

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

NGUYEN TIEN DAI

NGUYEN HUU DUC

FRÉDÉRIC PHAM

Singularités non dégénérées des systèmes de Gauss-Manin réticulés

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 6 (1981)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1981_2_6__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SINGULARITÉS NON DÉGÉNÉRÉES DES SYSTÈMES

DE GAUSS-MANIN RÉTICULÉS

§ 0 - INTRODUCTION

Soit X un germe de variété analytique complexe muni d'un diviseur à croisements normaux à r composantes X_1, X_2, \dots, X_r .

Pour tout $\sigma \subset I_r = \{1, 2, \dots, r\}$, on posera $X_\sigma = \bigcap_{i \in \sigma} X_i$ (en particulier $X_\emptyset = X$). On notera \underline{X} la famille $(X_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$, que l'on appellera (germe de) variété r -réticulée.

Soit x_1, x_2, \dots, x_N un système de coordonnées locales sur X tel que x_i soit l'équation de X_i pour $i = 1, 2, \dots, r$.

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ on notera $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$ le \mathcal{O}_X -module à gauche, quotient de l'anneau \mathcal{O}_X des germes d'opérateurs différentiels analytiques par l'idéal à gauche engendré par $x_1^{D_{x_1} - \alpha_1}, \dots, x_r^{D_{x_r} - \alpha_r}, D_{x_{r+1}}, \dots, D_{x_N}$ (D_{x_i} désigne l'opérateur de dérivation par rapport à x_i).

Ce \mathcal{O}_X -module $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$ ne dépend pas du système de coordonnées choisi, et c'est évidemment un système holonome, dont la variété caractéristique est l'union des 2^r composantes lisses $T_{X_\sigma}^* X$ (fibrés conormaux dans X aux sous-variétés X_σ).

Le but de cet article est d'étudier ce que nous appellerons les "systèmes de Gauss-Manin réticulés", images directes microlocales du \mathcal{O}_X -module $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$ par des germes d'applications $F : X \rightarrow Y$, sous une hypothèse de "non dégénérescence" de F par rapport à la variété réticulée \underline{X} qui garantit notamment que l'image directe est non caractéristique.

N.B. L'essentiel de ce travail a été fait lors d'un séjour de 10 mois du dernier auteur à l'Institut de Mathématiques de Hanoi, dans le cadre de la Coopération Scientifique Franco-Vietnamienne.

Deux cas particuliers importants sont le cas ($r=0$) des systèmes de Gauss-Manin "ordinaires" $(\theta_X^{(\alpha)} = 0_X)$, qui donnent tous les systèmes microdifférentiels holonomes à caractéristique simple, et le cas ($r=1$) des "systèmes de Gauss-Manin d'applications à bord" qui donnent toutes les "interactions analytiques régulières" [8] [11] de composantes holonomes simples (cf. § 8). Les résultats du présent article englobent ainsi les résultats démontrés ou annoncés dans [3] [4] [5] [16] [17]. On pourrait s'en servir pour étudier les singularités d'une classe assez large d'intégrales de classe de Nilsson, englobant comme cas très particulier les intégrales étudiées dans [15] (Chap. VI notamment).

On pourrait aussi s'en servir pour étendre à certains cas de caractéristiques multiples les résultats bien connus sur la propagation des singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles à caractéristique simple ; un travail de ce genre est fait dans un article de Melrose et Uhlmann [14], dont nous avons pris connaissance après l'achèvement de [3] [4] [5] ; pour autant que nous le comprenions, cet article donne une version «opérateurs intégraux de Fourier» de nos résultats dans les cas $r=1$ et $r=2$ (sans aborder toutefois le problème de la stabilité).

Les cinq premiers paragraphes du présent travail sont purement géométriques.

Le § 1 définit la condition de "non dégénérescence", ainsi que la "variété caractéristique" d'une application réticulée de co-rang 1 (ce sera la variété caractéristique, au sens usuel, du système holonome qu'est le système de Gauss-Manin réticulé). Comme celle de $\theta_X^{(\alpha)}$, cette variété caractéristique est formée de $2^{r'}$ ($r' \leq r$) composantes lisses, formant une configuration que nous appellerons "r'-cubique régulière" (n°1.0) ($r' = r - |\sigma_0|$, où σ_0 désigne le plus grand des σ pour lesquels $F|_{X_\sigma}$ est une submersion).

Le § 2 exhibe toutes les façons de modifier un germe d'application réticulée non dégénérée sans changer sa configuration caractéristique, et construit une "forme réduite" d'un tel germe.

Le § 3 construit un germe d'application réticulée non dégénérée ayant pour configuration caractéristique une configuration r -cubique régulière donnée à l'avance ; les deux clefs de la construction sont une construction bien connue de Hörmander (qui répond entièrement à la question dans le cas $r=0$) et la notion de « modèle distingué » (n°3.4), dont l'existence pour toutes les valeurs de r sera établie au §5, à l'aide des Appendices A1 et A2.

Le § 4 montre que les configurations stables sont exactement les configurations caractéristiques des germes d'applications réticulées stables ; dans le cas particulier $r=0$, ce résultat n'est qu'une version du résultat connu sur la classification locale des variétés lagrangiennes stables par les déploiements stables de fonctions de la théorie de Thom-Mather [1] [6] [21] ; dans le cas $r=1$, on trouve un résultat qui nous avait été suggéré par Nguyễn sĩ Minh, à savoir que les "interactions géométriques stables" de deux variétés lagrangiennes sont classifiées localement par les déploiements stables de fonctions sur une variété 1-réticulée ("variété à bord"), déploiements qui ont été étudiés en détail par Arnold [2].

Le § 5 étudie en détail un cas particulier, celui des « Déploiements de fonctions de Morse réticulées », auquel le problème général du § 3 se ramène par transformation de contact ; on y construit un « modèle universel pour les fonctions de Morse réticulées », ce qui permet - grâce à une construction très technique faite dans l'Appendice A2 - d'établir l'existence pour tout r des « modèles distingués universels » annoncés au n°3.4.

Le § 6 décrit quelques transformations générales auxquelles on peut soumettre les systèmes de Gauss-Manin réticulés : comment on peut les "réduire" à des systèmes de Gauss-Manin d'applications plus simples, comment dans le cas non dégénéré ils sont tous équivalents entre eux (une fois donné α , ou plus exactement la collection des $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{C} \sigma_0}$) à une transformation de contact quantifiée près.

Le § 7 introduit la notion générale de déploiement d'un germe de système microdifférentiel, et montre en s'appuyant sur un théorème général de Nguyễn tú Cường (Appendice C) que le problème de la stabilité des systèmes de Gauss-Manin réticulés $\mathcal{G}_F^{(\alpha)}$ se réduit, pour un choix générique de α , au problème géométrique de la stabilité de leur configuration caractéristique, résolu au § 4 ; la condition générique sur α est $\alpha_i \neq -\frac{1}{2} \forall i \in \sigma_0$, et on a des contre-exemples à la stabilité dès que cette condition n'est pas vérifiée.

Enfin le § 8 caractérise microlocalement les systèmes holonomes qui sont des systèmes de Gauss-Manin d'applications réticulées non dégénérées : aux conditions géométriques déjà étudiées dans les premiers paragraphes (avoir pour variété caractéristique une configuration r-cubique régulière), il suffit d'ajouter la condition d'être à caractéristique simple aux points génériques de chaque composante V_σ , et d'être une interaction analytique (au sens de [8]) aux points génériques de chaque $V_\sigma \cap V_{\sigma'}$, pour tout couple σ, σ' joints par une arête du cube. Grâce aux résultats des premiers paragraphes on peut se ramener au cas où la variété caractéristique est la configuration conormale aux strates d'une variété réticulée, et la démonstration est un exercice d'illustration des résultats généraux de Kashiwara et al. [9] [10] [12] sur les "systèmes holonomes à singularités régulières".

§ 1 - CARACTÉRISTIQUES DES GERMES D'APPLICATIONS NON DÉGÉNÉRÉES

1.0 Configurations r-cubiques régulières

Considérons, dans un germe de variété W de dimension $\geq n+r$, un germe de sous-ensemble V donné par n équations

$$(*) \quad u_1 v_1 = \dots = u_r v_r = v_{r+1} = \dots = v_n = 0$$

ou $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_n$ sont des germes de fonctions analytiques à différentielles linéairement indépendantes à l'origine.

V est alors l'union des 2^r composantes lisses $V_\sigma, \sigma \in \mathcal{P}(I_r)$, définies par les équations

$$V_\sigma : u_i = 0 \text{ pour } i \in \sigma, \quad v_j = 0 \text{ pour } j \in \{1, 2, \dots, n\} - \sigma$$

Il sera commode d'identifier $\mathcal{P}(I_r)$ au cube à r dimensions $\{0, 1\}^{I_r}$

(en identifiant chaque $\sigma \subset I_r$ à sa fonction caractéristique). Une face du cube est une partie \mathcal{Q} de $\mathcal{P}(I_r)$ définie en assignant une valeur fixée (0 ou 1), à un certain nombre de coordonnées du cube (le nombre des coordonnées laissées libres est la dimension de la face).

Explicitement, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\underline{\sigma}, \bar{\sigma}) = \{\sigma \in \mathcal{P}(I_r) \mid \underline{\sigma} \subset \sigma \subset \bar{\sigma}\}$.

Toute partie P du cube est incluse dans une face minimale que nous noterons

$\mathcal{Q}(P)$:

$$\mathcal{Q}(P) = \mathcal{Q}(\underline{\sigma}, \bar{\sigma}) \text{ avec } \underline{\sigma} = \bigcap_{\sigma \in P} \sigma, \quad \bar{\sigma} = \bigcup_{\sigma \in P} \sigma.$$

(**) On remarque que les $V_P = \bigcap_{\sigma \in P} V_\sigma$ sont des sous-variétés qui ne dépendent que de $\mathcal{Q}(P)$, et de codimension $n + \dim \mathcal{Q}$.

La famille de sous-variétés $(V_{\mathcal{Q}})$ ainsi construite, indexée par l'ensemble des faces du r -cube, sera appelée configuration r-cubique régulière de codimension n . On dira que cette configuration est engendrée par les $V_\sigma, \sigma \in \mathcal{P}(I_r)$.

L'espace $V = \bigcup_{\sigma} V_\sigma$ sera appelé support de la configuration.

Il est muni d'une stratification évidente dont les strates sont les

$$\overset{\circ}{V}_2 = V_2 - \bigcup_{2' \supset 2} V_{2'} :$$

$$\overset{\circ}{V}_{2(\underline{\sigma}, \bar{\sigma})} : \begin{cases} u_i = 0 & \text{si } i \in \bar{\sigma}, u_i \neq 0 & \text{sinon} \\ v_j = 0 & \text{si } j \notin \underline{\sigma}, v_j \neq 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que la donnée du support de la configuration ne détermine celle-ci que modulo le groupe des rotations et symétries du r-cube.

Remarquons enfin qu'au voisinage d'un point de la strate $\overset{\circ}{V}_2$ la configuration est en fait $(r - \dim 2)$ - cubique régulière.

Cas particulier important : $r=1$.

Il s'agit de deux sous-variétés V_\emptyset et V_1 de codimension n , se coupant "régulièrement" le long d'une sous-variété de codimension $n+1$. Cette situation sera appelée "interaction régulière" de deux sous-variétés. Cette terminologie est inspirée par Kashiwara [8], qui le premier a remarqué l'importance de la notion d' "interaction" (régulière ou non) entre composantes holonomes de systèmes microdifférentiels.

Remarque. La notion de "configuration r-cubique régulière" peut être

caractérisée par la propriété (★★), jointe à la propriété de

$$\text{"régularité"} : \forall x \in V_P, T_x V_P = \bigcap_{\sigma \in P} T_x V_\sigma.$$

Comme cette affirmation ne nous servira pas explicitement dans la suite, nous laissons sa démonstration à la sagacité du lecteur (il s'agit de montrer que les deux propriétés indiquées impliquent l'existence d'un système d'équations locales (★), ce qui peut se faire par une double récurrence assez compliquée sur (r, n) , à l'aide du théorème des fonctions implicites).

1.1 Configuration de l'espace des jets de corang 1
(« à la manière de THOM » [20])

Avec les notations de l'introduction, désignons par $J(X_\sigma, Y)$,

$\sigma \in \mathcal{P}(I_r)$, le fibré des jets d'ordre 1 de X_σ dans Y : c'est un fibré de base $X_\sigma \times Y$, et pour tout $\sigma \in \mathcal{P}(I_r)$ l'application tangente à l'inclusion $i_\sigma : X_\sigma \times Y \hookrightarrow X \times Y$ permet de définir une application canonique de "restriction des jets" :

$$\rho_\sigma : J(X, Y)|_{X_\sigma \times Y} \longrightarrow J(X_\sigma, Y) .$$

Désignons par $S^\kappa(X_\sigma, Y) \subset J(X_\sigma, Y)$ le sous-ensemble des jets de corang au but exactement égal à κ , et par $S_\sigma^\kappa \subset J(X, Y)$ son image réciproque par ρ_σ :

$$S_\sigma^\kappa = i_{\sigma}^{-1}(\rho_\sigma^{-1}(S^\kappa(X_\sigma, Y))) .$$

Désignons enfin par $J(X, Y)^1$ l'ouvert de $J(X, Y)$ défini par

$$J(X, Y)^1 = J(X, Y) - \bigcup_{\substack{\kappa \geq 1 \\ \sigma}} S_\sigma^\kappa \quad (\text{ouvert des jets "de corang } \leq 1 \text{ sur } X") .$$

Proposition. Restreinte à l'ouvert $J(X, Y)^1$ la famille $\{S_\sigma^1\}_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$

engendre une configuration r-cubique régulière de codimension

$$n = \dim X - \dim Y + 1$$

(on suppose $n \geq 0$, et $r \leq n$).

Preuve. Posons $X = \mathbb{C}^{n+p} \ni (x_1, \dots, x_{n+p})$, $X_i : x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$),

$$Y = \mathbb{C}^{p+1} \ni (y_0, y_1, \dots, y_p) .$$

La fibre de $J(X, Y)$ est l'ensemble $L(n+p, p+1)$ des matrices

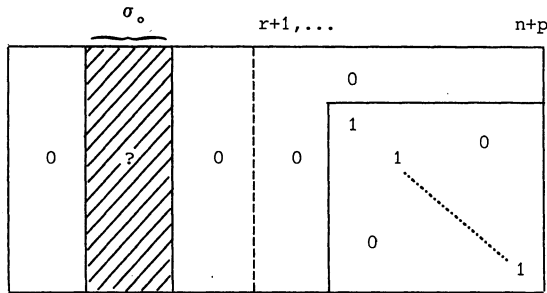
$$(\ell_{ij})_{\substack{i=0,1,\dots,p; \\ j=1,2,\dots,n+p}}, \text{ et l'application } \rho_\sigma \text{ consiste à oublier}$$

les colonnes d'indice $j \in \sigma$. Dire que le point $(x=0, y=0, \ell_0)$ est dans

$J(X, Y)^1$, c'est donc dire que la matrice ℓ_0 contient un mineur non singulier

d'ordre p n'ayant que des colonnes d'indices $j > r$; dire que ce point est dans S_σ^1 , c'est dire que tous les mineurs d'ordre $p+1$ ne comportant pas de colonnes d'indice $j \in \sigma$ sont singuliers.

Soit $\sigma = \sigma_0$ la plus petite partie de I_r pour laquelle ceci est vrai. Par un changement linéaire des coordonnées x_{r+1}, \dots, x_{n+p} d'une part, y_0, y_1, \dots, y_p d'autre part, on peut ramener la matrice ℓ_0 à la forme



Alors pour tout $\sigma \supset \sigma_0$, S_σ^1 est donnée localement au voisinage de ℓ_0 par les équations

$$S_\sigma^1 : x_j = 0, j \in \sigma; \delta^{(k)} = 0, k \in \{1, 2, \dots, n\} - \sigma,$$

où $\delta^{(k)} = \det \ell^{(k)}$, $\ell^{(k)}$ désignant la sous-matrice carrée d'ordre $p+1$ déduite de $\ell \in L(n+p, p+1)$ en ne gardant que la k -ième colonne ainsi que les p dernières.

$$\text{De plus on a } \frac{\partial}{\partial \ell_{ij}} \delta^{(k)}(\ell_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) = (0, k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il en résulte que les différentielles en ℓ_0 des fonctions $x_1, \dots, x_r, \delta^{(1)}, \dots, \delta^{(n)}$ sont linéairement indépendantes, de sorte que la famille considérée engendre bien, localement au voisinage de ℓ_0 , une configuration s -cubique régulière ($s = r - |\sigma_0|$) de support

$$\bigcup_{\sigma} S_\sigma^1 = \bigcup_{\sigma \supset \sigma_0} S_\sigma^1 : \begin{cases} x_i \delta^{(1)} = 0 & \text{pour } i \in I_r - \sigma_0 \\ x_j = 0 & \text{pour } j \in \sigma_0 \\ \delta^{(k)} = 0 & \text{pour } k = r+1, \dots, n \end{cases}$$

1.2 Germes d'applications non dégénérées

Soit \underline{X} un germe de variétés r -réticulées, et $F : X \rightarrow Y$ un germe d'application analytique sur $X = X_\phi$ (on suppose $\dim X \geq \dim Y + r - 1$). La collection des applications $(F_\sigma = F|_{X_\sigma})_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ sera notée $\underline{F} : \underline{X} \rightarrow Y$ et appelée germe d'application r -réticulée. Son ensemble critique

$\Sigma(\underline{F})$ est par définition l'union dans X des sous-ensembles

$$\Sigma(F_\sigma) = \left\{ x \in X_\sigma \mid \operatorname{rg} T_x^* F_\sigma < \dim Y \right\}.$$

On dira que \underline{F} est de corang 1 si l'application tangente à chacune des F_σ est de corang au but ≤ 1 , autrement dit si pour tout σ le noyau de l'application cotangente à F_σ en tout point de $\Sigma(F_\sigma)$ est de dimension exactement égale à 1. Remarquons que pour tout $x \in \Sigma(\underline{F})$ il existe un $\sigma_x \in \mathcal{P}(I_r)$ tel que $x \in \Sigma(F_\sigma) \Leftrightarrow \sigma \supset \sigma_x$, et que les noyaux des applications cotangentes aux F_σ sont ordonnés par inclusion. Il en résulte dans le cas du corang 1 que l'espace vectoriel à une dimension $\operatorname{Ker} T_x^* F_\sigma$ ne dépend pas de $\sigma \supset \sigma_x$, ce qui permet de définir une application

$$\chi_{\underline{F}} : \Sigma(\underline{F}) \longrightarrow P^*Y$$

de l'ensemble critique dans le fibré projectif cotangent à Y (à tout point critique on associe la direction du noyau de l'application cotangente).

Cette application sera appelée application caractéristique de \underline{F} .

Définition : \underline{F} est dite non dégénérée si elle est de corang 1, et si

la section $j(F) : X \longrightarrow J(X, Y)$ du fibré des jets définie par F est transverse à la stratification r -cubique régulière définie au n° 1.1.

Proposition. Si \underline{F} est non dégénérée, alors l'ensemble critique $\Sigma(\underline{F})$

est le support d'une configuration $(r - |\sigma_0|)$ -cubique régulière
de codimension $n = \dim X - \dim Y + 1$.

Cette affirmation est une conséquence immédiate de 1.1 et de la définition

$$\text{de } \Sigma(\underline{F}) = j(\underline{F})^{-1} \left(\bigcup_{\sigma} S_{\sigma}^1 \right).$$

1.3. Modèle local d'une application de corang 1

Avec les notation 1.2, munissons Y de coordonnées locales

y_0, y_1, \dots, y_p telles que dy_1, \dots, dy_p soient linéairement indépendantes modulo le noyau de l'application cotangente. Alors

i) X peut être munie de coordonnées locales x_1, \dots, x_{n+p}

telles que $x_i : x_i = 0 \quad (i=1, \dots, r)$ et

$$F' : X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto y_0 = f(x), \quad y_1 = x_{n+1}, \dots, y_p = x_{n+p}$$

ii) $0 \in \Sigma(F_{\sigma}) \Leftrightarrow \sigma \supset \sigma_0 = \left\{ i \in I_r \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \neq 0 \right\}$

iii) \underline{F} est non dégénérée si et seulement si la matrice

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right)_{i \in \{1, 2, \dots, n\} - \sigma_0; j = r+1, \dots, n+p}$$

est de rang $n - |\sigma_0|$.

Pour démontrer i), il suffit de poser $x_{n+k} = y_k \circ F$, $k=1, \dots, p$, et de compléter en un système de coordonnées de X .

ii) est évidente.

Pour démontrer iii) on remarque que la sous-variété $S_{\mathcal{Q}}^1$ correspondant à la strate minimale $\mathcal{Q}_0 = \{\sigma \mid \sigma \supset \sigma_0\}$ a pour équations locales ($x_i = 0$ pour $i \in I_r$, $\delta^{(k)} = 0$ pour $k \in \{1, 2, \dots, n\} - \sigma_0$). Soit $s : J(X, Y) \longrightarrow \mathbb{C}^{n-|\sigma_0|+r}$ la submersion définie par ces équations locales. Dire que $j(\underline{F})$ est transverse à $S_{\mathcal{Q}_0}^1 = s^{-1}(0)$ équivaut à dire que $s \circ j(\underline{F})$ est une submersion. Mais $s \circ j(\underline{F})$ est l'application qui à x associe $(x_1, \dots, x_r) ; \frac{\partial f}{\partial x_k}$,

$k \in \{1, 2, \dots, n\} - \sigma_0$). En calculant la matrice jacobienne de cette application on obtient immédiatement iii).

1.4 Caractéristiques

Proposition. Si \underline{F} est non dégénérée, alors l'application caractéristique

est un plongement, dont l'image notée $V_{\underline{F}}$ est appelée variété caractéristique de \underline{F} : c'est une union de $2^{r-|\sigma_0|}$ composantes holonomes $(V_{\sigma}(\underline{F}))_{\sigma \supset \sigma_0}$ qui engendrent une configuration $(r-|\sigma_0|)$ -cubique régulière, la "configuration caractéristique" de \underline{F} .

Preuve. Dans les coordonnées locales 1.3 i), $X(\underline{F})$ est l'application

qui à $x \in \Sigma_{\underline{F}}$ associe la direction du covecteur $dy_0 - \sum_{i=1}^p \eta_i dy_i$ tel

$$\text{que } T_x^* F_{\sigma} \left(dy_0 - \sum_{i=1}^p \eta_i dy_i \right) = 0, \text{ c.à.d. } df|_{X_{\sigma}} - \sum_{i=1}^p \eta_i dx_{n+i} = 0$$

$$(\sigma \supset \sigma_0), \text{ c.à.d. } \eta_i = \frac{\partial f}{\partial x_{n+i}}(x) \quad (i=1, 2, \dots, p).$$

Autrement dit $X(\underline{F})$ est la restriction à $\Sigma_{\underline{F}}$ de l'application de $X \approx \mathbb{C}^{n+p}$ dans $p^*Y \approx \mathbb{C}^{2p+1}$ définie par

$$(*) \quad y_0 = f(x), \quad y_i = x_{n+i}, \quad \eta_i = \frac{\partial f}{\partial x_{n+i}}(x) \quad (i=1, \dots, p).$$

D'autre part $\Sigma_{\underline{F}}$ est donné dans X par les équations

$$\begin{cases} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 & \text{pour } i \in I_r - \sigma_0 \\ x_j = 0 & \text{pour } j \in \sigma_0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 & \text{pour } k = r+1, \dots, n \end{cases}$$

et son espace conormal de Zariski est engendré par les différentielles des équations de la 2^e ligne.

Dire que $X(\underline{F})$ est un plongement, c'est dire que l'application cotangente

à (*) est transverse à l'espace conormal de Zariski de $\Sigma_{\underline{F}}$, c'est-à-dire

que les différentielles $df, dx_{n+1}, \dots, dx_{n+p}, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right), \dots, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+p}}\right),$
 combinées aux différentielles dx_j ($j \in \sigma_0$), $d\left(\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}\right), \dots, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$
 doivent engendrer tout T^*X . Il est clair que cette condition est impliquée
 par 1.3 iii).

Quant à l'holonomie de V_F , on peut la vérifier par calcul direct sur
 l'expression (*) de χ_F , l'image réciproque par (*) de la 1-forme fondamentale
 $dy_0 - \sum_{i=1}^p \eta_i dy_i$ étant nulle par construction.

