

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

Y. FÉLIX

Dénombrement des types de K-homotopie. Théorie de la déformation

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 3 (1980)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1980_2_3__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION

Comment classifier les différents types d'homotopie rationnelle de même algèbre de cohomologie ? Sous quelles conditions n'existe-t-il qu'un seul type d'homotopie rationnelle admettant une algèbre de cohomologie donnée ? Comment varient les invariants de la topologie algébrique classique à l'intérieur d'une même algèbre de cohomologie ? ... C'est à ces différentes questions que nous désirons donner une réponse.

Un pas décisif avait été franchi vers la classification par Halperin et Stasheff [10] lors de leur construction du modèle bigradué $(\wedge Z, d)$ d'une algèbre graduée commutative H et du modèle filtré $(\wedge Z, D)$ d'une algèbre graduée commutative différentielle (A, d_A) . Nous rappellerons leur définition au chapitre 0. Le modèle bigradué est un modèle formel de cohomologie H . Il est dit intrinsèquement formel ssi il n'existe qu'un seul type d'homotopie rationnelle réalisant H .

Les différents modèles filtrés d'une cohomologie H forment une variété algébrique W sur laquelle opère un groupe algébrique G et telle que les différentes orbites représentent les différents types d'homotopie rationnelle de cohomologie H . Cette théorie se généralise à tout corps k de caractéristique 0. Nous obtenons ainsi les différents types de k -homotopie. Une propriété apparaît lors de l'examen de ces variétés W : la rigidité.

Un espace X est dit rigide ssi son orbite est ouverte dans W_k pour une extension algébriquement close k . (Si X est construit par tour de Postnikov, ceci signifie que le type d'homotopie ne change pas lors de légères modifications des invariants de Postnikov). L'importance de cette notion est liée au théorème suivant :

Théorème : Un espace formel est k -rigide ssi il est intrinsèquement formel.

Adaptant les méthodes de déformation de Gerstenhaber [9], Nijenhuis [14] ... nous interpréterons la rigidité en termes de groupes de cohomologie de l'espace gradué différentiel des dérivations du modèle bigradué (groupes de \mathbb{F} -cohomologie).

Proposition 1 : 1) L'espace vectoriel ${}_{\mathbb{F}}Z^1(X)$ est isomorphe à l'espace tangent de Zariski à W en X tandis que l'espace vectoriel ${}_{\mathbb{F}}B^1(X)$ est isomorphe à l'espace tangent de Zariski à l'orbite de X .

2) Si ${}_{\mathbb{F}}H^1(X) = 0$ alors X est rigide.

Proposition 2 : Si ${}_{\mathbb{F}}H^2(X) = 0$, alors X est rigide ssi ${}_{\mathbb{F}}H^1(X) = 0$.

L'introduction du concept de rigidité et de la \mathbb{F} -cohomologie nous permettra d'énoncer quelques propositions de finitude du nombre de types de k -homotopie.

Proposition 3 : 1) Si X est un espace formel d'une cohomologie H pour laquelle il existe un espace rigide, et si $\dim_{\mathbb{F}} H^1(X) = 2$, alors il n'existe qu'un nombre fini de types d'homotopie réelle.

2) Si X est un espace formel tel que $\dim_{\mathbb{F}} H^1(X) = 1$, alors il n'existe au maximum que deux types d'homotopie complexe, et les types non formels sont rigides.

Proposition 4 : Si $H^p = 0$ $0 < p \leq 1$ et $p > 5l+2$, alors $\mathbb{F}H^1(X)$ mesure l'obstruction à la rigidité de X .

Proposition 5 : Si $H^p = 0$ $0 < p \leq 1$ et $p > 4l+1$, et si $\dim_{\mathbb{F}} H^1(X) > \dim \text{aut.} H$ pour un X quelconque de cohomologie H , alors il existe une infinité de types d'homotopie réelle distincts.

Si X est formel, l'espace $\mathbb{F}H^1(X)$ est muni d'une filtration inférieure $\mathbb{F}H_{\geq p}^1(X)$ correspondant à une décomposition de l'espace tangent $\mathbb{F}Z^1(X)$ en espaces tangent $\mathbb{F}Z_{\geq p}^1(X)$ à une suite de sous-variétés emboîtées W_p formées d'espaces pour lesquels les i -produits de Massey matriciels [13] sont nuls pour $3 \leq i \leq p+2$. Soit X un espace formel et Y un autre espace de même cohomologie, nous construisons au § 5 une suite $O_p(Y)$ d'obstructions à l'existence d'une équivalence d'homotopie rationnelle entre X et Y .

Ces obstructions $O_p(Y)$ appartiennent aux groupes $\mathbb{F}H_p^1(X)$.

Halperin et Stasheff avaient déjà construit semblable suite d'obstructions $O_p(D)$ logeant dans les quotients $\text{Hom}^1(Z_p, H^*)/\gamma(M_n)$ [10].

Nous construirons explicitement un monomorphisme $\mathbb{F}H_p^1(X) \rightarrow \text{Hom}^1(Z_p, H^*)/\gamma(M_n)$ et nous illustrerons au moyen de quelques exemples l'avantage de nos obstructions.

Le texte se termine par une étude des fonctions α semi-continues supérieurement sur W , c'est-à-dire vérifiant $\alpha(X) \geq \alpha(Y)$ si X appartient à l'adhérence de l'orbite de Y .

Proposition : 1) Un espace formel maximise sur W toutes les fonctions semi-continues supérieurement.

2) Les fonctions $\dim_{\mathbb{F}} H^i(Y)$, $\dim \pi_{\psi}^i(Y)$, ... sont semi-continues supérieurement.

Signalons enfin que Lemaire et Sigrist [12] d'une part, Schlessinger et Stasheff [16] d'autre part, ont obtenu indépendamment des résultats assez proches des nôtres. Les démarches sont cependant extrêmement différentes et complémentaires.

INTRODUCTION

Nous tenons à remercier D. Lehmann, ainsi que toute l'équipe de Topologie algébrique de Lille, pour l'aide précieuse apportée dans l'élaboration de ce texte.

CHAPITRE 0. PRÉLIMINAIRES

a) Préliminaires algébriques : Modèles minimaux.

- Dans tout ce qui suit, k désignera un corps de caractéristique nulle. Tous les espaces vectoriels, algèbres, ... sont définis sur k .
- Un espace vectoriel gradué (V^p) , $p \in \mathbb{N}$, est une somme directe $V = \bigoplus_{p \geq 0} V^p$ d'espaces vectoriels.
- Une k -algèbre graduée (A^p) , $p \in \mathbb{N}$ est un k -espace vectoriel gradué muni d'une multiplication associative

$$A^p \times A^q \rightarrow A^{p+q}.$$

L'on notera $|a|$ le degré de a . Si $a \in A^p$ $|a| = p$.

Une k -algèbre graduée (A^p) , $p \in \mathbb{N}$ est dite commutative si pour tout $a \in A^p$, $b \in A^q$

$$ab = (-1)^{pq} ba.$$

- Une dérivation de degré r ($r \in \mathbb{Z}$) sur (A^p) est une application linéaire $D : A^p \rightarrow A^{p+r}$ vérifiant

$$D(ab) = D(a) \cdot b + (-1)^{|a|r} a \cdot D(b).$$

Nous noterons $\text{Der}^r(A)$ l'ensemble des r -dérivations de A .

- Une algèbre différentielle graduée commutative (A, d) est une algèbre graduée commutative A munie d'une dérivation de degré 1 vérifiant $d^2 = 0$.

Nous adopterons les abréviations A.G.C. pour algèbre graduée commutative et A.D.G.C. pour algèbre différentielle graduée commutative.

- Nous appellerons différentielle toute dérivation de degré 1 de carré nul.

Soit X^* un espace vectoriel gradué, nous noterons $\wedge X^*$ l'algèbre commutative libre sur X^* .

Décomposons $X^* = P^* \oplus Q^*$ où P^* est l'espace vectoriel des éléments de degré impair et Q^* l'espace vectoriel des éléments de degré pair.

Alors $\wedge X^*$ est isomorphe au produit tensoriel de l'algèbre extérieure sur P^* par l'algèbre symétrique sur Q^* .

$$\wedge X^* \cong E(P^*) \otimes S(Q^*).$$

La cohomologie de (A, d_A) est l'A.G.C. $H(A)$ donnée par $\text{Ker. } d_A / \text{Im. } d_A$.

Un homomorphisme φ d'A.D.G.C. de (A, d_A) dans (B, d_B) est un homomorphisme de k -algèbres de degré zéro commutant avec les dérivations : $\varphi d_A = d_B \varphi$.

On notera φ^* l'homomorphisme d'A.G.C. induit en cohomologie.

Un quasi-isomorphisme φ d'A.D.G.C. de (A, d_A) dans (B, d_B) est un homomorphisme φ tel que φ^* soit un isomorphisme.

Une A.D.G.C. (A, d_A) est dite *c-connexe* si $H(A)$ est connexe.

Un K -S complexe connexe (Koszul - Sullivan) est une A.D.G.C. de la forme $(\wedge X, D)$ où $X = \bigoplus_{p \geq 0} X^p$ est un espace vectoriel gradué satisfaisant la condition (1).

- (1) Nilpotence : Il existe une base homogène $\{x_\alpha\}_{\alpha \in S}$ de X indexée par un ensemble

bien ordonné S telle que Dx_α appartient à l'algèbre engendrée par les x_β avec $\beta < \alpha$.

Il est dit minimal s'il satisfait la condition (2).

(2) Minimalité : $D(X) \subset (\wedge^+ X) (\wedge^+ X)$ (équivalent à : $\alpha \rightarrow \dim. |x_\alpha|$ est une application croissante).

Soit $(\wedge X, d)$ un $K - S$ complexe connexe. Nous noterons par $(\wedge X, D)^I$ l'A.D.G.C. $(\wedge X \otimes \wedge \bar{X} \otimes \wedge X, D)$ avec

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| 1) $D \mid \wedge X = d$ | 4) $D\bar{X} = \hat{X}$ |
| 2) $\bar{X}^p = X^{p+1}$ | 5) $D\hat{X} = 0$. |
| 3) $\hat{X}^p \sim X^p$ | |

Un automorphisme α de $(\wedge X, D)^I$ est alors construit en posant $\alpha(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \gamma^n(a)$
 $= e^\gamma$ où $\gamma = Di + iD$ avec i une dérivation de degré -1 $\begin{cases} ix = \bar{x} \\ i\bar{x} = 0 \\ i\hat{x} = 0. \end{cases}$

Si $\varphi_0, \varphi_1, (\wedge X, D) \rightarrow (A, d_A)$ sont deux homomorphismes d'A.D.G.C., une homotopie de
 φ_0 à φ_1 est un homomorphisme d'A.D.G.C.

$\phi : (\wedge X, D)^I \rightarrow (A, d_A)$ tel que
 $\phi \mid \wedge X = \varphi_0$ et $\varphi_1 = \phi \mid_{\wedge X}$
 φ_0 et φ_1 sont alors dits homotopes : $\varphi_0 \sim \varphi_1$.

THEOREME (Sullivan).

- 1) Soit (A, d_A) une A.D.G.C. c -connexe. Il existe un $K - S$ complexe connexe minimal (M_A, δ_A) et un homomorphisme $\rho_A : (M_A, \delta_A) \rightarrow (A, d_A)$ tel que ρ_A^* est un isomorphisme.
- 2) Si $\rho_A' : (M_A', \delta_A') \rightarrow (A, d_A)$ est une autre solution du problème, il existe un isomorphisme $\varphi : (M_A', \delta_A') \rightarrow (M_A, \delta_A)$ uniquement défini à homotopie près tel que $\rho_A \circ \varphi \sim \rho_A'$.

Deux A.D.G.C. (A, d_A) et (B, d_B) sont dites c -équivalentes si leurs modèles minimaux sont isomorphes. On dit alors qu'elles ont même type de k -homotopie.

Il revient au même de dire qu'il existe une suite finie de quasi-isomorphismes.

$(A_1, d_1) \leftarrow (A_2, d_2) \rightarrow (A_3, d_3) \leftarrow \dots \rightarrow (A_n, d_n)$ avec $(A_1, d_1) = (A, d_A)$ et $(A_n, d_n) = (B, d_B)$.

b) Théorie de Sullivan.

Soit X un espace topologique connexe nilpotent, $C_*(X, \mathbb{Q})$ l'espace vectoriel des chaînes rationnelles sur X et Δ_p^q l'espace vectoriel des q -formes polynomiales à coefficients rationnels sur l'espace $\Delta_p = \{(t_0, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid \sum t_i = 1\}$.

