue et Baker (cf. [Bo-Mü]) ont pu montrer que l'on a aussi la minoration $|X + \sqrt[3]{2}Y| \geq 10^{-6}|Y|^{-1,955}$ pour $Y \neq 0$. On en déduit aisément la majoration $|X| \leq 8.10^{140}$. (Ensuite, grâce à un ordinateur, en développant $\sqrt[3]{2}$ en fraction continue jusqu'à une précision de l'ordre de 10^{-282} , on peut effectivement déterminer toutes les solutions de l'équation.)

A la place de la minoration précédente de $|X + \sqrt[3]{2}Y|$, on peut utiliser une forme linéaire de la façon suivante : l'équation $X^3 + 2Y^3 = 1$ exprime que le nombre $X + \sqrt[3]{2}Y$ est une unité du corps cubique $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Ce corps possède une seule unité fondamentale, $1 - \sqrt[3]{2}$, il existe donc un entier n (nécessairement ≥ 0 puisque $|X + \sqrt[3]{2}Y| \leq 1$) tel que

$$X + \sqrt[3]{2}Y = \pm(1 - \sqrt[3]{2})^n.$$

Par conjugaison, on en déduit les égalités

$$X + j\sqrt[3]{2}Y = \pm(1 - j\sqrt[3]{2})^n$$

$$X + j^2\sqrt[3]{2}Y = \pm(1 - j^2\sqrt[3]{2})^n,$$

où $j = e^{2i\pi/3}$. En éliminant X et Y entre ces trois équations, on obtient l'égalité

$$(1 - \sqrt[3]{2})^n + j(1 - j\sqrt[3]{2})^n + j^2(1 - j^2\sqrt[3]{2})^n = 0,$$

NOMBRES TRANSCENDANTS

qu'il est préférable d'écrire sous la forme

$$-j\left(\frac{1-j^2\sqrt[3]{2}}{1-j\sqrt[3]{2}}\right)^n = 1 + j^2\left(\frac{1-\sqrt[3]{2}}{1-j\sqrt[3]{2}}\right)^n.$$

Le deuxième terme du membre de droite a une valeur absolue majorée par $(0,14)^n$, et tend donc très vite vers 0. Par passage au logarithme, on en déduit qu'il existe un entier k , du même ordre de grandeur que n , tel que la "forme linéaire"

$$\Lambda = n \log \frac{1-j^2\sqrt[3]{2}}{1-j\sqrt[3]{2}} - \frac{6k+1}{6} 2\pi i$$

ait une valeur absolue essentiellement majorée par $(0,14)^n$. Dans ce cas, la minoration de $|\Lambda|$ fournie par la théorie de Baker est

$$|\Lambda| \geq (10n)^{-10^{100}}.$$

On en déduit la majoration $n \leq 121 \times 10^{100}$ puis $|X| \leq 2^{4n/3}$, donc $|X| \leq \exp(112 \times 10^{100})$ (borne qui cette fois est trop colossale pour être utilisable, même quand on dispose d'un ordinateur très puissant et de crédits de calcul considérables).

Dans cette dernière méthode, nous avons réduit l'équation initiale à une équation "exponentielle" de la forme $au + bv = 1$ où les inconnues u et v sont des unités d'un corps de nombres fixe. Une telle réduction est possible pour une classe assez étendue de courbes planes (les courbes dites superelliptiques), qui contient notamment les courbes de genre 1. Par exemple, pour l'équation de Mordell, $y^2 = x^3 + k$ (k entier non nul), en entiers rationnels x et y , H.M. Stark (cf. [Sta 2]) a obtenu la majoration

$$\max\{|x|, |y|\} \leq \exp(C_\epsilon |k|^{1+\epsilon}),$$

où C_ϵ ($\epsilon > 0$ quelconque) est indépendant de k .

Citons aussi l'équation de Thue $f(x, y) = m$, où f désigne une forme binaire ayant au moins trois facteurs linéaires distincts et m un entier non nul. Pour cette équation, on obtient une majoration de la forme

$$\max\{|x|, |y|\} \leq (1 + |m|)^{C_f},$$

où C_f est une constante explicite en fonction du degré et des coefficients du polynôme f .

Enfin, en ce qui concerne la question du plus grand facteur premier de $P(n)$, évoquée au début de ce paragraphe on sait prouver directement, à partir

de minorants totalement explicites des formes linéaires de logarithmes, une minoration par une quantité de la forme $C(P) \log \log n$.

La théorie des formes linéaires de logarithmes a aussi permis d'aborder des problèmes inaccessibles par ailleurs. Citons, par exemple, la conjecture de Pillai généralisée : pour a, b, c entiers fixés non nuls, l'équation $ax^m - by^n = c$ ne possède qu'un nombre fini de solutions en entiers x, y, m et n vérifiant

$$|x| \geq 1, |y| \geq 1, m \geq 1, n \geq 1, (m, n) \neq (2, 2). \quad (*)$$

Lorsque $a = b = c = 1$, c'est une forme affaiblie de la célèbre conjecture de Catalan qui affirme que 8 et 9 sont les seules puissances parfaites successives. Dans ce cas particulier, Tijdeman a vérifié la conjecture de Pillai et il a même été possible d'obtenir la majoration (cf. [Lan])

$$y^n < x^m \leq \exp \exp \exp \exp 730.$$

Le problème général de Pillai reste ouvert. On peut néanmoins montrer, de façon effective, qu'il n'y a qu'un nombre fini de solutions x, y, m, n satisfaisant de plus l'une des trois propriétés suivantes

- (i) $m = n$,
- (ii) x ou y est fixé,
- (iii) m ou n est fixé.

Pour conclure ce bref tour d'horizon, signalons un rapport de Tijdeman (cf. [Ti 1]), où l'on trouvera une liste exhaustive des applications de la théorie de Baker aux équations diophantiennes, ainsi qu'une bibliographie détaillée du sujet (voir également [Sp 2]).

2. Le problème du nombre de classes.

Comme précédemment, il s'agit de rendre effectif un résultat de finitude, qui cette fois concerne le nombre de classes $h(d)$ d'un corps quadratique imaginaire de discriminant d . Siegel et Brauer ont montré que $\log h(d)$ est équivalent à $\log \sqrt{|d|}$ quand $|d|$ tend vers l'infini. Là encore, leur méthode fournit un majorant du nombre des discriminants d pour lesquels $h(d)$ est donné, mais non de $|d|$ lui-même. Par exemple, Heilbronn et Linfoot ont montré qu'il y a au plus dix corps quadratiques de nombre de classes un.

La théorie des formes linéaires de logarithmes a permis de déterminer tous les cas où $h(d) = 1$ ou 2, confirmant ainsi une conjecture bien connue de Gauss : les seuls corps quadratiques imaginaires ayant un nombre de classes égal à 1 sont les neuf corps de discriminants

$$d = -3, -4, -7, -8, -11, -19, -43, -67, -163.$$

NOMBRES TRANSCENDANTS

A. Baker et H. M. Stark ont pu exhiber les 18 corps quadratiques imaginaires de nombre de classes deux (cf. [Ba-St]). Leur démonstration, assez technique, repose sur des arguments de théorie analytique des nombres : une identité entre produits de fonctions L , jointe à la deuxième formule limite de Kronecker, fournit une forme linéaire en deux ou trois logarithmes, "petite" en fonction de $|d|$; une minoration de cette forme fournit une majoration de $|d|$.