1.5. Applications non caractéristiques. Lieux discriminants

La notion de "variété caractéristique" peut être définie, plus généralement, pour toute application réticulée de corang 1 dont l'application caractéristique est un morphisme fini : une telle application réticulée sera dite "non caractéristique", pour une raison expliquée au début du §6. Comme exemples d'applications non caractéristiques (non réticulées), citons les applications "de type singulier fini" (applications t.s.f.) de corang 1, bien connues des géomètres. Mais une application non caractéristique, et même non dégénérée, peut fort bien ne pas être t.s.f. (cf. [16] n°6.0).

Une autre notion importante pour les applications non caractéristiques est celle de "lieu discriminant", qu'on peut définir comme image de la variété caractéristique par la projection $\pi : P^*Y \rightarrow Y$. Plus précisément, à chaque composante irréductible V_σ de la variété caractéristique nous associerons un "lieu discriminant" Δ_σ , image de celle-ci par π . Etant holonome, V_σ est caractérisée par la donnée de son lieu discriminant Δ_σ (dont elle est le fibré conormal). Contrairement à ce qui se passe dans le cas t.s.f. (de corang 1), le lieu discriminant n'est pas nécessairement une hypersurface. Il peut même arriver que certains des Δ_σ soient inclus les uns dans les autres.

§ 2 - THÉORÈMES D'ÉQUIVALENCE ET DE RÉDUCTION

2.1 \mathcal{R} - équivalence

Deux germes d'applications réticulées $\underline{F}, \underline{F}' : \underline{X} \longrightarrow Y$ sont dits \mathcal{R} - équivalents s'il existe un germe "d'automorphisme réticulé" $\underline{G} : \underline{X} \xrightarrow{\sim}$ (c.à.d. $\underline{G} : \underline{X} \xrightarrow{\sim}$ et $\underline{G}|_{X_0} : X_0 \xrightarrow{\sim}$) tel que $\underline{F}' = \underline{F} \circ \underline{G}$.

Théorème. Supposons que \underline{F} et $\underline{F}' : \underline{X} \rightarrow Y$ soient non dégénérés.

Alors ils ont même configuration caractéristique si et seulement si s'ils sont \mathcal{R} - équivalents.

Preuve. (généralisation immédiate de [18], version géométrique d'un résultat bien connu de Hörmander [7]).

Seule la partie "seulement si" du théorème nécessite une démonstration.

Si \underline{F} et \underline{F}' ont même configuration caractéristique leurs ensembles critiques sont isomorphes par l'isomorphisme

$$\Sigma = \Sigma(\underline{F}) \xrightarrow[\underline{X}_{\underline{F}}]{\sim} V_{\underline{F}} = V_{\underline{F}'} \xleftarrow[\underline{X}_{\underline{F}'}]{\sim} \Sigma(\underline{F}') = \Sigma'$$

qui est évidemment "réticulé" (il met en correspondance $\Sigma \cap X_0 = \Sigma(\underline{F}_0)$

et $\Sigma' \cap X_0 = \Sigma(\underline{F}'_0)$).

Je dis que cet isomorphisme réticulé entre Σ et Σ' peut s'étendre en un germe d'automorphisme réticulé $\underline{G} : \underline{X} \xrightarrow{\sim}$.

En effet, comme \underline{F} est non dégénérée, la paire (\underline{X}, Σ) admet une stratification évidente, dont les strates sont définies par toutes les conditions possibles de nullité ou non-nullité des fonctions $x_1, \dots, x_r, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, qui peuvent être considérées comme les $r+n$ premières coordonnées d'un système de coordonnées locales de X (condition 1.3 iii). Il en est de même de la paire (\underline{X}, Σ') .

L'affirmation résulte alors du

Lemme i) : Soit Σ une union fermée de strates de l'espace \mathbb{C}^N stratifié par ses $r+n$ premières coordonnées. Alors tout germe d'automorphisme analytique stratifié de Σ s'étend en un germe d'automorphisme analytique stratifié de \mathbb{C}^N .

Preuve du lemme i) : On utilise la structure vectorielle de la stratification. Soient A et B deux sous-espaces vectoriels, adhérences de strates. Etant donnés deux automorphismes analytiques stratifiés $G_A : A \rightarrow A$, $G_B : B \rightarrow B$ tels que $G_A|_{A \cap B} = G_B|_{A \cap B}$ ($= G_{A \cap B} : A \cap B \rightarrow A \cap B$), on peut définir un automorphisme analytique $G_{A+B} : A+B \rightarrow A+B$ par la formule $G_{A+B} = G_A \circ \pi_A + G_B \circ \pi_B - G_{A \cap B} \circ \pi_{A \cap B}$ où $\pi_A, \pi_B, \pi_{A \cap B}$ sont les projections linéaires évidentes de $A+B$ sur $A, B, A \cap B$.

On applique ce procédé à deux quelconques des composantes de Σ , puis on recommence avec le "nouveau" Σ obtenu par cette extension, etc..., jusqu'à ce que Σ soit tout \mathbb{C}^N .

Soit donc $\underline{G} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ un germe d'automorphisme réticulé envoyant $\Sigma(\underline{F})$ sur $\Sigma(\underline{F}')$. En remplaçant \underline{F}' par $\underline{F}'' = \underline{F}' \circ \underline{G}$ on obtient un germe \mathcal{R} -équivalent à \underline{F}' et ayant même ensemble critique que \underline{F} , et même application caractéristique

$$\chi = \chi_{\underline{F}} = \chi_{\underline{F}''} : \Sigma \longrightarrow P^*Y.$$

La structure vectorielle de Y (identifié à \mathbb{C}^{p+1}) permet de construire une famille à paramètre de germes d'applications

$$F_t = (1-t)F + t F'' \quad \text{telles que } F_0 = F, F_1 = F'',$$

qui ont tous même application caractéristique χ , et qui sont tous non dégénérés sauf pour un ensemble discret de valeurs de t , excluant les points 0 et 1. Le complémentaire de cet ensemble dans le plan complexe des t est donc un ouvert connexe Ω comprenant les points 0 et 1. Pour montrer la \mathcal{R} -équivalence de F_0 et F_1 il suffit de montrer que la famille $(F_t)_{t \in \Omega}$ est localement \mathcal{R} -triviale. Par une généralisation immédiate de la théorie de Mather aux applications réticulées - généralisation que nous laissons en exercice au lecteur, en lui conseillant de lire la version locale particulièrement simple de la théorie de Mather que donne [13]; cette version a l'avantage de se transposer immédiatement du cas \mathcal{C}^∞ au cas analytique - on est ramené à montrer la \mathcal{R} -trivialité des déformations infinitésimales $F_{t_0} + \epsilon \Phi_{t_0}, \Phi_{t_0} = (\partial F_t / \partial t)|_{t=t_0}$, pour tout $t_0 \in \Omega$.

Or l'hypothèse selon laquelle les lieux discriminants $\Delta_\sigma = F_t(\Sigma_\sigma)$ (cf. n°1.5) sont indépendants de t implique que pour tout $x \in \Sigma$ le vecteur $\Phi_{t_0}(x)$ est "tangent" à Δ_{σ_x} au point $F_{t_0}(x)$, et appartient donc à l'image de

l'application tangente $T_x \left(F|_{X_{\sigma_x}} \right)_{t_0}$ (c'est évident pour tout x dont l'image

est un point lisse de Δ_{σ_x} ; c'est donc vrai partout par passage à l'adhérence).

Pour montrer la \mathcal{R} -trivialité infinitésimale il suffit donc de démontrer le

Lemme ii) : Soit $\underline{F} : \underline{X} = (\mathbb{A}^{n+p}, 0) \longrightarrow (\mathbb{A}^{p+1}, 0)$ un germe d'application r -réticulée (par les r premières coordonnées) non dégénérée, d'ensemble critique Σ . Soit $\Phi \in \mathcal{O}_X^{p+1}$ tel que pour tout $x \in \Sigma$ assez proche de 0 le vecteur $\Phi(x)$ soit dans l'image de $T_x (F|_{X_{\sigma_x}})$. Alors il existe sur X un germe

de champ de vecteurs Ψ , tangent à la structure réticulée, tel que $\Phi = T_x F \circ \Psi$; autrement dit la déformation infinitésimale $F + \epsilon \Phi$ est \mathcal{R} -trivialisée par $1_X + \epsilon \Psi$, déformation infinitésimale réticulée de 1_X .

Preuve. On peut supposer que F est de la forme 1.3.

Son ensemble critique Σ est alors défini par l'idéal réduit

$$\mathcal{I}_{\Sigma} = \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_r \frac{\partial f}{\partial x_r}, \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \text{ et l'image de}$$

$T_x (F|_{X_{\sigma_x}})$ est formée des vecteurs $(v_0, v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{A}^{p+1}$ tels que $v_0 = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_{n+j}}(x) v_j$.

L'hypothèse du lemme signifie donc que pour tout $x \in \Sigma$,

$$\varphi_0(x) - \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_{n+j}}(x) \varphi_j(x) = 0,$$

où $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sont les composantes de $\Phi \in \mathcal{O}_X^{p+1}$.

Comme l'idéal \mathcal{I}_{Σ} est réduit, cette hypothèse entraîne que $\varphi_0 - \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_{n+j}} \varphi_j \in \mathcal{I}_{\Sigma}$, c'est-à-dire :

$$\varphi_0 - \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_{n+j}} \varphi_j = \sum_{i=1}^r w_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=r+1}^n w_j \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

avec $w_1, \dots, w_n \in \mathcal{O}_X$. La conclusion du lemme en résulte en prenant pour

Ψ le champ de vecteurs de composantes $(\Psi_1 = x_1 w_1, \dots, \Psi_r = x_r w_r, \Psi_{r+1} = w_{r+1}, \dots, \Psi_n = w_n)$.

2.2. Théorème d'équivalence avec changement de dimension de l'espace source

Soit $F : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^p \longrightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{A}^p$ un germe d'application réticulée par les r

$$x, y \quad \quad \quad y_0 = f(x, y), y$$

premières coordonnées, et non dégénérées.

En remplaçant l'espace réticulé $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ par un $\mathbb{C}^{n+m} \times \mathbb{C}^p \ni (x, x', y)$, et la fonction $f(x, y)$ par

$$f'(x, x', y) = f(x, y) + \sum_{i=1}^m x_i'^2,$$

on obtient un germe d'application r -réticulée

$$F' : \mathbb{C}^{n+m} \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$$

qui est non dégénérée, et a même configuration caractéristique que F .

Ce procédé, que nous appellerons "ajout d'une fonction de Morse parasite", permet de varier à volonté la dimension de l'espace source sans changer la configuration caractéristique. Du théorème 2.1 nous déduisons par ce procédé le théorème suivant :

Théorème. Deux germes d'applications r -réticulées non dégénérées

$$\underline{F} : \underline{X} \longrightarrow Y, \quad \underline{F}' : \underline{X}' \longrightarrow Y$$

(avec $\dim X' \geq \dim X$)

ont même configuration caractéristique si et seulement si \underline{F}' est \mathcal{A} -équivalente à un germe déduit de \underline{F} par ajout d'une fonction de Morse parasite.

2.3 Lemme de réduction :

Soit $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_N\}$ un germe de fonction tel que $f(0) = 0$, $df(0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) \neq 0$.

Alors f peut s'écrire sous la forme

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_1(x_2, \dots, x_N) + \frac{x_1^2}{2},$$

où $f_1 \in \mathbb{C}\{x_2, \dots, x_N\}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) \neq 0$.

Preuve. Posons $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, \dots, x_N)$.

D'après le théorème des fonctions implicites l'équation $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x') = 0$ admet une solution unique $x_1 = w(x')$. On pose $f_1(x') = f(w(x'), x')$, et on

remarque que $\frac{\partial f_1}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x'}(w(x'), x')$, de sorte que la fonction $f - f_1$ et toutes

ses dérivées s'annule sur l'hypersurface lisse réduite $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$. On a donc bien $f - f_1 \in x_1^2$, où x_1 est un générateur convenable de l'idéal $(\frac{\partial f}{\partial x_1})$.

N.B. Le lemme ci-dessus est essentiellement un cas particulier du

« lemme de Morse avec paramètres » ou « lemme de Gromoll-Meyer », qui s'en déduit par une récurrence triviale.

2.4 Forme réduite d'un germe d'application non dégénérée

Soit $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n+p}\}$ un germe de fonction définissant le modèle local 1.3 d'un germe d'application r -réticulée non dégénérée. On supposera pour simplifier que $\sigma_0 = \emptyset$, c.à.d. $df(0) = 0$.

La "réduction" de f va se faire en trois étapes :

1^{ère} étape: rendre $n \geq p+r$: on y arrive en ajoutant à f une "fonction de Morse parasite".

2^{ème} étape: rendre $n = p+r$: on y arrive par une succession de réductions 2.3. Si $n > p+r$, on a en particulier $n > p$ de sorte que

d'après 1.3 iii) la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (0) \right)_{i,j=1,2,\dots,n}$ a au moins un

mineur d'ordre $n-p$ non nul dans la bande verticale $j > r$. Comme $n-p > r$ ce mineur contient au moins un élément non nul a_{ij} dans une ligne d'indice $i > r$. Alors la forme quadratique Hess f sera non nulle sur l'espace à 2 dimensions engendré par $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$, et un changement linéaire de coordonnées dans cet espace permet de se ramener au cas où $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(0) \neq 0$ ce qui permet d'appliquer la réduction 2.3.

3^{ème} étape: réduction des r variables distinguées :

on suppose que $n = p+r$, et il est commode de changer le nom des variables :

$$\mathbb{C}^{n+p} = \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \ni (z, x, y).$$

L'hypothèse 1.3 iii) de non dégénérescence peut se décomposer en deux conditions de rang maximum des matrices rectangulaires A et B figurées ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
 A \left\{ \begin{array}{l} r \\ p \end{array} \right. \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} p \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(o) \end{array} & \begin{array}{c} p \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(o) \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \end{array} & \begin{array}{c} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{rg } A = r \\ \text{rg } B = p \end{array}
 \end{array}$$

La condition $\text{rg } B = p$ signifie que parmi les vecteurs

$d_x \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, d_x \frac{\partial f}{\partial x_p}, d_x \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, d_x \frac{\partial f}{\partial y_p}$ il en est p qui sont linéairement indépendants, et l'on peut toujours supposer que ce sont les p derniers

(quitte à faire un changement de variable linéaire du type $x_i \mapsto x_i + \sum_j c_{ij} y_j$, $y_j \mapsto y_j$, qui change $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ en $\frac{\partial f}{\partial y_j} + \sum_i c_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}$).

Alors les fonctions $z_1, \dots, z_r, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_p} \in \mathcal{C}\{z, x, y\}$ peuvent être prises comme coordonnées locales des fibres de la projection $\mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^p \times \mathcal{C}^p \ni (z, x, y) \mapsto y \in \mathcal{C}^p$.

En notant toujours (z, x, y) les nouvelles coordonnées ainsi choisies on a

$$x_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, x_p = \frac{\partial f}{\partial y_p} \text{ ce qui veut dire que } f \text{ est de la forme}$$

$$f(z, x, y) = \tilde{h}(z, x) + \sum_{i=1}^p x_i y_i, \text{ avec } \tilde{h} \text{ indépendant de } y.$$

Récrivons dans ces coordonnées les matrices A, B :

$$\begin{array}{l}
 A \left\{ \begin{array}{l} r \\ p \end{array} \right. \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} p \\ \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial z \partial x}(o) \end{array} & 0 \\ \hline \begin{array}{c} \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x \partial x}(o) \end{array} & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

et prenons en compte l'hypothèse $\text{rg } A = r$.

Elle implique que la 1ère ligne de la matrice A a au moins un élément non nul,

disons par exemple $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial z_1 \partial x_1}(o) \neq 0$.

Par un changement de coordonnées $(z_1, x_1) \mapsto (z_1, x_1 + cz_1)$ on peut se ramener

au cas où $\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial z_1^2}(o) \neq 0$, ce qui permet d'appliquer le lemme de réduction 3.3

et d'écrire

$$\tilde{h}(z,x) = \underline{z}_1^2 + \tilde{h}_1(z',x) ,$$

où $\underline{z}_1 \in \mathbb{C}\{z,x\}$, $\partial \underline{z}_1 / \partial z_1 \neq 0$, et $z' = (z_2, \dots, z_r)$.

On vérifie que la fonction \tilde{h}_1 vérifie les mêmes hypothèses que \tilde{h} avec (r,n) remplacé par $(r-1,n)$, ce qui permet de continuer la réduction et d'aboutir à la formule

$$\tilde{h}(z,x) = g(z,x) + h(x)$$

où $g = \sum_{i=1}^r \underline{z}_i^2$ est une somme de carrés de fonctions $\underline{z}_i \in \mathbb{C}\{z,x\}$ pouvant être

considérées comme coordonnées locales des fibres de la projection

$\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p \ni (z,x) \longmapsto x \in \mathbb{C}^p$. Autrement dit g est un germe de déformation, paramétré par x , d'une fonction de Morse des variables z_1, \dots, z_r (fonction de Morse "réticulée" au sens du n°5.1).

Conclusion : Tout germe d'application r -réticulée non dégénérée est équivalent, au sens 2.2, à un germe de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \\ \begin{array}{ccc} z & x & y \end{array} & & \begin{array}{c} y_o = f(z,x,y), y \end{array} \end{array}$$

avec $f(z,x,y) = g(z,x) + h(x) + \sum_{i=1}^p x_i y_i$

où h vérifie $dh(o) = 0$, et où g est une déformation de fonction de Morse réticulée (cf. §5).

Cette forme sera appelée "forme réduite" du germe d'application étudié.

§ 3 - CONSTRUCTION D'UN GERME D'APPLICATION DE CONFIGURATION CARACTÉRISTIQUE
DONNÉE

Le but de ce paragraphe est de construire un germe d'application
réticulée non dégénérée ayant pour configuration caractéristique une confi-
guration r-cubique régulière donnée à l'avance.

3.1 Fonction génératrice d'un germe de variété holonome
(d'après Hörmander, [7]).

Lemme : Soit $\check{V} \subset T^*Y$, $Y \approx \mathbb{C}^{p+1}$ un germe, en dehors de la section nulle,
de variété holonome conique. Alors pour un choix générique des coordonnées
locales y_0, y_1, \dots, y_p dans Y , les coordonnées cotangentes correspondantes
 $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_p$ forment un système de coordonnées locales de \check{V} .

Si le germe est considéré au point $(0, dy_0)$ il s'agit de s'arranger
pour que la section constante $y \longmapsto dy_0$ du fibré cotangent soit trans-
verse à \check{V} .

On y arrive par un changement de coordonnées

$$(y_0, y_1, \dots, y_p) \longmapsto \left(y'_0 = y_0 + \sum_{i,j=0}^p \frac{1}{2} a_{ij} y_i y_j, y'_1 = y_1, \dots, y'_p = y_p \right)$$

pour un choix générique de la matrice symétrique (a_{ij}) .

Ayant choisi les coordonnées comme dans le lemme ci-dessus,

considérons sur \check{V} la forme différentielle $\sum_{i=0}^p y_i d\eta_i$. C'est une forme
fermée (puisque \check{V} est isotrope), donc une forme exacte (lemme de Poincaré).
Donc il existe sur \check{V} un germe de fonction $\check{h}(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_p)$, homogène de
degré 1, tel que $y_i = \frac{\partial \check{h}}{\partial \eta_i}$, $i = 0, 1, \dots, p$.

On l'appellera fonction génératrice de \check{V} .

Soit maintenant $V \subset P^*Y$ le germe de variété projective associée à \check{V} .

on munira V des coordonnées locales $x_i = \frac{\eta_1}{\eta_0}, \dots, x_p = \frac{\eta_p}{\eta_0}$, et on appellera

fonction génératrice de V la fonction $h(x_1, \dots, x_p) = \check{h}(1, x_1, \dots, x_p)$.

Sur V on a $y_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}$, $i=1,2,\dots,p$, et $y_0 = h(x) - \sum_{i=1}^p x_i y_i$.

3.2 Une transformation de contact

Soit h la fonction génératrice d'un germe de variété holonome $V \subset P^*Y$.

La fonction $k(x,y) = h(x) - \sum_{i=1}^p x_i y_i$ vérifie les hypothèses de l'Appendice B 0, et définit donc une transformation de contact dont les équations sont

$$y_0 = x_0 + h(x) - \sum_{i=1}^p x_i y_i$$

$$y_i = \frac{\partial h}{\partial x_i} - \xi_i / \xi_0, \quad i=1,\dots,p$$

$$\eta_0 = \xi_0$$

$$\eta_i / \eta_0 = x_i, \quad i=1,\dots,p.$$

L'image réciproque de la variété V par cette transformation de contact est la variété d'équations $(x_0 = 0, \xi / \xi_0 = 0)$.

Plus généralement, l'image réciproque de toute variété holonome vérifiant les conditions du lemme 3.1, de fonction génératrice h' , est la variété holonome d'équations $x_0 = h' - h, \xi / \xi_0 = -\frac{\partial}{\partial x}(h' - h)$, autrement dit le fibré conormal à l'hypersurface lisse d'équation $x_0 = (h' - h)(x)$.

Le lecteur pourra, s'il le désire, faire mentalement une telle transformation de contact avant de lire les constructions qui vont suivre.

3.3 Relations entre les fonctions génératrices d'une configuration r-cubique régulière

Soit $(V_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ une famille de sous-variétés holonomes de P^*Y

engendrant une configuration r-cubique régulière, et choisissons dans Y des coordonnées locales y_0, \dots, y_p telles que les conditions du lemme 3.1 soient vérifiées pour chacune des variétés V_σ . Notons h_σ les fonctions génératrices des V_σ .

Propriétés des fonctions génératrices.

- i) Pour toute arête α , d'origine σ et d'extrémité σ' , il existe un germe de fonction $x_\alpha \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_p\}$, à différentielle non nulle, telle que $h_{\sigma'} - h_\sigma = x_\alpha^2$.
- ii) Pour tout sous-graphe connexe A du 1-squelette du cube, les $x_\alpha, \alpha \in A$ engendrent un idéal qui ne dépend que de $\mathcal{Q}(A)$, plus petite face du cube contenant A , et qui définit une sous-variété lisse de \mathbb{C}^p , de codimension égale à $\dim \mathcal{Q}(A)$. En particulier, si A ne contient aucun couple d'arêtes parallèles, les dx_α ($\alpha \in A$) sont linéairement indépendantes.

Preuve. Exprimons la condition "d'interaction régulière" de deux variétés $V_\sigma, V_{\sigma'}$, dont les indices sont deux sommets "contigus" (origine et extrémité d'une même arête α) : elle revient à écrire que dans V_σ l'intersection $V_\sigma \cap V_{\sigma'}$, est un germe d'hypersurface lisse réduite.

En munissant V_σ des coordonnées locales x_1, \dots, x_p définies en 3.1, et en posant $h_{\sigma'} = h_\sigma - h_\alpha$, on voit immédiatement que $V_\sigma \cap V_{\sigma'}$ est définie dans V_σ par l'idéal $\left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_p}, h_\alpha \right)$, c'est-à-dire l'idéal jacobien de

h_α . Dire que cet idéal est un diviseur lisse réduit équivaut à dire que $(h_\alpha) = (x_\alpha^2)$, x_α étant n'importe quelle équation réduite de ce diviseur (comme la notion "d'idéal jacobien" est invariante par changement de coordonnées on peut se ramener à démontrer l'affirmation lorsque x_α est l'une des coordonnées ; le calcul est alors immédiat). Quitte à multiplier x_α par un élément inversible on a donc bien $h_\alpha = x_\alpha^2$, ce qui démontre i).

L'affirmation ii) se déduit immédiatement de la définition d'une "configuration cubique régulière", compte tenu du lemme suivant :

Lemme : Notons A [resp. S] l'ensemble des arêtes [resp. sommets] d'un sous-graphe connexe du cube.

Alors la projection $x : P^*Y \longrightarrow \mathbb{C}^p$
 $(y, \eta) \longmapsto x_1 = \frac{\eta_1}{\eta_o}, \dots, x_p = \frac{\eta_p}{\eta_o}$

envoie $\bigcap_{\sigma \in S} V_\sigma$ isomorphiquement sur le sous-espace analytique de \mathbb{C}^p défini par l'idéal $\sum_{\alpha \in A} (x_\alpha)$.

Nous venons de démontrer ce lemme dans le cas où A n'a qu'un élément. Le cas général s'en déduit par une récurrence immédiate sur le nombre d'éléments de A.

Remarque. Compte tenu de la remarque 1.0, il est facile de voir que les propriétés i) ii) suffisent à caractériser une configuration r-cubique régulière : autrement dit si les fonctions génératrices h_σ d'une famille de variétés holonomes V_σ vérifient ces propriétés, (V_σ) engendre une configuration r-cubique régulière.