Δ_p^* est une A.D.G.C. avec la différentielle extérieure comme dérivation.

Δ_*^q est l'espace vectoriel simplicial des q -formes rationnelles sur l'ensemble simplicial Δ_* .

Désignons par $\Sigma(X)$ l'ensemble simplicial des simplexes singuliers de X .

Une P.L. forme rationnelle de degré q sur X est une application simpliciale

$\omega : \Sigma(X) \rightarrow \Delta_*^q$ qui à tout r -simplexe σ associe une q forme ω_σ sur Δ_r .

Notons $A_{PL}^q(X)$ cet espace.

Munissons les formes du produit extérieur $(\omega \wedge \omega')_\sigma = \omega_\sigma \wedge \omega'_\sigma$. $A_{PL}^*(X)$ devient une Q-A.G.C. La différentielle extérieure $(d\omega)_\sigma = d_{DR} \omega_\sigma$ en fait une Q-A.D.G.C.

L'intégration fournit une application d'espaces vectoriels différentiels gradués

$$A_{PL}^*(X) \rightarrow C^*(X, Q)$$

induisant un isomorphisme d'algèbres graduées

$$H^*(A_{PL}^*(X), d) \cong H^*(X, Q).$$

Il s'en suit que le foncteur A_{PL} transforme une équivalence rationnelle d'homotopie d'espaces connexes nilpotents en une équivalence d'homotopie d'A.D.G.C.

Inversement : soit un $K-S$ complexe minimal (A, d_A) .

Sullivan construit un espace connexe nilpotent $\langle A \rangle$, sa réalisation géométrique, tel que les foncteurs $X \rightarrow A_{PL}(X)$ et $A \rightarrow \langle A \rangle$ sont adjoints et induisent une équivalence de catégorie entre la catégorie des types d'homotopie rationnelle d'espaces nilpotents et la catégorie homotopique des A.D.G.C. connexes nilpotentes.

On déduit de ceci que deux espaces ont même type rationnel d'homotopie ssi les A.D.G.C. correspondantes sont c -équivalentes.

L'espace vectoriel gradué des générateurs du modèle minimal de (A, d_A) est appelé espace de pseudo-homotopie de (A, d_A) et est noté $\pi_\psi^*(A, d_A)$.

Th. : Si X est un c.w. complexe simplement connexe, et plus généralement nilpotent (c'est-à-dire dont le groupe fondamental est nilpotent et opère de façon nilpotente sur les groupes d'homotopie de dimension supérieure),

alors $\pi_\psi^*(A_{PL}(X), d) \cong \text{Hom}(\pi_*(X), Q)$.

c) Modèle bigradué d'une A.G.C. et modèles filtrés d'A.D.G.C.

- Soit H une A.G.C. connexe. Il existe un modèle minimal $\rho : (\wedge Z, d) \rightarrow (H, o)$

(o pour dérivation nulle) avec 1) Z est un espace vectoriel bigradué $Z = \bigoplus_{p \geq 0} \bigoplus_{q \geq 0} Z_{pq}^p$

p : dimension

q : degré de graduation inférieure.

PRÉLIMINAIRES

2) $d : Z_{\mathbb{Q}}^p \rightarrow (\wedge Z)_{\mathbb{Q}-1}^{p+1}$, ceci munit l'algèbre de cohomologie $H(\wedge Z, d)$ d'une graduation inférieure $H_p(\wedge Z, d)$.

Il faut en outre que :

3) $\rho : \wedge Z_0 \rightarrow H$ soit surjective.

4) $H_0(\wedge Z, d) \cong H$.

5) $H_p(\wedge Z, d) \cong 0 \quad p > 0$.

Un élément z de $\wedge Z$ est dit de degré de filtration inférieure à p s'il appartient à $(\wedge Z)_{\leq p}$. La construction explicite se trouve dans H - S. [10].

$(\wedge Z, d) \xrightarrow{\rho} (H, 0)$ est appelé le modèle bigradué de H . Il est défini à isomorphisme près.

- Soit (A, d_A) une A.D.G.C. \mathbb{C} -connexe et $(\wedge Z, d) \xrightarrow{\rho} (H^*(A), 0)$ le modèle bigradué de l'A.G.C. $H^*(A)$, alors il existe une dérivation D de carré nul sur $\wedge Z$ et une application d'A.D.G.C. $\varphi : (\wedge Z, D) \rightarrow (A, d_A)$ telles que

1) $(D-d) : Z_n \rightarrow (\wedge Z)_{\leq n-2}$

2) φ^* est un isomorphisme

3) $\forall z \in \wedge Z_0 \quad \varphi^*([z]) = \rho z$.

D'autre part, si $\varphi' : (\wedge Z, D') \rightarrow (A, d_A)$ satisfait également ces propriétés, il existe un isomorphisme $\psi : (\wedge Z, D) \rightarrow (\wedge Z, D')$ tel que : 1) le diagramme suivant commute. à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} (\wedge Z, D) & \xrightarrow{\varphi} & (A, d_A) \\ & \searrow \psi & \nearrow \varphi' \\ & (\wedge Z, D') & \end{array}$$

2) $\psi - \text{Id}$ baisse la filtration d'au moins une unité. Un pareil modèle $\varphi : (\wedge Z, D) \rightarrow (A, d_A)$ est dit *filtré*. Il est obtenu à partir d'une perturbation de la différentielle d sur $\wedge Z$.

Une A.D.G.C. (A, d_A) est dite *formelle* si elle est \mathbb{C} -équivalente à $(H(A), 0)$. On peut alors prendre $D=d$. Modèles filtrés et bigradués coïncident.

Soit (A, d_A) une \mathbb{Q} -A.D.G.C.

Si A est formelle, il est clair que, pour tout corps K de caractéristique 0, $A \otimes K$ est également formelle. Réciproquement, Halperin et Stasheff ont montré : il suffit qu'il existe K tel que $A \otimes K$ soit formelle pour que A soit formelle.

Une A.D.G.C. (A, d_A) \mathbb{C} -connexe est dite *intrinsèquement formelle* si toutes les

A.D.G.C. avec algèbre de cohomologie isomorphe à $H^*(A)$ sont formelles, c'est-à-dire s'il n'existe pour la cohomologie $H^*(A)$ qu'un seul type rationnel d'homotopie (dont le modèle est le modèle bigradué de $(H^*(A), d=0)$).

CHAPITRE 1. VARIÉTÉ DES TYPES DE K-HOMOTOPIE DE k-ALGÈBRE DE COHOMOLOGIE H

Soient (A, d_A) et (B, d_B) deux A.D.G.C. c-connexes. Supposons qu'il existe un isomorphisme $f : H^*(A) \rightarrow H^*(B)$. Désignons par $\rho_A : (\wedge Z, d) \rightarrow (H^*(A), 0)$ le modèle bigradué de $H^*(A)$. Alors $f \circ \rho_A$ est un modèle bigradué de $H^*(B)$.

Ces modèles peuvent être déformés en des modèles filtrés :

$$\varphi_A : (\wedge Z, D_A) \rightarrow (A, d_A) \quad \text{et} \quad \varphi_B : (\wedge Z, D_B) \rightarrow (B, d_B).$$

Halperin et Stasheff ont démontré [10] le théorème suivant :

Théorème : f peut être réalisée par une équivalence d'homotopie ssi il existe un isomorphisme d'A.D.G.C. $\varphi : (\wedge Z, D_A) \rightarrow (\wedge Z, D_B)$ tel que $\varphi \cdot \text{id}$ décroît la filtration d'au moins une unité. □

L'inconvénient de cette formulation était que les morphismes ρ_A et ρ_B des modèles bigradués $[(\wedge Z, d), \rho_A]$ et $[(\wedge Z, d), \rho_B]$ sont différents. Nous désirons éviter cette dépendance.

Fixons une A.G.C. H^* ainsi qu'un modèle bigradué $(\wedge Z, d) \xrightarrow{\rho} (H^*, 0)$. Réalisons chaque automorphisme h de H^* par un automorphisme \bar{h} de $(\wedge Z, d)$. L'ensemble des automorphismes h de H agit sur les endomorphismes linéaires de $\wedge Z$ par la formule $D \rightarrow \bar{h} D \bar{h}^{-1}$.

Lemme : Soit $(\wedge Z, D) \xrightarrow{\varphi} (A, d_A)$ un modèle filtré de modèle bigradué $(\wedge Z, d) \xrightarrow{\rho} H^*$ et f un automorphisme de H^* réalisable par un automorphisme f de $(\wedge Z, d)$, alors $(\wedge Z, f^{-1} D f) \xrightarrow{\varphi \bar{f}} (A, d_A)$ est un modèle filtré de modèle bigradué $f\rho$.

Démonstration : le modèle bigradué est $\rho f = f\rho$. □

Alors,

Proposition 1 : 1) Toute A.D.G.C. (A, d_A) d'algèbre de cohomologie isomorphe à H^* a un modèle filtré $(\wedge Z, D_A) \xrightarrow{\varphi} (A, d_A)$ de modèle bigradué $(\wedge Z, d) \xrightarrow{\rho} (H^*, 0)$ fixé.

2) Deux pareils modèles filtrés $(\wedge Z, D_A)$ et $(\wedge Z, D_B)$ sont c-équivalents ssi il existe un isomorphisme $\varphi : (\wedge Z, D_A) \rightarrow (\wedge Z, D_B)$ de la forme $\psi \circ \theta$ où θ est un automorphisme de bidegré $(0, 0)$ induit par un automorphisme de H^* et ψ est un automorphisme de $\wedge Z$ tel que $\psi \cdot \text{id}$ décroît la filtration d'au moins une unité.

Démonstration : résulte du lemme. □

Nous supposerons toujours dans ce qui suit que la k-algèbre H^* vérifie les conditions suivantes :

- C_1 $\left\{ \begin{array}{l} H^* \text{ est une A.G.C. telle que si } (\wedge Z, d) \text{ désigne son modèle bigradué, alors} \\ Z^p \text{ est de dimension finie pour tout } p. \end{array} \right.$
- C_2 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un degré } n \text{ tel que } H^p = 0 \text{ } \forall p > n \text{ et } H^n \neq 0. \\ n \text{ est appelé la dimension cohomologique.} \end{array} \right.$

Il en résulte que $(\wedge Z)_q^p$ est de dimension finie $\forall p, q$. Désignons par $(z_\lambda^p)_\lambda$ une base de l'espace vectoriel $(\wedge Z)^p$.

Désignons par $(x_\mu)_{\mu \in M}$ une base de l'espace vectoriel gradué Z
 $x_\mu \in Z_{i(\mu)}^{j(\mu)}$.

Regardons toutes les différentielles D que l'on peut mettre sur $\wedge Z$ de la forme

$$D = d + d_2 + d_3 + \dots \text{ avec } d_i : Z_q^p \rightarrow (\wedge Z)_{q-i}^{p+1} \quad i \geq 2.$$

Pareille différentielle est entièrement définie par les $D(x_\mu)$ où μ parcourt M .

$$D(x_\mu) = d(x_\mu) + \sum_r \alpha_{\mu,r} z_r^{j(\mu)+1}, \quad \alpha_{\mu,r} \in \Omega,$$

où la somme est prise sur les $z_r^{j(\mu)+1}$ qui engendrent l'espace vectoriel $(\wedge Z)_{\leq i(\mu)-2}^{j(\mu)+1}$

L'expression $D^2 = 0$ devient une relation du second degré en $\alpha_{\lambda,r}$. Les zéros de D^2 forment une variété algébrique que nous noterons $\bar{W}(\wedge Z, d)$ (\bar{W} , s'il n'y a pas d'ambiguïté). Chaque point de cette variété représente un modèle filtré $(\wedge Z, D)$ et donc un type de k -homotopie d'anneau de cohomologie H^* .

Le groupe des k -automorphismes d'algèbre (sans différentielle) de $\wedge Z$ opère sur \bar{W} . Considérons le plus petit sous-groupe G contenant les groupes G_1 et G_2 suivants : G_1 est le groupe des k -automorphismes de l'algèbre différentielle bigraduée $(\wedge Z, d)$; G_2 est le groupe des k -automorphismes d'algèbres de $\wedge Z$ de la forme $\varphi = 1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$ ou $\varphi_i : Z_{p-1} \rightarrow (\wedge Z)_{p-i}$. L'action d'un automorphisme φ sur un point D est simplement $\varphi * D = \varphi D \varphi^{-1}$.

Proposition (également [12], [16]). Les différentes orbites représentent les différents types de k -homotopie de cohomologie donnée H^* .

Nous obtenons comme cas particulier : pour $k = \mathbb{R}$, les types d'homotopie réelle ; pour $k = \mathbb{Q}$, les types d'homotopie rationnelle.