Il est aussi possible de ramener l'équation $h(d) = 1$ à la recherche des points entiers de certaines courbes modulaires. C'est le point de vue adopté par Stark dans [Sta 1]. Une discussion détaillée de ces questions a été donnée par J.-P. Serre dans un cours au Collège de France (cf. [Se 3]).

3. Le problème de Lehmer.

Soient α un nombre algébrique non nul et $P(X) = a_0 \prod_{j=1}^D (X - \alpha_j)$ son polynôme minimal sur \mathbb{Z} . On appelle *mesure de Mahler* de α le produit

$$M(\alpha) = |a_0| \prod_{j=1}^D \max\{1, |\alpha_j|\}.$$

Kronecker a montré qu'on a $M(\alpha) > 1$, sauf si α est une racine de l'unité (auquel cas on a évidemment $M(\alpha) = 1$). On se pose alors la question naturelle (Lehmer, vers 1933) de savoir si l'ensemble des nombres $\{M(\alpha) ; \alpha \text{ non racine de l'unité}\}$ admet 1 comme borne inférieure. Une réponse négative à cette question, suggérée à la fois par les recherches numériques de D. Boyd et par les résultats ci-dessous, entraînerait par exemple que l'ensemble des nombres de Salem n'est pas dense dans l'intervalle $[1, +\infty[$, chose que l'on ignore actuellement. La plus petite valeur de $M(\alpha) > 1$ connue, $M(\alpha) = 1,1762808\dots$, est d'ailleurs obtenue pour un nombre de Salem de degré dix.

Les méthodes de transcendance, ou plus exactement une utilisation très astucieuse du lemme de (Thue-)Siegel ont permis de progresser dans cette direction et ont conduit à des minoration de la forme

$$M(\alpha) \geq 1 + \epsilon(D) \quad (\alpha \text{ non racine de l'unité})$$

où ϵ désigne une fonction > 0 , totalement explicite, du degré D de α .

Ainsi, faisant suite à toute une série de travaux (cf. [Mi 2] pour un historique du sujet), Dobrowolski [Do] a obtenu

$$\epsilon(D) = (1/1200)(\log \log D / \log D)^3.$$

La mesure $M(\alpha)$ peut aussi s'interpréter comme la hauteur de Weil $H_K(\alpha)$, relative au corps $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, sur le groupe multiplicatif G_m , plongé de la

façon usuelle dans P_1 . Ainsi posé, le problème de Lehmer admet un analogue immédiat, en remplaçant le groupe multiplicatif G_m par une variété abélienne A , la mesure de Mahler par une hauteur canonique normalisée H_K associée à un diviseur ample et symétrique dans $\text{Pic } A$, et en remplaçant α par un point P de $A(K)$ qui n'est pas un point de torsion. Par exemple, pour une courbe elliptique à multiplication complexe, M. Laurent a montré que l'analogue du résultat de Dobrowolski était encore vrai (cf. [Lau 4]). Dans le cas général, D. Masser a établi des minoration du type

$$H_K(P) \geq 1 + CD^{-\kappa}$$

pour tout réel $\kappa > 2 \dim A + 5 + 2(\dim A)^{-1}$, (cf. [Mas 6]).

4. Problèmes liés à la théorie de Kummer.

Les lemmes de zéros présentés au chapitre 3, § 1 donnent une réponse au problème suivant : étant donné un groupe algébrique commutatif G défini sur un corps k de caractéristique nulle, un sous-groupe de type fini Γ de $G(k)$ et une sous-variété X de G , trouver, si possible de façon effective, un point Q de Γ non situé sur X . Supposons maintenant que k soit un corps de nombres. La théorie de Kummer, convenablement généralisée, fournit alors parfois une solution à ce type de problème, le point Q étant cette fois recherché non pas dans Γ , mais dans l'ensemble $Q.\Gamma$ des points de division de Γ . En simplifiant à l'extrême (!), disons que l'idée consiste, dans le cas du groupe multiplicatif, à noter que si P désigne un polynôme à coefficients entiers de degré d , si ℓ est un nombre premier $> d$, et enfin si α un nombre rationnel qui n'est pas une puissance $\ell^{\text{ième}}$ d'un rationnel, alors le nombre $\alpha^{1/\ell}$ est de degré ℓ sur Q et ne peut être racine de P (la technique des lemmes de zéros reviendrait ici à considérer les $d+1$ premières puissances de α , dont l'une au moins n'est pas racine de P si $\alpha \neq \pm 1$).

Les méthodes de la théorie de Kummer, introduites par J. Coates [Co 1] dans ses travaux sur les intégrales elliptiques, ont joué un rôle fondamental pour les raffinements de la méthode de Baker nécessaires aux applications diophantiennes décrites au premier paragraphe du présent chapitre (voir [Bak 2]), et pour les généralisations de la théorie de Baker à l'étude de certaines intégrales abéliennes (voir, par exemple, [Mas 3]). Nous allons donner un énoncé typique de théorie de Kummer utilisé dans ce contexte. Mais, dans la direction opposée, les méthodes de transcendance ont également permis de faire progresser la théorie de Kummer, c'est ce que nous verrons dans la deuxième partie de ce paragraphe.

(a) Un énoncé de théorie de Kummer. — Soient G un groupe commutatif connexe, défini sur un corps de nombres k , et γ un point de $G(k)$. Pour

tout nombre entier ℓ , on désigne par G_ℓ le groupe des points de ℓ -torsion de G , par $k_\ell = k(G_\ell)$ l'extension galoisienne de k engendrée par ces points, et par $\frac{1}{\ell}\gamma$ un point de division d'ordre ℓ de γ . Le dernier point définit l'extension $k_\ell(\frac{1}{\ell}\gamma)$ de k_ℓ , il s'agit d'une extension galoisienne dont le groupe de Galois s'identifie à un sous-groupe de G_ℓ . Des techniques de cohomologie galoisienne permettent alors d'établir l'énoncé suivant, qui regroupe, outre ceux de la théorie de Kummer classique, des résultats dus à Bashmakov, Ribet et Tate (voir [Ri]).

THÉORÈME 4.1. — *On suppose que le groupe algébrique G est le produit d'une puissance du groupe multiplicatif par une puissance d'une courbe elliptique, et que le plus petit sous-groupe algébrique de G contenant γ est G lui-même. Alors, il existe un entier ℓ_0 , ne dépendant que de G , k et γ , tel que pour tout nombre premier $\ell > \ell_0$, le groupe $\text{Gal } k_\ell(\frac{1}{\ell}\gamma)/k_\ell$ soit isomorphe à G_ℓ .*