3.4 Familles r-cubiques régulières de fonctions

Il sera commode de convenir désormais que le 1-squelette du cube est un graphe orienté, dont les arêtes sont les couples $\alpha = (\sigma, \sigma')$ tels que l'ensemble σ' ait un élément de plus que σ (et non l'inverse). Avec cette convention un "chemin orienté" sur ce graphe n'aura jamais deux arêtes parallèles.

Soit donc $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ un tel chemin orienté partant du sommet ϕ pour aboutir à un sommet σ .

Alors en posant $g_\sigma(x) = h_\sigma(x) - h_\phi(x)$ on a évidemment

$$g_\sigma(x) = \sum_{i=1}^s x_{\alpha_i}^2$$

ce qui donne une décomposition de g_σ du type "fonction de Morse de s variables". Il est remarquable que cette formule donne pour la même fonction g_σ autant de "décompositions de Morse" (en général distinctes) qu'il existe de chemins orientés joignant ϕ à σ . Ce phénomène sera étudié plus en détail au §5.

Une telle famille $(g_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ sera appelée "famille r-cubique régulière de fonctions" : autrement dit, il s'agit d'une famille de fonctions vérifiant les propriétés 3.3 i) ii) avec la condition supplémentaire $g_\phi = 0$. Remarquons que d'après la propriété 3.3 ii), les fonctions $z_1 = x_{\phi,1}, z_2 = x_{\phi,2}, \dots, z_r = x_{\phi,r}$ (associées aux r "arêtes de base" du cube) peuvent être prises comme r premières coordonnées d'un système de coordonnées locales. Si les coordonnées sont ainsi choisies, et si g_σ ne dépend pas des z_j pour lesquels $j \in I_r - \sigma$, nous dirons que la famille r-cubique régulière de fonctions (g_σ) est "distinguée".

Soit donc $(\gamma_\sigma \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_r, u_1, u_2, \dots\})_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ une telle famille distinguée.

Nous dirons qu'une famille r -cubique régulière de fonctions
 $(g_\sigma \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_p\})_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ admet (γ_σ) comme modèle distingué si par une
 substitution convenable $z_i \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_p\}$, $u_j \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_p\}$
 on a

$$g_\sigma(x) = \gamma_\sigma(z(x), u(x)) .$$

Question 1 : Toute famille r -cubique régulière admet-elle un modèle distingué ?

Question 2 : Existe-t-il un «modèle distingué universel ?»

- Nous entendons par là une famille r -cubique régulière distinguée
 (γ_σ) , analytique pour (z_1, \dots, z_r) dans un voisinage de l'origine de \mathbb{C}^r et
 pour $u \in U$, variété analytique complexe, telle que toute famille r -cubique
 régulière de fonctions admette comme modèle distingué le germe de la famille
 (γ_σ) en un point convenable $u_0 \in U$.

Nous verrons plus tard que la réponse à ces deux questions est affirmative :
 les cas $r=0,1$ sont triviaux (pour $r=1$ on prend $U=\{1 \text{ point}\}$, $\gamma_\emptyset=0$, $\gamma_1=z^2$) ;
 un modèle distingué universel pour le cas $r=2$ est construit dans l'Appendice A1 ;
 les cas $r \geq 3$ sont beaucoup plus difficiles, et nous aurons besoin pour les
 résoudre de toutes les considérations géométriques du §5, ainsi que d'une cons-
 truction très technique effectué dans l'Appendice A2.

3.5 Construction d'un germe d'application réticulée à partir d'un modèle distingué

Soit $(g_\sigma = h_\sigma - h_\phi)_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ la famille r -cubique régulière de
 fonctions définie par les fonctions génératrices h_σ d'une configuration
 r -cubique régulière.
Supposons que (g_σ) admette un modèle distingué $(\gamma_\sigma \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_r, u_1, \dots, u_N\})$

$$g_\sigma(x) = \gamma_\sigma(z(x), u(x)) .$$

Pour tout $\sigma \in \mathcal{P}(I_r)$, considérons la décomposition de la fonction γ_{I_r} :

$$\gamma_{I_r}(z, u) = \gamma_\sigma(z, u) + \sum_{i=1}^{r-|\sigma|} z_{\alpha_i}(z, u)^2 ,$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-|\sigma|})$ est un chemin orienté joignant σ à I_r .

En faisant dans cette décomposition la substitution $z \mapsto z+z(x)$, $u \mapsto u(x)$, on obtient pour la fonction $\gamma_{I_r}(z+z(x), u(x))$, que nous noterons désormais $g(z,x)$, une décomposition analogue dont nous allons regarder la restriction à $Z_\sigma \times \mathbb{C}^p = \{(z,x) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p \mid \forall i \in \sigma, z_i = 0\}$. Comme γ_σ ne dépend pas des z_j ($j \notin \sigma$), on a

$$\gamma_\sigma(z+z(x), u(x))|_{Z_\sigma \times \mathbb{C}^p} = \gamma_\sigma(z(x), u(x)) = g_\sigma(x).$$

Par conséquent, la restriction de $g(z,x)$ admet la décomposition $g(z,x)|_{Z_\sigma \times \mathbb{C}^p} = g_\sigma(x) + \text{fonction de Morse parasite}$.

Conclusion : L'application réticulée

$$\begin{array}{ccc} G : \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \\ \begin{array}{cc} z & x \end{array} & & \begin{array}{cc} x_0 & x \end{array} \\ & & \parallel \\ & & g(z,x) \end{array}$$

est non dégénérée, et pour tout $\sigma \in \mathcal{P}(I_r)$ sa restriction $G|_{Z_\sigma \times \mathbb{C}^p}$ a pour lieu discriminant Δ_σ l'hypersurface d'équation $x_0 = g_\sigma(x)$.

Compte tenu de 3.2, nous savons ainsi construire un germe d'application réticulée non dégénérée ayant pour configuration caractéristique une configuration donnée (pourvu que celle-ci admette un modèle distingué) : ce sera l'application composée

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p & \xrightarrow{G \times 1_{\mathbb{C}^p}} & (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \\ \begin{array}{ccc} z & x & y \end{array} & & \begin{array}{ccc} x_0 & x & y \end{array} & & \begin{array}{cc} y_0 & y \end{array} \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & g(z,x) & & x_0 + h_\phi(x) - \sum_{i=1}^p x_i y_i \end{array}$$

§ 4 - DÉPLOIEMENTS ET STABILITÉ : point de vue géométrique

4.0 Déploiements d'applications réticulées

On appelle déploiement d'un germe d'application réticulée \underline{F} un diagramme commutatif d'applications réticulées

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \xrightarrow{\underline{F}} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{X} \times S & \xrightarrow{\tilde{F}} & Y \times S \\ & \searrow \text{pr}_2 \quad \swarrow \text{pr}_2 & \\ & S & \end{array}$$

Le germe de variété analytique S est appelé base du déploiement. Pour tout germe d'application $\lambda : S' \rightarrow S$, on définit le déploiement $\lambda^{-1} \tilde{F}$ par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} \times S' & \xrightarrow{\lambda^{-1} \tilde{F}} & Y \times S' \\ \downarrow \text{id}_X \times \lambda & & \downarrow \text{id}_Y \times \lambda \\ \underline{X} \times S & \xrightarrow{\tilde{F}} & Y \times S \end{array}$$

On dit que $\lambda^{-1} \tilde{F}$ est le déploiement déduit de \tilde{F} par le changement de base λ .

Deux déploiements \tilde{F} et \tilde{F}' de même base S sont dits \mathcal{A} -équivalents s'il existe un germe \underline{G} de "déploiement réticulé de l'automorphisme identique id_X " tel que $\tilde{F}' = \tilde{F} \circ \underline{G}$: par l'expression entre guillemets, nous entendons un \underline{G} qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \xrightarrow{\text{id}_X} & \underline{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{X} \times S & \xrightarrow{\underline{G}} & \underline{X} \times S \\ & \searrow \text{pr}_2 \quad \swarrow \text{pr}_2 & \\ & S & \end{array} \quad \text{avec } G(X_\sigma) = X_\sigma \quad \forall \sigma.$$

De même, \tilde{F} et \tilde{F}' sont dits \mathcal{A} -équivalents si $\tilde{F}' = H \circ \tilde{F} \circ \underline{G}$, où \underline{G} est comme ci-dessus tandis que H est un déploiement (non réticulé) de id_Y .

Un déploiement est dit \mathcal{R} -trivial [resp. \mathcal{A} -trivial] s'il est \mathcal{R} -équivalent [resp. \mathcal{A} -équivalent] au "déploiement constant" (dédduit de \underline{F} par le changement de base constant $S \rightarrow *$).

4.1 Déploiements d'ensembles analytiques holonomes

On se propose de définir une notion de "déploiement" d'un germe d'ensemble analytique holonome donné en un point θ de P^*Y .

Soit $S = (S, s_0)$ un germe de variété analytique, posons $\tilde{Y} = Y \times S$, et notons $P^*\tilde{Y}$ l'ouvert de $P^*\tilde{Y}$ formé des codirections "non parallèles à S " (c'est-à-dire non images réciproques de codirections de S). On a une application canonique de "restriction des covecteurs"

$$\rho : P^*\tilde{Y} \longrightarrow P^*Y \times S$$

Soit $\tilde{\theta} \in P^*\tilde{Y}$ une codirection telle que $\rho(\tilde{\theta}) = \theta$, et soit \tilde{V} un germe en $\tilde{\theta}$ d'ensemble analytique holonome vérifiant la condition suivante :

- i) l'application $\rho|_{\tilde{V}}$ est un morphisme fini ;

cette condition équivaut à la suivante :

- ii) l'inclusion $Y \times s_0 \hookrightarrow Y \times S = \tilde{Y}$ est non caractéristique pour \tilde{V} .

Notons \tilde{V}^{rel} l'ensemble analytique image de \tilde{V} par ce morphisme fini. On peut le considérer comme ensemble analytique relatif de base S , et ses fibres sont holonomes. Sa fibre au-dessus de s_0 sera notée V , et nous dirons que :

« \tilde{V} est un déploiement de V »

« \tilde{V}^{rel} est la déformation de V associée au déploiement \tilde{V} ».

Cette définition purement ensembliste nous suffira pour le moment, en attendant le §7 où les ensembles \tilde{V} , \tilde{V}^{rel} , V seront porteurs de faisceaux de modules analytiques cohérents.

Lemme :

- i) Si \tilde{V}^{rel} est lisse au-dessus de S (c.à.d. si la projection $\tilde{V}^{\text{rel}} \rightarrow S$ est une submersion de variétés), \tilde{V} l'est aussi et l'application $\rho|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}^{\text{rel}}$ est un isomorphisme.
- ii) La donnée de \tilde{V}^{rel} détermine sans ambiguïté le point $\tilde{\theta}$ et le germe d'ensemble analytique holonome \tilde{V} , qui au-dessus de la partie lisse de \tilde{V}^{rel} en est un revêtement de degré 1.

Preuve. Il sera commode de remplacer les ensembles projectifs $\tilde{V}, \tilde{V}^{\text{rel}}, V$ par les cônes correspondants $\check{V}, \check{V}^{\text{rel}}, \check{V}$ (considérés en dehors de la section nulle des fibrés cotangents).

Si \tilde{V}^{rel} est lisse au-dessus de S , on peut choisir sur Y des coordonnées locales y_0, \dots, y_p telles que les coordonnées cotangentes correspondantes η_0, \dots, η_p , jointes à un système de coordonnées t_1, \dots, t_q de S , forment un système de coordonnées locales de \check{V}^{rel} (il suffit pour cela que η_0, \dots, η_p forme un système de coordonnées locales de \check{V} , ce qui est possible d'après le lemme de Hörmander cité au n°3.1).

Or la forme différentielle $\sum_{i=0}^p \eta_i dy_i + \sum_{j=1}^q \tau_j dt_j$ s'annule en restriction

à l'ensemble holonome conique qu'est \check{V} (car cette forme est le produit intérieur de la 2-forme fondamentale par le champ de vecteurs $\sum_{i=0}^p \eta_i \frac{\partial}{\partial \eta_i} + \sum_{j=1}^q \tau_j \frac{\partial}{\partial \tau_j}$,

qui est tangent à tout ensemble conique). Si donc on désigne par $\tau_j(\eta, t)$ ($j=1, \dots, q$) les "fonctions multiformes" définies au-dessus de \check{V}^{rel} par le morphisme fini $\rho: \check{V} \longrightarrow \check{V}^{\text{rel}}$, ces fonctions doivent vérifier l'équation

$$\sum_{i=0}^p \eta_i dy_i(\eta, t) = - \sum_{j=1}^q \tau_j(\eta, t) dt_j,$$

et sont donc en fait des fonctions holomorphes données par les formules

$$\tau_j(\eta, t) = - \sum_{i=0}^p \eta_i \frac{\partial y_i(\eta, t)}{\partial t_j}$$

ce qui démontre les deux affirmations i) et ii) dans le cas où \tilde{V}^{rel} est lisse au-dessus de S .

L'affirmation ii) dans le cas général en résulte immédiatement par passage à l'adhérence à partir de l'image réciproque de la partie lisse de \tilde{V}^{rel} .

Remarque : Sous l'hypothèse où \tilde{V}^{rel} est lisse au-dessus de S , il existe localement une fonction $\check{h}(\eta, t)$, homogène de degré 1 par rapport à η telle

$$\text{que } y_i(\eta, t) = \frac{\partial \check{h}}{\partial \eta_i}, \quad \tau_j(\eta, t) = - \frac{\partial \check{h}}{\partial t_j}$$

Il suffit pour le voir de remarquer que sur \check{V} la 1-forme différentielle

$$\sum_{i=0}^p y_i d\eta_i - \sum_{j=1}^q \tau_j dt_j \text{ est fermée, donc exacte d'après le lemme de Poincaré.}$$

Changements de base.

Soit \tilde{V} un déploiement de V , de base S , et soit $\lambda : S' \longrightarrow S$ un germe d'application analytique.

Considérons la paire $(P^*\tilde{Y}, \tilde{V})$ comme paire d'espaces projetés sur \tilde{Y} .

Par le changement de base $\mathbb{A}_Y \times \lambda : \tilde{Y}' = Y \times S' \longrightarrow \tilde{Y} = Y \times S$ on la transforme en une paire d'espaces projetés sur \tilde{Y}' que nous noterons $(P^*\tilde{Y}|_{\tilde{Y}'}, \tilde{V}|_{\tilde{Y}'})$. Or l'application cotangente à $\mathbb{A}_Y \times \lambda$ définit une application $\rho_\lambda : P^*\tilde{Y}|_{\tilde{Y}'} \longrightarrow P^*\tilde{Y}'$, et l'on vérifie que restreinte à $\tilde{V}|_{\tilde{Y}'}$, cette application est un morphisme fini.

On pose

$$\tilde{V}' = \rho_\lambda (\tilde{V}|_{\tilde{Y}'})$$

On vérifie que \tilde{V}' est un déploiement de V , que l'on dira déduit du déploiement \tilde{V} par le changement de base λ .

Déploiements triviaux.

Deux déploiements \tilde{V} et \tilde{V}' de même base S sont dits isomorphes s'il existe un germe d'automorphisme de $\tilde{Y} = Y \times S$, déploiement de \mathbb{A}_Y , tel que l'automorphisme cotangent transforme \tilde{V} en \tilde{V}' .

Un déploiement est dit trivial s'il est isomorphe au "déploiement constant" (dédié de V par le changement de base constant $S \rightarrow *$).

4.2 Déploiements de configurations holonomes r-cubiques régulières

En plus des hypothèses 4.1, supposons que \tilde{V} soit le support d'une configuration r-cubique régulière \tilde{V} . Supposons de plus que chacune des strates de la configuration soit lisse au-dessus de S (c.à.d. que la projection sur S , restreinte à chaque strate, soit une submersion).

Sous ces hypothèses V est le support d'une configuration r-cubique régulière V , fibre de \tilde{V} au-dessus du point s_0 . Nous résumerons cette situation en disant que la configuration \tilde{V} est un déploiement de la configuration V .

On définit comme en 4.1 les changements de base, déploiements isomorphes, déploiements triviaux (isomorphes au déploiement constant)...

Exemple : Soit V la configuration caractéristique d'un germe d'application réticulée non dégénérée $F : X \longrightarrow Y$. Alors tout déploiement \tilde{F} de F a pour configuration caractéristique un déploiement \tilde{V} de V , et la correspondance $\tilde{F} \longmapsto \tilde{V}$ est un foncteur de la catégorie des déploiements de F dans la catégorie des déploiements de V (munies des morphismes de changement de base).

Proposition. Deux déploiements \tilde{F} , \tilde{F}' de F , de même base S , sont

\mathcal{A} -équivalents si et seulement s'ils ont même configuration caractéristique.

Ils sont \mathcal{A} -équivalents si et seulement si leurs configurations caractéristiques sont isomorphes (en tant que déploiements).

Preuve. Pour prouver la première affirmation (d'où la seconde découlera immédiatement), il suffit d'appliquer le théorème 2.1, en remarquant que la condition pour G de commuter aux projections sur S est automatique dès lors que \tilde{F} et \tilde{F}' commutent à ces projections.

Quant à la condition $G|_X \times s_0 = 1_X$, on la réalise en multipliant G par le déploiement constant de $G^{-1}|_X \times s_0$.

Corollaire. Un déploiement \tilde{F} de F est \mathcal{A} -trivial [resp. \mathcal{A} -trivial] si et seulement si sa configuration caractéristique \tilde{V} est un déploiement constant [resp. déploiement trivial] de celle V de F .

4.3 Caractéristiques des configurations stables

Théorème. Soit F un germe d'application r -réticulée non dégénérée, de configuration caractéristique V . Alors pour que V soit stable (c'est-à-dire n'admette que des déploiements triviaux au sens 4.2) il faut et il suffit que F soit stable (c'est-à-dire n'admette que des déploiements \mathcal{A} -triviaux).

Preuve. La nécessité de la condition est une conséquence immédiate du corollaire 4.2.

Inversement, supposons F stable. Quitte à restreindre F à $X_{\sigma_0} = (X_\sigma)_\sigma \supset \sigma_0$, on peut supposer que $r = r$ ($\sigma_0 = \phi$). On réduit ensuite les "fonctions de Morse parasites" (n°2.2), en remarquant que cette réduction n'affecte pas la stabilité de F (résultat de la théorie de Mather bien connu pour les applications usuelles, facile à généraliser pour les applications réticulées). On est ainsi ramené au cas où F est de la forme réduite 2.4, donc \mathcal{A} -équivalent au germe construit au n°3.5. Soit \tilde{V} un déploiement de V . Si l'on sait démontrer que \tilde{V} est configuration caractéristique d'un

déploiement \tilde{F} de F on a terminé, car F est censée n'avoir que des déploiements \mathcal{A} -triviaux. Le théorème sera donc démontré quand nous aurons démontré le

Lemme : Tout déploiement \tilde{V} d'une configuration holonome r -cubique régulière V peut être considéré comme configuration caractéristique d'un germe d'application non dégénérée \tilde{F} , qui est un déploiement du germe F construit au n°3.5.

Preuve du lemme : La remarque 4.1 permet d'associer à chaque composante \tilde{V}_σ de \tilde{V} une "fonction génératrice" $h_\sigma(x,t)$, analogue "relatif" de la fonction génératrice du n°3.1.

En posant $g_\sigma(x,t) = h_\sigma(x,t) - h_\phi(x,t)$ on obtient une famille r -cubique régulière de fonctions, à laquelle la construction 3.5 s'applique sans changement.

§ 5 - FONCTIONS DE MORSE RÉTICULÉES

Soit Z le germe d'espace \mathbb{C}^r réticulé par ses r coordonnées z_1, \dots, z_r . Une fonction de Morse réticulée est un germe de fonction $g \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_r\}$ dont la restriction à chaque Z_σ ($\sigma \in \mathcal{P}(I_r)$) est de Morse. Autrement dit pour tout $\sigma \in \mathcal{P}(I_r)$ les r fonctions z_i ($i \in \sigma$), $\frac{\partial g}{\partial z_j}$ ($j \notin \sigma$) forment un système de coordonnées locales à l'origine de \mathbb{C}^r .

5.1 Famille r -cubique régulière de fonctions engendrée par une fonction de Morse réticulée

Pour tout $\sigma \in \mathcal{P}(I_r)$, notons $z = (z_\sigma, z_{\sigma'})$, $z_\sigma = (z_i)_{i \in \sigma}$, $z_{\sigma'} = (z_j)_{j \notin \sigma}$

L'hypothèse sur g entraîne, grâce au théorème des fonctions implicites, que le système d'équations

$$\frac{\partial g}{\partial z_j}(z_\sigma, z_{\sigma'}) = 0 \quad , \quad j \notin \sigma$$

admet une solution unique $z_{\sigma'} = w_\sigma(z_\sigma)$, et l'on pose

$$g_\sigma(z_\sigma) = g(z_\sigma, w_\sigma(z_\sigma)).$$

Il est facile de voir que chaque g_σ est encore une fonction de Morse réticulée de $|\sigma|$ variables, de plus le lemme de réduction 2.3 montre que pour toute arête $\alpha = (\sigma, \sigma')$ du cube, avec $\sigma' = \sigma \cup \{i\}$, on a

$g_{\sigma'}(z_{\sigma'}) = g_\sigma(z_\sigma) + z_\alpha^2$, où z_α est un élément d'ordre 1 de l'anneau $\mathbb{C}\{z_\sigma\}$, générateur de l'idéal $(\frac{\partial g_\sigma}{\partial z_i})$.

En résumé, la famille (g_σ) est une famille r -cubique régulière de fonctions, et cette famille est "distinguée" (n°3.4).

Exemple : Supposons que g soit une forme quadratique des variables z_1, \dots, z_r . La condition pour cette forme d'être non dégénérée en restriction à chacun des Z_σ sera appelée condition de "complète non dégénérescence". En remplaçant le théorème des fonctions implicites par le théorème de résolubilité des systèmes linéaires on obtient par la construction précédente un résultat curieux d'algèbre linéaire, qui précise la décomposition de Gauss d'une forme quadratique non dégénérée :

A toute forme quadratique g complètement non dégénérée de r variables est associée une famille $(g_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ de formes quadratiques complètement non dégénérées des variables z_i , $i \in \sigma$, et une famille de formes linéaires (z_α) indexées par l'ensemble des arêtes du r -cube, telles que

- i) pour tout arbre A ne contenant aucun couple d'arêtes parallèles,
les $(z_\alpha)_{\alpha \in A}$ sont linéairement indépendantes ;
- ii) pour tout chemin orienté $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ joignant ϕ à σ , on a $g_\sigma = \sum_{i=1}^s z_{\alpha_i}^2$.

Remarque. On prendra bien garde au fait que la construction 5.1 dépend des coordonnées choisies : il faut la considérer comme une construction sur un espace vectoriel réticulé, non pas sur une variété réticulée. Une version plus intrinsèque de cette construction sera donnée au n°5.3.

5.2 Un modèle universel pour les fonctions de Morse réticulées

Nous nous proposons de classifier, à \mathcal{R} -équivalence près (n°2.1), les germes à l'origine de fonctions de Morse réticulées. Pour cela, imitant les techniques standard de la théorie de Mather, introduisons la notion de \mathcal{R} -trivialité infinitésimale d'une déformation : une déformation infinitésimale $g + \epsilon \varphi \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_r\}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ est dite \mathcal{R} -triviale s'il existe une déformation infinitésimale de $\mathbb{1}_{\mathbb{C}^r}$, tangente à $z_1 \dots z_r = 0$, qui transforme $g + \epsilon \varphi$ en la déformation constante ; explicitement, cela signifie qu'il existe sur \mathbb{C}^r un champ de vecteurs de la forme $\sum_{i=1}^r a_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ ($a_i \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_r\}$) tel que $g + \epsilon \varphi = \left(1 + \epsilon \sum_{i=1}^r a_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right) g$, c'est-à-dire

$$\varphi \in \left(z_1 \frac{\partial g}{\partial z_1}, \dots, z_r \frac{\partial g}{\partial z_r} \right) = \mathcal{J}_g.$$

Lemme : Pour tout germe g de fonction de Morse réticulée,

- i) $\mathcal{J}_g \supset \mathcal{M}^{r+1}$, où \mathcal{M} désigne l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_r\}$.
- ii) L'espace quotient $E_{\mathcal{R}}(g) = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_r\} / \mathcal{J}_g$ est un espace vectoriel de dimension 2^r , et admet une base formée par les monomes

$$z^\sigma = \prod_{i \in \sigma} z_i, \quad \sigma \in \mathcal{P}(I_r) \quad (\text{avec la convention } z^\phi = 1).$$

Preuve. Posons, pour alléger les notations

$$z = (z_1, z') \quad , \quad z' = (z_2, \dots, z_r) \quad , \quad (z' \frac{\partial g}{\partial z'}) = (z_2 \frac{\partial g}{\partial z_2}, \dots, z_r \frac{\partial g}{\partial z_r}).$$

Comme $z_1 \frac{\partial g}{\partial z_1}$ n'est pas diviseur de zéro dans $\mathbb{C}\{z\}/(z' \frac{\partial g}{\partial z'})$ on a une suite exacte courte

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow \mathbb{C}\{z\}/(\frac{\partial g}{\partial z_1}, z' \frac{\partial g}{\partial z'}) & \xrightarrow{z_1} & \mathbb{C}\{z\}/(z_1 \frac{\partial g}{\partial z_1}, z' \frac{\partial g}{\partial z'}) & \longrightarrow & \mathbb{C}\{z\}/(z_1, z' \frac{\partial g}{\partial z'}) \longrightarrow 0 \\ & \parallel & \parallel & & \parallel \\ & \mathbb{C}\{z'\}/\mathcal{J}_{g_1} & \mathbb{C}\{z\}/\mathcal{J}_g & & \mathbb{C}\{z'\}/\mathcal{J}_{g_1} \end{array}$$

où g_1 resp. g_1 est la fonction de Morse réticulée des $r-1$ variables z' définie en restreignant g à $(\frac{\partial g}{\partial z_1} = 0)$ resp. $(z_1 = 0)$. Grâce à cette suite exacte, les deux affirmations du lemme se démontrent par une récurrence facile sur r .