Si l'algèbre $\wedge Z$ ne possède qu'un nombre fini de générateurs, alors cette variété est de dimension finie. Sinon elle est de dimension infinie.

Pour cela, considérons W , variété algébrique des différentielles D de l'algèbre $\wedge Z / (\wedge Z)^{\geq n+1}$ (algèbre $\wedge Z$ tronquée en degré n) telles que $(D-d)$ baisse la filtration d'au moins 2 unités.

Le sous-groupe G , décrit précédemment, des automorphismes g d'A.G.C. de $\wedge Z$ opère sur W par $g * D = g D g^{-1}$.

Désignons par $O(\bar{W}, G)$ et $O(W, G)$ les espaces d'orbites de \bar{W} et W sous G .

La restriction des différentielles à l'algèbre $\wedge Z / (\wedge Z)^{\geq n+1}$ entraîne une application $p : O(\bar{W}, G) \rightarrow O(W, G)$. Le lemme suivant montre que cette application est injective. Les orbites $O(W, G)$ dans l'image de p représentent donc bien les différents types de k-homotopie.

Lemme 1 : Soit H^* une A.G.C. de dimension n .

Soient D_A et D_B deux différentielles sur $\wedge Z$, telles que $(D_A - d)$ et $(D_B - d)$ baissent la filtration d'au moins deux unités et telles que $D_A - D_B = 0$ sur $Z^{\leq n-1}$. Alors il existe φ dans G avec $\varphi^*(D_A) = D_B$.

Démonstration : Posons $I^p = 0$ $p < n$, I^n un supplémentaire de $[\text{Ker}(\wedge Z, D_A)]^n$ et $I^p = (\wedge Z)^p$ $p > n$. I est un idéal différentiel. L'application $(\wedge Z, D_A) \rightarrow (\wedge Z, D_A)/I$ est un quasi-iso. Comme $(\wedge Z, D_A)/I = (\wedge Z, D_B)/I$, il existe trivialement un φ vérifiant les exigences du lemme. \square

Remarque : On peut construire φ par récurrence, à la main [5].

Une variété algébrique V sera dite connexe par arcs si pour tout couple de points (A, B) de V il existe une courbe rationnelle passant par ces points. Il est équivalent de dire qu'il existe un morphisme f de k dans V tel que $f(0) = A$ et $f(1) = B$.

Lemme 2 : La variété W (respectivement \bar{W}) est connexe par arcs.

Démonstration : En effet, pour tout $D = d + d_2 + d_3 + \dots$ de W (respectivement de \bar{W}), la courbe $D_t = d + t d_2 + t^2 d_3 + \dots$ est contenue dans W (respectivement \bar{W}), $t \in K$. En $t=1$, elle passe par D et en $t=0$ par d .

Lemme 2' : La variété $\bar{W}_{\mathbb{R}} = \bar{W}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ est connexe par arcs (au sens usuel) et contractible.

Démonstration : Sur \bar{W} , la courbe D_t est rationnelle et continue. Cette construction pouvant se faire globalement, définit une contraction de $\bar{W}_{\mathbb{R}}$.

Proposition 2 : Soit $o(D)$ la k-orbite de l'algèbre $(\wedge Z, D)$. Alors $d \in \overline{o(D)}$.

Démonstration : Soit φ_t la famille à un paramètre d'automorphismes définie par $\varphi_t(x) = t^{p+s} x$, si $x \in (\wedge Z)_p^s$, $t \in k^*$.

Si $D = d + d_2 + d_3 + \dots$, $(\varphi_t^{-1} D \varphi_t)(x) = (d + t d_2 + t^2 d_3 + \dots)(x)$.

Pour $t \in K^*$, D_t est clairement dans l'orbite de D .

Cependant, pour $t = 0$, $D_0 = d$.

Chaque équation algébrique $F(X) = 0$ satisfaite par tous les points de $o(D)$ est satisfaite en particulier par les points D_t . L'équation $F(\varphi_t^{-1} D \varphi_t) = 0$ doit donc être vraie identiquement en t et donc en particulier pour $t=0$. \square

Proposition 2' : Soit $o(D)$ la \mathbb{R} -orbite de la \mathbb{R} -algèbre $(\wedge Z, D)$, alors $d \in \overline{o(D)}$ (où l'adhérence est prise ici pour la topologie usuelle de \mathbb{R}).

Démonstration : d appartient à l'adhérence de la suite de points D_t . \square

Proposition 3 : L'espace tangent au point D à la variété W est formé des dérivations θ de $\wedge Z / (\wedge Z)^{n+1}$ vérifiant

- 1) $D\theta + \theta D = 0$
- 2) θ baisse la filtration d'au moins 2 unités.

Démonstration : Comme D est du premier degré en les variables α_r , θ sera un vecteur tg ssi il vérifie les différentielles des relations :

- 1) $D^2 = 0$.
- 2) Le rang du système formé par $[D(x_\lambda) - d(x_\lambda), z_1, z_2, \dots, z_s]$ est égal à s où z_1, z_2, \dots, z_s est une base de $(\wedge Z)^{j(\lambda)+1}_{\leq i(\lambda)-2}$.

A savoir :

- 1) $D\theta + \theta D = 0$.
- 2) Le rang du système $(\theta(x_\lambda), z_1, z_2, \dots, z_s)$ vaut s . \square

Cette variété W n'est pas nécessairement irréductible.

Exemple 1 : Considérons les espaces de même cohomologie que $S^3 \vee S^3 \vee S^8 \vee S^{13}$.

$H^* = \wedge(x, y, u, s)/I$ où $|x| = |y| = 3$.

$$|u| = 8 \quad |s| = 13.$$

I est l'idéal engendré par $(xy, ux, uy, xs, ys, us, u^2)$.

- Prenons pour W la variété des différentielles du modèle bigradué $(\wedge Z, d)$ de H^* tronqué en dimension 13.

Construisons dans un premier temps $(\wedge Z, d)^{\leq 13}$.

$$z_0 : x, y, u, s. \quad |x| = |y| = 3 \quad |u| = 8 \quad |s| = 13$$

$$z_1^{\leq 13} : t, r_1, r_2 \quad |t| = 5 \quad |r_1| = |r_2| = 10$$

$$dt = xy \quad dr_1 = ux \quad dr_2 = uy$$

$$z_2^{\leq 13} : v_1, v_2, x_1, x_2, x_3, x_4.$$

$$|v_1| = |v_2| = 7, \quad |x_1| = |x_2| = |x_3| = |x_4| = 12.$$

$$dv_1 = tx \quad dx_1 = r_1x \quad dx_3 = r_2y$$

$$dv_2 = ty \quad dx_2 = r_1y + r_2x \quad dx_4 = r_1y - ut.$$

$$z_3^{\leq 13} : u_1, u_2, u_3, \quad |u_1| = |u_2| = |u_3| = 9$$

$$du_1 = v_1x \quad du_2 = v_2x + v_1y \quad du_3 = v_2y$$

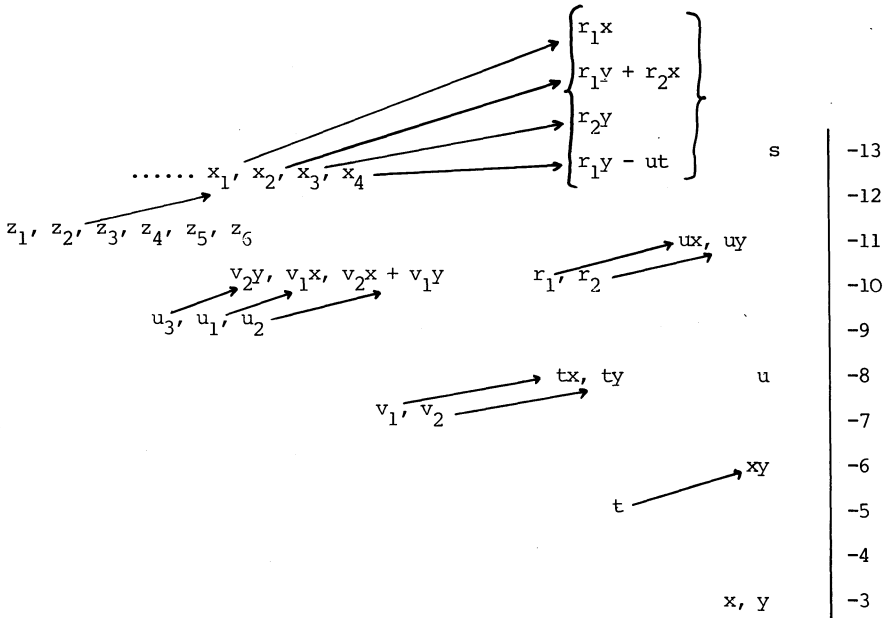
$$z_4^{\leq 13} : z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 \quad |z_i| = 11 \quad 1 \leq i \leq 6.$$

$$dz_1 = u_1x \quad dz_4 = u_3x + u_2y$$

$$dz_2 = u_1y + u_2x \quad dz_5 = u_1y + v_1t$$

$$dz_3 = u_3y \quad dz_6 = u_3x - v_2t.$$

Nous pouvons représenter les générateurs et les relations dans le diagramme ci-dessous :



Les seules dérivations D de $(\wedge Z)/(\wedge Z)^{\geq 14}$ sont définies sur Z_2 par $d_2 v_1 = \alpha u$
 $d_2 x_1 = \mu s \quad d_2 x_3 = \rho s \quad d_2 y_2 = \beta u \quad d_2 x_2 = \nu s \quad d_2 x_4 = \lambda s$

$\alpha, \beta, \mu, \nu, \rho, \lambda \in k$.

Prolongeons les à tout $\wedge Z$ en des différentielles.

Il faut donc $D^2 = 0$, à savoir $d^2 = 0$, $dd_2 + d_2 d = 0$, $dd_3 + d_2^2 + d_3 d = 0$.

En particulier la relation $dd_2 + d_2 d = 0$ nous oblige à poser

$$d_2 u_1 = -\alpha r_1$$

$$d_2 u_2 = -\alpha r_2 - \beta r_1$$

$$d_2 u_3 = -\beta r_2$$

$$d_2 z_1 = \alpha x_1$$

$$d_2 z_4 = \beta x_2 + \alpha x_3$$

$$d_2 z_2 = \beta x_1 + \alpha x_2$$

$$d_2 z_5 = \alpha x_4$$

$$d_2 z_3 = \beta x_3$$

$$d_2 z_6 = \beta x_2 - \beta x_4$$

La relation $dd_3 + d_2^2 + d_3 d = 0$ entraîne alors la série de relation :

$$\alpha\mu = 0 \quad \beta\mu + \alpha\nu = 0 \quad \beta\rho = 0$$

$$\beta\nu + \alpha\rho = 0 \quad \alpha\lambda = 0 \quad \beta\nu - \beta\lambda = 0$$

Ce qui conduit à supposer soit $\alpha = \beta = 0$, soit $\mu = \nu = \rho = \lambda = 0$.

Nous voyons apparaître 2 composantes : l'une de dimension 4 est formée des espaces qui laissent sphérique le générateur de H^8 , la seconde de dimension 2 est formée des espaces qui laissent sphérique le générateur de H^{13} .

Action du groupe G .

Puisque d appartient à $\overline{O(D)}$, $O(d)$ est entièrement contenue dans $\overline{O(D)}$ $\forall d$ de W . Rappelons que, si k est algébriquement clos, les orbites sont des sous-variétés localement fermées dont le bord est une union d'orbites de dimension strictement plus petite. En particulier, les orbites de dimension minimum sont fermées.

Corollaire 1 : Soit k un corps algébriquement clos.

1) La k -orbite de l'algèbre bigraduée $(\wedge Z, d)$ est une sous-variété fermée.

2) Les k -orbites $G \cdot D$ sont des sous-variétés localement fermées de dimension strictement plus grande que $O(d)$, si $D \notin O(d)$.

Corollaire 2 : Si \bar{k} est la clôture algébrique de k alors $O(d)_k$ est égal à $W_k \cap O(d)_{\bar{k}}$.

Notation : Si H^* est une k -A.G.C. de modèle bigradué $(\wedge Z, d)$, et si K est une extension de k , nous noterons W_K la variété des déformations de $(\wedge Z \otimes_K K, d \otimes 1)$.

CHAPITRE 2. DÉFORMATIONS

Nous nous placerons désormais dans le cadre des variétés W .

Soit $\tilde{k} = k((t))$ le corps des séries de Laurent en une variable à coefficients dans k . Notons $\tilde{W} = W_{\tilde{k}}$.