De plus, et c'est fondamental pour les applications, on peut majorer ℓ_0 par $C(\log H_k(\gamma))^\kappa$, où κ est effectif et C ne dépend que de G . Pour cela, on utilise la minoration de la hauteur des points d'ordre infini de $G(k)$ discutée au § 3 ; elle fournit une fonction explicite $\ell'_0(d, h)$ du degré de k sur \mathbb{Q} et de la hauteur de γ telle que, pour $\ell > \ell'_0$, le point γ ne soit pas un multiple $\ell^{\text{ième}}$ d'un point de $G(k)$ (voir, par exemple, [La 2]). Mais la démonstration du théorème 4.1 dépend également de l'étude du groupe $\text{Gal } k_\ell/k$. Ainsi, lorsque G contient une courbe elliptique E sans multiplication complexe, elle fait appel au théorème suivant, dû à Serre : il existe un entier ℓ''_0 , ne dépendant que de E et de k , tel que pour tout nombre premier $\ell > \ell''_0$, le groupe $\text{Gal } k(E_\ell)/k$ soit isomorphe à $GL_2(\mathbb{F}_\ell)$. Malheureusement, cet énoncé est en général non effectif (voir néanmoins [Se 4]). Dans le même ordre d'idées, l'analogue du théorème de Serre pour les variétés abéliennes de dimension > 1 n'est connu que dans des cas particuliers (voir [Ri]), et ceci constitue la principale obstruction à la généralisation du théorème 4.1 à un groupe algébrique G quelconque. En revanche, le cas où G est extension d'une variété abélienne "agréable" par une puissance du groupe multiplicatif a pu être traité par Ribet (voir [Ri]), ainsi que la bibliographie de cet article pour un historique des questions mentionnées ici ; voir également [J]).

(b) Méthodes de transcendance. — Soient A une variété abélienne de dimension g , définie sur un corps de nombres k , et A_ℓ son sous-groupe de torsion d'ordre ℓ , pour un nombre entier ℓ . En 1972, Lang proposait d'étudier — par les techniques de transcendance — le degré des extensions engendrées sur k par les éléments de A_ℓ . Pour tout entier $\ell > 0$, les fonctions f rationnelles sur A engendrent en effet des extensions de degré ℓ^{2g} du corps des fonctions rationnelles de la forme $f \circ \ell$, et — de même que la théorie des nombres

transcendants cherche à montrer que les valeurs d'une famille de fonctions algébriquement indépendantes sont "souvent" algébriquement indépendantes — on peut ici espérer que ces degrés seront "autant que possible" conservés par spécialisation aux points de ℓ -torsion de A . Ce programme a été réalisé en partie par Masser [Mas 6]. Les résultats obtenus sont en général moins précis que ceux que fournissent les techniques de cohomologie galoisienne mentionnées plus haut, mais ils ont (bien entendu) l'avantage d'être effectifs. De plus, ils donnent parfois des énoncés inaccessibles, jusqu'à présent, par les méthodes classiques. Citons ainsi le théorème suivant, récemment obtenu par Masser [Mas 6] :

THÉORÈME 4.2. — *Soit γ un point de $A(k)$. Il existe un nombre réel $C > 0$, ne dépendant que de γ , k et A , et vérifiant la propriété suivante. Soient ℓ un entier non nul, $\frac{1}{\ell}\gamma$ un point de division d'ordre ℓ de γ , et d_ℓ le degré de l'extension $k(\frac{1}{\ell}\gamma)$ sur k . Alors*

(i) *si γ est d'ordre infini, on a $d_\ell > C\ell^{1/\kappa}$ pour tout nombre réel $\kappa > g + 3 + g^{-1}$,*

(ii) *si γ est d'ordre fini, on a $d_\ell > C\ell^{1/\lambda}$ pour tout réel $\lambda > 13g/4$.*

La démonstration de ce théorème repose sur une généralisation de la méthode des lemmes de zéros décrite au paragraphe 1 du chapitre 3, adaptée cette fois aux sous-groupes non connexes du groupe algébrique G .

5. Représentation de $\text{Gal } \bar{k}/k$ et régulateurs p -adiques.

Les applications arithmétiques de théorèmes de transcendance exposées dans ce paragraphe reposent sur deux familles de résultats. D'abord le "théorème des six exponentielles" et ses extensions démontrées par M. Waldschmidt ; ensuite le théorème d'indépendance linéaire sur $\bar{\mathbb{Q}}$ de logarithmes de nombres algébriques (Baker) et son analogue p -adique (Brumer).

Soit k un corps de nombres de degré fini sur \mathbb{Q} . Pour toute place v de k , k_v désignera le complété de k en v .

(a) Représentations abéliennes de $\text{Gal } \bar{k}/k$.

Problème de Weil sur les Grössencharaktere. — On appelle *Grössencharakter* tout caractère continu χ du groupe des classes d'idèles de k à valeur dans \mathbb{C} . A un tel caractère χ est associé de façon unique un caractère Ψ du groupe $G(f)$ des idéaux fractionnaires de k premiers au conducteur f de χ : à tout idéal premier \mathcal{P} ne divisant pas f , Ψ fait correspondre $\chi(a_{\mathcal{P}})$, où $a_{\mathcal{P}}$ est l'idèle valant 1 en toute place, sauf en \mathcal{P} où elle vaut π (π est une uniformisante locale en \mathcal{P}).

NOMBRES TRANSCENDANTS

Le problème posé par A. Weil dans [We] est de caractériser les Grössencharaktere χ qui prennent des valeurs algébriques (resp. leurs valeurs dans un corps de nombres fixé). Weil considère la restriction X de χ à la partie infinie du groupe des idéles de k ; cette restriction s'écrit

$$X(a) = \prod_v (a_v / |a_v|_v)^{-f_v} |a_v|^{\eta_v(\sigma + i\phi_v)} \quad (v \text{ infinie}),$$

où $a_v \in k_v^*$, $f_v \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi_v \in \mathbb{R}$ et $\eta_v = [k_v : \mathbb{R}]$ ($= 1$ ou 2). Le problème revient à chercher les f_v , σ , ϕ_v pour lesquels X prend des valeurs algébriques sur l'image de k^* dans le produit $\prod_v k_v^*$ (v infinie). A. Weil donne une condition suffisante : les ϕ_v sont nuls pour toutes les places infinies et σ est rationnel. Les caractères correspondants sont dits de type (A). La réciproque a été démontrée par M. Waldschmidt.

THÉOREME 5.1. — *Les Grössencharaktere à valeurs algébriques sont de type (A).*

La démonstration repose sur une extension du théorème des six exponentielles. Voici un énoncé (corollaire 1.2 de [Wa 5]) qui implique le théorème 5.1.

THÉOREME 5.2. — *Soient $\alpha_{\nu,\mu}$, $1 \leq \nu \leq n$, $1 \leq \mu \leq m$, des nombres algébriques non nuls, avec $m \geq n^2 + n + 1$ et $\log \alpha_{\nu,\mu}$ des déterminations de leurs logarithmes. Soient t_1, \dots, t_m des nombres complexes. On suppose que les m nombres*

$$\prod_{\nu=1}^n \alpha_{\nu,\mu}^{t_\nu} = \exp \sum_{\nu=1}^n t_\nu \log \alpha_{\nu,\mu} \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

sont algébriques. Si les mn nombres $\log \alpha_{\nu,\mu}$ sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants, alors les nombres t_1, \dots, t_m sont tous rationnels.

Il suffit, à partir de là, de trouver dans k^* suffisamment de nombres algébriques qui, joints à leur conjugués, sont multiplicativement indépendants [Wa 5]. Dans ce même article, il est démontré que les caractères prenant leurs valeurs dans un corps de nombres fixé sont ceux de type (A₀) au sens de Weil, c'est-à-dire les caractères de type (A) pour lesquels σ est entier et qui vérifient $f_v \equiv \sigma \pmod{2}$ pour toute place complexe v .