De la partie i) du lemme on déduit le

Corollaire i) : Pour $r \geq 2$ tout germe de fonction de Morse réticulée est
| \mathcal{R} -déterminé par son jet à l'ordre r .

En effet soit g un germe de fonction de Morse réticulée de r variables ($r \geq 2$), et soit $\varphi \in \mathcal{M}^{r+1}$. Pour montrer que $g + \varphi$ est \mathcal{R} -équivalente à g on considère la déformation à un paramètre $g_t = g + t\varphi$. Comme $r \geq 2$, g_t est encore une fonction de Morse réticulée (propriété qui ne dépend que du jet d'ordre 2).

Donc $\frac{\partial g_t}{\partial t} = \varphi \in \mathcal{M}^{r+1} \subset \mathcal{J}_{g_t}$ d'après le lemme i), ce qui veut dire que la déformation (g_t) est infinitésimalement \mathcal{R} -triviale pour tout t , donc \mathcal{R} -triviale d'après un argument standard d'intégration de champ de vecteurs (cf. par exemple [13]).

D'après le lemme ci-dessus, un candidat plausible au titre de "famille universelle de fonctions de Morse réticulées" est la famille

$$\gamma_u(z) = \sum_{i=1}^r z_i^2 + 2 \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{P}(I_r) \\ |\sigma| \geq 2}} u_\sigma z^\sigma$$

paramétrée par $u = (u_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r), |\sigma| \geq 2}$.

La restriction $|\sigma| \geq 2$ assure que l'origine est un point critique de γ_u .

La propriété d'être "de Morse réticulée" est garantie en imposant aux coefficients $(u_\sigma)_{|\sigma|=2}$ de la partie quadratique des inéquations polynomiales $1 - u_{ij}^2 \neq 0$,
 $1 - u_{ij}^2 - u_{jk}^2 - u_{ki}^2 + 2u_{ij} u_{jk} u_{ki} \neq 0$, etc ... (non dégénérescence de tous les mineurs diagonaux de la forme quadratique). On notera U l'ouvert de \mathbb{A}^{2^r-1} , ensemble des valeurs de u pour lesquelles ces conditions sont vérifiées.

Théorème.

- i) Pour tout germe à l'origine de fonction de Morse réticulée g , il existe un $u \in U$ et un seul tel que g soit \mathcal{R} -équivalente à γ_u .
- ii) Pour toute famille analytique $(g_x)_{x \in X}$ de germes de fonctions de Morse réticulées, l'application $x \mapsto u(x)$ définie par i) est analytique. De plus la \mathcal{R} -équivalence entre g_x et $\gamma_{u(x)}$ peut être choisie localement sur X de façon à dépendre analytiquement de x (ce choix peut être fait globalement dans le cas où X est de Stein).

La démonstration du théorème (évident pour $r = 1$) va se faire par récurrence sur $r \geq 2$. La clef de la récurrence sera le lemme suivant, qui complète le corollaire i) :

Lemme iii) : Soit g un germe à l'origine de fonction de Morse réticulée (avec $r \geq 2$), et soit $\varphi \in z_1 \dots z_r \mathcal{M}$. Alors la \mathcal{R} -équivalence entre g et $g + \varphi$ peut être choisie de façon que sa restriction à tous les hyperplans $z_i = 0$ soit égale à l'identité.

La preuve est analogue à celle du corollaire i), en remarquant que maintenant $\frac{\partial g_t}{\partial t} = \varphi \in z_1 \dots z_r \mathcal{M} = z_1 \dots z_r \left(\frac{\partial g_t}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial g_t}{\partial z_r} \right)$ (car g_t est de Morse) ; pour tout t la déformation infinitésimale $g_t + \epsilon \varphi$ est donc \mathcal{R} -trivialisée par un champ de vecteurs nul sur l'hypersurface $z_1 \dots z_r = 0$, et dont l'intégration définit donc un automorphisme égal à l'identité sur cette hypersurface.

Pour exploiter ce lemme, considérons la filtration évidente de $Z = \mathbb{A}^r$: $Z = Z^{(r)} \supset Z^{(r-1)} \supset \dots$, où $Z^{(s)} = \bigcup_{|\sigma|=s} Z_\sigma$.

Appelons « $\mathcal{A}^{(s)}$ -équivalence » entre deux fonctions $g^{(s)}$ et $\gamma^{(s)}$ définies sur $Z^{(s)}$ la donnée d'un germe d'automorphisme $G^{(s)}$ de $Z^{(s)}$ (restriction d'un automorphisme réticulé de Z) tel que $\gamma^{(s)} = g^{(s)} \circ G^{(s)}$.

Remarquons que la restriction $\gamma_u|_{Z^{(s)}}$ du « modèle universel » γ_u ne dépend que des u_σ pour lesquels $|\sigma| \leq s$.

Corollaire iii) : Toute $\mathcal{A}^{(s-1)}$ -équivalence entre $g|_{Z^{(s-1)}}$ et $\gamma_u|_{Z^{(s-1)}}$ peut s'étendre, pour un choix convenable des $(u_\sigma)_{|\sigma| \leq s}$, en une $\mathcal{A}^{(s)}$ -équivalence entre $g|_{Z^{(s)}}$ et $\gamma_u|_{Z^{(s)}}$.

Preuve du corollaire iii) : Commençons par supposer $s = r$.

Soit $G^{(r-1)}$ une $\mathcal{A}^{(r-1)}$ -équivalence entre $g|_{Z^{(r-1)}}$ et $\gamma_u|_{Z^{(r-1)}}$, restriction d'un automorphisme réticulé G de Z .

Des relations $(g \circ G)|_{Z_i=0} = \sum_{j \neq i} z_j^2 + 2 \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{P}(I_{r-1}) \\ |\sigma| \geq 2}} u_\sigma z^\sigma$, $i = 1, \dots, r$

on tire $g \circ G = \sum_{i=1}^r z_i^2 + 2 \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{P}(I_r) \\ \sigma \neq I_r}} u_\sigma z^\sigma \pmod{(z_1 \dots z_r)}$.

D'après le lemme iii), un changement de variable égal à l'identité sur $Z^{(r-1)}$ permet de se ramener au cas où le terme correctif est de la forme $u_{I_r} z_1 \dots z_r$ ($u_{I_r} \in \mathbb{A}$), ce qui démontre le corollaire iii) dans le cas $s = r$.

En remarquant que la donnée d'un automorphisme $G^{(s)}$ de $Z^{(s)}$ équivaut à la donnée d'une collection d'automorphismes G_σ de Z_σ ($|\sigma| = r-s$) dont les restrictions aux Z_σ , ($|\sigma'| = r-s+1$) coïncident, le cas général se ramène au cas précédent, avec Z remplacé par Z_σ ($|\sigma| = r-s$).

Le corollaire iii) appliqué de proche en proche démontre la partie i) du théorème (à l'exception peut-être de l'unicité de u qui découlera de la proposition ci-dessous). Dans le cas où g varie dans une famille analytique $(g_x)_{x \in X}$, la construction du corollaire iii) peut être rendue analytique en x dans

la mesure où la \mathcal{A} -équivalence du lemme iii) peut être choisie dépendant analytiquement de x ; il suffit pour cela que l'appartenance de φ au faisceau

d'idéaux $z_1 \dots z_r \left(\frac{\partial g_t}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial g_t}{\partial z_r} \right) \in \mathcal{O}_X\{z_1, \dots, z_r\}$ implique l'existence de sections globales $a_i \in \mathcal{O}(X)\{z_1, \dots, z_r\}$ telles que $\varphi = \sum_i a_i z_1 \dots z_r \frac{\partial g_t}{\partial z_i}$,

ce qui est toujours vrai si X est de Stein.

En particulier, on peut prendre pour famille (g_x) la famille de tous les polynômes de degré $\leq r$ qui sont des fonctions de Morse réticulées, et l'on obtient ainsi une application analytique

$$\omega : \mathcal{X} = U \times \mathbb{C}^N \longrightarrow U \quad (N = \binom{r-1}{2} - 2^r)$$

de l'espace \mathcal{X} des jets d'ordre r de fonctions de Morse réticulées sur le sous espace $U = U \times \{0\}$ des jets de la forme particulière (γ_u) .

Proposition. L'application $\omega : \mathcal{X} \longrightarrow U$ fait de U l'espace analytique quotient de \mathcal{X} par l'action du groupe \mathcal{A} .

En effet, pour tout $u \in U$ $\omega^{-1}(u)$ est un sous-ensemble analytique de X , de codimension au plus égale à $\dim U$, inclus dans l'orbite de u qui est une sous-variété $\mathcal{A}(u)$ de codimension exactement égale à $\dim U$ (lemme ii)).

Comme cette orbite est connexe (car \mathcal{A} agit sur \mathcal{X} comme un groupe algébrique connexe), on a l'égalité $\omega^{-1}(u) = \mathcal{A}(u)$.

L'application ω est donc une « projection parallèle aux orbites » de \mathcal{X} sur une sous variété U transverse aux orbites (lemme ii)), et coupant chaque orbite en un point et un seul. .

5.3 Famille r-cubique régulière de fonctions engendrée par un déploiement de fonction de Morse réticulée

$$\text{Soit } G : \begin{array}{c} \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^n \\ z, x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \\ x_0 = \tilde{g}(z, x), x \end{array}$$

un déploiement d'une fonction de Morse réticulée $g(z) = \tilde{g}(z, 0)$.

En restriction à chacune des variétés $z_\sigma \times \mathbb{C}^n$, G est un déploiement de fonction de Morse ordinaire, donc un déploiement trivial, dont le lieu discriminant Δ_σ est donc la forme

$$\Delta_\sigma : x_0 = \tilde{h}_\sigma(x) \quad \tilde{h}_\sigma \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Supposons que l'application réticulée G soit non dégénérée (d'après 1.3 iii), cela signifie que la matrice jacobienne $\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial z \partial x}(0)$ est de rang r .

Alors la famille $(\tilde{g}_\sigma = \tilde{h}_\sigma - \tilde{h}_\phi)_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ est une famille r-cubique régulière

de fonctions : en effet la variété caractéristique $V_\sigma = p_{\Delta_\sigma}^*(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)$ est

donnée par les équations $x_0 = \tilde{h}_\sigma(x)$, $\xi_i / \xi_0 = \partial \tilde{h}_\sigma / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, et l'on peut répéter les raisonnements de 3.3 avec les "fonctions génératrices" \tilde{h}_σ .

Exemple :

Le "déploiement par translation"

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^r & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r \\ \begin{array}{c} z \\ \underline{x} \end{array} & & \begin{array}{c} x_0 \\ \underline{x} \end{array} \\ & \parallel & \\ & g(z + \underline{x}) & \end{array}$$

est évidemment non dégénéré (pour toute fonction de Morse réticulée g), et l'on vérifie aisément que les \tilde{g}_σ définis par ce déploiement particulier sont les g_σ construites au La remarque, faite en 5.1, que la construction des g_σ dépend des coordonnées n°5.1. choisies correspond au fait que la notion de la "translation" dépend des coordonnées !

• Caractère fonctoriel de la construction précédente :

Il est clair que la construction 5.3 est fonctorielle par rapport aux changements de base : si $\lambda^{-1}G : \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^{n'} \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n'}$ est un déploiement non dégénéré, déduit de $G : \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ par un changement de base $\lambda : \mathbb{C}^{n'} \longrightarrow \mathbb{C}^n$, la famille r-cubique régulière associée à $\lambda^{-1}G$ est déduite de $(g_\sigma(x))$ par le changement de base $x' = \lambda(x)$ (cf. n°4.2).

Autrement dit la construction 5.3 définit un foncteur \mathcal{F} de la catégorie des déploiements non dégénérés de fonctions de Morse réticulées dans celle des familles r-cubiques régulières de fonctions. Ce foncteur a la propriété suivante :

deux objets de la catégorie de départ ont même image dans la catégorie d'arrivée si et seulement s'ils sont \mathcal{R} -équivalents (cf. Proposition 4.2).

De plus si le déploiement G « contient les translations », c'est-à-dire s'il est de la forme

$$\begin{array}{ccc} G : \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^{r+n} & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{r+n} \\ z & \underline{x}, x & x_0, \underline{x}, x \\ & & \parallel \\ & & \tilde{g}(z+\underline{x}, x) \end{array}$$

la famille r-cubique régulière $\mathcal{F}G$ est distinguée (n°3.4).

Corollaire. Soit $\Gamma : \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^r \times U \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r \times U$

$$\begin{array}{ccc} z & \underline{x} & u \\ & & x_0, \underline{x} & u \\ & & \parallel \\ & & (\gamma_u(z+\underline{x})) \end{array}$$

le déploiement « contenant les translations » associé au modèle universel γ_u du n°5.2 (on considère Γ comme germe d'application le long du sous-ensemble $0 \times 0 \times U \subset \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^r \times U$).

Alors $\mathcal{F}\Gamma$ est une famille r-cubique régulière distinguée par rapport aux coordonnées \underline{x} , qui a la propriété d'« universalité » suivante : Pour tout déploiement G de fonction de Morse réticulée il existe une application analytique $\lambda : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^r \times U$ unique telle que $\mathcal{F}G = (\mathcal{F}\Gamma) \circ \lambda$.

Autrement dit, $\mathcal{F}\Gamma$ peut servir de modèle distingué universel à toutes les familles r-cubiques régulières de fonctions qui sont dans l'image du foncteur \mathcal{F} .

Preuve. La relation cherchée $\mathcal{F}G = (\mathcal{F}\Gamma) \circ \lambda$ équivaut à dire que G est \mathcal{R} -équivalente à $\lambda^{-1}\Gamma$. L'existence et l'unicité d'une telle application λ est garantie par le théorème 5.2.

Remarque. Inversement, la construction 3.5 montre que toute famille r-cubique régulière qui admet un modèle distingué est dans l'image du foncteur \mathcal{F} . Répondre affirmativement à la question 1 du n°3.4 équivaut donc à montrer que le

foncteur \mathcal{F} est surjectif sur les objets. D'après le corollaire ci-dessus on a donc équivalence entre les questions suivantes (auxquelles le n°5.4 va répondre affirmativement) :

$$\begin{array}{c} \text{Question 1} \\ \text{du n°3.4} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{Question 2} \\ \text{du n°3.4} \end{array} \Leftrightarrow \mathcal{F} \Gamma \text{ est-il un modèle distingué} \\ \text{universel pour toutes les familles} \\ \text{r-cubiques régulières de fonctions?}$$

5.4 Réponse aux questions du n°3.4

On sait déjà que la réponse est affirmative pour $r \leq 2$ (cf. Appendice A1 pour le cas $r=2$). Supposons donc $r \geq 3$, et soit $(g_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ une famille r-cubique régulière de fonctions.

Pour construire un modèle distingué de (g_σ) , on va partir d'un «modèle distingué défectueux», c'est-à-dire une famille r-cubique régulière distinguée $(\gamma_\sigma(z, u'))_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ telle que pour tout $\sigma \neq I_r$ on ait $g_\sigma(x) = \gamma_\sigma(z(x), u'(x))$ (on verra que l'existence d'un tel modèle défectueux découle facilement de l'hypothèse de récurrence). On cherchera ensuite à «corriger le défaut» en ajoutant à $\gamma_{I_r}(z, u')$ un terme correctif convenable $\Psi(z, u', v)$ (dépendant d'un paramètre supplémentaire v).

Comme on a affaire à des familles r-cubiques régulières, on peut écrire pour tout $i=1, 2, \dots, r$

$$\begin{aligned} g_{I_r}(x) &= g_1(x) + x_1^2, & x_1 &= x_1(x) \\ \gamma_{I_r}(z, u') &= \gamma_1(z, u') + z_1^2, & z_1 &= z_1(z, u') \end{aligned}$$

où l'indice i dénote tantôt le sommet $I_r - \{i\}$, tantôt l'arête joignant ce sommet au sommet I_r . Compte tenu la relation $g_1(x) = \gamma_1(z(x), u'(x))$, le «défaut» du modèle peut s'écrire

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= g_{I_r}(x) - \gamma_{I_r}(z(x), u'(x)) = x_1^2 - z_1^2(x) \quad (i=1, 2, \dots, r), \\ &\text{où } z_1(x) = z_1(z(x), u'(x)). \end{aligned}$$

Comme $(\gamma_\sigma(z(x), u'(x)))_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ est une famille r-cubique régulière, les fonctions $z_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, r$) sont à différentielles linéairement indépendantes, et quitte à choisir convenablement les coordonnées locales x on peut supposer que $x = (\underline{x}, x')$, où $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_r)$, $\underline{x}_i = z_i(x)$. Le «défaut» peut alors s'écrire

$$(*) \quad \varphi(x) = \varphi(\underline{x}, x') = \underline{x}_1^2 - \underline{x}_1^2 \quad (i=1, 2, \dots, r), \text{ où } \underline{x}_i \in \mathbb{C}[\underline{x}, x'].$$

Lemme-clef: (démontré dans l'Appendice A 2) :

Pour $r \geq 3$, il existe $\Psi : (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}, \{0\} \times \mathbb{C}) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$, germe de fonction analytique au voisinage de $\{0\} \times \mathbb{C}$ vérifiant :

i) $\forall i = 1, \dots, r, \exists s_i : (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}, \{0\} \times \mathbb{C}) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ telles que

$$\Psi(\underline{x}, v) = s_1^2 - \underline{x}_1^2 ;$$

ii) $\forall \varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ vérifiant (\star) , il existe un germe de fonction analytique unique $v : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\varphi(x) = \Psi(\underline{x}, v(x)).$$

Corollaire. La famille $(\gamma_\sigma^*(z, u', v))_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ définie par

$$\begin{aligned} \gamma_\sigma^* &= \gamma_\sigma & \sigma \neq I_r \\ \gamma_{I_r}^*(z, u', v) &= \gamma_{I_r}(z, u') + \Psi(\hat{z}, v), \\ & \text{où } \hat{z} = (z_i(z, u'))_{i=1, \dots, r} \end{aligned}$$

est un modèle distingué pour la famille $(g_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$.

Preuve. Pour voir que (γ_σ^*) est une famille r -cubique régulière (évidemment distinguée) il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \gamma_{I_r}^*(z, u', \rho) - \gamma_{I_r}(z, u') &= \gamma_{I_r}(z, u') - \gamma_{I_r}(z, u') + \Psi(\hat{z}, v) \\ &= z_{I_r}^2(z, u') + \Psi(\hat{z}, v) = s_{I_r}^2(\hat{z}, v). \end{aligned}$$

Cette famille distinguée est bien un modèle pour la famille (g_σ) , car

$$\gamma_{I_r}^*(z(x), u'(x), v(x)) = \gamma_{I_r}(z(x), u'(x)) + \Psi(\underline{x}, v(x)) = \gamma_{I_r}(z(x), u'(x)) + \varphi(x) = g_{I_r}(x).$$

Le corollaire ainsi démontré donne une réponse affirmative aux questions du n°3.4, à condition de savoir fabriquer un « modèle distingué défectueux ». Si $(\gamma_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$

désigne la famille r -cubique régulière distinguée $\mathcal{F}\Gamma$ du n°5.3, on remarque que pour toute partie J de I_r , distincte de I_r , la famille $(\gamma_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}(J)}$ est de la forme $\mathcal{F}\Gamma_J$ (où Γ_J est construit de la même façon que Γ avec Z remplacé par $Z_{G(J)}$).

On peut donc supposer, par hypothèse de récurrence, que cette famille $\mathcal{F}\Gamma_J$ est un modèle distingué universel pour les familles $|J|$ -cubiques régulières de fonctions. Soit alors $(g_\sigma(x))_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ une famille r -cubique régulière. Pour tout J l'hypothèse de récurrence nous donne une application analytique unique $\lambda_J : X \longrightarrow \mathbb{C}^J \times U$ telle

que $g_\sigma = \gamma_\sigma \circ \lambda_J$ pour tout $\sigma \in J$, et étant uniques ces applications λ_J commutent nécessairement à toutes les projections $\mathbb{A}^J \times U \longrightarrow \mathbb{A}^{J'} \times U$ induites par les inclusions $J' \subset J$.

On a donc bien pour tout $\sigma \in \bigcup_J \mathcal{P}(J) = \mathcal{P}(I_r) - I_r$ une relation

$$g_\sigma(x) = \gamma_\sigma(z(x), u'(x))$$

où $z(x) = (z_1(x), \dots, z_r(x))$, $u'(x) = (u_\sigma(x))_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r) - I_r}$ sont les fonctions définies par la collection des λ_J .

Autrement dit on peut prendre comme «modèle distingué défectueux» n'importe quelle famille r -cubique régulière coïncidant pour $\sigma \neq I_r$ avec la famille $\mathcal{F}\Gamma$ du n°5.3 (par exemple $\mathcal{F}\Gamma$ elle-même, ou bien la famille qui s'en déduit en remplaçant l'indéterminée u_{I_r} dans γ_{I_r} par une constante arbitraire).

Bien entendu la remarque finale du n°5.3 implique que la famille $\mathcal{F}\Gamma$ est un modèle distingué «non défectueux», mais nous n'avons pas réussi à le démontrer directement.

5.5 Exemples de configurations stables

Les configurations caractéristiques des déploiements stables de fonctions de Morse réticulées nous fourniront les exemples les plus simples de configurations stables (cf. théorème 4.3).

La théorie de Mather [13], facilement généralisée aux applications réticulées, permet de caractériser simplement les déploiements de fonctions qui sont des applications stables : : ce sont les déploiements qui sont des déformations verselles de leur fibre $g^{-1}(o)$, c'est-à-dire -dans le cas réticulé- les déploiements définis par des déformations $\tilde{g}(z, x)$ telles que l'espace vectoriel quotient

$$E_{\mathcal{X}}(g) = \mathbb{A}\{z_1, \dots, z_r\} / (g, z_1 \frac{\partial g}{\partial z_1}, \dots, z_r \frac{\partial g}{\partial z_r})$$

soit engendré sur \mathbb{A} par les classes des fonctions $1, \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_n}$.

Cet espace $E_{\mathcal{X}}(g)$ est un quotient de l'espace $E_{\mathcal{A}}(g)$ du lemme 5.2 ii) (et lui est égal si g est homogène).

Par conséquent si $g(z_1, \dots, z_r)$ est une fonction de Morse r -réticulée quelconque, son déploiement \mathcal{A} -universel

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^{2^r-1} & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{2^r-1} \\
 z \quad \underline{x}, x & & x_0 \quad \underline{x}, x \\
 & & \parallel \\
 & & \tilde{g}(z+\underline{x}, x) \\
 & & \parallel \\
 & & g(z+\underline{x}) + \sum_{|\sigma| \geq 2} x_\sigma \cdot (z+\underline{x})^\sigma
 \end{array}$$

sera une déformation verselle (réticulée) de sa fibre $g^{-1}(0)$, de dimension minimale si g est quadratique.

Nous disposons ainsi d'un procédé systématique pour construire des exemples de configurations stables.

Exemple 1 : $r = 1$, $g = z^2$

Le déploiement s'écrit

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\
 z \quad \underline{x} & & x_0 \quad \underline{x} \\
 & & \parallel \\
 & & (z+\underline{x})^2
 \end{array}$$

son ensemble critique a deux composantes $\Sigma_\phi: z = -\underline{x}$ et $\Sigma_1: z = 0$, et sa variété caractéristique est l'union des fibrés conormaux aux deux courbes lisses tangentes $\Delta_\phi: x_0 = 0$, $\Delta_1: x_0 = \underline{x}$.