Une déformation de $D \in W_k$ est un point rationnel sur \tilde{W} de la forme $\tilde{D} = D + tD_1 + t^2D_2 + \dots$ où les D_i sont des dérivations de $\text{Der}_{\geq 2}^1(\Lambda Z)$ (augmentant la graduation de 1 unité et baissant la filtration d'au moins 2 unités).

L'obligation pour \tilde{D} d'appartenir à \tilde{W} , c'est-à-dire d'être une différentielle, entraîne la série de relations :

$$D^2 = 0, \quad DD_1 + D_1D = 0, \quad DD_n + D_nD + \sum_{i=1}^{n-1} D_i D_{n-i} = 0.$$

Le point \tilde{D} de \tilde{W} est point générique d'une sous-variété de W , pas nécessairement de dimension 1. Elle peut être de dimension 0 si t n'a pas d'autres spécialisations que $t = 0$ sur k (par exemple si $D_i = 0 \quad i \geq 1$). Elle peut être aussi de dimension plus grande.

D_t s'appelle la déformation ; D_1 la déformation infinitésimale.

Intuitivement, on peut voir \tilde{D} comme l'élément générique d'une famille à un paramètre de déformations D_t de D .

Remarquons que W se plonge dans \tilde{W} de manière évidente.

Une famille à un paramètre de déformations D_t d'un point D de W est dite *triviale* ssi il existe un élément $\tilde{\varphi}$ de \tilde{G} de la forme $\tilde{\varphi} = 1 + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \dots$ tel que $\tilde{\varphi}\tilde{D} = D$.

L'espace est dit *rigide* si toutes ses déformations sont triviales.

Nous allons maintenant interpréter l'hypothèse de rigidité dans le cas d'un corps algébriquement clos.

Proposition [9], [7].

Supposons k algébriquement clos. D est une k -algèbre rigide ssi son orbite $G \cdot D$ est ouverte dans W . □

Cette analyse n'est pas valable en général (Exemple 10, § 6). Nous pouvons néanmoins rappeler la proposition suivante :

Proposition [6].

Si $K > k$ est une extension galoisienne, alors il n'existe qu'un nombre fini de types de k -homotopie de même K -type d'homotopie. □

Corollaire : Si D est une \mathbb{R} -algèbre, ϕ -rigide, alors il existe un nombre fini d'orbites $Q_{\mathbb{R}}(D_i)$ telle que $\bigcup_i Q_{\mathbb{R}}(D_i)$ soit ouverte dans W avec D un des D_i .

CHAPITRE 3. F-COHOMOLOGIE D'UNE A.D.G.C. FILTRÉE

Suivant les méthodes de Gerstenhaber [9] nous allons essayer d'interpréter la rigidité en termes de cohomologie. Pour cela, nous introduirons une théorie de F-cohomologie, (cohomologie "filtrée"), des A.D.G.C. filtrées, (notée ${}^F H^*(A, d_A)$) pour une A.D.G.C. filtrée (A, d_A) . Nous interpréterons ensuite géométriquement les espaces ${}^F Z^1(A, d_A)$, ${}^F Z^0(A, d_A)$ et ${}^F B^0(A, d_A)$. Cette interprétation se poursuivra dans les chapitres suivants.

Soit A une algèbre graduée commutative ; $\text{Der}^*(A)$, l'espace vectoriel gradué des dérivations de A, est muni d'un crochet :

$$[,] : \text{Der}^r(A) \times \text{Der}^p(A) \rightarrow \text{Der}^{p+r}(A)$$

$$[D, D'] = DD' - (-1)^{d^0 D \cdot d^0 D'} D'D.$$

Munie de ce crochet, $\text{Der}^*(A)$ est une algèbre de Lie graduée, c'est-à-dire vérifie :

- 1) $[D, D'] = - (-1)^{d^0 D \cdot d^0 D'} [D', D]$
- 2) si $D \in \text{Der}^n(A)$, $D' \in \text{Der}^m(A)$ et $D'' \in \text{Der}^p(A)$, alors
 $(-1)^{np} [D, [D', D'']] + (-1)^{mn} [D', [D'', D]] + (-1)^{pm} [D'', [D, D']] = 0.$

Soit (A, d_A) une A.D.G.C. munie d'une graduation inférieure A_1 vérifiant $d_A(A_s^r) \subset A_{s-1}^{r+1}$.

d_A peut s'écrire $d_A = d_1 + d_2 + \dots$ avec $d_1(A_s^r) \subset A_{s-1}^{r+1}$. Nous dirons que (A, d_A) est une A.D.G.C. filtrée.

Définissons ${}^F H^*(A, d_A)$ comme cohomologie du complexe $(\Delta^r(A, d_A), \delta^r)$ avec

$$\Delta^r(A, d_A) = \{\theta \mid \theta \in \text{Der}^r(A) \text{ et } \theta(A_n) \subset A_{n-r-1}\} \text{ pour } r \geq 1.$$

$$\Delta^0(A, d_A) = \{\theta \mid \theta \in \text{Der}^0(A) \quad \theta = \theta_0 + \theta_1 + \dots$$

$$\text{avec } \theta_i : A_p \rightarrow A_{p-i} \text{ et } \theta_0 d_1 = d_1 \theta_0\}$$

$$\Delta^r(A, d_A) = \{\theta \mid \theta \in \text{Der}^r(A) \quad \theta(A_p) \subset A_{r+p}\} \quad r < 0$$

$$\delta(\theta) = [d_A, \theta] = d_A \theta - (-1)^{d^0 \theta} \theta d_A.$$

Lemme 1 : $\delta^2 = 0$, δ est une dérivation de degré + 1.

Démonstration : $[d_A, d_A] = 2 d_A^2 = 0$

L'identité de Jacobi fournit alors la relation

$$(-1)^{d^0 \theta} [d_A, [d_A, \theta]] - [d_A, [\theta, d_A]] = 0$$

à savoir : $2 (-1)^{d^0 \theta} [d_A, [d_A, \theta]] = 0.$

Lemme 2 : Si $\theta \in \text{Der}^r(\Lambda Z)$ et $\theta' \in \text{Der}^s(\Lambda Z)$

alors : a) $\delta(\theta\theta') = \delta(\theta)\theta' + (-1)^r \theta\delta(\theta')$

b) $\delta([\theta, \theta']) = [\delta(\theta), \theta'] + (-1)^r [\theta, \delta(\theta')]$.

Soit $(\Lambda Z, D)$ un modèle filtré de cohomologie H^* , alors

Proposition 4 : L'espace tangent de Zariski à la variété W au point D est isomorphe à $(\mathbb{F}^1)(\Lambda Z, D)$.

Démonstration : Un 1-F-cocycle est une 1-dérivation vérifiant $D\theta + \theta D = 0$; c'est donc un vecteur tangent en vertu de la proposition 3 du § 1. \square

Soit $(\Lambda Z, d)$ le modèle bigradué de H^* .

Le complexe $\Delta^*(\Lambda Z, d)$ peut être muni d'une graduation inférieure par

$$\Delta_S^r(\Lambda Z, d) = \{\theta \in \text{Der}^r(\Lambda Z) : Z_p \rightarrow (\Lambda Z)_{p-r-s}\}$$

$$\text{et } \delta_S^r(\Lambda Z, d) = \delta^r(\Lambda Z, d) \left| \begin{array}{l} \delta(\Delta_S^r) \subset \Delta_S^{r+1} \\ \Delta_S^r(\Lambda Z, d) \end{array} \right.$$

Cette filtration munit les groupes ${}_{\mathbb{F}}Z^*$, ${}_{\mathbb{F}}B^*$ et ${}_{\mathbb{F}}H^*$ d'une filtration. Il en est de même de l'espace tangent au point d à $W : {}_{\mathbb{F}}Z^1(\Lambda Z, d)$.

Cette filtration a un intérêt géométrique : le modèle bigradué d'une k-A.G.C. est un modèle minimal formel pour lequel toute la structure de n-produits de Massey matriciels ([13]) est triviale pour $n \geq 3$. Un modèle filtré $(\Lambda Z, D)$ tel que $D = d + d_r + d_{r+1} + \dots$ avec $d_2 = d_3 = \dots = d_{r-1} = 0$ est le modèle d'un espace W_r où tous les i-produits matriciels de Massey sont nuls pour $3 \leq i \leq r$.

La filtration ${}_{\mathbb{F}}Z_{\geq s}^1(\Lambda Z, d)$ ($s \geq 2$) fournit une décomposition de l'espace tangent en espaces tangent aux sous-variétés emboîtées correspondant aux strates W_s , c'est-à-dire aux espaces pour lesquels $d_i = 0$ $2 < i \leq s$ et dont, en particulier, les i-produits matriciels de Massey sont nuls pour $3 \leq i \leq s$.

Interprétation des groupes ${}_{\mathbb{F}}Z^0(\Lambda Z, D)$ et ${}_{\mathbb{F}}B^0(\Lambda Z, D)$.

Rappelons tout d'abord le th. suivant de Sullivan [17].

Théorème : Soit (A, d_A) une A.D.G.C. connexe minimale et φ un automorphisme de (A, d_A) .

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) φ est homotope à l'identité : $\varphi \sim 1$.

2) $\varphi = e^{\text{sd}_A + d_A s}$ où s est une dérivation de A de degré -1 .

Soit $(\wedge Z, D) \xrightarrow{\varphi} (A, d_A)$ un modèle filtré de (A, d_A) .

Tout automorphisme de (A, d_A) induit un automorphisme de $(\wedge Z, D)$ préservant la filtration [10].

Considérons donc la variété V des automorphismes de l'A.D.G.C. filtrée $(\wedge Z, D)$. L'espace tangent à V au point 1 (l'identité) est formé des dérivations θ de $\text{Der}_O^O(\wedge Z)$ vérifiant $\theta D = D\theta$ c'est-à-dire des éléments de ${}_{\mathbb{F}}Z^O(\wedge Z, D)$. En vertu du théorème ci-dessus, l'espace tangent aux automorphismes homotopes à l'identité est isomorphe à ${}_{\mathbb{F}}B^O(\wedge Z, D)$.

Donc :

Proposition 5 : 1) ${}_{\mathbb{F}}Z^O(\wedge Z, D)$ est isomorphe à l'espace tangent de Zariski à la variété des automorphismes d'A.D.G.C. filtrée de $(\wedge Z, D)$ au point 1.

2) ${}_{\mathbb{F}}B^O(\wedge Z, D)$ est isomorphe à l'espace tangent de Zariski à la sous-variété des automorphismes homotopes à l'identité.

Un exemple : La sphère S^2 .

Le groupe ${}_{\mathbb{F}}Z^O(\wedge Z, D)$ est isomorphe à k et le groupe ${}_{\mathbb{F}}B^O(\wedge Z, D)$ est nul.

${}_{\mathbb{F}}H^O(\wedge Z, D) \cong k$ et $\pi_O(\text{Aut.}(S^2), \text{id}) \cong k^*$.

On peut interpréter ces automorphismes :

choisissons pour tout entier $p \neq 0$, une application $\tilde{\sigma} : S^2 \rightarrow S^2$ de degré p .

$\tilde{\sigma}$ est un automorphisme sur S_k^2 . L'automorphisme $\tilde{\sigma}_k \cdot \tilde{\sigma}_k^{-1} : S_k^2 \rightarrow S_k^2$ n'est autre que le passage en k -homotopie de la suite $S^2 \xrightarrow{p} S^2 \xrightarrow{r} S^2$.

Ces différentes multiplications ne sont homotopes à l'identité dans S_k^2 que si $p/r = 1$.

CHAPITRE 4. LA RIGIDITÉ

Un vecteur tangent à une variété algébrique W est dit *intégrable* s'il peut s'écrire comme vecteur tangent à une courbe de W . Un point est *simple* si tout vecteur tangent est intégrable. Chaque fois que l'on se donne une famille à un paramètre $D_t = D + tD_1 + t^2 D_2 + \dots$ de dérivations de ΛZ , on se donne le point générique d'une courbe et son vecteur tangent D_1 .

Ce D_1 appartient au groupe ${}_{\mathbb{F}}Z^1(\Lambda Z, D)$. Si la déformation est triviale, il existe une famille à un paramètre d'isomorphismes $\varphi_t = 1 + t\varphi_1 + t^2 \varphi_2 + \dots$ tel que $\varphi_t * D_t = D$. En développant, on obtient en particulier $D_1 = D\varphi_1 - \varphi_1 D$ c'est-à-dire $D_1 \in {}_{\mathbb{F}}B^1(\Lambda Z, D)$. Inversément :

Théorème 1 :

Si ${}_{\mathbb{F}}H^1(\Lambda Z, D) = 0$, alors le point D est rigide dans W . Tout vecteur tangent à W au point D est intégrable. Le point D est un point simple.