Signalons au passage le résultat suivant, obtenu d'abord par des méthodes algébriques dans le cas d'une extension abélienne k de \mathbb{Q} puis démontré dans le cas général comme corollaire du même théorème de transcendance [Wa 5].

THÉOREME 5.3. — *Il existe un sous-groupe de type fini de k^* dont l'image est dense dans $(k \otimes \mathbb{R})^*$.*

Ce théorème est équivalent à l'énoncé suivant.

THÉORÈME 5.4. — *Tout Grössencharakter qui, considéré comme caractère sur les idéaux, est à valeurs dans les racines de l'unité est d'ordre fini.*

Représentations abéliennes ℓ -adiques. — L'équivalent ℓ -adique des résultats précédents concerne les représentations abéliennes semi-simples continues de $\text{Gal } \bar{k}/k$, c'est-à-dire, via le symbole d'Artin, les représentations semi-simples continues du groupe des classes d'idèles de k dans un espace vectoriel de dimension finie sur C_ℓ (le complété de la clôture algébrique de \mathbb{Q} pour une topologie ℓ -adique). Le théorème de transcendance ℓ -adique correspondant a été démontré par M. Waldschmidt [Wa 4]. L'énoncé suivant en a été déduit par G. Henniart [H].

THÉORÈME 5.5. — *Soient k et E des corps de nombres et v une place finie de E . Si ρ est une représentation abélienne semi-simple E_v -adique de $\text{Gal } \bar{k}/k$, rationnelle sur E , alors ρ est localement algébrique (ce qui, dans ce contexte, signifie "de type (A_0) ").*

Ce résultat avait déjà été démontré par J.-P. Serre dans le cas où E est le corps des rationnels et k le composé d'extensions quadratiques de \mathbb{Q} [Se 1]. Sa démonstration reposait sur une version ℓ -adique des théorèmes des six exponentielles [Se 5].

(b) Régulateurs p -adiques.

Fonctions zéta p -adiques. — Soient p un nombre premier et k un corps de nombres totalement réel. La fonction zéta p -adique ζ_p est définie par interpolation, sur les entiers négatifs, des valeurs de la fonction zéta complexe [Ku-Le], [Se 2]. C'est une fonction analytique sur le disque unité, sauf en $s = 1$, où l'on conjecture qu'elle possède un pôle simple avec un résidu égal au produit d'un facteur algébrique non nul (dépendant des invariants du corps) et du "régulateur de Léopoldt". Ce régulateur, analogue du régulateur complexe, s'écrit

$$R_p = \det(\log_p(\sigma \epsilon_j)) \quad (\sigma \neq 1, 1 \leq j \leq r),$$

où $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ est une base du groupe des unités de k et où σ décrit tous les plongements de k dans C_p , sauf un. Léopoldt a conjecturé que R_p n'est jamais nul.

Les théorèmes de transcendance peuvent intervenir en vue de démontrer que R_p est non nul. De plus, J. Coates a montré qu'il existe un lien entre la non-nullité de R_p et la conjecture sur la valeur du résidu de ζ_p au point $s = 1$ [Co 2].

Ces questions sont résolues pour les extensions abéliennes des rationnels

[Ku-Le], [Ko], [I]. La non-nullité de R_p est alors une conséquence du théorème de Baker p -adique [Bu], [A].

Dans le cas général, même si k n'est pas totalement réel, on peut définir le rang p -adique du groupe des unités de k . On conjecture que ce rang est égal au rang complexe r (donné par le théorème de Dirichlet :

$$r = r' + r'' - 1,$$

où r' désigne le nombre de plongements réels et r'' le nombre de plongements complexes non réels). Grâce au théorème de Baker p -adique et à une généralisation de la méthode d'Ax on peut minorer r_p en fonction de r . Dans un cas particulier, on obtient ainsi un exemple de corps de nombres galoisien sur \mathbb{Q} , totalement imaginaire pour lequel r_p et r sont égaux pour tout nombre premier p [E-K-W].

Des résultats déjà cités de M. Waldschmidt [Wa 5] fournissent la meilleure minoration générale connue : $r_p \geq r/2$. Signalons enfin que la conjecture de Schanuel p -adique entraîne la conjecture de Léopoldt.

Fonctions L p -adiques. — Soit K une extension galoisienne de k . Si ρ est une représentation totalement paire de $\text{Gal } K/k$ dans un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C}_p , on sait lui associer une fonction méromorphe sur \mathbb{Z}_p notée $L_p(\rho, s)$, définie par interpolation sur les entiers négatifs des valeurs de la fonction L complexe correspondante [De-Ri], [Bar], [CaNo]. Ferrero et Greenberg ont montré, lorsque k est le corps des rationnels et K une extension abélienne de k , que $L_p(\rho, s)$ admet un zéro d'ordre exactement un à l'origine [Fe-Gre]. La clef de leur démonstration est une expression analytique de la dérivée à l'origine de la fonction $L_p(\rho, s)$ [Di], [Fe-Gre], qui — grâce à la formule de Gross-Koblitz — se ramène à une combinaison linéaire à coefficients algébriques de logarithmes p -adiques de nombres algébriques. Le théorème de Baker p -adique entraîne alors que $L'_p(\rho, 0)$ n'est pas nul.

Dans le cas général, Gross propose une formule conjecturale pour le premier terme non nul du développement de Taylor de $L_p(\rho, s)$ à l'origine. Ce coefficient serait le produit d'un facteur algébrique non nul par un "régulateur p -adique" (le déterminant d'une certaine matrice dont les éléments sont des logarithmes p -adiques de nombres algébriques). La conjecture de Schanuel p -adique entraîne la non nullité de ce déterminant [E]. De même que pour le régulateur de Léopoldt, le rang de la matrice considéré peut-être minoré en utilisant seulement le théorème de Baker p -adique et une généralisation de la méthode d'Ax [E-K-W].

Courbes elliptiques. — La théorie des courbes elliptiques E à multiplications complexes par un corps K , définies sur une extension finie F de K , met également en jeu des fonctions L de Hecke, dont le comportement au voisinage de 1 est lié au groupe de Mordell-Weil $E(F)$. La conjecture de Birch et

Swinnerton-Dyer précise ce comportement au moyen d'un analogue elliptique du régulateur, le discriminant $R_{E/F}$ de la forme quadratique associée à la hauteur de Néron-Tate sur $E(F)$. L'analogue p -adique de ces fonctions L a également été construit. Leur comportement au voisinage de 1 peut être relié à un analogue p -adique $R_{E/F}^p$ du régulateur $R_{E/F}$, construit au moyen d'une hauteur p -adique sur $E(F)$ (travaux de Bernardi, B. Perrin-Riou, Greenberg ; cf. [Pe]). Dans le cas général, on ne sait pas si ce régulateur p -adique $R_{E/F}^p$ n'est pas nul. Mais dans le cas particulier où E est définie sur K et où $\text{rang } E(K) = 1$, la méthode de Baker, appliquée à l'étude des fonctions thêta, permet d'établir la non-nullité de $R_{E/K}^p$ (voir [Be 2]).