Exemple 2 : $r = 2$, $g = z_1^2 + z_2^2$

Le déploiement s'écrit

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^3 \\
 z_1, z_2 \quad \underline{x}_1, \underline{x}_2, x_{12} & & x_0 \quad \underline{x}_1, \underline{x}_2, x_{12} \\
 & & \parallel \\
 & & (z_1+\underline{x}_1)^2 + (z_2+\underline{x}_2)^2 + 2x_{12}(z_1+\underline{x}_1)(z_2+\underline{x}_2)
 \end{array}$$

Ecrivons ci-dessous les équations des ensembles critiques et des lieux discriminants correspondants

$$\begin{array}{ll}
 \Sigma_\phi: z_1 + \underline{x}_1 = z_2 + \underline{x}_2 = 0 & \Delta_\phi: x_0 = 0 \\
 \Sigma_1: z_1 = (z_2 + \underline{x}_2) + x_{12} \underline{x}_1 = 0 & \Delta_1: x_0 = (1 - x_{12}^2) \underline{x}_1^2 \\
 \Sigma_2: z_2 = (z_1 + \underline{x}_1) + x_{12} \underline{x}_2 = 0 & \Delta_2: x_0 = (1 - x_{12}^2) \underline{x}_2^2 \\
 \Sigma_{12}: z_1 = z_2 = 0 & \Delta_{12}: x_0 = \underline{x}_1^2 + \underline{x}_2^2 + 2x_{12} \underline{x}_1 \underline{x}_2
 \end{array}$$

§ 6. QUANTIFICATION.

Nous allons maintenant "quantifier" au sens de S.K.K. [19] les résultats des paragraphes précédents, c.à.d. considérer les objets géométriques qui précèdent comme supports de Modules sur l'Anneau des opérateurs microdifférentiels.

Rappelons les notations de l'introduction : X est un germe de variété r -réticulée de dimension $N = n+p$, on considère sur $X = X_\phi$ le germe de système différentiel holonome

$$\mathcal{O}_X^{(\alpha)} = \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X (x_1^{D_{x_1} - \alpha_1}, \dots, x_r^{D_{x_r} - \alpha_r}, D_{x_{r+1}}, \dots, D_{x_{n+p}})$$

dont la variété caractéristique sera notée $\Lambda = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)} \Lambda_\sigma$,

$\Lambda_\sigma : x_i = 0$ pour $i \in \sigma$, $\xi_j = 0$ pour $j \notin \sigma$.

On se donne un germe d'application réticulée

$$F : X \longrightarrow Y = \mathbb{C}x\mathbb{C}^p \ni (y_0, y_1, \dots, y_p)$$

que l'on suppose non caractéristique pour $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$ en dehors de la section nulle de T^*Y (cf. [16] 4, § 5) ; si F est de corang 1 cela revient à exiger que l'application caractéristique χ_F soit un morphisme fini, ce qui est le cas notamment si F est non dégénérée (Prop. 1.4).

L'hypothèse "non caractéristique" implique la cohérence du \mathcal{E}_Y -Module "image directe microlocale" de $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$, qui sera noté

$$\mathcal{G}_F^{(\alpha)} = \int_F \mathcal{O}_X^{(\alpha)}$$

et appelé "système de Gauss-Manin" de F .

[N.B. : la notion \mathcal{E}_Y désigne l'Anneau des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini ; toutes nos notations sont celles de [16] , empruntées aux papiers récents de l'école japonaise] .

Comme tous les systèmes (micro)-différentiels que nous allons étudier, le système de Gauss-Manin est "filtré", c.à.d. muni canoniquement d'une bonne filtration (image de celle, évidente, de $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$). On peut vérifier que le symbole de cette filtration a pour support $V(F)$, qui est donc la variété caractéristique de $\mathcal{G}_F^{(\alpha)}$.

Dans l'étude qui suit, l'hypothèse de non dégénérescence n'interviendra qu'à partir du n° 6.3.

6.0. Réduction microlocale de $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$.

Notons $\check{\mathcal{O}}_X^{(\alpha)} = \check{\mathcal{O}}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{(\alpha)}$ le microlocalisé du système différentiel $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$.

Nous nous proposons d'étudier micro-localement la restriction de $\check{\mathcal{O}}_X^{(\alpha)}$ à une strate quelconque de sa variété caractéristique. Une telle strate $\Lambda_{\mathcal{Q}}^0$, indexée par une face du cube

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\underline{\sigma}, \bar{\sigma}) = \{\sigma \in \mathcal{P}(\mathbb{I}_r) \mid \underline{\sigma} \subset \sigma \subset \bar{\sigma}\}$$

a pour équations

$$\Lambda_{\mathcal{Q}}^0 : \begin{cases} x_i = 0 & \Leftrightarrow i \in \bar{\sigma} \\ \xi_j = 0 & \Leftrightarrow j \notin \underline{\sigma} \end{cases}$$

Soit X' l'ouvert de X défini par les inégalités $x_i \neq 0 \forall i \notin \bar{\sigma}$.

Il est clair que X' a une structure r' -réticulée (avec $r' = |\bar{\sigma}|$) définie par $\underline{X}' = (X'_i)_{i \in \bar{\sigma}}$, et que $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}|_{X'} = \mathcal{O}_{\underline{X}'}^{(\alpha)_{\bar{\sigma}}}$, où l'on a noté $(\alpha)_{\bar{\sigma}}$ le r' -uplet $(\alpha_i)_{i \in \bar{\sigma}}$.

Soit enfin $j'_{\underline{\sigma}} = X'_{\underline{\sigma}} \hookrightarrow X'$ le plongement évident, et munissons $X'_{\underline{\sigma}}$ de la structure $(r' - |\underline{\sigma}|)$ -réticulée

$$\underline{X}'_{\underline{\sigma}} = (X'_i)_{i \in \underline{\sigma}} \subset \sigma \subset \bar{\sigma}$$

Lemme : En restriction à la strate $\Lambda_{\mathcal{Q}(\underline{\sigma}, \bar{\sigma})}^0$ on a

$$(*) \quad \check{\mathcal{O}}_{\underline{X}'}^{(\alpha)_{\bar{\sigma}}} = \prod_{i \in \underline{\sigma}} D_{x_i}^{-\alpha_i - 1} \int_{j'_{\underline{\sigma}}} \check{\mathcal{O}}_{X'_{\underline{\sigma}}}^{(\alpha)}|_{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}}$$

où les $D_{x_i}^{-\alpha_i - 1}$ désignent les puissances d'ordre $(-\alpha_i - 1) \in \mathbb{C}$ des opérateurs D_{x_i} (invertibles sur la strate considérée).

Preuve : facile, laissée en exercice au lecteur.

Remarque : Soit θ un point de la strate $\Lambda_{\mathcal{Q}(\underline{\sigma}, \bar{\sigma})}^0$, et soit $(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x'_1, \dots, x'_r)$ un changement de coordonnées linéaire tel que la codirection θ soit donnée par

$$\xi'_2 = \dots = \xi'_r = 0.$$

Alors il est clair que chacun des D_{x_i} , $i \in \underline{\sigma}$, peut s'écrire comme le produit de $D_{x'_1}$ par un opérateur microelliptique au point θ . La formule (*) peut donc se réécrire comme suit :

$$(*) \quad \check{\mathcal{O}}_{\underline{x}, \theta}^{(\alpha)} = D_{x'_1}^{\lambda_{\underline{\sigma}}} \left(\int_{j_{\underline{\sigma}}} \check{\mathcal{O}}_{x_{\sigma}}^{(\alpha)} |_{\bar{\sigma}-\underline{\sigma}} \right)_{\theta}$$

où $\lambda_{\underline{\sigma}} = - \sum_{i \in \underline{\sigma}} (\alpha_i + 1)$, et $j_{\underline{\sigma}}$ désigne le plongement de x_{σ} dans x .

Cas particulier : strate $\overset{o}{\Lambda}_{\mathcal{Q}(\sigma, \sigma)}$, ouvert dense de Λ_{σ} .

La formule précédente se lit

$$\check{\mathcal{O}}_{\underline{x}, \theta}^{(\alpha)} = D_{x'_1}^{\lambda_{\sigma}} \left(\int_{j_{\sigma}} \check{\mathcal{O}}_{x_{\sigma}}^{(\alpha)} \right)_{\theta} \sim \check{\mathcal{O}}_{x, \theta}^{(\alpha)} \cdot D_{x'_1}^{\lambda_{\sigma}} \delta_{(x)_{\sigma}}$$

où $\delta_{(x)_{\sigma}}$ est la couche de Dirac portée par la sous-variété x_{σ} .

Définition : Rappelons que si \mathcal{M} est un germe de système microdifférentiel filtré à caractéristique simple, porté par le fibré conormal à une sous-variété lisse S , \mathcal{M} peut être engendré par une dérivée d'ordre λ ($\lambda \in \mathbb{C}$) de la couche de Dirac portée par S . Nous dirons alors que \mathcal{M} est "d'ordre λ " (cette définition diffère quelque peu de celle de S.K.K. [19] déf. 4.2.3.).

Nous venons ainsi de démontrer qu'en un point générique de chaque composante Λ_{σ} , $\check{\mathcal{O}}_{\underline{x}}^{(\alpha)}$ est à caractéristique simple d'ordre $\lambda_{\sigma} = - \sum_{i \in \sigma} (\alpha_i + 1)$.

6.1. Réduction des variables non critiques.

Pour tout point critique $x \in \Sigma(\underline{F})$ d'une application r -réticulée de corang 1, on a défini (au n°1.2) σ_x comme "le plus petit" des $\sigma \in \mathcal{P}(\underline{I}_r)$ pour lesquels $x \in \Sigma(F_{\sigma})$. La collection des $(X_{\sigma})_{\sigma} \supset \sigma_x$ définit sur X_{σ_x} une structure de variété $(r - |\sigma_x|)$ -réticulée que nous noterons \underline{X}_{σ_x} , et à laquelle on peut "restreindre" \underline{F} , définissant ainsi un germe d'application $(r - |\sigma_x|)$ -réticulée :

$$\underline{F}_{\sigma_x} : \underline{X}_{\sigma_x} \longrightarrow Y.$$

Proposition : Soit $\theta_y \in P^*Y$ un point dont l'image réciproque par l'application caractéristique χ_F consiste en un seul point $x \in \Sigma(F)$. Alors au voisinage de θ_y on a

$$\mathcal{G}_{\underline{F}}^{(\alpha)} = D_{Y_0}^{\lambda_{\sigma_x}} \mathcal{G}_{\underline{F}_{\sigma_x}}^{(\alpha)} \int_{\sigma_x}$$

où $(\alpha) \int_{\sigma_x}$ désigne la collection des $(\alpha_i)_{i \notin \sigma_x}$, tandis que λ_{σ_x} désigne l'ordre, calculé au n° 6.0, de la composante Λ_{σ_x} de $\mathcal{O}_{\underline{X}}^{(\alpha)}$.

Preuve : On suppose $\sigma_x \neq \emptyset$ sinon l'affirmation est vide.

Alors $\theta_y \neq \text{Ker } T_x^*F$, de sorte que $(T_x^*F)(\theta_y)$ définit une codirection de T_x^*X , que nous noterons θ .

Par définition de σ_x , θ est conormale à X_{σ_x} mais n'est pas conormale aux X_o , pour $\sigma' \not\supset \sigma$. Autrement dit θ est un point de la strate $\Lambda_{\mathcal{O}(\sigma_x, I_r)}^o$. La formule annoncée résulte alors de la formule $(*)_{\theta}$ du n° 6.0, en remarquant que l'image directe micro-locale en θ_y ne dépend que du comportement de l'intégrand $\mathcal{O}_{\underline{X}}^{(\alpha)}$ au voisinage du point θ , et que $\int_F D_{x_1'} \dots = D_{Y_0} \int_F \dots$ (parce que

$$(\delta_{(Y_0 - f(x, y))} \otimes dx dy) D_{x_1'} = \frac{\delta f}{\delta x_1'} D_{Y_0} (\delta_{(Y_0 - f(x, y))} \otimes dx dy), \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_1'}(0) \neq 0$$

par hypothèse).

6.2. Réduction des fonctions de Morse parasites.

Proposition : Soient \underline{F} et \underline{F}' deux germes d'applications r -réticulées de corang 1, telles que \underline{F}' se déduise de \underline{F} par ajout d'une fonction de Morse parasite de m variables (cf. n° 2.2).

$$\text{Alors } \mathcal{G}_{\underline{F}'}^{(\alpha)} = D_{Y_0}^{-m/2} \mathcal{G}_{\underline{F}}^{(\alpha)}.$$

Preuve : En écrivant \underline{F} et \underline{F}' comme des applications composées

$$\begin{array}{ccc}
 F : X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p & \xrightarrow{j} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \\
 & \searrow G & \downarrow \parallel \\
 & & \begin{array}{c} x_0 \times x \times y \\ \parallel \\ \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{array} & \xrightarrow{\bar{F}} & \begin{array}{c} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \\ y_0 \times y \\ \parallel \\ x_0 + f(x, y) \end{array} \\
 F' : X' = \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p & & & &
 \end{array}$$

on obtient la formule annoncée par composition des images directes, compte tenu des formules

$$\int_G \mathcal{O}_X^{(\alpha)} = D_{x_0}^{-\frac{m}{2}} \int_j \mathcal{O}_X^{(\alpha)} \quad (\text{lemme ci-dessous})$$

$$\text{et } \int_{\bar{F}} D_{x_0} \dots = D_{y_0} \int_{\bar{F}} \dots$$

La seconde formule est immédiate, car

$$(\delta_{(y_0 - x_0 - f(x, y))} \otimes dx_0 \otimes dx \otimes dy) D_{x_0} = D_{y_0} \delta_{(y_0 - x_0 - f(x, y))} \otimes dx_0 \otimes dx \otimes dy$$

La première est un cas particulier du lemme ci-dessous :

Lemme : On se donne un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{C}^N & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^N & \xrightarrow{G} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N & \xleftarrow{j} & \mathbb{C}^N \\
 x & & z, x & & x_0, x & & (x_0=0) \\
 & & & & \parallel & & \\
 & & & & \sum_{i=1}^m z_i^2 & &
 \end{array}$$

Alors pour tout système différentiel \mathcal{M} sur \mathbb{C}^N on a l'égalité des images directes microlocales (non caractéristiques en dehors de la section nulle de $T^*(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$) :

$$(*) \quad \int_G \pi^* \mathcal{M} = D_{x_0}^{-\frac{m}{2}} \int_j \mathcal{M} .$$

Preuve : Il suffit de la démontrer lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^N}$, ce qui se fait par calcul explicite :

$$\pi^* \mathcal{D}_{\mathbb{C}^N} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^N} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^N}^{(D_{z_1}, \dots, D_{z_m})} ,$$

$$\int_G \pi^* \mathcal{D}_{\mathbb{C}^N} = (\mathcal{E}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^N} \delta_{(x_0 - \sum z_i^2)} \otimes dz dx) / \text{même chose } x (D_{z_1}, \dots, D_{z_m}),$$

dont le calcul montre que c'est égal à

$$D_{x_0}^{-\frac{m}{2}} \int_j \mathcal{D}_{\mathbb{C}^N} = \mathcal{E}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N} / \mathcal{E}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N} (x_0 D_{x_0} - \frac{m}{2} + 1).$$

Remarque : Dans le cas particulier $m=1$, les images directes ci-dessus sont non caractéristiques même sur la section nulle (car G est un morphisme fini), et l'égalité (*) peut s'écrire comme une égalité de systèmes différentiels :

$$\int_G \pi^* \mathcal{M} = S_j^{-\frac{1}{2}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^N}} \mathcal{M}$$

où $S_j^{-\frac{1}{2}}$ est le $(\mathcal{D}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}^N})$ -bimodule défini par

$$S_j^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{D}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N} / \mathcal{D}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N} (x_0 D_{x_0} + \frac{1}{2}).$$

6.3. Construction d'une transformation de contact quantifiée associée à une \underline{F} sous la forme réduite 2.4.

Soit \underline{F} un germe d'application réticulée non dégénérée.

Par des réductions 6.1., 6.2., l'étude de $\mathcal{G}_{\underline{F}}^{(\alpha)}$ se ramène au cas où \underline{F} est de la forme réduite 2.4. Remarquons que la forme 2.4 peut s'écrire comme une application composée

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p & \xrightarrow{G \times \text{id}} & (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p & \xrightarrow{\bar{K}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \\ \begin{smallmatrix} z & x & y \end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix} x_0 & x & y \end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix} y_0 & y \end{smallmatrix} \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & g(z, x) & & x_0 + k(x, y) \end{array}$$

où $k(x, y) = h(x) - \sum_{i=1}^p x_i y_i$ vérifie les hypothèses de l'Appendice B.O. (avec $n=p$), et définit donc une transformation de contact quantifiée γ_k . D'autre part

G est non dégénérée en tant qu'application r-réticulée, ce qui veut dire que la matrice $\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}$ est de rang r, et l'on peut donc décomposer les coordonnées x en $x = (\underline{x}, x') \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q$ ($q = p-r$) de façon que $\det \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \underline{x}} \neq 0$: autrement dit g vérifie les hypothèses de l'Appendice B1 avec $n=r$, $q=q$, et définit donc une transformation de contact quantifiée γ_g .

Proposition : La transformation de contact quantifiée $\gamma_g^{-1} \gamma_k^{-1}$ transforme le système $\mathcal{G}_F^{(\alpha)}$ en le système

$$\int_j \mathcal{O}_{\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q}^{(\alpha)} = \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p} / \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p} (x_0, x_1, D_{x_1} - \alpha_1, \dots, x_r, D_{x_r} - \alpha_r, D_{x_1'}, \dots, D_{x_q'}) ,$$

image directe microlocale de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q}^{(\alpha)}$ par le plongement

$$j = \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q \xrightarrow{(x_0=0)} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q$$

$$\underline{x}, x' \quad \quad \quad x_0 \quad \underline{x} \quad x'$$

Preuve : Plus généralement, on va regarder comment la transformation de contact

$\gamma_k \gamma_g$ agit sur un système différentiel quelconque \mathcal{M} sur $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q$. L'affirmation annoncée correspondra au cas particulier $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q}^{(\alpha)}$.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q & \xleftarrow{\pi_{\underline{x}}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q & \xrightarrow{\bar{G}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q \\ z_0 \quad z \quad x' & & z_0 \quad z \quad \underline{x} \quad x' & & x_0 \quad \underline{x} \quad x' \\ \uparrow j & & \uparrow j & \nearrow G & \\ \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q & \xleftarrow{\pi_{\underline{x}}} & \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p & & \end{array}$$

où \bar{G} est défini par $x_0 = z_0 + g(z, x)$; les projections $\pi_{\underline{x}}$ consistent à oublier \underline{x} , et les plongements j à faire $z_0 = 0$.

L'appendice B1 nous montre que

$$\gamma_g \left(\int_j \mathcal{M} \right) = \int_{\bar{G}} \pi_{\underline{x}}^* \int_j \mathcal{M} = \int_G \pi_{\underline{x}}^* \mathcal{M}$$

Notons \mathcal{N} le système microdifférentiel défini par les égalités précédentes, et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}x\mathbb{C}^p & \xleftarrow{\pi_Y} & \mathbb{C}x\mathbb{C}^p_x\mathbb{C}^p_Y & \xrightarrow{\bar{K}} & \mathbb{C}x\mathbb{C}^p \\ x_0x & & x_0xY & & y_0Y \end{array}$$

D'après l'appendice B.0 on a $\gamma_k \mathcal{M} = \int_{\bar{K}} \pi_Y^* \mathcal{M}$

de sorte que

$$(*) \quad \gamma_k \gamma_g \left(\int_j \mathcal{M} \right) = \int_{\bar{K}} \pi_Y^* \int_G \pi_{\underline{x}}^* \mathcal{M} = \int_{\bar{K}} \int_{Gx\mathbb{A}_Y} \pi_{\underline{x},Y}^* \mathcal{M} = \int_F \pi_{\underline{x},Y}^* \mathcal{M},$$

ce qui donne bien la formule annoncée (on a noté $\pi_{\underline{x},Y}$ la projection $z, \underline{x}, x', y \mapsto z, x'$).

§ 7 DÉPLOIEMENTS ET STABILITÉ DES SYSTÈMES DE GAUSS-MANIN RÉTICULÉS.

7.0. Nous nous proposons de définir une notion générale de déploiement d'un germe de système microdifférentiel filtré sur P^*Y .

Soit (S, s_0) un germe de variété lisse, et soit \tilde{M} un germe de système microdifférentiel filtré sur $P^*(Y \times S)$ remplissant les conditions suivantes :

- i) l'inclusion $Y \times \{s_0\} \hookrightarrow Y \times S$ est non caractéristique pour \tilde{M} ;
- ii) le "symbole" de la filtration, $\sigma(\tilde{M} = \tilde{M}^{(0)} \supset \tilde{M}^{(-1)} \supset \dots \supset \tilde{M}^{(l)} \supset \tilde{M}^{(l-1)} \supset \dots)$, est plat sur \mathcal{O}_S .

En appliquant le foncteur $\mathbb{C}_{s_0} \otimes_{\mathcal{O}_S}$ (où \mathbb{C}_{s_0} est le corps résiduel du point s_0) à

la suite d'inclusions

$$\dots \subset \tilde{M}^{(l-1)} \subset \tilde{M}^{(l)} \subset \dots \quad (\text{lim. ind.} = \tilde{M})$$

on trouve encore, grâce à ii), une suite d'inclusions

$$\dots \subset \mathbb{C}_{s_0} \otimes_{\mathcal{O}_S} \tilde{M}^{(l-1)} \subset \mathbb{C}_{s_0} \otimes_{\mathcal{O}_S} \tilde{M}^{(l)} \subset \dots \quad (\text{lim. ind.} = \mathbb{C}_{s_0} \otimes_{\mathcal{O}_S} \tilde{M})$$

que nous noterons

$$\dots \subset M^{(l-1)} \subset M^{(l)} \subset \dots \quad (\text{lim. ind.} = M).$$

La condition i) garantit que M est un germe de système microdifférentiel sur P^*Y , et il est filtré par la suite ci-dessus.

Nous dirons que \tilde{M} est un déploiement de M , de base S . La notion de "changement de base" d'un déploiement se définit de façon évidente (avec conservation évidente des conditions i) ii)).

Remarque : La définition purement ponctuelle que nous venons de donner peut aisément être "mise en faisceaux" moyennant quelques précautions d'écriture. En reprenant les notations du n° 4.1., il convient de distinguer :

$\sigma(\tilde{M})$, qui est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{P^*(Y \times S)}$ -modules, de support \tilde{V} ;

$\sigma(\tilde{M}^{\text{rel}})$ (faisceau image directe du précédent par la projection ρ), qui est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{P^*Y \times S}$ -modules, de support \tilde{V}^{rel} ;

$\sigma(\mathcal{M})$, faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^*Y}$ -modules, de support V . Le trio $(\tilde{V}, \tilde{V}^{\text{rel}}, V)$ est évidemment du type étudié au n°4.1.

7.1. Proposition : Soit $\tilde{F} : \underline{X} \times S \longrightarrow Y \times S$ un déploiement d'un germe d'application réticulée $\underline{F} : \underline{X} \longrightarrow Y$. Si F est non caractéristique pour $\mathcal{O}_{\underline{X}}^{(\alpha)}$, \tilde{F} est aussi non caractéristique pour $\mathcal{O}_{\underline{X} \times S}^{(\alpha)}$, et le système de Gauss-Manin $\mathcal{G}_{\tilde{F}}^{(\alpha)}$ est un déploiement du système de Gauss-Manin $\mathcal{G}_{\underline{F}}^{(\alpha)}$.

La preuve facile est laissée au lecteur. On remarquera que le symbole de $\mathcal{G}_{\tilde{F}}^{(\alpha)}$ est défini par une suite régulière, ce qui rend la condition de platitude 7.0 ii) facile à vérifier.

Corollaire : Si \underline{F} est instable, $\mathcal{G}_{\underline{F}}^{(\alpha)}$ est aussi instable, c.à.d. admet des déploiements non triviaux.

7.2. Proposition : Si \underline{F} est stable, mais si l'un des α_i vaut $-\frac{1}{2}$ (avec $i \notin \sigma_0$), $\mathcal{G}_{\underline{F}}^{(\alpha)}$ est encore instable.

Preuve : Après "réduction des variables non critiques" (n° 6.1), on peut supposer que $\sigma_0 = \emptyset$.