Démonstration : Soit D_t une famille à un paramètre de différentielles de la forme $D_t = D + tD_1 + t^2 D_2 \dots$

La déformation infinitésimale D_1 appartient au groupe ${}_{\mathbb{F}}Z^1(\Lambda Z, D)$.

Si ${}_{\mathbb{F}}H^1(\Lambda Z, D) = 0$, D_1 appartient au groupe ${}_{\mathbb{F}}B^1(\Lambda Z, D)$ et peut donc s'écrire sous la forme : $D_1 = D\varphi_1 - \varphi_1 D$ où $\varphi_1 \in \text{Der}^0(\Lambda Z)$.

Posons $\psi_1 = e^{\varphi_1 t}$. ψ_1 est une famille à un paramètre d'automorphismes et $\psi_1 * D_t = D + t^2 D_2' + \dots$

D_2' appartient de nouveau au groupe ${}_{\mathbb{F}}Z^1(\Lambda Z, D)$ et on trouve φ_2 et $\psi_2 \dots$ ainsi de suite.

Le point D est simple : en effet, tout vecteur tangent T appartient à ${}_{\mathbb{F}}Z^1(\Lambda Z, D)$ et donc à ${}_{\mathbb{F}}B^1(\Lambda Z, D)$. T est donc de la forme $T = D\varphi_1 - \varphi_1 D$. Il est tangent à la courbe $e^{\varphi_1 t}$. □

L'annulation de ${}_{\mathbb{F}}H^1(\Lambda Z, D)$ est une condition suffisante de rigidité. Elle est parfois nécessaire :

Théorème 2 :

1) Si le point D est simple, alors ${}_{\mathbb{F}}H^1(\Lambda Z, D)$ mesure l'obstruction à la rigidité de D .

2) Si ${}_{\mathbb{F}}H^2(\Lambda Z, D) = 0$, alors le point D est simple.

Démonstration du théorème :

Dire que $D_1 \in {}_{\mathbb{F}}H^1(\Lambda Z, D)$ peut s'intégrer en D_t de la forme $D_t = D + tD_1 + \dots$ avec

$D_t^2 = 0$, revient à rechercher $D_2, D_3 \dots$ tels que

$$(2) D_2 D + D D_2 = - D_1^2$$

$$(3) D_3 D + D D_3 = - (D_1 D_2 + D_2 D_1)$$

.....

$$(n) D_n D + D D_n = - (D_1 D_{n-1} + D_2 D_{n-2} + \dots + D_{n-1} D_1).$$

Réolvons tout d'abord (2) :

$$D_1^2 \in {}_F Z^2(\Lambda Z, D) \text{ car } D_1 \in {}_F Z^1(\Lambda Z, D).$$

D'où : $D_1^2 \in {}_F B^2(\Lambda Z, D)$ et (2) est résolu.

Supposons avoir résolu (2) (3) ... (n-1).

Montrons que (n) peut être résolu.

Le second membre de (n) appartient à ${}_F B^2(\Lambda Z, D)$: montrons pour cela que

$$\delta \left(\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 1}} D_i D_j \right) = 0.$$

Le lemme 3.2 nous donne l'égalité suivante :

$$\delta \left(\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 1}} D_i D_j \right) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 1}} (\delta(D_i) D_j - D_i \cdot \delta(D_j)).$$

Comme $\delta(D_i) = D D_i + D_i D$, l'hypothèse de récurrence montre que la somme précédente est égale à :

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 1}} \left(- \sum_{\substack{l+k=i \\ l,k \geq 1}} D_l D_k D_j + \sum_{\substack{m+r=j \\ m,r \geq 1}} D_i D_m D_r \right),$$

ce qui est trivialement nul.

Comme ${}_F H^2(\Lambda Z, D) = 0$, la somme $\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 1}} D_i D_j$ s'écrit $D D_n + D_n D$. \square

FORMALITE INTRINSEQUE ET RIGIDITE.

Théorème 3 : Soit k un corps algébriquement clos et $(\Lambda Z, d)$ un \mathcal{Q} -modèle bigradué.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) $(\Lambda Z, d)$ est intrinsèquement formel.
- 2) d est rigide dans W_k .

Démonstration : (1) \Rightarrow (2) est immédiat. (2) \Rightarrow (1) car l'orbite de d est une sous-variété fermée, (et ouverte dans W).

Proposition : Soit $(\Lambda Z, D)$ un k -modèle filtré et K une extension de k .

Supposons K algébriquement clos et ${}_F H^2(\wedge Z, D) = 0$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) D est rigide dans W .
- (2) $D \otimes K$ est rigide dans W_K .

Démonstration : résulte du fait que la dimension d'un espace tangent est invariante par extension des scalaires.

Exemple 2. L'espace formel $(\wedge Z, d)$ de cohomologie H^* suivante est intrinsèquement formel et vérifie ${}_F H^1(\wedge Z, d) \neq 0$.

$$H^* = \wedge(x, y, z, t, t') / (xy, xz, yz, tx, t'y, ty-z^2, t'x-z^2, zt, zt', tt')$$

$$|x| = |y| = 5 \quad ; \quad |z| = 14 \quad ; \quad |t| = |t'| = 23.$$

Pour le détail des calculs, nous renvoyons le lecteur à l'annexe 1.

CHAPITRE 5. OBSTRUCTIONS A LA FORMALITÉ INTRINSÈQUE

Construisons pour toute différentielle D sur $\wedge Z$ une suite d'obstructions $O_p(D)$ à l'existence d'une équivalence d'homotopie rationnelle entre $(\wedge Z, D)$ et $(\wedge Z, d)$. Ces obstructions appartiennent aux groupes ${}_{\mathbb{F}}H_p^1(\wedge Z, d)$ $p \geq 1$.

Si ${}_{\mathbb{F}}H^1(\wedge Z, d) = 0$, toutes les obstructions s'annuleront et l'espace sera intrinsèquement formel (th. 1).

Construction des obstructions.

D peut s'écrire $D = d + d_2 + d_3 + \dots$ avec $d_1 : Z_p \rightarrow (\wedge Z)_{p-1}$, d_2 appartient à ${}_{\mathbb{F}}H_1^1(\wedge Z, d)$.

Pour que D appartienne à l'orbite de d , c'est-à-dire vérifie $D = \varphi d \varphi^{-1}$ avec φ de la forme $\varphi = 1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$ et $\varphi_1 : Z_q \rightarrow (\wedge Z)_{q-1}$, il faut en particulier que d_2 soit de la forme $d\varphi_1 - \varphi_1 d$, c'est-à-dire $[d_2]$ égal 0 dans ${}_{\mathbb{F}}H_1^1(\wedge Z, d)$.

$O_1(D) = [d_2]$ dans ${}_{\mathbb{F}}H_1^1(\wedge Z, d)$.

Une fois cette obstruction levée, pour chacun des φ_1 obtenus, considérons

$\psi_1 = e^{\varphi_1}$. $\psi_1 * D = d + d'_3 + d'_4 + \dots$

Pour que D appartienne à l'orbite de d , il est nécessaire que $[d'_3] = 0$ dans ${}_{\mathbb{F}}H_2^1(\wedge Z, d)$ pour un des φ_1 . Ceci constitue la seconde obstruction : $O_2(D) = [d'_3]$

dans ${}_{\mathbb{F}}H_2^1(\wedge Z, d)$. Et ainsi de suite ... On obtient de cette manière une suite d'obstructions $O_p(D)$.

Proposition : Ces différentes obstructions sont naturelles.

Démonstration : Supposons que $\varphi * D = d + d_{n+1} + d_{n+2} + \dots$ et que $\varphi' * D = d + d'_n + d'_{n+1} + \dots$

Montrons que $[d'_n] = 0$.

Comme $\varphi * D$ et $\varphi' * D$ ont même type d'homotopie, il existe $\theta = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \dots$ avec

$$1) \theta_i : Z_p \rightarrow (\wedge Z)_{p-i}$$

$$2) (d + d_{n+1} + d_{n+2} + \dots)(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \dots) = (\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \dots)(d + d'_n + d'_{n+1} + \dots)$$

$$3) \theta_0 \text{ est un automorphisme d'A.D.G.C. de } (\wedge Z, d).$$

Composant l'équation 2) avec θ_0^{-1} l'on obtient

$$\theta_0^{-1} * (\varphi * D) = \theta_0^{-1} * (\theta * (\varphi' * D)).$$

Posons $\psi = \theta_0^{-1} \theta$, nous obtenons

$$(d + \theta_0^{-1} d_{n+1} \theta_0 + \dots) (1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots) = (1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots) (d + d'_n + d'_{n+1} + \dots)$$

Et donc

$$d\psi_i = \psi_i d \quad 1 \leq i < n-1$$

$$d\psi_n = \psi_n d + d'_n.$$

Cette dernière équation n'implique pas que $[d'_n] = 0$ car ψ_n n'est pas une dérivation.

Cependant, comme ψ_1 commute avec d , $e^{-\psi_1}$ commute avec d .

$$e^{-\psi_1} * (\psi * (\varphi' * D)) = (1 + \psi'_2 + \dots) (d + d'_n + d'_{n+1} + \dots) (1 + \psi'_2 + \dots)^{-1}$$

ψ'_2 commute de nouveau avec d .

$$\text{L'équation } e^{-\psi'_2} * (e^{-\psi_1} * (\theta_0^{-1} * (\varphi * D))) = e^{-\psi'_2} * (e^{-\psi_1} * (\psi * (\varphi' * D)))$$

peut s'écrire

$$d + \theta_0^{-1} d_{n+1} \theta_0 + \dots = (1 + \psi''_3 + \dots) (d + d'_n + d'_{n+1} + \dots) (1 + \psi''_3 + \dots)^{-1}.$$

Continuons jusque $\psi_{n-2}^{(n-3)}$ qui commute encore avec d , nous obtenons

$$d + \theta_0^{-1} d_{n+1} \theta_0 + \dots = (1 + \psi_{n-1}^{(n-2)} + \dots) (d + d'_n + d'_{n+1} + \dots) (1 + \psi_{n-1}^{(n-2)} + \dots)$$

Et donc $d'_n = d\psi_{n-1}^{(n-2)} - \psi_{n-1}^{(n-2)} d$ avec $\psi_{n-1}^{(n-2)}$ dans $\text{Der}_{n-2}^1(\wedge Z)$.

$[d'_n]$ est donc nul. □

Toutes les obstructions sont donc naturelles. Ce qui dépend des choix, c'est la classe d'homotopie de l'isomorphisme φ .

Applications.

Redémontrons tout d'abord le théorème de Halperin-Stasheff [10].

Proposition 6. Si $H^p = 0$ $1 \leq p \leq 1$ et $p > 3l+1$, alors $F^1 H^1(\wedge Z, d) = 0$ et l'A.D.G.C. bigraduée $(\wedge Z, d)$ est intrinsèquement formelle.

Démonstration :

Montrons que $F^1 H^1(\wedge Z, d) = 0$. Soit $d_j \in F^1 Z_{j-1}^1(\wedge Z, d)$. Il faut trouver φ_{j-1} dans $\text{Der}_{j-1}^0(\wedge Z)$ tel que $d_j = d\varphi_{j-1} - \varphi_{j-1} d$. Sur Z_0, Z_1, \dots, Z_{j-1} , posons $\varphi_{j-1} = 0$. Sur Z_j , $d_j(x)$ est un bord pour chaque générateur x . [Puisque $Z_0^k = 0$, $0 \leq k \leq 1$, $Z_n^k = 0$, $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq (n+1)1$].

Définissons $\varphi_{j-1}(x)$ comme égal à un y de $(\wedge Z)_1^k$ tel que $dy = d_j(x)$. Nous obtenons alors sur $Z_{\leq j}$ $d_j = d\varphi_{j-1} - \varphi_{j-1} d$.

Prolongeons φ_{j-1} sur $(\wedge Z)_{\leq j}$ en une dérivation de degré zéro. Supposons par récurrence avoir construit φ_{j-1} sur $(\wedge Z)_{\leq n}$. Construisons φ_{j-1} sur Z_{n+1} . Soit $x \in Z_{n+1}$.

d_j appartient à $Z_{j-1}^1(d)$ et vérifie donc $dd_j + d_jd = 0$.

Il s'ensuit que :

$$d(d_j + \varphi_{j-1} d)(x) = -(d_j - d\varphi_{j-1})d(x) = \varphi_{j-1} d^2(x) = 0.$$

Choisissons alors un y tel que $dy = (d_j + \varphi_{j-1} d)(x)$ et posons $\varphi_{j-1}(x) = y$.