6. Conclusion.

Nous n'avons pu donner ici une liste exhaustive des applications de la théorie des nombres transcendants, et de ses méthodes, aux autres domaines des mathématiques. Nous concluons en citant trois applications apparemment très éloignées de la transcendance :

la construction, par M. Laurent, d'ensembles de multiplicité en analyse harmonique, ceci grâce à la théorie de Baker [Lau 1] ;

la preuve de l'"hypothèse de Riemann" pour certaines courbes sur les corps finis donnée par Stepanov, qui construit — grâce au principe des tiroirs — un type convenable de fonction auxiliaire [Ste] ;

la belle démonstration, due à Brieskorn, de la quasi-unipotence de la monodromie associée à une singularité isolée d'une hypersurface, qui utilise le théorème de Gelfond-Schneider [Bri].

Le soleil est bien fatigué
Et c'est pourtant la nuit qui tombe
Raymond Queneau.
Le Cycle de l'eau
(Battre la campagne)

BIBLIOGRAPHIE

- [A-C-H-vdP] AGRAWAL (M.K.), COATES (J.H.), HUNT (D.C.) and VAN DER POORTEN (A.J.). — Elliptic curves of conductor 11, *Math. of Comp.*, t. 35, 1980, p. 991-1002.
- [A] AX (J.). — On the units of an algebraic number field, *Illinois J. Math.*, t. 9, 1965, p. 584-589.
- [Bak 1] BAKER (A.). — Rational approximation to $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers, *Quarterly J. Math., Oxford*, t. 15, 1964, p. 375-383.
- [Bak 2] BAKER (A.). — The theory of linear forms in logarithms, chap. 1 de [Ba-Ma].
- [Bak 3] BAKER (A.). — *Transcendental number theory*. — Cambridge Univ. Press, 2^e éd., 1979.
- [Bak 4] BAKER (A.). — On some diophantine inequalities involving the exponential function, *Canad. J. Math.*, t. 17, 1965, p. 616-626.
- [Ba-St] BAKER (A.) and STARK (H.M.). — On a fundamental inequality in number theory, *Ann. of Math.*, t. 94, 1971, p. 190-199.
- [Ba-Ma] BAKER (A.) and MASSER (D.W.) (eds.). — *Transcendence theory : advances and applications*. — Acad. Press, 1977.
- [Bar] BARSKY (D.). — Fonctions sêta p -adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement réels, Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique, I.H.P. Paris, 5^e année, 1977-78, n° 16.
- [Be 1] BERTRAND (D.). — Sous-groupes à un paramètre p -adique de variétés de groupes, *Invent. Math.*, t. 40, 1977, p. 171-193.
- [Be 2] BERTRAND (D.). — Valeurs de fonctions thêta et hauteurs p -adiques, *Sém. Théorie Nombres Paris (Sém. Delange-Pisot-Poitou)*, 1980-81, p. 1-11. — Birkhäuser (ser. *Progress in Math.*, 22, 1982).
- [Be-Lau] BERTRAND (D.) et LAURENT (M.). — Propriétés de transcendance de nombres liés aux fonctions thêta, *C. r. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, t. 292, 1981, p. 747-749.
- [Be-Ma] BERTRAND (D.) and MASSER (D.W.). — Linear forms in elliptic integrals, *Invent. Math.*, t. 58, 1980, p. 283-288.
- [Be-Wa] BERTRAND (D.) and WALDSCHMIDT (M.). — On meromorphic functions of one complex variable having algebraic Laurent coefficients, *Bull. Austr. Math. Soc.*, t. 24, 1981, p. 247-267.
- [Beu] BEUKERS (F.). — Irrationality of π^2 , periods of an elliptic curve and $\Gamma_1(5)$, [Lu], p. 47-66.

- [Bo 1] BOMBIERI (E.). — Algebraic values of meromorphic maps, *Invent. Math.* t. 10, 1970, p. 267-287 et t. 11, 1970, p. 163-168.
- [Bo 2] BOMBIERI (E.). — On G -functions, [H-H], t. 2, chap. 24, p. 1-67.
- [Bo 3] BOMBIERI (E.). — On the Thue-Siegel-Dyson theorem, *Acta Math.*, t. 148, 1982, p. 255-296.
- [Bo-La] BOMBIERI (E.) and LANG (S.). — Analytic subgroups of group varieties, *Invent. Math.*, t. 11, 1970, p. 1-14.
- [Bo-Mü] BOMBIERI (E.) and MUELLER (J.). — On effective measures of irrationality for $\sqrt[n]{a/b}$ and related numbers, *J. reine angew. Math.*, t. 148, 1983, p. 173-196.
- [Bo-Cha] BOREVITCH (Z.I.) et CHAFAREVITCH (I.R.). — *Théorie des nombres* (trad. franç.). — Paris, Gauthier-Villars, 1967.
- [Bri] BRIESKORN (E.). — Die Monodromie der isolierte Singularitäten von Hyperflächen, *Manuscripta Math.*, t. 2, 1970, p. 103-161.
- [Bro 1] BROWNAWELL (W.D.). — Sequences of diophantine approximations, *J. Number Theory*, t. 6, 1974, p. 11-21.
- [Bro 2] BROWNAWELL (W.D.). — Gel'fond's method for algebraic independence, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 210, 1975, p. 1-26.
- [Bro 3] BROWNAWELL (W.D.). — On the development of Gel'fond's method, *Proc. Number Theory* [Carbondale. 1979] p. 18-44. — Berlin, Springer-Verlag (*Lecture Notes in Math.*, t. 751, 1979).
- [Bro 4] BROWNAWELL (W.D.). — Zero estimates for solutions of differential equations, [Lu] p. 67-94.
- [Bro-Ku] BROWNAWELL (W.D.) and KUBOTA (K.K.). — The algebraic independence of Weierstrass functions and some related numbers, *Acta Arith.*, t. 33, 1977, p. 111-149.
- [Bro-Ma 1] BROWNAWELL (W.D.) and MASSER (D.W.). — Multiplicity estimates for analytic functions I, *J. reine angew. Math. (Crelle J.)*, t. 314, 1980, p. 200-216.
- [Bro-Ma 2] BROWNAWELL (W.D.) and MASSER (D.W.). — Multiplicity estimates for analytic functions II, *Duke Math. J.*, t. 47, 1980, p. 273-295.
- [Bru] BRUMER (A.). — On the units of algebraic number fields, *Mathematika*, t. 14, 1967, p. 121-124.
- [Bu] BUCK (C.R.). — Integral valued entire functions, *Duke Math. J.*, t. 15, 1948, p. 879-891.
- [Bun] BUNDSCHUH (P.). — Irrationalitätsmasse für e^a , $a \neq 0$ rational oder Liouville-Zahl, *Math. Ann.*, t. 192, 1971, p. 229-242.
- [Ca] CASSELS (J.W.S.). — *An introduction to diophantine approximation*. — Cambridge Tracts n° 45, 1957, (2° éd. : 1965).