Supposons alors que $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, posons $\alpha = (-\frac{1}{2}, \alpha')$, $\alpha' = (\alpha_2, \dots, \alpha_r)$, et munissons X_1 de la structure $(r-1)$ -réticulée définie par $\underline{X}_1 = (X_\sigma)_\sigma \ni 1$. D'après la remarque 6.2. on a évidemment

$$\mathcal{O}_{\underline{X}}^{(-\frac{1}{2}, \alpha')} = \bigoplus_j s_j^{-\frac{1}{2}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \mathcal{O}_{X_1}^{(\alpha')} = \int_G \mathcal{O}_{\underline{X}}^{(\alpha')},$$

où G est l'application "pli"

$$\begin{array}{ccc} G : X' & \longrightarrow & X \\ x'_1, x'_2, \dots, x'_N & \longmapsto & \begin{array}{c} x_1, x_2, \dots, x_N \\ \parallel \\ x_1^2 \end{array} \end{array}$$

sur l'espace $X' = X$ muni de la structure $(r-1)$ -réticulée

$$\underline{X}' = (X_\sigma)_\sigma \not\ni 1 \quad (\text{on a "effacé" la composante } X_1).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{G}_{\underline{F}}(-\frac{1}{2}, \alpha') = \int_{\text{FoG}} \mathcal{O}_{\underline{X}'}^{(\alpha')} = \mathcal{G}_{\underline{\text{FoG}}}^{(\alpha')},$$

où $\underline{\text{FoG}}$ est considérée comme application $(r-1)$ -réticulée sur \underline{X}' . Cette application est certainement dégénérée, car l'image de son application caractéristique coïncide avec celle de \underline{F} et a donc 2^r composantes, ce qui est beaucoup trop pour une application $(r-1)$ -réticulée !

Etant dégénérée elle est instable (car toute application dégénérée admet des déploiements non dégénérés). L'instabilité du système de Gauss-Manin en résulte par le Corollaire 7.1.

Exemple : Sur $\mathbb{C}^2 \ni (z, x)$, 1-réticulé par la coordonnée z , considérons l'application stable (n° 5.5, ex. 1)

$$\underline{F} : \mathbb{C}^2 \ni (z, x) \longmapsto (x_0 = (z+x)^2, x) \in \mathbb{C}^2.$$

Composée avec un "pli" de l'espace source

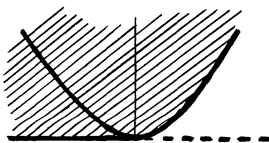
$$G : \mathbb{C}^2 \ni (x', x) \longmapsto (z = x'^2, x) \in \mathbb{C}^2$$

elle donne l'application (non réticulée) instable

$$\text{FoG} : \mathbb{C}^2 \ni (x', x) \longmapsto (x_0 = (x'^2 + x)^2, x) \in \mathbb{C}^2$$

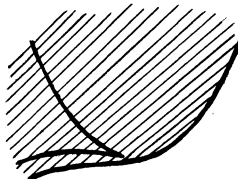
dont les déformations sont bien connues des géomètres.

La Fig. 1. représente dans \mathbb{R}^2 le lieu discriminant (contour apparent) d'une petite déformation générique de $\text{FoG} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (la zone hachurée est l'image de l'application réelle, où l'on reconnaît une "fronce").



avant déformation

Fig.1.



après déformation

7.3 Théorème : \mathcal{G}_F est stable si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies : F est stable ; $\forall i \notin \sigma_0, \alpha_i \neq -\frac{1}{2}$.

Preuve : Il s'agit de montrer que les cas envisagés par le corollaire 7.1. et la proposition 7.2. sont les seuls cas d'instabilité.

Supposons donc remplies les deux conditions du théorème, et soient $\tilde{\mathcal{M}}$ un déploiement de $\mathcal{M} = \mathcal{G}_F^{(\alpha)}$, \tilde{V} le support de $\tilde{\mathcal{M}}$, \tilde{V}^{rel} son image par ρ . Grâce au résultat de NGUYEN TỰ CƯỜNG démontré dans l'Appendice C, le problème de la trivialité du déploiement $\tilde{\mathcal{M}}$ se ramène au problème purement géométrique de montrer que \tilde{V}^{rel} est une déformation triviale de $V = V(F)$.

Pour cela on fait les remarques suivantes.

Remarque i) : $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{O}_V$, faisceau structural de la variété caractéristique réduite.

Comme $\sigma(\tilde{\mathcal{M}}^{\text{rel}})$ est une déformation plate de $\sigma(\mathcal{M})$, il en résulte que $\sigma(\tilde{\mathcal{M}}^{\text{rel}}) = \mathcal{O}_{\tilde{V}^{\text{rel}}}$, faisceau structural d'un l'espace analytique relatif réduit, à fibre spéciale réduite.

Remarque ii) : En un point générique de chaque composante V_0 , celle-ci est le fibré conormal à une hypersurface lisse. Au voisinage d'un tel point \mathcal{M} est à caractéristique simple et ne peut se déployer que de façon triviale. L'ordre v_0 de \mathcal{M} en un tel point générique de V_0 est donné par

$$(*) \quad v_0 = \lambda_0 - \frac{n-p-|\sigma|}{2}, \text{ où } \dim Y = p+1, \dim X = n+p, \lambda_0 = - \sum_{i \in \sigma} (\alpha_i + 1)$$

(pour le voir, on applique les réductions 6.1 et 6.2).

Remarque iii) : Etant le support d'une configuration r -cubique régulière, V est définie par une suite régulière

$(u_1 v_1, \dots, u_r v_r, w_{r+1}, \dots, w_p)$, où les u_i, v_i, w_j sont des éléments d'ordre 1 de l'anneau local de P^*Y . Comme \tilde{V}^{rel} est une déformation plate de V , elle peut aussi être définie par une suite régulière

$$(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r, \tilde{w}_{r+1}, \dots, \tilde{w}_p),$$

déformation de la suite précédente.

Deux possibilités sont alors à envisager :

1er possibilité : Tous les \tilde{w}_i ($i \leq r$) sont réductibles, donc de la forme $\tilde{u}_i \tilde{v}_i$, où \tilde{u}_i [resp. \tilde{v}_i] est une déformation de u_i [resp. v_i]. Cela signifie que \tilde{V} est le support d'une configuration r-cubique régulière, déploiement au sens 4.2. de la configuration de V. La trivialité de ce déploiement est alors assurée par le théorème 4.3.

2ème possibilité : L'un des \tilde{w}_i ($i \leq r$) est irréductible. Cela entraîne que pour toute arête (σ, σ') du cube, de direction i, les deux composantes $V_\sigma, V_{\sigma'}$ se déforment en une seule composante de \tilde{V}^{rel} . D'après la remarque ii) cela n'est possible que si $v_\sigma = v_{\sigma'}$ (= ordre de la composante irréductible de \tilde{V}^{rel} qui contient V_σ et $V_{\sigma'}$). D'après la formule (*) cette égalité équivaut à $\alpha_i = -\frac{1}{2}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le théorème est ainsi entièrement démontré.

§ 8. COMMENT RECONNAITRE UN SYSTÈME DE GAUSS-MANIN RÉTICULÉ NON DÉGÉNÉRÉ ?

On sait déjà d'après le § 6 que pour un germe de système microdifférentiel \mathcal{M} la première des deux propriétés suivantes implique la seconde :

i) \mathcal{M} est isomorphe au système de Gauss-Manin d'un germe d'application réticulée non dégénérée.

ii) \mathcal{M} est équivalent, par une transformation de contact quantifiée, à un système de la forme

$$\mathcal{C}_X^{(\alpha)}|_{\mathbb{C} \times X} = \int_j \mathcal{O}_X^{(\alpha)},$$

image directe microlocale de $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$ par le plongement canonique

$$j : \begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{C} \times X = X' \\ x & \mapsto & x_0 = 0, x \end{array}$$

Pour démontrer l'implication réciproque ii) \Rightarrow i) il nous suffira de résoudre le problème suivant :

Problème : Caractériser $\mathcal{C}_X^{(\alpha)}|_{\mathbb{C} \times X}$ de façon unique par des propriétés manifestement invariantes de contact (jointes à sa propriété de support).

En effet si \mathcal{M} vérifie ii) le § 3 nous garantit que son support est la configuration caractéristique d'un germe d'application réticulée non dégénérée ; le système de Gauss-Manin de cette application a même support que \mathcal{M} et, comme \mathcal{M} , il est équivalent de contact à $\mathcal{C}_X^{(\alpha)}|_{\mathbb{C} \times X}$. Ayant même support que \mathcal{M} et mêmes "invariants" (en un sens facile à préciser quand nous aurons résolu le problème ci-dessus), il est donc isomorphe à \mathcal{M} .

Par exemple si $r=0$ on sait que tout germe de système microdifférentiel à caractéristique simple, de variété caractéristique $T_X^*(\mathbb{C} \times X)$, est isomorphe à un $D_{x_0}^\beta \mathcal{C}_X|_{\mathbb{C} \times X} = D_{x_0}^\beta \int_j \mathcal{O}_X$ (théorème d'unicité des systèmes à caractéristique simple).

Dans le cas $r=1$ la variété caractéristique est formée de deux composantes holonomes en interaction régulière (n° 1.0). Dans cette situation il résulte des travaux de Kashiwara et al. ([11], et [9] Appendice) que le système

est caractérisé par les propriétés suivantes :

- . il est à caractéristique simple aux points génériques de chacune des deux composantes ;
- . les deux composantes sont en "interaction analytique", c.à.d. que \mathcal{M} n'est pas une somme directe de systèmes portés par chacune des deux composantes.

Nous allons redémontrer et généraliser ce résultat, en montrant que pour r quelconque les propriétés i) ii) sont équivalentes (à une transformation $D_{x_0}^\beta$ près aux propriétés suivantes :

iii) \mathcal{M} est à caractéristique simple aux points génériques de chacune de ses 2^r composantes holonomes (supposées former une configuration r -cubique régulière) ; pour tout couple de composantes $V_\sigma, V_{\sigma'}$, en interaction (c.à.d. telles que les sommets σ, σ' soient joints par une arête du cube), \mathcal{M} est une interaction analytique au point générique de $V_\sigma \cap V_{\sigma'}$.

Il nous suffira pour cela de démontrer la troisième des propositions suivantes (qui seront démontrées conjointement par récurrence sur r) ; dans ce qui suit

$\underline{X} = (X_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ est un germe de variété réticulée, et $j : X \hookrightarrow \mathbb{C}xX = X'$ désigne le plongement canonique :

Proposition I_r : Soit \mathcal{M} un système différentiel sur X , ayant pour variété caractéristique $\bigcup_{\sigma} T_{X_\sigma}^* X$, et vérifiant la condition iii) ; alors $\mathcal{M} \approx \mathcal{O}_{\underline{X}}^{(\alpha)}$.

Proposition II_r : Soit \mathcal{N} un système différentiel sur $X' = \mathbb{C}xX$, à support contenu dans $X = 0xX$, ayant pour variété caractéristique $\bigcup_{\sigma} T_{X_\sigma}^* X'$, et vérifiant la condition iii) ; alors \mathcal{M} est isomorphe à $\mathcal{D}_{\underline{X}|X'}^{(\alpha)} = \int_j \mathcal{O}_{\underline{X}}^{(\alpha)} =$
 $= \mathcal{D}_{X'} / \mathcal{D}_{X'}(x_0, x_1 D_{x_1}^{-\alpha_1}, \dots, x_r D_{x_r}^{-\alpha_r}, D_{x_{r+1}}, \dots, D_{x_N})$.

Proposition III_r : Soit \mathcal{N} un système microdifférentiel sur $X' = \mathbb{C}xX$ défini au voisinage de $T_{X'}^* X' - T_{X'}^* X'$, ayant pour variété caractéristique $\bigcup_{\sigma} T_{X_\sigma}^* X'$, et vérifiant

la condition iii) ; alors $\check{\mathcal{N}}$ est isomorphe à

$$D_{x_0}^{\beta} \mathcal{E}_{\underline{X}|X'}^{(\alpha)} = D_{x_0}^{\beta} \int_j \mathcal{O}_{\underline{X}}^{(\alpha)} = \mathcal{E}_{X'} / \mathcal{E}_{X'} \cdot (x_0 D_{x_0} + \beta + 1, x_1 D_{x_1} - \alpha_1, \dots, x_r D_{x_r} - \alpha_r, D_{x_{r+1}}, \dots, D_{x_N}).$$

Schéma de récurrence : Au n° 8.2 nous démontrerons I_r dans un cas particulier. Puis nous démontrerons dans le cas général les implications

$$I_r \Rightarrow II_r \text{ et } III_r ; I_r \text{ et } II_r \Rightarrow I_{r+1}.$$

La récurrence peut partir de I_0 , qui est bien connu (cf. par exemple [16] Prop. 10.3).

II_0 et III_0 sont d'ailleurs également bien connus : III_0 est le théorème d'unicité des systèmes microdifférentiels à caractéristique simple, déjà cité.

Les démonstrations qui suivent sont basées sur les résultats généraux de Kashiwara et al. [9] [10] [12] sur les "systèmes holonomes à singularités régulières".

M. Kashiwara nous a montré comment corriger une faute d'une première version, et comment simplifier notablement certaines parties de la démonstration.

8.1. Une construction générale (inspirée de [10] , Appendice A).

Pour tout \mathcal{D}_X -module \mathcal{M} , on notera $\check{\Phi}(\mathcal{M}) = \int_j^* \mathcal{M}$ son image directe par l'inclusion $j : X \hookrightarrow X'$, considérée comme $\check{\mathcal{E}}_{X'}\text{-Module}$ ($\check{\mathcal{E}}_{X'}$ désigne le faisceau des opérateurs microdifférentiels considéré comme faisceau sur T^*X' tout entier).

Le \mathcal{D}_X -Module, restriction de $\check{\Phi}(\mathcal{M})$ à la section nulle de T^*X' , sera noté

$\Phi(\mathcal{M}) = \int_j \mathcal{M}$ (dans toute la suite nous prendrons la précaution - que nous n'avons pas prise jusqu'ici - de distinguer dans les notations l'image directe microdifférentielle, notée \int , de l'image directe différentielle, notée \int).

On notera en particulier

$\check{\mathcal{L}} = \check{\Phi}(\mathcal{D}_X) = \check{\mathcal{E}}_X / \check{\mathcal{E}}_{X, X_0}$; c'est un $\check{\mathcal{E}}_X$ -Module (cohérent) à gauche, et un \mathcal{D}_X -Module (cohérent) à droite, et l'on a pour tout \mathcal{D}_X -Module \mathcal{M}

$$\check{\Phi}(\mathcal{M}) = \check{\mathcal{L}} \otimes_{\check{\pi}^{-1}(\mathcal{D}_X)} \check{\pi}^{-1}(\mathcal{M})$$

où $\check{\pi}$ est la projection canonique de T^*X' sur X .

Par conséquent, si \mathcal{M} est donné par une présentation

$$\mathcal{D}_X^p \xrightarrow{A} \mathcal{D}_X^q \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

on a une suite exacte

$$(*) \quad \check{\mathcal{L}}^p \xrightarrow{A} \check{\mathcal{L}}^q \longrightarrow \check{\Phi}(\mathcal{M}) \longrightarrow 0,$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad \mathcal{N}$$

où A est une matrice $p \times q$ à coefficients dans \mathcal{D}_X (dont les éléments agissent sur $\check{\mathcal{L}}$ par multiplication à droite). Inversement tout $\check{\mathcal{E}}_X$ -Module $\check{\mathcal{N}}$ admettant une "présentation" de la forme $(*)$ est évidemment de la forme $\check{\mathcal{N}} = \check{\Phi}(\mathcal{M})$, et on "récupère" alors \mathcal{M} à partir de $\check{\mathcal{N}}$ par la formule

$$\mathcal{M} = \psi(\check{\mathcal{N}}) = \check{j}^{-1} \mathcal{H}om_{\check{\mathcal{E}}_X}(\check{\mathcal{L}}, \check{\mathcal{N}}),$$

où $\check{j} : X \hookrightarrow T^*X'$ est l'inclusion évidente.

Nous allons chercher à caractériser de tels $\check{\mathcal{N}}$, d'abord localement au voisinage de la section nulle de T^*X' (c.à.d. comme \mathcal{D}_X -Modules), ensuite microlocalement au voisinage de $T^*X' - T^*_{X, X'}$.

8.1.1. : au voisinage de la section nulle.

Proposition : Pour qu'un \mathcal{D}_X -Module cohérent \mathcal{N} soit localement de la forme $\mathcal{N} = \Phi(\mathcal{M})$ il faut et il suffit que son support soit inclus dans X .

Preuve : Si \mathcal{N} est à support dans X chacun de ses éléments est annulé par une puissance de x_0 , de sorte que \mathcal{N} est un quotient d'une somme directe de modules de la forme

$\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X \cdot x_0^m$. Or on a le

Lemme : $\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X \cdot x_0^m \cong \mathcal{L}^m$, où $\mathcal{L} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X \cdot x_0$.

En effet, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X \cdot x_0^{m-1} \xrightarrow{\cdot x_0} \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X \cdot x_0^m \longrightarrow \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X \cdot x_0 \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$$

d'où le lemme se déduit immédiatement par récurrence sur m en remarquant que

$\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}}^1(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = 0$ (en effet comme \mathcal{L} est le quotient de l'anneau de base par l'idéal principal \mathcal{D}_{X, x_0} on a $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}}^1(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = \mathcal{L} / x_0 \mathcal{L}$, qui est nul car le générateur canonique u_0 de \mathcal{L} vérifie la relation $u_0 = -x_0 D_{x_0} u_0$).

Grâce au lemme ci-dessus, nous savons donc que \mathcal{N} est un quotient de copies de \mathcal{L} .

En réappliquant le même raisonnement au noyau de l'homomorphisme $\mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$ ainsi obtenu on obtient une suite exacte $\mathcal{L}^p \xrightarrow{A} \mathcal{L}^q \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$ où A est un homomorphisme de \mathcal{D}_X -Modules à gauche. Or tout élément de \mathcal{L} s'écrit de façon unique sous la forme $P(x, D_x, D_{x_0})u_0$, où P est un opérateur différentiel ne dépendant pas de x_0 . L'homomorphisme A transforme donc chacun des générateurs $(0, \dots, u_0, \dots, 0)$ de \mathcal{L}^p en un q -uplet d'éléments de la forme $(P_1(x, D_x, D_{x_0})u_0, \dots, P_q(x, D_x, D_{x_0})u_0)$, avec pour tout $i = 1, 2, \dots, q$ $x_0 P_i u_0 = 0$, de sorte que $[x_0, P_i] = 0$, ce qui veut dire que P_i ne dépend pas de D_{x_0} . L'homomorphisme A est donc bien donné par une matrice à coefficients dans \mathcal{D}_X , ce qu'il fallait démontrer.

8.1.2. : au voisinage du fibré conormal $T_X^*X' - T_X^*X'$.

Proposition : Pour qu'un $\check{\mathcal{O}}_X$ -Module cohérent $\check{\mathcal{N}}$, défini au voisinage de

$\Lambda = T_X^*X' - T_X^*X'$, soit microlocalement de la forme $\check{\mathcal{N}} = \check{\Phi}(\mathcal{M})$ il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

Condition de support : La variété caractéristique de $\check{\mathcal{N}}$ est incluse dans la variété involutive

$$V = \{(x_0, x, \xi_0, \xi) \in T_X^*X' - T_X^*X' \mid x_0 = 0\}$$

Condition de monodromie : $\check{\mathcal{N}}$ est à singularité régulière le long de V (au voisinage de Λ), et sa monodromie le long de V est égale à l'identité.

La démonstration de cette proposition est donnée dans l'Appendice A de [10], Propositions A5 et A6. Elle fait intervenir de façon cruciale les principaux résultats de [12], où est définie la notion de "monodromie d'un système microdifférentiel à singularité régulière le long d'une variété involutive" ([12], thm 3.8).

8.2. Preuve de I_r , dans le cas où les opérateurs de multiplication à gauche par x_1, \dots, x_r dans \mathcal{M} sont injectifs.

Commençons par remarquer que toute connexion méromorphe de rang 1, à singularité régulière, ayant pour lieu polaire le diviseur $x_1 \dots x_r = 0$, est isomorphe à

$$\mathcal{O}_X \left[\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_r} \right] x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}, \text{ qui est isomorphe à } \mathcal{O}_X^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)} = \mathcal{O}_X x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$$

si l'on a pris soin de choisir tous les α_i dans $\mathbb{C} - \mathbb{N}$ (la monodromie de la connexion est caractérisée par r nombres $e^{\frac{2\pi i \alpha_1}{1}}, \dots, e^{\frac{2\pi i \alpha_r}{1}}$, de sorte que les $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ne sont définis que mod. \mathbb{Z} ; on utilise alors un résultat général de Deligne selon lequel les connexions méromorphes à singularité régulière sont caractérisées par leur monodromie).

Soit maintenant \mathcal{M} un système différentiel vérifiant I_r . Etant à caractéristique simple aux points génériques de chaque composante de sa variété caractéristique, il est à singularité régulière, et il en est de même d'après [10] de son localisé $\mathcal{M}_{(x_1, \dots, x_r)} = \mathcal{O}_X \left[\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_r} \right] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$. On conclut en appliquant la remarque ci-dessus

à ce localisé (dans lequel \mathcal{M} s'injecte par hypothèse), et en remarquant qu'une connexion du type ci-dessus n'a pas d'autre sous- \mathcal{D}_X -Modules que les connexions du même type obtenues en "oubliant" certaines des composantes singulières X_i pour lesquelles $\alpha_i \in \mathbb{Z}$.

8.3. Preuve de l'implication $I_r \Rightarrow II_r$.

Si \mathcal{N} vérifie les hypothèses de II_r , on sait grâce à 8.1.1 qu'il est de la forme $\mathcal{N} = \Phi(\mathcal{M})$. De plus on vérifie immédiatement que $\mathcal{M} = \psi(\mathcal{N})$ vérifie les hypothèses de I_r . D'après I_r , on a donc $\mathcal{M} \approx \mathcal{O}_X^{(\alpha)}$, de sorte que

$$\mathcal{N} \simeq \Phi(\mathcal{O}_X^{(\alpha)}) = \mathcal{B}_X^{(\alpha)}|_{X'}.$$

8.4. Preuve de l'implication $I_r \Rightarrow III_r$.

Si \mathcal{N} vérifie les hypothèses III_r il est à singularité régulière.

Soit $T_V : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ son automorphisme de "monodromie le long de V " (cf. [12] thm. 3.8).

Tout le problème est de démontrer le

Lemme : T_V est l'automorphisme de multiplication par une constante non nulle.

En effet si le lemme est vrai on peut écrire $T_V = e^{-2\pi i \beta} \mathbb{1}_{\mathcal{N}}$ où $\beta \in \mathbb{C}$, et le système $D_{x_0}^{-\beta} \mathcal{N}$ a une monodromie le long de V égale à l'identité. Il vérifie donc les hypothèses de la Proposition 8.1.2, de sorte qu'on peut écrire $D_{x_0}^{-\beta} \mathcal{N} = \check{\Phi}(\mathcal{M})$, où $\mathcal{M} = \psi(D_{x_0}^{-\beta} \mathcal{N})$ vérifie les hypothèses I_r . On a donc $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X^{(\alpha)}$, et $\mathcal{N} = D_{x_0}^{\beta} \check{\Phi}(\mathcal{O}_X^{(\alpha)})$, ce qui démontre III_r .

Preuve du Lemme : Sur un ouvert dense $\overset{\circ}{\Lambda}_\sigma$ de chaque composante Λ_σ , \mathcal{N} est à caractéristique simple donc $T_V|_{\overset{\circ}{\Lambda}_\sigma} = c_\sigma \mathbb{1}$, $c_\sigma \in \mathbb{C}^*$ (les systèmes à caractéristique simple n'ont pas d'automorphismes autres que constants). Si l'on démontre que $c_\sigma = c$ indépendamment de σ on aura gagné, car le noyau et le conoyau de l'homomorphisme $T_V - c \mathbb{1}_{\mathcal{N}}$ seront des systèmes microdifférentiels à supports de dimension inférieure à celle de X' , donc vides. Tout se ramène donc à montrer que $c_{\sigma_1} = c_{\sigma_2}$ pour tout couple (σ_1, σ_2) de sommets consécutifs du cube (composantes $\Lambda_{\sigma_1}, \Lambda_{\sigma_2}$ en interaction). Plaçons nous en un point générique de l'intersection $\Lambda_{\sigma_1} \cap \Lambda_{\sigma_2}$, et supposons $c_{\sigma_1} \neq c_{\sigma_2}$.