On obtient donc : $d_j(x) = (d\varphi_{j-1} + \varphi_{j-1} d)x$ sur $Z_{\leq n+1}$.

On prolonge en dérivation sur $(\wedge Z)_{\leq n+1}$. \square

Proposition 6' :

Si $H^p = 0$ $1 \leq p \leq l$ et $p > r+1$ (où r est défini comme suit : il existe

$\wedge R \rightarrow \wedge G \rightarrow H^* \rightarrow 0$ une présentation de H^* avec $(\wedge R)^q = 0$ $1 \leq q < r$) alors

$F^1 H^1(\wedge Z, d) = 0$ et l'A.D.G.C. bigraduée $(\wedge Z, d)$ est intrinsèquement formelle.

Démonstration : similaire. \square

Proposition 6'' :

Si $H^p = 0$ $1 \leq p \leq l$ et $p > nl+r$ où r est le degré des premières relations,

alors $F_S^1 H^1(\wedge Z, d) = 0$ pour $s \geq n$, et il existe exactement $n-1$ obstructions à lever.

Démonstration : similaire. \square

Obstructions $\hat{O}_p(D)$ d'Halperin-Stasheff.

Dans [10], Halperin et Stasheff construisent une suite d'obstructions $\hat{O}_p(D)$.

$\hat{O}_p(D)$ est l'obstruction à trouver un automorphisme φ de $\wedge Z$ tel que $\varphi^*D = d$ sur $(\wedge Z)_{\leq p+1}$.

Ces obstructions se construisent par récurrence sur p : supposons qu'il existe un automorphisme φ de $\wedge Z$ tel que $\varphi^*D = d$ sur $(\wedge Z)_{\leq p}$; remplaçons D par φ^*D et formons l'application linéaire $O(D) \in \text{Hom}^1(Z_{p+1}, H^*)$

$$O(D)(z) = [d_{p+1}(z)] \quad z \in Z_{p+1}.$$

$\hat{O}_p(D)$ est la classe de $O(D)$ dans $\text{Hom}^1(Z_{p+1}, H^*)/\gamma(M_n)$ où M_n désigne le sous-espace

de $\text{Der}^0(\wedge Z)$ formé des dérivations θ vérifiant $\theta d = d\theta$ sur $(\wedge Z)_{\leq n}$, et où

$$\gamma(\theta)(z) = [\theta D z].$$

Comparons ces obstructions aux nôtres $O_p(D)$.

$O_p(D)$ est l'obstruction à trouver un isomorphisme φ de $\wedge Z$ tel que $(\varphi^*D - d)$ baisse la filtration de $p+2$ unités au moins.

Proposition 7. Il existe une injection linéaire

$$\rho : {}_{\mathbb{F}}H_p^1(\wedge Z, d) \rightarrow \text{Hom}^1(Z_{p+1}, H^*)/\gamma(M_p) \text{ telle que } \rho(O_p(D)) = \hat{O}_p(D).$$

Démonstration : Si $D \in {}_{\mathbb{F}}Z_p^1$, posons $\rho(D) : Z_{p+1} \rightarrow H^*$ par $\rho(D)(z) = [D(z)]$.

Cette application se prolonge en une application de ${}_{\mathbb{F}}H_p^1(\wedge Z, d)$ dans

$$\text{Hom}^1(Z_{p+1}, H^*)/(\gamma(M_p)) \text{ car } (\varphi_p d - d\varphi_p) = [\varphi_p d] \in \gamma(M_p).$$

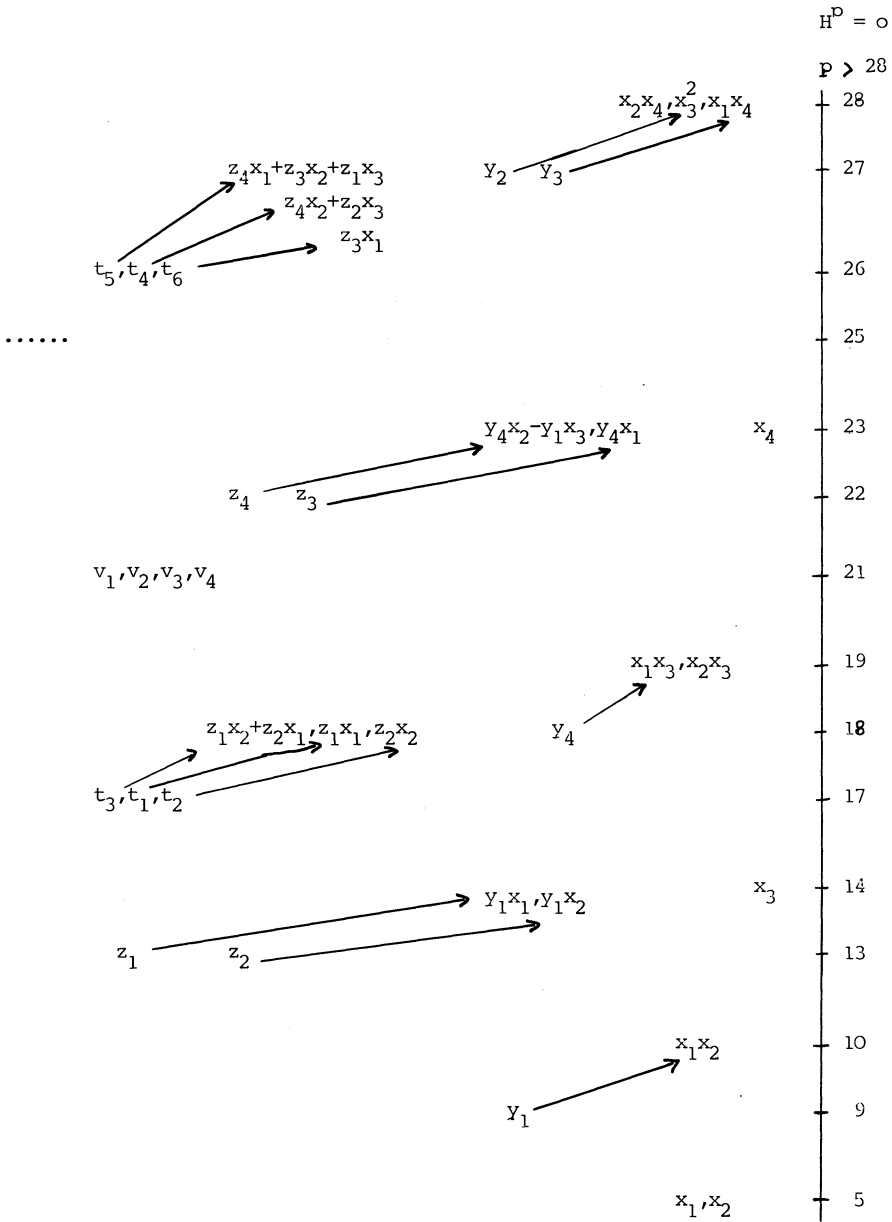
Cette application est injective, car si d_{p+1} et d'_{p+1} appartiennent à ${}_{\mathbb{F}}Z_p^1(\wedge Z, d)$ et ont même restriction à Z_{p+1} , alors il existe φ_p tel que $d_{p+1} - d'_{p+1} = d\varphi_p - \varphi_p d$.

Corollaire : $O_p(D) = 0$ ssi $\hat{O}_p(D) = 0$.

Remarque : Nos obstructions $O_p(D)$ sont cependant meilleures que celles de H.S. : ${}_{\mathbb{F}}H_p^1(\wedge Z, d) = 0$ est une condition nécessaire de formalité intrinsèque si $H^p = 0$, $0 < p \leq 1$ et $p > 5l+2$ (démonstration § 6), tandis que $\text{Hom}^1(Z_{p+1}, H^*)/\gamma(M_p) = 0$ est une condition nécessaire si $H^p = 0$ $0 < p < 1$ et $p > 4l+1$.

Exemple 3. Montrons que l'espace $S^5 \times (S^{14} \vee S^{23}) \vee S^5$ est intrinsèquement formel. Nous montrerons que ${}_{\mathbb{F}}H^1(\wedge Z, d) = 0$ et donc que toutes les obstructions $O_p(D)$ sont nulles. Nous montrerons ensuite que les groupes $\text{Hom}^1(Z_{p+1}, H^*)/\gamma(M_p)$ sont non nuls. Décrivons tout d'abord le modèle bigradué. Nous ne représentons dans le tableau que les générateurs et leur différentielle.

OBSTRUCTIONS A LA FORMALITÉ INTRINSÈQUE



Les dérivations d_2 qui anticommulent avec d (c'est-à-dire $\in {}_{F^1}Z_1^1(\Lambda Z, d)$) sont définies par $d_2(z_1) = \alpha x_3$, $d_2(z_2) = \beta x_3$, $d_2 z_3 = r x_4$ et $d_2 z_4 = s x_4$.

Cependant, l'obligation de les prolonger à t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 et t_6 entraîne que $\alpha = \beta = r = s = 0$.

Les groupes $\text{Hom}^1(Z_p, H^*)/\gamma(M_n)$ sont non nuls. En effet, l'application d_2 de $\text{Hom}^1(Z_2, H^*)$ définie par $d_2(z_1) = [\alpha x_3]$, $d_2(z_2) = [\beta x_3]$, $d_2(z_3) = [r x_4]$, $d_2(z_4) = [s x_4]$ ne peut s'écrire $[d\phi_1 - \phi_1 d]$.

Obstructions à une équivalence d'homotopie.

Soit f un automorphisme de H^* . Nous pouvons construire (comme H - S [10]) une suite d'obstructions $O_p(D, D', f)$ à l'existence d'une application $\varphi : (\Lambda Z, D) \rightarrow (\Lambda Z, D')$ induisant f en cohomologie.

Pareille application existera ssi il existe $\psi : (\Lambda Z, D) \rightarrow (\Lambda Z, \bar{f}^{-1} * D')$ induisant l'identité en cohomologie, avec \bar{f} un automorphisme de $(\Lambda Z, d)$ induisant f en cohomologie.

En vertu du th. 1 pareil ψ existe ssi il existe une application $\theta : (\Lambda Z, D) \rightarrow (\Lambda Z, \bar{f}^{-1} * D')$ tel que θ -id. baisse la filtration d'au moins une unité. Posons $D'' = \bar{f}^{-1} * D'$.

Nous pouvons construire une suite d'obstructions $O_p(D, D', f)$ comme suit : posons $B_{n-1}(D)$ le sous-espace vectoriel de ${}_{F^1}Z_{n-1}^1(\Lambda Z, d)$ formé des expressions de la forme

$$[d, \theta_{n-1}] + [d_2, \theta_{n-2}] + \dots + [d_{n-1}, \theta_1]$$

où les θ_i appartiennent à $\Delta_1^0(\Lambda Z, d)$ et satisfont aux relations

$$[d, \theta_i] = - \sum_{j=2}^i [d_j, \theta_{i+1-j}] \quad 1 \leq i \leq n-2.$$

Si θ existe, alors $[d_2 - d_2''] = 0$ dans ${}_{F^1}Z_1^1(\Lambda Z, d)/B_1(D) = {}_{F^1}H_1^1(\Lambda Z, d)$. C'est la première obstruction $O_1(D, D', f)$. Elle est nulle ssi il existe θ_1 avec $d_2 - d_2'' = d\theta_1 - \theta_1 d$.

Remplaçons alors D'' par $e^{\theta_1} * D''$. d_2 devient égal à d_2'' .

Si θ existe, il n'est pas vrai que, pour l'un des θ_1 , $[d_3 - d_3'']$ soit nul dans ${}_{F^1}H_2^1(\Lambda Z, d)$. Il est cependant vrai que, pour tout θ_1 , $[d_3 - d_3'']$ doit être nul dans ${}_{F^1}Z_2^1(\Lambda Z, d)/B_2$.

Ceci constitue la seconde obstruction $O_2(D, D', f)$.

En continuant, nous voyons ainsi apparaître une suite naturelle d'obstructions indépendante du corps de base à l'existence d'un isomorphisme φ réalisant une application f donnée en cohomologie.

$$O_n(D, D', f) \in {}_{F^1}Z_n^1(\Lambda Z, d)/B_n(D).$$

CHAPITRE 6. GÉNÉRICITÉ, FINITUDE ET EXEMPLES

Une algèbre filtrée $(\wedge Z, D)$ de cohomologie H^* est dite *k-générique* si son orbite est dense dans la variété W_k . Si k est algébriquement clos, il revient au même de dire que W ne possède qu'une seule composante, et que la dimension de l'orbite de $(\wedge Z, D)$ est égale à la dimension de W_k .