- [CaNo] CASSOU-NOGUES (P.). — Valeurs sur les entiers des fonctions s êta des corps de nombres et des fonctions L des courbes elliptiques, Thèse d'Etat, Univ. Bordeaux I, 1978.
- [Ch 1] ČUDNOVSKII (G.V.). — The Gel'fond-Baker method in problems of diophantine approximation, *Topics in Number Theory* [Debrecen. 1974], p. 19-30. — North-Holland Publ. Co. (*Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, 13, 1974).
- [Ch 2] CHUDNOVSKY (G.V.). — Algebraic independence of values of exponential and elliptic functions, *Proc. Int. Cong. Math. Helsinki* (1978), p. 339-350.
- [Ch 3] CHUDNOVSKY (G.V.). — Algebraic independence of the values of elliptic function at algebraic points - Elliptic analogue of the Lindemann-Weierstrass theorem, *Invent. Math.*, t. 61, 1980, p. 267-290.
- [Ch 4] CHUDNOVSKY (G.V.). — Singular points on complex hypersurfaces and multidimensional Schwarz lemma, *Sém. Théorie Nombres Paris (Delange-Pisot-Poitou)*, 1979-80, p. 29-69. — Birkhäuser (ser. *Progress in Math.*, 12, 1981).
- [Ch 5] CHUDNOVSKY (G.V.). — Padé approximations to the generalized hypergeometric functions I, *J. Math. Pures Appl.*, t. 58, 1979, p. 445-476.
- [Ch 6] CHUDNOVSKY (G.V.). — On the method of Thue-Siegel, *Annals of Math.*, t. 117, 1983, p. 325-382.
- [Ch²] CHUDNOVSKY (D.V.) and CHUDNOVSKY (G.V.) (eds.). — *The Riemann problem, complete integrability and arithmetic applications*. — Springer-Verlag, 1982 (*Lect. Notes in Math.*, 925).
- [Cl] CLOUW (P.L.). — *Transcendence measures*. — Amsterdam, Acad. Proefschrift, 1972.
- [Co 1] COATES (J.). — An application of the division theory of elliptic functions to diophantine approximation, *Invent. Math.*, t. 11, 1970, p. 167-182.
- [Co 2] COATES (J.). — *p-adic L-functions and Iwasawa theory*, Durham Proc. Algebraic Number Theory, A. Fröhlich, ed., Academic Press.
- [Co-La] COATES (J.) and LANG (S.). — Diophantine approximation on abelian varieties with complex multiplication, *Invent. Math.*, t. 34, 1976, p. 129-133.
- [De-Ri] DELIGNE (P.) and RIBET (K.). — Values of abelian L -functions at negative integers over totally real fields, *Invent. Math.*, t. 59, 1980, p. 227-286.
- [Dem] DEMAÏLLY (J.-P.). — Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 110, 1982, p. 75-102.

- [Di] DIAMOND (J.). — On the values of p -adic L -functions at positive integers, *Acta Arith.*, t. 35, 1979, p. 223-237.
- [Do] DOBROWOLSKI (E.). — On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial, *Acta Arith.*, t. 34, 1979, p. 391-401.
- [Du] DURAND (A.). — Simultaneous diophantine approximation and Hermite's method, *Bull. Austral. Math. Soc.*, t. 21, 1980, p. 463-470.
- [Dv] DVORNICICH (R.). — A criterion for the algebraic dependence of two complex numbers, *Bolletino U.M.I. (5)*, t. 15 A, 1978, p. 678-687.
- [E] EMSALEM (M.). — Comportement des fonctions L p -adiques au voisinage de zéro, Groupe d'Etude Anal. Ultr., I.H.P. Paris, 1981-82.
- [E-K-W] EMSALEM (M.), KISILEVSKY (H.H.) et WALES (D.B.). — Indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de logarithmes p -adiques de nombres algébriques et rang p -adique du groupe des unités d'un corps de nombres, *J. Number Theory* (à paraître).
- [Es-Vi] ESNAULT (H.) et VIEHWEG (E.). — Sur une minoration du degré d'hypersurfaces s'annulant en certains points, *Math. Ann.*, t. 263, 1983, p. 75-86.
- [Ex] ARMITAGE (J.V.) (ed.). — *Journées Arithmétiques, Exeter 1980*. — Cambridge, London Math. Soc., 1982 (Lect. Notes Ser., 56).
- [F] FELDMAN (N.I.). — An effective refinement of the exponent in Liouville's theorem, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, t. 35, 1971, p. 973-990 ; trad. angl. : *Math. USSR Izv.*, t. 5, 1971, p. 985-1002.
- [F-Shi] FELDMAN (N.I.) and SHIDLOVSKII (A.B.). — The development and present state of the theory of transcendental numbers, *Usp. Mat. Nauk SSSR*, t. 22, 1967, p. 3-81 ; trad. angl. : *Russian Math. Surveys*, t. 22, 1967, p. 1-79.
- [Fe-Gre] FERRERO (B.) and GREENBERG (R.). — On the behaviour of p -adic L -functions at $s = 0$, *Invent. Math.*, t. 50, 1978, p. 91-102.
- [Gel] GELFOND (A.O.). — *Transcendental and algebraic numbers*. — Moscou, GITTL, 1952 ; English transl. : Dover, 1960.
- [Gra 1] GRAMAIN (F.). — Fonctions entières arithmétiques, *Sém. P. Lelong-H. Skoda*, 17^e année, 1976-77. — Springer-Verlag (*Lect. Notes in Math.*, 694, 1978).
- [Gra 2] GRAMAIN (F.). — Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond, *Invent. Math.*, t. 63, 1981, p. 495-506.
- [Gra-Mi] GRAMAIN (F.) et MIGNOTTE (M.). — Fonctions entières arithmétiques, [Lu], p. 99-124.
- [Gro] GROSS (B.H.). — p -adic L -series at $s = 0$.
- [Gy] GYÖRY (K.). — *Résultats effectifs sur la représentation des entiers par des formes décomposables*. — Queen's papers in pure and applied Math., 56, 1980.

NOMBRES TRANSCENDANTS

- [H] HENNIART (G.). — Représentations ℓ -adiques abéliennes, *Sém. Théorie Nombres Paris (Sém. Delange-Pisot-Poitou)*, 1980-81, p. 107-126. — Birkhäuser (ser. *Progress in Math.*, 22, 1982).
- [Her] HERMANN (G.). — Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale, *Math. Ann.*, t. 95, 1926, p. 736-788.
- [He] HERMITE (C.). — Sur la fonction exponentielle, *C.r. Acad. Sci. Paris*, t. 77, 1873, p. 18-24, p. 74-79, p. 226-233, p. 285-293. *Oeuvres III*, p. 150-181.
- [H-H] HALBERSTAM (H.) and HOOLEY (C.) (eds.). — *Recent Progress in analytic number theory*. — London, Acad. Press, 1981 (2 vol.).
- [I] IWASAWA (K.). — *Lectures on p -adic L -functions*. — Princeton Univ. Press (*Annals of Math. Studies*, 74, 1972).
- [J] JACQUINOT (O.). — Théorie de Kummer sur une extension d'une courbe elliptique par G_m , [Lu], p. 125-131.
- [Ko] KOBLITZ (N.). — *p -adic analysis*. — London Math. Soc. (Lect. Notes Ser., 46, 1980).
- [Ku] KUBOTA (K.K.). — Linear functional equations and algebraic independence, ch. 16 [Ba-Ma].
- [Ku-Le] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H.W.). — Eine p -adische Theorie der Zetawerte I, *J. reine angew. Math.*, t. 214-215, 1964, p. 328-339.
- [La 1] LANG (S.). — *Introduction to transcendental numbers*. — Addison-Wesley, 1966.
- [La 2] LANG (S.). — *Elliptic curves diophantine analysis*. — Springer-Verlag, 1978 (*Grund. der Math. Wiss.*, 231).
- [La 3] LANG (S.). — Transcendental numbers and diophantine approximations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 77, 1971, p. 635-677.
- [La 4] LANG (S.). — Higher dimensional diophantine problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 80, 1974, p. 779-787.
- [Lan] LANGEVIN (M.). — Quelques applications de nouveaux résultats de van der Poorten, *Sém. Delange-Pisot-Poitou (Théorie des Nombres)*, 1975-76, n° 12.
- [Lau 1] LAURENT (M.). — Exemples d'ensembles de multiplicité, *C.r. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, t. 292, 1981, p. 367-370.
- [Lau 2] LAURENT (M.). — Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques, *J. reine angew. Math. (Crelle J.)*, t. 316, 1980, p. 122-139.
- [Lau 3] LAURENT (M.). — Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques II, *J. reine angew. Math. (Crelle J.)*, t. 333, 1982, p. 144-161.
- [Lau 4] LAURENT (M.). — Minoration de la hauteur de Néron-Tate, *Sém. Théorie Nombres Paris*, 1981-82, p. 137-151. — Birkhäuser (ser. *Progress in Math.*, 38, 1983).