En un point générique de Λ_{σ_1} [resp. Λ_{σ_2}] on a $\text{Ker}(T_{V-C_{\sigma_1}} \mathbb{1}_{\mathcal{N}}) = \mathcal{N}$ [resp. 0] ,

$\text{Ker}(T_{V-C_{\sigma_2}} \mathbb{1}_{\mathcal{N}}) = 0$ [resp. \mathcal{N}] , de sorte que l'homomorphisme

$\text{Ker}(T_{V-C_{\sigma_1}} \mathbb{1}_{\mathcal{N}}) \oplus \text{Ker}(T_{V-C_{\sigma_2}} \mathbb{1}_{\mathcal{N}}) \longrightarrow \mathcal{N}$ est un isomorphisme presque partout, donc partout, ce qui contredit l'hypothèse d'interaction analytique.

8.5. Preuve de l'implication $I_r, II_r \Rightarrow I_{r+1}$.

Notons X' l'espace X' réticulé par les $r+1$ coordonnées x_0, x_1, \dots, x_r , et soit \mathcal{M} un $\mathcal{O}_{X'}$ -Module cohérent à support $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{P}(I_{r+1})} T_{X'_\sigma}^* X'$, vérifiant les hypothèses I_{r+1} . Considérons dans \mathcal{M} les opérateurs de multiplication à gauche par x_0, x_1, \dots, x_r

Si tous sont injectifs on sait déjà que I_{r+1} est vrai (n° 8.2).

Sinon on peut supposer que l'opérateur x_0 n'est pas injectif.

Considérons alors la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\lambda} \bar{\mathcal{M}} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{N} = \Gamma_{(x_0=0)} \mathcal{M}$ (sous-module des sections à support dans $(x_0=0)$). En microlocalisant cette suite exacte aux points génériques de chaque composante de la variété caractéristique on voit facilement que $\bar{\mathcal{M}}$ doit vérifier les hypothèses I_r , et \mathcal{N} les hypothèses II_r .

D'après l'hypothèse de récurrence, la suite exacte ci-dessus s'écrit donc

$$(i) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{B}_{X|X'}^{(\alpha)} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X}^{(\alpha)} \longrightarrow 0,$$

et il s'agit d'une extension non triviale (sinon il n'y aurait pas d'interactions analytiques dans \mathcal{M} entre les composantes $T_{X'_\sigma}^* X'$ pour lesquelles $\sigma \not\supset 0$ et celles pour lesquelles $\sigma \supset 0$).

Il s'agit maintenant de montrer qu'une extension non triviale de la forme (i) est nécessairement isomorphe à l'extension

$$(ii) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{B}_{X|X'}^{(\alpha)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X'}^{(0, \alpha)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X}^{(\alpha)} \longrightarrow 0.$$

En notant u_0 le générateur canonique de $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$, solution générique des équations

$$P_1 u = \dots = P_N u = 0, \text{ où } P_1 = x_1 D_{x_1} - \alpha_1, \dots, P_r = x_r D_{x_r} - \alpha_r, P_{r+1} = D_{x_{r+1}}, \dots, P_N = D_{x_N},$$

les générateurs canoniques des trois modules de la suite (ii) sont respectivement

$$\delta_{(x_0)} \otimes u_0, H_{(x_0)} \otimes u_0, 1 \otimes u_0,$$

où $\delta_{(x_0)}$ peut s'interpréter comme la distribution de Dirac portée par $x_0=0$, et $H_{(x_0)}$ comme la "distribution de Heaviside"; la flèche de gauche est définie par $\delta_{(x_0)} \otimes u_0 \rightarrow D_{x_0} H_{(x_0)} \otimes u_0$, et celle de droite par $H_{(x_0)} \otimes u_0 \mapsto 1 \otimes u_0$.

Pour montrer que l'extension (i) est isomorphe à l'extension (ii) il suffira d'après le lemme des cinq de construire un homomorphisme de la seconde vers la première égal à l'identité sur les deux termes extrêmes, c.à.d. de trouver dans \mathcal{M} un élément \hat{u} , solution des mêmes équations que $H_{(x_0)} \otimes u_0$, c.à.d.

$x_0 D_{x_0} \hat{u} = 0, P_1 \hat{u} = \dots = P_N \hat{u} = 0$, et tel que

$$D_{x_0} \hat{u} = \delta_{(x_0)} \otimes u_0, \lambda(\hat{u}) = 1 \otimes u_0.$$

Commençons par choisir dans \mathcal{M} un élément quelconque u tel que $\lambda(u) = 1 \otimes u_0$, et posons $v = D_{x_0} u$: v est un élément de $\text{Ker } \lambda$ qui vérifie la propriété

$$(*) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, P_i v = 0.$$

Or un calcul direct dans $\text{Ker } \lambda = \mathbb{C} \left[D_{x_0} \right] \delta_{(x_0)} \otimes \frac{\mathcal{O}_X^{(\alpha)}}{\mathcal{O}_X}$

montre que tout élément $v \in \text{Ker } \lambda$ vérifiant (*) est de la forme

$$v = c \delta_{(x_0)} \otimes u_0 + D_{x_0} v', \quad c \in \mathbb{C}, v' \in \text{Ker } \lambda.$$

En remplaçant u par $\hat{u} = u - v'$ on a encore

$$\lambda(\hat{u}) = 1 \otimes u_0, \text{ mais } D_{x_0} \hat{u} = c \delta_{(x_0)} \otimes u_0.$$

On en déduit que $D_{x_0} P_i \hat{u} = P_i D_{x_0} \hat{u} = c \delta_{(x_0)} \otimes P_i u_0 = 0$, donc $P_i \hat{u} = 0$ car

l'opérateur D_{x_0} est injectif dans $\text{Ker } \lambda$ qui contient $P_i \hat{u}$.

Si la constante c était nulle, \hat{u} serait annulé par tous les opérateurs qui annulent $1 \otimes u_0$, et définirait donc une section de λ , contrairement à l'hypothèse que l'extension (i) n'est pas triviale. Donc $c \neq 0$, et en remplaçant \hat{u} par $\frac{\hat{u}}{c}$ on obtient un élément de \mathcal{M} ayant toutes les propriétés cherchées.

APPENDICE A1

CONSTRUCTION D'UN MODÈLE DISTINGUÉ UNIVERSEL POUR $r = 2$.

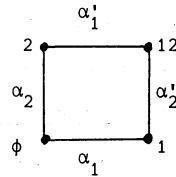
Proposition : La famille distinguée

$$(\gamma_\phi = 0, \gamma_1 = z_1^2, \gamma_2 = z_2^2, \gamma_{12} = (1+u^2)(z_1^2+z_2^2) + 2u \sqrt{1+u^2} z_1 z_2)$$

est un modèle distingué universel pour les "carrés réguliers" (familles 2-cubiques régulières) de fonctions (cf. n° 3.4 : on prend ici

$$U = \{u \in \mathbb{C} \mid u \neq \pm i\}.$$

Preuve : Donnons des noms aux arêtes du carré :



Soit $(g_\sigma(x))_{\sigma \in \mathcal{P}(I_2)}$ un "carré régulier" de fonctions et soient $x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \in \mathbb{C}\{x\}$ les fonctions qui lui sont associées d'après 3.3 i). On a

$$(*) \quad x_{\alpha_1}^2 + x_{\alpha'_2}^2 = x_{\alpha_2}^2 + x_{\alpha'_1}^2 = g_{12}(x),$$

de sorte que

$$(x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2})(x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}) = (x_{\alpha'_1} + x_{\alpha'_2})(x_{\alpha'_1} - x_{\alpha'_2}).$$

Comme x_{α_1} et x_{α_2} ont leurs différentielles linéairement indépendantes (propriété

3.3. ii)), le membre de gauche de l'égalité ci-dessus admet ses deux parenthèses comme facteurs irréductibles. Il en est donc de même du membre de droite, de sorte qu'en choisissant convenablement les arguments de $x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}$ (dont seuls les carrés sont déterminés par 3.3i)) on peut supposer que

$$(x_{\alpha'_1} + x_{\alpha'_2}) = s \cdot (x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2}), \quad (x_{\alpha'_1} - x_{\alpha'_2}) = \frac{1}{s} \cdot (x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}),$$

où s est un élément inversible de $\mathbb{C}\{x\}$. On en tire

$$(**) \quad \begin{cases} x_{\alpha'_1} = t x_{\alpha_1} + u x_{\alpha_2} \\ x_{\alpha'_2} = u x_{\alpha_1} + t x_{\alpha_2} \end{cases}$$

où $t = \frac{1}{2}(s + \frac{1}{s})$, $u = \frac{1}{2}(s - \frac{1}{s})$, de sorte que $t^2 - u^2 = 1$.

De plus, la propriété 3.3. ii) implique que t doit être inversible.

En substituant $(**)$ dans $(*)$ on trouve

$$g_{12}(x) = (1+u^2) (x_{\alpha_1}^2 + x_{\alpha_2}^2) + 2u \sqrt{1+u^2} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2}$$

où $u \in \mathbb{C}\{x\}$ est un germe de fonction tel que $u(0) \neq \pm i$.

La proposition est ainsi démontrée.

APPENDICE A2

Le but de cet appendice est de construire une solution universelle au problème suivant :

trouver, pour $r \geq 3$, tous les r -uples de fonctions analytiques

$(s_i \in \mathbb{C} \{x_1, x_2, \dots, x_r\})_{i=1,2,\dots,r}$ vérifiant la propriété

$$(*) \quad s_1^2 - x_1^2 = s_2^2 - x_2^2 = \dots = s_r^2 - x_r^2 \quad (\text{avec } s_i(0) = 0).$$

Ce problème a été résolu indépendamment par Joël BRIANCON et NGUYEN TIEN DAI par deux méthodes différentes (aussi compliquées l'une que l'autre). La méthode exposée ci-dessous est celle de DAI, mais la démonstration de la convergence utilise des idées de BRIANCON.

Lemme 0 : Si (s_i) vérifie $(*)$, $s_i = \pm x_i \bmod (x)^2$. Nous supposons désormais que $s_i = x_i \bmod (x)^2$ (remarquons que la propriété $(*)$ est invariante par les transformations $s_i \mapsto \pm s_i$).

Lemme 1 : Si (s_i) est choisi comme dans le lemme 0,

$$\exists v \in \mathbb{C} : s_i = x_i + v \prod_{j \neq i} x_j \bmod (x)^r.$$

Ces deux lemmes se vérifient de façon immédiate : on écrit $s_i = \sum a_{ij} x_j \bmod (x)^2$, et en regardant la partie quadratique des relations $(*)$ on trouve $a_{ii}^2 = 1$, $a_{ij} = 0$ pour $j \neq i$, c.à.d. le lemme 0 ; on démontre ensuite le lemme 1 en comparant les formes initiales de $s_i^2 - x_i^2$.

1. Construction formelle d'une solution quasihomogène de $(*)$ dépendant d'un paramètre v .

Théorème 1 : Le système $(*)$ admet une solution formelle de la forme

$$s_i = \sum_{k=0}^{\infty} {}^i S_k(x) v^k \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r][[v]]$$

où ${}^i S_k$ est un polynôme homogène en $x = (x_1, \dots, x_r)$ de degré $1+k(r-2)$, avec

$${}^i S_0 = x_i$$

$${}^i S_1 = \prod_{j \neq i} x_j = \frac{B(x)}{x_i}, \quad B(x) = x_1 x_2 \dots x_r.$$

1.1. Construction de 1s_2 .

Soit pour fixer les idées $i=1$:

$$s_1 = x_1 + v x_2 \dots x_r + v^2 {}^1s_2(x) \pmod{(v)^3}.$$

$$s_1^2 - x_1^2 = 2v x_1 x_2 \dots x_r + v^2 (x_2^2 \dots x_r^2 + 2x_1 {}^1s_2(x)) \pmod{(v)^3}.$$

On obtiendra donc une solution de $(*) \pmod{(v)^3}$ en posant

$${}^1s_2(x) = \frac{x_1}{2} \sum_{j=2}^r x_2^2 x_3^2 \dots \widehat{x_j^2} \dots x_r^2 = \frac{x_1}{2} A_{r-2}(x_2, \dots, x_r)$$

$$\text{et de même } {}^i s_2(x) = \frac{x_i}{2} A_{r-2}(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_r),$$

$$\text{où l'on a posé } A_r(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) = \sum_{\substack{\sigma \subset \{i_1, \dots, i_p\} \\ |\sigma|=r}} \prod_{j \in \sigma} x_j^2.$$

Remarque : Evidemment

$$A_r(x_1, x_2, \dots, x_r) = A_r(x_2, \dots, x_r) + x_1^2 A_{r-1}(x_2, \dots, x_r),$$

de sorte qu'en posant $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ on a

$$A_{r-2}(x_2, \dots, x_r) = A_{r-2}(x) - x_1^2 (A_{r-3}(x) - \dots - x_1^2 (A_1(x) - x_1^2) \dots)$$

1.2. Lemme : On considère les fonctions impaires d'une variable z , dépendant des paramètres $A = (A_1, A_2, \dots, A_{r-2}) \in \mathbb{C}^{r-2}$ et $B \in \mathbb{C}$:

$$S_0(A, B, z) = z$$

$$S_1(A, B, z) = \frac{B}{z}$$

$$S_2(A, B, z) = \frac{z}{2} (A_{r-2} - z^2 (A_{r-3} - \dots - z^2 (A_1 - z^2) \dots))$$

Alors il existe une et une seule suite de polynômes

$$S_3(A, B, z), S_4(A, B, z), \dots \in \mathbb{C}[A, B, z].$$

impairs en z , tels que la série formelle

$$S(A, B, z; v) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(A, B, z) v^k$$

ait la propriété suivante :

dans le développement de $S(A, B, z; v)^2$ en puissances de v , les coefficients de v^3, v^4 , etc... sont indépendants de z .

Preuve : Pour $k \geq 3$, le coefficient de v^k dans $S(A, B, z; v)^2$ s'écrit

$$2z S_k(A, B, z) + H_k(A, B, z), \text{ où } H_k(A, B, z) = \sum_{\ell=1}^{k-1} S_\ell(A, B, z) S_{k-\ell}(A, B, z).$$

Dans le membre de droite de l'expression de H_k , tous les S_ℓ , $S_{k-\ell}$ peuvent être supposés polynomiaux par hypothèse de récurrence, à l'exception de $S_1 = \frac{B}{z}$;

mais S_1 est multiplié par S_{k-1} qui est divisible par z (car impair en z , toujours par hypothèse de récurrence). Par conséquent H_k est un polynôme pair en z , et la seule façon d'obtenir la propriété cherchée est de prendre pour S_k le quotient de la division euclidienne de H_k par $-2z$.

1.3. Preuve du théorème 1 : Il résulte de la preuve du lemme 1.2 que si l'on donne à z le poids 1, à B le poids r , et à $(A_1, A_2, \dots, A_{r-2})$ les poids respectifs $2, 4, \dots, 2(r-2)$, le polynôme S_k est quasihomogène en A, B, z de poids $1+k(r-2)$.

Posons

$$^i S_k(x) = S_k(A(x), B(x), x_1)$$

où $A(x) = (A_1(x), \dots, A_{r-2}(x))$ et $B(x)$ sont les polynômes homogènes symétriques définis au n°1.1. Il est clair d'après 1.1 et 1.2 que le r -uple de séries formelles

$$^i S(x, v) = \sum_{k=0}^{\infty} ^i S_k(x) v^k$$

vérifie bien

$$(*) \quad [^1 S(x, v)]^2 - x_1^2 = \dots = [^r S(x, v)]^2 - x_r^2.$$

2. Universalité de la solution de 1.

Théorème 2 : Pour toute solution formelle $(s_i \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_r]])_{i=1,2,\dots,r}$ de

(*) , il existe une série formelle unique $v(x) \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_r]]$ telle que

$$s_i(x) = ^i S(x, v(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} ^i S_k(x) v^k(x).$$

Remarque préliminaire (évidente) : Le jet d'ordre $\ell+r-1$ de $^i S(x, v(x))$ ne dépend que du jet d'ordre ℓ de $v(x)$.

Cette remarque permet de construire la série formelle $v(x)$ de proche en proche, par récurrence sur ℓ . Supposons, par hypothèse de récurrence, que l'on sache construire un polynôme $\tilde{v}(x)$ de degré $\leq \ell-1$ tel que

$$s_i(x) = {}^iS(x, \tilde{v}(x)) \bmod. (x)^{\ell+r-1}$$

(c'est vrai pour $\ell=1$ d'après le lemme 1).

Tout le problème est de construire un polynôme

$$v(x) = \tilde{v}(x) + v(x)_\ell,$$

où $v(x)_\ell$ est homogène de degré ℓ , tel que

$$s_i(x) = {}^iS(x, v(x)) \bmod. (x)^{\ell+r}.$$

Or la partie homogène d'ordre $\ell+r-1$ de ${}^iS(x, v(x))$ s'écrit

$${}^iS(x, v(x))_{\ell+r-1} = {}^iS_1(x) \cdot v(x)_\ell + \sum_{k=2}^{1+\left[\frac{\ell}{r-2}\right]} {}^iS_k(x) \cdot v^k(x)_{\ell-(k-1)(r-2)}$$

(pour toute fonction $\Phi(x)$, on note $\Phi(x)_\ell$ sa partie homogène de degré ℓ).

On a donc

$${}^iS(x, v(x)) = {}^iS(x, \tilde{v}(x)) + {}^iS_1(x) \cdot v(x)_\ell \bmod. (x)^{\ell+r}.$$

D'autre part on peut écrire

$$s_i(x) = {}^iS(x, \tilde{v}(x)) + \sigma_i(x) \bmod. (x)^{\ell+r}$$

où $\sigma_i(x)$ est homogène de degré $\ell+r-1$; compte tenu de la relation

$${}^iS(x, \tilde{v}(x)) = x_i \bmod. (x)^2, \text{ on en tire } s_i^2(x) = [{}^iS(x, \tilde{v}(x))]^2 + 2x_i \sigma_i(x) \bmod. (x)^{\ell+r+1}.$$

En soustrayant x_i^2 des deux membres de cette égalité on en déduit que $x_i \sigma_i(x)$ est

(un polynôme homogène) indépendant de i . Il existe donc un polynôme unique $v(x)_\ell$

(de degré ℓ) tel que $\sigma_i(x) = (\prod_{j \neq i} x_j) \cdot v(x)_\ell = {}^iS_1(x) \cdot v(x)_\ell$, ce qui démontre

le théorème.

3. Convergence des constructions précédentes.

Théorème 3 : Pour tout $v \in \mathbb{C}$ la série formelle $S(A, B, z; v)$ du lemme 1.2 converge absolument pourvu que $\|A\|, \|B\|, \|z\|$ soient assez petits.

Il résulte de ce théorème que la série formelle ${}^iS(x, v) = \sum_{k=0}^{\infty} {}^iS_k(x) v^k$ du théorème

1 converge pour tout $v \in \mathbb{C}$ (à condition que x soit dans un polydisque assez petit,

dépendant de v). De même la série formelle $v(x)$ du théorème 2 est en fait dans

$\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$, d'après le théorème de M. Artin selon lequel tout système d'équations analytiques admettant une solution formelle admet une solution convergente (de sorte que l'unicité de la solution formelle implique sa convergence).

Preuve du théorème 3. On peut écrire $S(A, B, z; v)$ sous la forme

$$S = z + \frac{B}{z} + z(\tilde{A}(\zeta)v^2 + U(\zeta, v)v^3), \text{ où l'on a posé}$$

$$\zeta = z^2, \tilde{A}(\zeta) = \frac{1}{2}(A_{r-1} - \zeta(A_{r-3} - \dots - \zeta(A_1 - \zeta))\dots), \text{ et où la "fonction inconnue"}$$

$U(\zeta, v) \in \mathbb{C}[\tilde{A}, B, \zeta][[v]]$ est définie par la condition que le quotient de la division euclidienne de S^2 par v^3 soit indépendant de ζ . Ce quotient s'écrit

$$(3.0) \quad \zeta U^2 v^3 + 2\zeta \tilde{A} U v^2 + (\zeta \tilde{A}^2 + 2BU)v + (2\zeta U + 2B\tilde{A}).$$

En retranchant de (3.0) sa valeur pour $\zeta=0$ on trouve après division par ζ :

$$(3.1) \quad v^3 U^2 + 2(1+\tilde{A}v^2)U + \tilde{A}^2 v + 2B\delta(\tilde{A}+U) = 0$$

où l'on a noté, pour toute fonction $\Phi(\zeta, v)$,

$$\delta\Phi = \frac{\Phi(\zeta, v) - \Phi(0, v)}{\zeta}$$

Le problème est de démontrer que la solution formelle U de cette équation (unique d'après le lemme 1.2) est convergente pour tout v , pourvu que $|\zeta|$, $|B|$ soient assez petits, ainsi que les coefficients du polynôme \tilde{A} . Comme cette solution est quasihomogène (avec des poids de signes opposés pour v d'une part, ζ , B , \tilde{A} d'autre part) il suffit de montrer la convergence de U en restriction à $v=1$. L'équation (3.1) ainsi restreinte s'écrit

$$(3.2) \quad U^2 + 2(1+\tilde{A})U + \tilde{A}^2 + 2B\delta(\tilde{A}+U) = 0.$$

En développant U en puissances de B :

$$U = U_0 + U_1 B + U_2 B^2 + \dots$$

on voit que (3.2) équivaut formellement au système infini d'équations

$$(3.3) \quad \begin{aligned} U_0^2 + 2(1+\tilde{A})U_0 + \tilde{A}^2 &= 0 \Rightarrow U_0 = -\tilde{A} + (\sqrt{1+2\tilde{A}} - 1) \\ (1+\tilde{A}+U_0)U_1 + \delta(\tilde{A}+U_0) &= 0 \\ (1+\tilde{A}+U_0)U_2 + U_1^2 + \delta U_1 &= 0 \\ \dots & \\ (1+\tilde{A}+U_0)U_k + \sum_{\ell=1}^{k-1} U_\ell U_{k-\ell} + \delta U_{k-1} &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

d'où l'on tire immédiatement les U_k par récurrence.

Choisissons les coefficients du polynôme \tilde{A} assez petits pour que

$$||\tilde{A}+U_0||_{\rho} \leq \frac{1}{2}. \text{ Si par } ||\cdot||_{\rho} \text{ on désigne la "norme de Grauert"}$$

($||\sum \varphi_k \zeta^k||_{\rho} = \sum |\varphi_k| \rho^k$), on a pour tout $\Phi \in \mathbb{C}\{\zeta\}$ l'inégalité évidente

$$||\delta\Phi||_{\rho} \leq \frac{1}{\rho} ||\Phi||_{\rho}. \text{ Compte tenu du fait que } ||1+\tilde{A}+U_0||_{\rho} \geq \frac{1}{2}, \text{ on tire ainsi}$$

des équations (3.3) les majorations

$$||U_k||_{\rho} \leq u_k, \quad k=1,2,\dots$$

où les nombres positifs u_k sont définis par les relations de récurrence

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\rho} \\ u_k &= 2 \left(\sum_{\ell=1}^{k-1} u_{\ell} u_{k-\ell} + \frac{u_{k-1}}{\rho} \right) \end{aligned}$$

Pour achever la démonstration du théorème il suffit de montrer que la série entière

$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k B^k$ est convergente, ce qui est évident car elle est solution de l'équation du second degré

$$u = 2u^2 + 2u \frac{B}{\rho} + \frac{B}{\rho}.$$

4. Version "avec paramètres" des constructions précédentes.

Soit (s_1) un r -uplet de fonctions analytiques vérifiant $(*)$ et dépendant analytiquement de paramètres $t = (t_1, t_2, \dots, t_p)$. Pour chaque valeur de t , la construction 2 définit une suite de polynômes homogènes en x , que nous noterons $v(x, t)_{\ell}$ au lieu de $v(x)_{\ell}$ (ℓ est le degré d'homogénéité en x). En relisant la démonstration du théorème 2 on voit que les coefficients de ces polynômes dépendent analytiquement de t . De plus le théorème 3 nous permet d'affirmer que pour tout t fixé la série $\sum_{\ell} v(x, t)_{\ell}$ est dans $\mathbb{C}\{x\}$. Ces deux remarques impliquent que cette série définit une fonction $v(x, t)$ analytique par rapport à l'ensemble des variables (x, t) , ce qui démontre le "lemme-clef" du n° 5.4.

APPENDICE B

IMAGES DIRECTES ET TRANSFORMATIONS DE CONTACT QUANTIFIÉES.