Sur les réels, cette définition est encore équivalente à la suivante : $(\wedge Z, D)$ est *R-générique*, si pour toute autre algèbre filtrée $(\wedge Z, D')$ de cohomologie H^* , il existe D_t famille à un paramètre de différentielles, et une famille à un paramètre d'isomorphismes φ_t avec $D_0 = D$, $\varphi_0 = 1$, φ_t inversible pour tout $t < 1$.

$$D_t = \varphi_t D \varphi_t^{-1} \text{ pour } t < 1 \text{ et } D' = \lim_{t \rightarrow 1} \varphi_t D \varphi_t^{-1}.$$

Lemme : 1) Si $(\wedge Z, D)$ est *k-générique*, alors $(\wedge Z, D)$ est *k-rigide*.

2) Si k est algébriquement clos et si W est irréductible, alors $(\wedge Z, D)$ est *k-rigide* ssi $(\wedge Z, D)$ est *k-générique*.

Démonstration : Evident à partir des définitions. □

Exemple 4 : $H^* = H^*(S^3 \vee S^3 \vee S^8)$.

On peut voir qu'il existe deux types d'homotopie rationnelle dont l'un est rigide et l'autre formel. Le type rigide admet pour modèle homotopique $(S^3 \vee S^3) \cup_{\omega} e^8$ où ω désigne le crochet de Whitehead : $\omega = [S_1^3, [S_1^3, S_2^3]]$.

Le caractère générique de $S^3 \vee S^3 \cup e^8$ peut s'interpréter par l'égalité :

$$S^3 \vee S^3 \vee S^8 = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m \in \mathbb{N}}} S^3 \vee S^3 \cup_{m^{-1}\omega} e^8.$$

En effet, dans $S^3 \vee S^3 \cup_{m^{-1}\omega} e^8$, $[\omega]$ est nul.

Lorsque m tend vers l'infini, l'application de recollement de e^8 devient homotopiquement nulle.

Cet exemple se trouve aussi dans [1] où l'on distingue les différents types d'homotopie de même type d'homotopie rationnelle que $S^3 \vee S^3 \cup_{\omega} e^8$.

Théorème 4.

- 1) S'il n'existe aucune algèbre \mathbb{C} -rigide, alors il existe une infinité de types d'homotopie réelle distincts.
- 2) Si $\dim_{\mathbb{F}} H^1(\wedge Z, d) = 1$, alors il existe au maximum deux types d'homotopie complexe distincts et les types non formels sont rigides.
- 3) Si $\dim_{\mathbb{F}} H^1(\wedge Z, d) = 2$ et s'il existe une algèbre \mathbb{C} -rigide, alors il n'existe qu'un nombre fini de classes d'homotopie réelle.

Démonstration :

- 1) Evident, car il n'existe aucune algèbre dont la dimension de l'orbite soit égale à celle de la variété.
- 2) Si $D \notin O(d)$ alors $\dim O(D) = \dim O(d) + 1$ et $O(d) \subseteq \overline{O(D)}$.
Il ne peut exister au maximum que trois types d'homotopie réelle.
- 3) Supposons qu'il n'existe qu'une seule composante. L'orbite de l'algèbre \mathbb{C} -rigide est dense. Son complémentaire est formé d'un nombre fini de variétés de dimension supérieure ou égale à $\dim O(d) + 1$. Chacune de ces variétés ne contient qu'un type d'homotopie complexe. Il n'existe donc qu'un nombre fini de types d'homotopie réelle [6]. S'il existe plusieurs composantes, on se ramène à 2).

Théorème 5.

Si $H^p = 0$ $0 < p \leq 1$ et $p > 5l+2$, alors $F^1 H^1(\wedge Z, D)$ mesure l'obstruction à la rigidité de D . En particulier $F^1 H^1(\wedge Z, d)$ mesure l'obstruction à la formalité intrinsèque de $(\wedge Z, d)$.

Démonstration :

Il suffit de montrer que tout vecteur tangent D_1 est intégrable, ce qui revient à résoudre les équations :

$$(2) \quad DD_2 + D_2D = -D_1^2$$

$$(3) \quad DD_3 + D_3D = -(D_1 D_2 + D_2 D_1)$$

.....

$$(n) \quad DD_n + D_nD = - \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 1}} D_i D_j$$

Posons $D_2 = 0$ sur $Z_{<4}$.

Soit $x \in Z_4$, $d^0 x \geq 5l+1$ et $d^0 D_1^2 x > 5l+2$.

En vertu des hypothèses, il existe y tel que $D_1^2 x = dy$.

Posons $D_2(x) = y$. On construit ensuite D_3, D_4, \dots, D_n par récurrence. \square

Un cas particulier est intéressant :

Proposition 8. Si $H^p = 0$ $1 \leq p \leq 1$ et $p > 4l+1$, alors

1) Toute application linéaire $d_2 : Z_2 \rightarrow (\wedge Z)_0$ peut se prolonger en une dérivation $D = d + d_2 + \dots$ sur $\wedge Z$.

2) $F^1 H^1(\wedge Z, d) \cong F^1 H^1(\wedge Z, d) \cong \text{Hom}(Z_2, \wedge Z_0) / \text{s.e.v.} < d\varphi_1 - \varphi_1 d >$ où φ_1 parcourt $\text{Der}_1^0(\wedge Z)$.

3) Les différentes orbites de W sous G_2 sont des sous-variétés linéaires fermées $W/G_2 \cong F^1 H^1(\wedge Z, d)$.

4) Si $\dim_{\mathbb{F}} H^1(\wedge Z, d) > \dim \text{Aut } H^*$, alors il existe une infinité de types de k -homotopie distincts.

Démonstration.

1) Si z est un générateur de Z_3 , $d^0 z \geq 4l+1$. $d^0 Ddz \geq 4l+3$.

Comme Ddz appartient à $(\wedge Z)_0^{\geq 4l+3}$, il existe α dans $(\wedge Z)_1^{\geq 4l+2}$ avec $d\alpha = Ddz$.

Posons $D(z) = dz - \alpha$. On vérifie que $D^2 = 0$.

Procédons ensuite par récurrence sur $n \geq 3$. Supposons avoir construit D sur $(\wedge Z)_{\leq n}$. Construisons D sur Z_{n+1} . D doit s'écrire $D = d + d_2 + d_3 + \dots$ avec la suite de relations (2) $dd_2 + d_2d = 0$.

$$(3) \quad dd_3 + d_3d = -d_2^2.$$

.....

$$(s) \quad dd_s + d_sd = - \sum_{\substack{i+j=s+1 \\ i,j \geq 2}} d_i d_j.$$

Supposons avoir construit d_i $2 \leq i \leq p$ avec les relations (i) $2 \leq i \leq p$.

Construisons d_{p+1} tel que $dd_{p+1} = -(d_2d_p + d_3d_{p-1} + \dots + d_{p+1}d)$.

Il nous suffit pour cela de vérifier que

$$d(d_2d_p + d_3d_{p-1} + \dots + d_{p+1}d) = 0.$$

En posant $d_1 = d$, et en vertu des hypothèses de récurrence, on obtient la suite de relations :

$$\begin{aligned} d_1 \left(\sum_{i=r}^{p+1} d_i d_{p+r-i} \right) &= \sum_{i=r}^{p+1} (d_1 d_i) d_{p+r-i} = \sum_{i=r}^{p+1} \sum_{j=r}^i d_j d_{i+1-j} d_{p+r-i} \\ &= - \sum_{i=r}^p d_1 \left(\sum_{r=1}^{p+1} d_r d_{p+3-r-1} \right) = 0. \end{aligned}$$

2) évident.

3) Toute différentielle sur W peut s'écrire $D = d + d_2$ avec $d_3 = d_4 = 0$, car W est la variété des différentielles de $\wedge Z / (\wedge Z)^{\geq 4l+2}$. L'orbite de $D = d + d_2$ sous G_2 est isomorphe à la variété linéaire fermée $\{d + d_2 + d\phi_1 - \phi_1 d \mid \phi_1 \text{ parcourt } \text{Der}_1^0(\wedge Z)\}$.

4) Soit $(\wedge Z, D)$ une algèbre filtrée. Elle ne peut jamais être rigide, car d'une part $\dim W = \dim O(d) + \dim_{\mathbb{F}} H^1(\wedge Z, d)$, et d'autre part $\dim O(D) \leq \dim O(d) + \dim \text{Aut } H^*$.

Exemple 5. $H^* = H^*(S^3 \times (S^2 \vee S^2))$.

$$H^* = \wedge(x_1, x_2, x_3) / (x_1 x_2, x_1^2, x_2^2). \quad |x_1| = |x_2| = 2, \quad |x_3| = 3.$$

Le modèle bigradué $(\wedge Z, d)$ de H^* comprend :

$$\begin{array}{lll}
 Z_0 : x_1, x_2, x_3 & |x_1| = |x_2| = 2 & |x_3| = 3 \quad dx_i = 0 \\
 Z_1 : y_1, y_2, y_3 & |y_i| = 3 & 1 \leq i \leq 3 \\
 \quad dy_1 = x_1^2 & dy_2 = x_2^2 & dy_3 = x_1 x_2 \\
 Z_2 : z_1, z_2 & dz_1 = x_1 y_3 - x_2 y_1 & dz_2 = x_1 y_2 - x_2 y_3 \\
 \quad |z_i| = 4 & 1 \leq i \leq 2 \\
 Z_3 : \dots\dots
 \end{array}$$

Nous sommes dans la situation de la proposition 8. L'espace vectoriel $\langle d_2 \rangle$ des applications linéaires $Z_2^r \rightarrow (\wedge Z_0)^{r+1}$ est isomorphe à $M_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$.

L'identification étant obtenue en associant à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ l'application linéaire $d_2(z_1) = \alpha(x_1 x_3) + \beta(x_2 x_3)$

$$d_2(z_2) = \gamma(x_1 x_3) + \delta(x_2 x_3).$$

L'espace vectoriel $\text{Der}_1^0(\wedge Z)$ est isomorphe à \mathbb{Q}^3 , l'identification étant obtenue par :

$$(\varepsilon, \mu, \nu) \rightarrow \varphi_1 : \varphi_1(y_1) = \varepsilon x_3$$

$$\varphi_1(y_2) = \mu x_3$$

$$\varphi_1(y_3) = \nu x_3.$$

$\varphi_1(z_1)$ et $\varphi_1(z_2)$ sont toujours nuls.

On en déduit que $\langle d\varphi_1 - \varphi_1 d \rangle \cong \{ \begin{pmatrix} \nu & -\varepsilon \\ \mu & -\nu \end{pmatrix} \}$ d'où $\dim_{\mathbb{F}} H^1(\wedge Z, d) = 1$. L'espace n'est pas intrinsèquement formel.

Soit l'algèbre filtrée $(\wedge Z, D)$ avec $D = d + d_2$ et $d_2(z_1) = x_1 x_3$, $d_2(z_2) = 0$.

L'espace vectoriel $\langle d_2 \varphi_0 - \varphi_0 d_2 \rangle$ est isomorphe à $\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$ d'où ${}_{\mathbb{F}} H^1(\wedge Z, D) = 0$ et l'espace $(\wedge Z, D)$ est rigide.

Le th. 4 nous affirme qu'il existe au maximum deux types d'homotopie complexe.

On peut vérifier ([10]) qu'il n'existe que ces deux types rationnels d'homotopie.

Exemple 6. Si $H^* = H^*(S^3 \times (S^2 \vee S^2 \vee S^2))$, alors $\dim_{\mathbb{F}} H^1(\wedge Z, d) = 18$, et $\dim \text{aut } H^* = 10$.

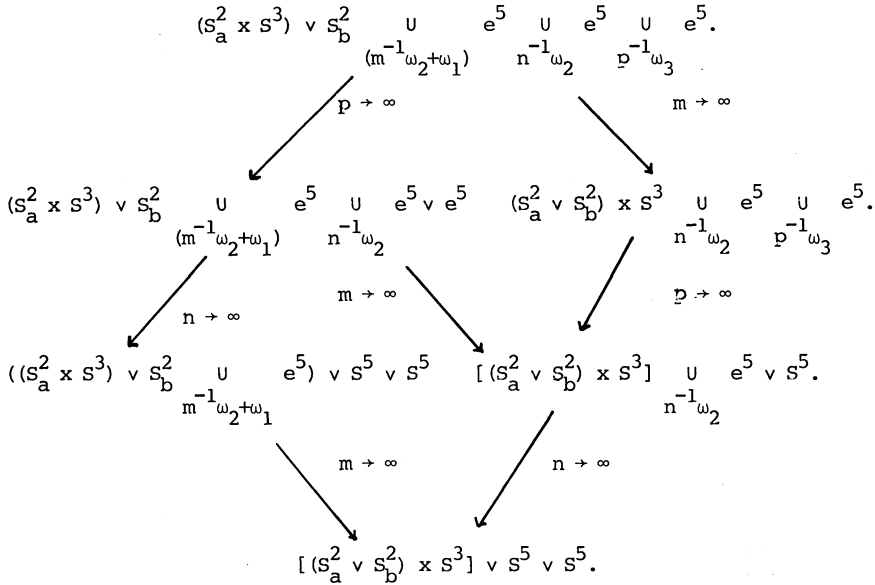
Il existe donc une infinité de types d'homotopie réelle et rationnelle.