- [Le] LENSTRA, JR. (H.W.). — On a question of Colliot-Thélène, *Sém. Théorie Nombres Paris (Sém. Delange-Pisot-Poitou)*, 1980-81, p. 143-147. — Birkhäuser (ser. *Progress in Math.*, **22**, 1982).
- [Lev] LEVESQUE (W.J.) (ed.). — *Reviews in number theory*. — Amer. Math. Soc., 1974, vol. 3, chap. J.
- [Lo-Po 1] LOXTON (J.H.) and VAN DER POORTEN (A.J.). — Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations, *J. reine angew. Math. (Crelle J.)*, t. **330**, 1982, p. 159-172.
- [Lo-Po 2] LOXTON (J.H.) and VAN DER POORTEN (A.J.). — Transcendence and algebraic independence by a method of Mahler, chap. 15 de [Ba-Ma].
- [Lu] BERTRAND (D.) et WALDSCHMIDT (M.) (eds.). — *Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Comptes-rendus confér. [Luminy. Juin 1982]*. — Birkhäuser (ser. *Progress in Math.*, **31**, 1983).
- [Mah 1] MAHLER (K.). — *Lectures on transcendental numbers*. — Springer-Verlag, 1976, (Lect. Notes in Math., t. **546**).
- [Mah 2] MAHLER (K.). — Application of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms, *Math. Ann*, t. **168**, 1967, p. 200-227.
- [Mah 3] MAHLER (K.). — On a paper by A. Baker on the approximation of rational powers of e , *Acta Arith.*, t. **27**, 1975, p. 61-87.
- [Mah 4] MAHLER (K.). — On the approximation of logarithms of algebraic numbers, *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, t. **245**, 1953, p. 371-398.
- [Mah 5] MAHLER (K.). — On the approximation of π , *Proc. Nederl. Akad. van Wet. Ser. A*, t. **56**, 1953, p. 30-42 (= *Indag. Math.* **15**).
- [Mas 1] MASSER (D.W.). — *Elliptic functions and transcendence*. — Springer-Verlag, 1975, (Lect. Notes in Math., **437**).
- [Mas 2] MASSER (D.W.). — A note on Baker's theorem, [H-H], vol. 2, p. 153-158.
- [Mas 3] MASSER (D.W.). — On quasi-periods of abelian functions with complex multiplication, [X], p. 55-68.
- [Mas 4] MASSER (D.W.). — On polynomials and exponential polynomials in several variables, *Invent. Math.*, t. **63**, 1981, p. 81-95.
- [Mas 5] MASSER (D.W.). — A vanishing theorem for powers series, *Invent. Math.*, t. **67**, 1982, p. 275-296.
- [Mas 6] MASSER (D.W.). — Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on an abelian variety, *Compositio Math.*, à paraître.
- [Mas-Wü 1] MASSER (D.W.) and WÜSTHOLZ (G.). — Zero estimates on group varieties I, *Invent. Math.*, t. **64**, 1981, p. 489-516.

NOMBRES TRANSCENDANTS

- [Mas-Wü 2] MASSER (D.W.) and WÜSTHOLZ (G.). — Algebraic independence properties of values of elliptic functions, [Ex], p. 360-363.
- [Mi 1] MIGNOTTE (M.). — Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres, *Mém. S.M.F.*, t. 37, 1974, p. 121-132.
- [Mi 2] MIGNOTTE (M.). — Entiers algébriques dont les conjugués sont proches du cercle unité, *Sém. Delange-Pisot-Poitou (Théorie des Nombres)*, t. 19, 1977-78, n° 39.
- [Mi 3] MIGNOTTE (M.). — *Approximation des nombres algébriques*. — Publ. Math. Orsay, 77-74, 1977.
- [Mi 4] MIGNOTTE (M.). — Approximation des nombres algébriques par des nombres algébriques de grands degrés, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, t. 1, 1979, p. 165-170.
- [Mo] MOREAU (J.C.). — Lemmes de Schwarz en plusieurs variables et applications arithmétiques, *Sém. Analyse (Lelong-Skoda)*, 1978-79, p. 174-190. — Springer-Verlag (Lecture Notes in Math., 822, 1980).
- [Mos] NOMBRES TRANSCENDANTS ET LEURS APPLICATIONS. — Moscou, compte-rendus conf. Univ. Moscou, 2-4 février 1983.
- [Ne 1] NESTERENKO (YU.V.). — Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and applications in the theory of transcendental numbers, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mat.*, t. 41, 1977, p. 253-284 ; trad. angl. : *Math. USSR Izv.*, t. 11, 1977, p. 239-270.
- [Ne 2] NESTERENKO (YU.V.). — On the algebraic independence of algebraic numbers to algebraic powers, [Lu], p. 199-220.
- [Ni] NIKISHIN. — On the irrationality of the values of the functions $F(x, s)$, *Math. USSR Sbornik*, t. 37, 1980, p. 381-388.
- [Pe] PERRIN-RIOU (B.). — Descente infinie et hauteurs p -adiques sur une courbe elliptique à multiplication complexe, *Invent. Math.*, t. 70, 1983, p. 369-398.
- [Phi 1] PHILIPPON (P.). — Variétés abéliennes et indépendance algébrique, I, *Invent. Math.*, t. 70, 1983, p. 289-318.
- [Phi 2] PHILIPPON (P.). — Variétés abéliennes et indépendance algébrique II, *Invent. Math.*, t. 72, 1983, p. 389-405.
- [Ra] RAMACHANDRA (K.). — *Lecture on transcendental numbers*. — Madras, 1969 (Ramanujan Inst. Lect. Notes).
- [Re 1] REYSSAT (E.). — Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielle, *Bull. Soc. Math. France*, t. 108, 1980, p. 47-79.
- [Re 2] REYSSAT (E.). — Nature arithmétique de valeurs de G -fonctions, *Problèmes Diophantiens, Publications Mathématiques Paris VI*, t. 35, 1980, n° 3.