BO On note θ la direction du vecteur cotangent dx_0 à l'origine de $\mathbb{C}x\mathbb{C}^n \ni (x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Soit $k \in \mathbb{C} \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ une fonction telle que

$$dk(0) = 0, \quad \det\left(\frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial y_j}(0)\right) \neq 0.$$

- i) Cette fonction définit dans $P^*(\mathbb{C}x\mathbb{C}^n)$ un germe en θ de transformation de contact quantifiée notée γ_k , dont le co-graphe est le fibré conormal à l'hypersurface $\{(x_0, x; y_0, y) \in (\mathbb{C}x\mathbb{C}^n)^2 \mid y_0 - x_0 - k(x, y) = 0\}$ et dont le noyau est $\delta_{(y_0 - x_0 - k(x, y))} \otimes dx_0 \otimes dx$.

- ii) Pour tout germe en θ de système microdifférentiel \mathcal{M} , on a

$$\gamma_k(\mathcal{M}) = \int_{\bar{K}} \pi^* \mathcal{M} \quad (\text{image directe non caractéristique})$$

où π et \bar{K} sont les applications notées sur le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\bar{K}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \\ x_0 & x & x_0 & x & y_0 & y \\ & & & & \parallel & \\ & & & & x_0 + k(x, y) & \end{array}$$

Preuve : i) est un résultat classique (cf. SKK [19], theorem 3.3.3).

Par ailleurs, on vérifie sans peine que \bar{K} est non caractéristique pour tout ensemble $V \subset P^*(\mathbb{C}x\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ contenu dans la sous-variété involutive $\eta_1 = \dots = \eta_n = 0$, de sorte que l'intégrale dans ii) définit bien un germe de système microdifférentiel.

- ii) affirme l'égalité de

$$\gamma_k(\mathcal{M}) = (\mathcal{E}_{x_0, x, y_0, y} \delta_{(y_0 - x_0 - k(x, y))} \otimes dx_0 \otimes dx) \otimes \mathcal{E}_{x_0, x} \mathcal{M}$$

avec

$$\int_{\bar{K}} \pi^* \mathcal{M} = (\mathcal{E}_{x_0, x, y_0, y} \delta_{(y_0 - x_0 - k(x, y))} \otimes dx_0 \otimes dx \otimes dy) \otimes \mathcal{E}_{x_0, x, y} \pi^* \mathcal{M}$$

Il suffira de la vérifier dans le cas où $\mathcal{M} = \mathcal{E}_{x_0, x}$, autrement dit - en posant

$\mathcal{N} = \mathcal{E}_{x_0, x, y_0, y}^\delta (y_0 - x_0 - k(x, y))$ - de montrer l'égalité

$$\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{E}_{x_0, x}} dx_0 \otimes dx = (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{E}_{x_0, x, y}} dx_0 \otimes dx \otimes dy) \otimes_{\mathcal{E}_{x_0, x, y}} \pi^* \mathcal{E}_{x_0, x}.$$

En fait, cette égalité est vraie pour tout $\mathcal{E}_{x_0, x, y}$ -module à gauche \mathcal{N} , et signifie la commutativité du diagramme de foncteurs suivants :

$$\begin{array}{ccc} & (1) & \\ (2)_g \downarrow & \square & \downarrow (2)_d \\ & (1') & \end{array}$$

où (1) [resp. (1)'] est le foncteur qui change les $\mathcal{E}_{x_0, x, y}$ [resp. $\mathcal{E}_{x_0, x}$]-modules à gauche en modules à droite, tandis que $(2)_g$ [resp. $(2)_d$] est le foncteur de "restriction des scalaires" à gauche [resp. à droite] pour l'inclusion d'anneaux $\pi^* (\mathcal{E}_{x_0, x}) \subset \mathcal{E}_{x_0, x, y}$.

B1 : (version relative du résultat B0)

θ est maintenant la direction du vecteur cotangent dx_0 à l'origine de $\mathbb{C}x_0^n \times \mathbb{C}^q \ni (x_0, x, t)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $t = (t_1, \dots, t_q)$.

$k \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_q\}$ est une fonction telle que

$$dk(0) = 0, \quad \det \left(-\frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial y_j}(0) \right) \neq 0.$$

i) Enoncé analogue au précédent mais dans $P^*(\mathbb{C}x_0^n \times \mathbb{C}^q)$. Le cographe de γ_k est le fibré conormal à la sous-variété

$$\{(x_0, x, t; y_0, y, t') \mid y_0 - x_0 - k(x, y, t) = t - t' = 0\}$$

de codimension $q+1$. Le noyau est

$$\delta_{(y_0 - x_0 - k(x, y, t))} \prod_{i=1}^q \delta_{(t_i - t'_i)} \otimes dx_0 \otimes dx \otimes dt$$

ii) Enoncé analogue au précédent pour les applications

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q \\ x_0 \times x \times t & & x_0 \times x \times y \times t & & y_0 \times y \times t \\ & & & & \parallel \\ & & & & x_0 + k(x, y, t) \end{array}$$

Preuve : identique à celle de B0.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] V.I. ARNOLD Formes normales des fonctions près de points critiques dégénérés, groupes de Weyl et singularités Lagrangiennes (en russe) Funkt. Analiz 6 n° 4, 1972 p. 3-25.
- [2] V.I. ARNOLD Points critiques des fonctions sur les variétés à bord,... (en russe) Usp. Mat. Nauk 33, 5, 1978 p. 91-105.
- [3] NGUYỄN HỮU ĐỨC, Stabilité de l'interaction géométrique entre deux composantes
NGUYỄN TIEN ĐÀI holonomes simples
C.R. Acad. Sc. Paris, 291, série A, 1980, p. 113.
- [4] NGUYỄN HỮU ĐỨC Systèmes de Gauss-Manin à bord et stabilité de l'interaction analytique
C.R. Acad. Sc. Paris, 291, série A, 1980, p. 267.
- [5] NGUYỄN HỮU ĐỨC Systèmes de Gauss-Manin à bord et stabilité (Thèse, en vietnamien, Institut de Mathématiques, Hanoi 1980).
- [6] J.J. DUISTERMAAT Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities Comm. Pure Applied Math, 27, 1974, p. 207-281.
- [7] L. HORMANDER Fourier Integral Operators
Acta Mathematica, 127, 1971, p. 79-183.
- [8] M. KASHIWARA Microlocal Calculus in Mathematical Problems in Theoretical Physics (Lecture Notes in Physics n° 39, 1975).
- [9] M. KASHIWARA, The theory of holonomic systems with regular singularities and
T. KAWAI its relevance to physical problems in Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Field Theory (Lecture Notes in Physics n° 126, 1980).
- [10] M. KASHIWARA, On holonomic systems of micro-differential equations III -
T. KAWAI Systems with regular singularities - (R.I.M.S. Preprint n° 293, Juin 1979).
- [11] M. KASHIWARA, A study of Feynman integrals by microdifferential equations,
T. KAWAI Commun. Math. Phys. 60, 1978, p. 97-130.
T. OSHIMA

- [12] M. KASHIWARA, Systems of differential equations with regular singularities
T. OSHIMA and their boundary value problems, Ann. of Math. 106,
1977, p. 145.

- [13] J. MARTINET Déploiements versels des applications différentiables et
classification des applications stables, in Singularités
d'applications différentiables. Lecture Notes in Mathéma-
tics n° 535 (1976).

- [14] R. B. MELROSE Lagrangian intersection and the Cauchy Problem Comm. Pure
G.A. UHLMANN Applied Math. 32, 1979, p. 483.

- [15] F. PHAM Introduction à l'étude topologique des singularités de
Landau, Mémorial des Sciences Mathématiques (Paris 1967).

- [16] F. PHAM Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin,
Progress in Mathematics n° 2, 1980, Birkhauser.

- [17] F. PHAM Déploiements de singularités de systèmes holonomes,
C.R. Acad. Sc. Paris, 289, série A, 1979, p. 333.

- [18] F. PHAM Remarque sur l'équivalence des fonctions de phase,
C.R. Acad. Sc. Paris, 290, série A, 1980, p. 1095.

- [19] M. SATO, Microfunctions and pseudodifferential equations
T. KAWAI, (Lecture Notes in Mathematics n° 287, 1973).
M. KASHIWARA

- [20] R. THOM Les singularités des applications différentiables
Ann. Inst. Fourier 6, 1955-56, p. 43-87.

- [21] V.M. ZAKALYUKIN Singularités de Lagrange et de Legendre (en russe)
Funkt. Analiz., 10, n° 1, 1976, p. 26-36.

Nguyễn tiên Đại et Nguyễn hữu Đức
Institut de Mathématiques
208 D Đới Căn
HANOI
Viênnam

Frédéric Pham
Université de Nice
Département de Mathématiques
Parc Valrose
06034 NICE
France

APPENDICE C

TRIVIALITÉ DES DÉPLOIEMENTS DE RÉSEAUX HOLONOMES

par

Nguyễn tự Cường

§ 0 NOTATIONS ET TERMINOLOGIE.

$X_0 = \mathbb{C}^{n+1}$ est muni des coordonnées $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. On se place au point $x_0^* = (0, dx_0)$ de son fibré cotangent projectif P^*X_0 , dont les fibres sont munies des coordonnées (η_1, \dots, η_n) , avec $\eta_i = \xi_i/\xi_0$ (où $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ sont les coordonnées de l'espace vectoriel cotangent).

La base des déploiements sera un germe de variété Z , muni des coordonnées $z = (z_1, \dots, z_p)$. On note $X = X_0 \times Z$, et on se place au point $x^* = (0, 0; dx_0)$ de P^*X .

On note \mathcal{E}_{X_0} , \mathcal{E}_X [resp. $\mathcal{E}_{X_0}^{(0)}$, $\mathcal{E}_X^{(0)}$] les anneaux des germes d'opérateurs microdifférentiels d'ordre fini [resp. d'ordre 0].

On se donne sur X un germe de système microdifférentiel holonome M muni d'un réseau R , c.à.d. un sous $\mathcal{E}_X^{(0)}$ -module noethérien de M engendrant M sur \mathcal{E}_X (se donner un réseau équivaut à se donner une bonne filtration, dont ce réseau serait le terme d'ordre 0). Le "symbole" du réseau est défini par $\sigma(R) = R/D_{X_0}^{-1}R$.

Les réseaux seront toujours supposés "plats", c.à.d. que leurs symboles seront des \mathcal{O}_{P^*X} -modules de Cohen Macauley (cf. [P₂]). En considérant $X_0 = X_0 \times \{0\}$ comme sous-variété de X , on suppose que le plongement $X_0 \hookrightarrow X$ est non caractéristique pour M . L'image réciproque de M par ce plongement est alors un \mathcal{E}_{X_0} -système holonome noté M_0 :

APPENDICE

$$M_0 = M/z_1 M + \dots + z_p M ,$$

muni du réseau

$$R_0 = R/z_1 R + \dots + z_p R .$$

Ce réseau R_0 est plat, de symbole $\sigma(R_0) = \sigma(R)/(z_1, \dots, z_p)$ (cf. [P₂]).

Nous dirons que R est un déploiement du réseau plat R_0 .

Cette notion de déploiement coïncide, pour tout réseau holonome plat R_0 , avec celle introduite au n° 7.0.

Nous noterons $P^*(X/Z) = Z \times P^*X_0$, $P^*X = P^*X - P^*_{X_0}X$, et $\rho : P^*X \rightarrow P^*(X/Z)$ la projection canonique.

V_0 désigne la variété caractéristique de M_0 , V celle de M , V_{rel} l'image de cette dernière par ρ . V_{rel} peut être considérée comme une déformation de V_0 de base Z , à fibres holonomes, et V est appelée un déploiement de V_0 .

Pour les déploiements (de réseaux, d'ensembles analytiques holonomes,...) on distinguera les notions de

déploiement trivial (M [resp. V] est déduit de M_0 [resp. V_0] par un changement de base $F : X \rightarrow X_0$, où F est une rétraction quelconque)

déploiement constant (cas particulier où l'on a choisi pour F la rétraction canonique).

§ 1 ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.

THÉORÈME 1 . - Soit R un déploiement du réseau plat R_0 , de base Z .

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) R est un déploiement constant
- ii) R est stable sous l'action de D_{z_1}, \dots, D_{z_p} .

Remarque 1 .

On peut choisir les coordonnées sur X_0 de façon que $(\eta', x') = (\eta_1, \dots, \eta_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ soit un système de paramètres sur V_0 . Alors (η', x', z) sera un système de paramètres sur V .
Notons $\mathcal{E}_{X_0}^{(0)}$ [resp. $\mathcal{E}_X^{(0)}$] le sous-anneau (commutatif, noethérien) de $\mathcal{E}_{X_0}^{(0)}$ [resp. $\mathcal{E}_X^{(0)}$] formé des germes d'opérateurs microdifférentiels dont le symbole total ne dépend que de (ξ_0, η', x') [resp. ξ_0, η', x', z]. Alors, d'après le théorème de finitude de Boutet ([P₁] §3) et l'hypothèse de platitude des réseaux, R_0 [resp. R] sera un $\mathcal{E}_{X_0}^{(0)}$ [resp. $\mathcal{E}_X^{(0)}$] - module libre de rang fini k .
Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$ une base de R sur $\mathcal{E}_X^{(0)}$. Alors il existe des matrices carrées B^1, \dots, B^k déterminées sans ambiguïté, d'ordre k à coefficients dans $D_0 \mathcal{E}_X^{(0)}$, telles que

$$(D_{z_1} - B^1)u = \dots = (D_{z_p} - B^p)u = 0$$

La condition ii) du théorème équivaut alors à la suivante :

iii) $\sigma_1(B^1) = \dots = \sigma_1(B^p) = 0$, où σ_1 désigne le symbole d'ordre 1
(et où pour $B = (B_{ij})$ on a noté $\sigma_1(B) = (\sigma_1(B_{ij}))$).

Remarque 2 .

En considérant R comme la fibre d'un faisceau cohérent \mathcal{R} de $\mathcal{E}_X^{(0)}$ - modules défini dans un voisinage ouvert connexe assez petit $U \subset P^*X$ du point x^* , on voit en appliquant le principe de prolongement analytique aux fonctions $\sigma_1(B^i)$ (analytiques sur U) que la condition iii) - et par conséquent la condition ii) du théorème - n'a besoin d'être vérifiée qu'aux points génériques de la variété caractéristique V de M .

Soit I un idéal de $\mathcal{O}_{P^*X}^*$. Nous dirons que le réseau R est saturé le long de l'idéal I si la condition suivante est vérifiée :

$$I \sigma(R) = 0$$

APPENDICE

En particulier si I est défini par

$$I = I_V = \{f \in \mathcal{O}_{P^*X} \mid f|_V = 0\}$$

la condition pour M d'admettre un réseau saturé le long de I_V est la condition de "singularité régulière" (le long de V) de Kashiwara-Oshima (cf. [K.O]).

Le théorème 1 admet les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1 . - Supposons que le réseau R soit saturé le long de l'idéal I_V . Alors pour que R soit un déploiement constant [resp. trivial] de R_0 il faut et il suffit que V soit un déploiement constant [resp. trivial] de V_0 .

Preuve . La nécessité étant évidente, montrons que la condition est suffisante. D'après le théorème 1, R sera un déploiement constant de R_0 s'il est saturé le long de l'idéal $I = (\zeta_1 \xi_0^{-1}), \dots, (\zeta_p \xi_0^{-1}) \subset \mathcal{O}_{P^*X}$ (où ζ_i désigne la coordonnée cotangente associée à z_i). Mais si V est un déploiement constant de V_0 , les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_p}$ sont tangents à V , de sorte que $\zeta_1 \xi_0^{-1}|_V = \dots = \zeta_p \xi_0^{-1}|_V = 0$. Etant saturé le long de I_V , R sera donc bien saturé le long de l'idéal $(\zeta_1 \xi_0^{-1}, \dots, \zeta_p \xi_0^{-1})$.

COROLLAIRE 2 . - Supposons que le réseau (plat) R_0 soit à caractéristique simple aux points génériques de V_0 . Alors si la variété caractéristique V du déploiement R de R_0 est un déploiement constant de V_0 , R est un déploiement constant.

Preuve . D'après la remarque 2 il suffit de démontrer que le germe de réseau R_y en un point générique y de V est saturé le long de l'idéal $(\zeta_1 \xi_0^{-1}, \dots, \zeta_p \xi_0^{-1})$. Or l'hypothèse de la "caractéristique simple" signifie qu'on a un isomorphisme $\sigma(R_{0,y}) \simeq \mathcal{O}_{V_0,y}$, d'où il résulte que

$$\sigma(R_y) / z_1 \sigma(R_y) + \dots + z_p \sigma(R_y) \simeq \mathcal{O}_{V,y} / z_1 \mathcal{O}_{V,y} + \dots + z_p \mathcal{O}_{V,y} .$$

Mais comme R est plat, $\sigma(R_y)$ est un $\mathcal{O}_{V,y}$ - module libre, de sorte que $\sigma(R_y) \simeq \mathcal{O}_{V,y}$. Comme V est un déploiement constant de V_0 on a $\zeta_1 \xi_0^{-1} | V = \dots = \zeta_p \xi_0^{-1} | V = 0$.

Par conséquent V est un germe en y de variété lisse, réduite, et l'on a bien

$$(\zeta_1 \xi_0^{-1}, \dots, \zeta_p \xi_0^{-1})_{\sigma(R_y)} = 0 .$$

Remarque 3 .

Dans le corollaire 1, on ne peut pas se dispenser de l'hypothèse de saturation le long de l'idéal I_V .

Par exemple, considérons dans $X = \mathbb{C}^2 \ni (x_0, z)$ le réseau plat $R = \mathcal{E}_X^{(0)} u_1 + \mathcal{E}_X^{(0)} u_2$ où $u_1 = x_0^{\alpha-1}$ et $u_2 = zx_0^{\alpha-2} + x_0^{\alpha-1} \text{Log } x_0$ (avec $\alpha \notin \mathbb{Z}$). R n'est pas saturé le long de l'idéal $I_V = (\xi_0^{-1})$, et ce n'est pas un déploiement constant bien que sa variété caractéristique V soit un déploiement constant.

§ 2 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 .

L'implication i) \Rightarrow ii) est évidente. Pour la réciproque nous aurons besoin du

LEMME . - (Comparer à [B], Prop. 12.6) .

Soient B^1, \dots, B^p les matrices de la remarque 1, supposées vérifier la condition iii). Alors il existe une matrice inversible P à coefficients dans $\mathcal{E}_X^{(0)}$, solution du système différentiel

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z_i} = B^i P & , \quad i = 1, \dots, p \\ P|_{z=0} = I \end{cases}$$

APPENDICE

Preuve . De la relation $D_{z_i} D_{z_j} u = D_{z_j} D_{z_i} u$ on tire

$$[B^i, B^j] + \frac{\partial B^i}{\partial z_j} - \frac{\partial B^j}{\partial z_i} = 0, \quad i, j = 1, \dots, p.$$

Ces relations sont justement les relations de compatibilité du système d'équations aux dérivées partielles (1) . Elles nous permettent donc de nous ramener, par récurrence sur p , à ne traiter que le cas $p = 1$. Posons pour simplifier $B = B^1$, comme par hypothèse $\sigma_1(B) = 0$ la matrice B est à coefficients dans $\mathcal{E}_X^{(0)}$. Ecrivons son développement $B = B_0 + B_1 D_0^{-1} + B_2 D_0^{-2} + \dots$ et définissons la matrice H par $\frac{\partial H}{\partial z_1} = B_0$, $H|_{z_1=0} = 0$. Alors $A = e^H$ est une matrice inversible à coefficients dans $\mathcal{E}_X^{(0)}$, de plus on a

$$\frac{\partial A}{\partial z_1} = \frac{\partial H}{\partial z_1} e^H = B_0 A.$$

Alors, en posant $P = AQ$ on a

$$\frac{\partial P}{\partial z_1} = \frac{\partial A}{\partial z_1} Q + A \frac{\partial Q}{\partial z_1} = B_0 A Q + A \frac{\partial Q}{\partial z_1}$$

$$\text{et} \quad BP = B_0 A Q + (B - B_0) A Q.$$

Il en résulte que le système (1) peut être résolu si l'on sait résoudre le système

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial z_1} = B^* Q \\ Q|_{z_1=0} = I \end{cases}$$

où $B^* = A^{-1}(B - B_0)A$ est à coefficients dans $D_0^{-1} \mathcal{E}_X^{(0)}$. Il suffit donc de démontrer le lemme dans le cas $p = 1$, $B_0 = 0$. Alors la matrice $P = I + P_1 D_0^{-1} + P_2 D_0^{-2} + \dots$, où les matrices P_k sont définies par récurrence comme solutions uniques des équations

$$(3) \quad \frac{\partial P_k}{\partial z_1} = B_k + \sum_{i=1}^{k-1} B_i P_{k-i}, \quad k = 1, 2, \dots$$

avec la condition initiale $P_k|_{z_1=0}$, sera la solution formelle cherchée du système (1). Montrons que cette matrice P est à coefficients dans $\mathcal{E}_X^{(0)}$. Si Δ est un polydisque de centre x^* , de rayon assez petit, on a $\left\| \frac{\partial P_k}{\partial z_1} \right\|_{\Delta} \geq \|P_k\|_{\Delta}$ (avec la notation $\|P_k\|_{\Delta} = \sup_{\Delta} \|P_k\|$). D'autre part comme $\mathcal{E}_X^{(0)}$ est un anneau commutatif on a toujours $\|B_i P_{k-i}\|_{\Delta} \leq \|B_i\|_{\Delta} \|P_{k-i}\|_{\Delta}$.

De la relation (3) on tire donc

$$\frac{\|P_k\|_{\Delta}}{k!} \leq \frac{\|B_k\|_{\Delta}}{k!} + \sum_{i=1}^k \frac{\|B_i\|_{\Delta}}{i!} \frac{\|P_{k-i}\|_{\Delta}}{(k-i)!}.$$

Posons $S(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|B_k\|_{\Delta}}{k!} y^k$ et définissons la fonction $Y(y)$ par la formule $Y(y) = Y(y) S(y) + S(y)$. Comme $S(y)$ est une fonction analytique avec $S(0) = 0$, d'après le théorème des fonctions implicites $Y(y)$ est aussi analytique pour y assez petit. Soit $Y(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y^k$ son développement de Taylor, en comparant les coefficients on trouve

$$a_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\|B_i\|_{\Delta}}{i!} a_{k-i} + \frac{\|B_k\|_{\Delta}}{k!}.$$

Il en résulte que $a_k \geq \frac{\|P_k\|_{\Delta}}{k!}$, ce qui veut dire que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y^k$ est une série majorante de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|P_k\|_{\Delta}}{k!} y^k$.

Comme P est évidemment inversible, le lemme est démontré.

Preuve de l'implication iii) \implies i).

En appliquant le lemme on trouve une matrice inversible P à coefficients dans $\mathcal{E}_X^{(0)}$ vérifiant (1). Alors par le changement de base $u = Pv$ on trouve des matrices A^1, \dots, A^n et B^1, \dots, B^p telles que R soit donné par la présentation suivante

APPENDICE

$$\left\{ \begin{array}{ll} (x_j - A^j)v = 0, & j = 0, 1, \dots, r \\ (D_k - A^k)v = 0, & k = r+1, \dots, n \\ (D_{z_i} - B^{i,1})v = 0, & i = 1, \dots, p \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (A^j \text{ à coefficients dans } \mathcal{E}_X^{(0)}) \\ (A^k \text{ à coefficients dans } D_0 \mathcal{E}_X^{(0)}) \\ (B^{i,1} \text{ à coefficients dans } D_0 \mathcal{E}_X^{(0)}) \end{array}$$

où les $B^{i,1}$ sont donnés par la formule

$$B^{i,1} = P^{-1} B^i P - P^{-1} \frac{\partial P}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

Alors en utilisant les relations de commutation $x_j D_{z_i} v = D_{z_i} x_j v$ ($j = 0, 1, \dots, r$ et $i = 1, \dots, p$) et $D_k D_{z_i} v = D_{z_i} D_k v$ ($k = r+1, \dots, n$ et $i = 1, \dots, p$) on voit facilement que la propriété $B^{i,1} = \dots = B^{i,p} = 0$ implique que les matrices A^1, \dots, A^n ne dépendent plus de z_1, \dots, z_p .
Donc R est un déploiement constant, et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE :

- [B] J.E. Björk : Rings of differential operators, North-Holland Math. Library Vol 21 (1979) .
- [P₁] F. Pham : Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Progress in Math., vol 2, Birkhauser (1980) .
- [P₂] F. Pham : Déploiements de singularités de systèmes holonomes, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 289 (1979) pp. 333-336 .
- [K.O] M. Kashiwara, T. Oshima : Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems Ann. of Math. 106 (1977) pp. 145-200 .

Nguyễn tu Cuong
Institut de Mathématiques
208 D Đới Căn
HANOI
Viêt nam