- [Re 3] REYSSAT (E.). — Un critère d'indépendance algébrique, *J. reine angew. Math. (Crelle J.)*, t. 329, 1981, p. 66-81.
- [Ri] RIBET (K.). — Kummer theory on extensions of abelian varieties by tori, *Duke Math. J.*, t. 46, 1979, p. 745-761.
- [Ro] ROBBA (PH.). — Lemmas de Schwarz et lemmes d'approximation p -adiques en plusieurs variables, *Invent. Math.*, t. 48, 1978, p. 245-277.
- [Ro-Ro] ROBINSON (A.) and ROQUETTE (P.). — On the finiteness theorem of Siegel and Mahler concerning diophantine equations, *J. Number Theory*, t. 7, 1975, p. 121-176.
- [Schm] SCHMIDT (W.). — Approximation to algebraic numbers, *L'Enseignement Mathématique*, t. 17, 1971, p. 188-253.
- [Sch] SCHNEIDER (TH.). — *Einführung in die transzendenten Zahlen.* — Springer-Verlag, 1957 (Grund. der Math. Wiss., 81); trad. franç., 1959, Gauthier-Villars.
- [Sei] SEIDENBERG (A.). — Construction in Algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 197, 1974, p. 273-313.
- [Se 1] SERRE (J.-P.). — Abelian ℓ -adic representations and elliptic curves. — Benjamin, 1968.
- [Se 2] SERRE (J.-P.). — Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques, in *Modular functions in one variable III*, p. 191-268. — Springer-Verlag (*Lect. Notes in Math.*, 350, 1973).
- [Se 3] SERRE (J.-P.). — Autour du théorème de Mordell-Weil, Cours au Collège de France, 1980-81, *Annales du Collège de France*, 1979-80 et 1980-81.
- [Se 4] SERRE (J.-P.). — Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev, *Publ. Math. I.H.E.S.*, t. 54, 1981, p. 323-401.
- [Se 5] SERRE (J.-P.). — Dépendance d'exponentielles p -adiques, *Sém. Delange-Pisot-Poitou (Théorie des Nombres)*, t. 7, 1965-66, n° 15, 14 pages.
- [Sho] SHOREY (T.N.). — On linear forms in the logarithms of algebraic numbers, *Acta Arith.*, t. 30, 1976, p. 27-42.
- [Shi] ŠIDLOVSKII (A.B.). — On criteria for algebraic independence of values of a class of entire functions, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Mat.*, t. 23, 1959, p. 35-66; trad. angl. : *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* 22, 1962, p. 339-370.
- [Si 1] SIEGEL (C.L.). — Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, *Abh. Preuss. Akad. Wiss.*, t. 1, 1969; *Gesam. Abh.* I n° 16, p. 209-266, Springer-Verlag, 1966.
- [Si 2] SIEGEL (C.L.). — *Transcendental numbers.* — Princeton, 1949 (*Ann. of Math. Studies*, 16).

- [Sil] SILVERMAN (J.). — Lower bound for the canonical height on elliptic curves, *Duke Math. J.*, t. 48, 1981, p. 633-648.
- [Sp 1] SPRINDZUK (V.G.). — Résultats et problèmes dans la théorie des approximations diophantiennes [en russe], *Usp. Mat. Nauk* 35, t. 214, 1980, p. 3-68.
- [Sp 2] SPRINDZUK (V.G.). — *Equations diophantiennes classiques à deux variables* [en russe]. — Moscou, Nauka, 1982.
- [Sta 1] STARK (H.M.). — A complete determination of the complex quadratic fields of class number one, *Michigan Math. J.*, t. 14, 1967, p. 1-27.
- [Sta 2] STARK (H.M.). — Effective estimates of solutions of some diophantine equations, *Acta Arithm.*, t. 24, 1973, p. 251-259.
- [Ste] STEPANOV (S.A.). — An elementary proof of the Hasse-Weil theorem for hyperelliptic curves, *J. Number Theory*, t. 4, 1972, p. 118-143.
- [Ti 1] TIJDEMAN (R.). — Exponential diophantine equations, *Proc. Int. Cong. Math. Helsinki*, 1978, p. 381-387.
- [Ti 2] TIJDEMAN (R.). — On the number of zeros of general exponential polynomials, *Proc. Nederl. Akad. Wet. Ser. A*, t. 74, 1971, p. 1-7 (= *Indag. Math.*, t. 33).
- [Ti 3] TIJDEMAN (R.). — Applications of the Gel'fond-Baker method to rational number theory, *Topics in Number Theory* [Debrecen. 1974], p. 399-416. — North-Holland Publ. Co. (*Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, 13, 1974).
- [V] VÄÄNÄNEN (K.). — On the simultaneous approximation of certain numbers, *J. reine angew. Math. (Crelle J.)*, t. 296, 1977, p. 205-211.
- [Wa 1] WALDSCHMIDT (M.). — *Nombres transcendants*. — Springer-Verlag, 1974 (*Lect. Notes in Math.*, 402).
- [Wa 2] WALDSCHMIDT (M.). — *Transcendence Methods*. — Queen's papers in pure and applied Math., 52, 1979.
- [Wa 3] WALDSCHMIDT (M.). — *Nombres transcendants et groupes algébriques*. — Soc. Math. France, *Astérisque*, 69-70, 1979.
- [Wa 4] WALDSCHMIDT (M.). — Transcendance et exponentielles en plusieurs variables, *Invent. Math.*, t. 63, 1981, p. 97-127.
- [Wa 5] WALDSCHMIDT (M.). — Sur certains caractères du groupe des classes d'idèles d'un corps de nombres, *Sém. Théorie Nombres Paris (Sém. Delange-Pisot-Poitou)*, 1980-81, p. 323-335. — Birkhäuser (ser. *Progress in Math.*, 22, 1982).
- [Wa 6] WALDSCHMIDT (M.). — Transcendance measures for exponentials and logarithms, *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, t. 25, 1978, p. 445-465.
- [We] WEIL (A.). — On a certain type of characters of the idèle class group of an algebraic number field, *Proc. Int. Symp. Alg. Geom.* [Tokyo Nikko. 1955], p. 1-7. — Tokyo, 1956.

- [Wü 1] WÜSTHOLZ (G.). — Sur l'analogie abélien du théorème de Lindemann, *C.r. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, t. 295, 1982, p. 35-37.
- [Wü 2] WÜSTHOLZ (G.). — Über das abelsche Analogon des Lindemannschen Satzes, *Invent. Math.*, t. 72, 1983, p. 368-388.
- [Wü 3] WÜSTHOLZ (G.). — Some remarks on a conjecture of Waldschmidt, [Lu], p. 329-336.
- [X] BERTRAND (D.) et WALDSCHMIDT (M.) (eds.). — *Fonctions abéliennes et nombres transcendants*. — Soc. Math. France, Mémoire n° 2 (nouv. sér.), 1980.
- [*1] JOURNÉES ARITHMÉTIQUES DE BORDEAUX. — *Astérisque*, t. 24-25, 1975.
- [*2] JOURNÉES ARITHMÉTIQUES DE CAEN. — *Astérisque*, t. 41-42, 1977.
- [*3] JOURNÉES ARITHMÉTIQUES DE LUMINY. — *Astérisque*, t. 61, 1979.
- [*4] JOURNÉES ARITHMÉTIQUES DE METZ. — *Astérisque*, t. 94, 1982.

ERA 979 du CNRS,
 "Problèmes diophantiens,"
 Institut Henri-Poincaré,
 11, rue Pierre-et-Marie-Curie,
 75231 Paris Cedex 05.