Exemple 7.

$$X = [(S^2 \vee S^2) \times S^3] \vee [S^5 \vee S^5].$$

Il existe 6 types d'homotopie rationnelle distincts de même cohomologie que X .

Représentons-les dans un diagramme où les flèches représentent les possibilités de passer d'un type à l'autre par passage à la limite.



$$\begin{aligned}\omega_1 &= [S_b^2, S^3] \\ \omega_2 &= [S_b^2, [S_b^2, S_a^2]] \\ \omega_3 &= [S_a^2, [S_b^2, S_a^2]].\end{aligned}$$

Exemple 8.

Construisons maintenant pour tout n une algèbre de cohomologie admettant exactement 2^n types d'homotopie différents.

L'algèbre considérée sera l'algèbre tronquée en dimension $24n$ du produit tensoriel

$\Lambda Z \otimes \Lambda T$ où Z_0 est formé de x_1 et de x_2 en degré $8n$,

Z_1 de y_1, y_2 en degré $16n-1$ avec $dy_1 = x_1^2$ et $dy_2 = x_1x_2$.

Z_2 de z_1 en degré $24n-2$ avec $dz_1 = y_1x_2 - y_2x_1$.

.....

ΛT est l'algèbre libre engendrée par les variables

$$x_{24n-1}, x_{8n+1}, x_{8n+3}, \dots, x_{10n-1}, x_{14n}, x_{14n+2}, \dots$$

$$x_{16n-2} \text{ avec } d^0 x_i = i.$$

La seule obstruction est formée par les $d_2 : z_2^{14n-2} \rightarrow (\Lambda Z)_0^{14n-1}$ où

$$d_2(z_1) = \alpha_{24n-1} x_{24n-1} + \sum_{\substack{i \text{ impair} \\ = 1}}^{2n-1} \alpha_i x_{8n+1} \wedge x_{16n-i-1}.$$

L'espace des d_2 est de dimension n , dimension ${}_F H^2(d) = n$.

On peut vérifier que les types distincts d'homotopie correspondent aux familles de n éléments formés de 0 et de 1 que l'on peut prendre pour écrire d_2 .

On obtient ainsi exactement 2^n types d'homotopie.

Exemple 9.

Soient $2 \leq p \leq q \leq r$ trois naturels, alors :

- $S^p \times S^q \times S^r$ et $(S^p \times S^q) \vee S^r$ sont toujours intrinsèquement formels.
- $S^p \vee S^q \vee S^r$ est intrinsèquement formel ssi $(r-2)$ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire à coefficients naturels non nuls de $(p-1)$ et de $(q-1)$ avec somme des coefficients ≥ 3 .
- $(S^p \vee S^q) \times S^r$ est intrinsèquement formel ssi $(r-1)$ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire à coefficients naturels non nuls de $(p-1)$ et de $(q-1)$.

Exemple 10.

Considérons maintenant un exemple d'espace où les types d'homotopie rationnelle sont plus nombreux que les types d'homotopie réelle.

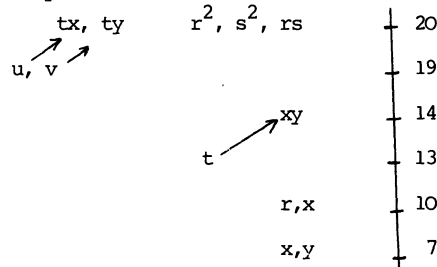
Posons $H^* = \wedge(x, y, r, s)/I$

où I est l'idéal engendré par $(xy, rx, ry, sx, sy, r^3, s^3, r^2, rs^2)$.

$$|x| = |y| = 7.$$

$$|r| = |s| = 10.$$

Le modèle bigradué de H^* prend la forme



Considérons la famille $(D_\alpha, \alpha \neq 0)$ de déformations de la forme

$$D_\alpha(u) = tx + r^2 + \alpha s^2$$

$$D_\alpha(v) = ty.$$

D_α et D_β seront k -équivalents ssi $\alpha\beta$ est un carré dans k . Il existe ainsi une infinité de types d'homotopie rationnelle de même algèbre rationnelle de cohomologie, et de même type réel d'homotopie. Ces différents types sont paramétrés par les entiers sans facteurs carrés.

Remarque :

Deux types d'homotopie rationnelle distincts de même algèbre rationnelle de cohomologie peuvent donc avoir même type d'homotopie réelle. Deux types d'homotopie

rationnelle, même intrinsèquement formels, différents, peuvent avoir le même type réel d'homotopie :

Exemple 11.

Considérons les algèbres (A_n, d_{A_n}) formelles de cohomologie $\wedge(x, y)/(x^2 + ny^2, x^3)$
 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad |x| = |y| = 2 \cdot n$

Ces différents espaces sont tous intrinsèquement formels pour leur cohomologie, mais (A_n, d_{A_n}) n'est k -isomorphe à (A_m, d_{A_m}) que si le produit $m \cdot n$ est un carré dans k .

Dans ce cas, il existe un k -isomorphisme $(A_n, d_{A_n}) \xrightarrow{\varphi} (A_m, d_{A_m})$ donné par $\varphi(x) = x$ et $\varphi(y) = \sqrt{m/n} y$.

Nous pouvons de cette manière exhiber deux espaces intrinsèquement formels non \mathbb{Q} -équivalents, mais \mathbb{R} -équivalents.

CHAPITRE 7. PRINCIPE DE SEMI-CONTINUITÉ

Une application φ de l'ensemble des k -types d'homotopie d'une cohomologie H^* dans \mathbb{N} est dite *semi-continue supérieurement*, si chaque fois que D_1 appartient à l'adhérence de l'orbite de D

$$\varphi(D_1) \geq \varphi(D).$$

Théorème 6.

a) Si φ est une fonction semi-continue supérieurement sur une variété W associée à une k -A.G.C. H^* , si $(\wedge Z, d)$ désigne un modèle bigradué et $(\wedge Z, D)$ un modèle filtré, alors $\varphi(d) \geq \varphi(D)$.

b) Sous les mêmes hypothèses, si $(\wedge Z, D_1)$ est une algèbre générique, alors $\varphi(D) \geq \varphi(D_1)$. □

L'algèbre formelle maximise donc toutes les fonctions semi-continues supérieurement. Une algèbre générique les minimise.

Proposition 9.

Les fonctions $\dim_{\mathbb{F}} Z^i(\wedge Z, -)$ et $\dim_{\mathbb{F}} H^i(\wedge Z, -)$ sont des fonctions semi-continues supérieurement sur W .

Démonstration :

La dimension de $\mathbb{F} B^i(\wedge Z, D)$ est égale au rang du système formé par les équations linéaires $\varphi D - D\varphi$ où φ parcourt une base de $\text{Der}^{i-1}(\wedge Z)$. Le rang est une fonction semi-continue inférieurement : il ne peut que diminuer par passage à l'adhérence. Les fonctions $\dim_{\mathbb{F}} Z^i(\wedge Z, -)$ et $\dim_{\mathbb{F}} H^i(\wedge Z, -)$ sont donc semi-continues supérieurement. □

Corollaire :

$\text{Dim aut.}(\wedge Z, -)$ est une fonction semi-continue supérieurement.

Proposition 10.

Les fonctions $X \mapsto \pi_1(X^X, \text{id}) = \pi_{i+1}(\text{B aut. } X)$ sont semi-continues supérieurement.

Démonstration.

Rappelons comment calculer $\pi_i(X^X, 1)$ $i \geq 1$ [17]. On construit tout d'abord le complexe $\text{Der}^{-i-1}(M) \xrightarrow{\delta} \text{Der}^{-i}(M) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \text{Der}^0(M)$ avec (M, d) un modèle minimal de X . $\text{Der}^{-i}(M)$ désigne l'espace vectoriel des $-i$ dérivations de M , c'est-à-dire des applications linéaires $\theta : M^q \rightarrow M^{q-i}$ vérifiant $\theta(ab) = \theta(a).b + (-1)^i a \cdot \theta(b)$. δ désigne le crochet avec d : $\delta(\theta) = \theta d - (-1)^i d\theta$.

Les groupes $\pi_i(X^X, \text{id})$ sont les groupes d'homologie de ce complexe. Le rang d'un système étant une fonction semi-continue inférieurement, les dimensions $\dim Z^i(\text{Der}^*(M), \delta)$ et $H^i(\text{Der}^*(M), \delta)$ sont des fonctions semi-continues supérieurement. \square

Proposition 11.

Les fonctions $\dim \pi_\psi^i(\wedge Z, -)$ sont des fonctions semi-continues supérieurement.

Démonstration.

Rappelons que $\pi_\psi^i(\wedge Z, D)$ est isomorphe à $H^i(Z, D_f)$ où f est la projection naturelle $\wedge Z \rightarrow Z$. Comme $\dim Z^i(Z, D_f)$ est une fonction semi-continue supérieurement, le résultat s'en déduit trivialement. \square

Corollaire.

Soient X, Y, Z trois espaces de cohomologie isomorphe à H^* .

- a) Si X est formel, alors $\forall i, \dim \pi_\psi^i(Y) \leq \dim \pi_\psi^i(X)$.
- b) Si Z est générique, alors $\forall i, \dim \pi_\psi^i(Z) \leq \dim \pi_\psi^i(Y)$. \square

Désignons par $S_\psi^*(\wedge Z, D)$ la cohomologie sphérique de $(\wedge Z, D)$, c'est-à-dire l'image par l'application de Hurewicz f^* [10] de $H^+(\wedge Z, D)$.

Proposition 12.

Les fonctions $\dim S_\psi^i(\wedge Z, -)$ sont des fonctions semi-continues supérieurement sur la variété W des modèles filtrés d'une cohomologie H^* .

Démonstration : similaire.

Munissons $\wedge Z$ de la graduation définie par la longueur des mots.

Ecrivons D sous la forme $D = d_1 + d_2 + d_3 + \dots$ où $d_i(x)$ désigne la partie de $D(x)$ appartenant à $\wedge^i Z$. $D^2 = 0$ conduit à la suite de relations :

$$d_1^2 = 0, \quad d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0, \quad \dots$$

$$\pi_\psi^*(\wedge Z, D) = H^*(Z, d_1).$$

La partie quadratique de d_2 de la différentielle D munit π_ψ^* d'une structure d'algèbre de Lie.

Considérons la suite centrale descendante :

$$\Gamma_1(\pi_\psi^*) = \pi_\psi^*, \quad \Gamma_2(\pi_\psi^*) = [\pi_\psi^*, \pi_\psi^*] \dots \Gamma_{i+1}(\pi_\psi^*) = [\pi_\psi^*, \Gamma_i(\pi_\psi^*)].$$

Proposition.

Si $D_1 \in \overline{O(D)}$ et si $\dim \pi_{\psi}^*(D) = \dim \pi_{\psi}^*(D_1)$,

alors $\dim \pi_{\psi}^*(D_1)/_{\Gamma_i} \pi_{\psi}^*(D_1) \geq \dim \pi_{\psi}^*(D)/_{\Gamma_i} \pi_{\psi}^*(D)$, $\forall i \geq 2$.

Démonstration.

Supposons avoir mis un ordre d^0 sur les générateurs de Z . Choisissons alors une base $z_1 \otimes z_2 \otimes \dots \otimes z_i$ de $\wedge^i Z$ avec $d^0(z_1) \leq d^0(z_2) \leq \dots \leq d^0(z_i)$.

Il existe alors deux applications linéaires p_1 et $p_2 : \wedge^2 Z \rightarrow Z$.

Notons $d_2^a : \wedge^2 Z \rightarrow \wedge^2 Z$ l'application composée $d_2^a = d_2 \circ p_1$ et d_2^b l'application $d_2 \circ p_2$.

d_2^a et d_2^b sont donc des applications linéaires.

Or $\dim \pi_{\psi}^*/_{\Gamma_{i+1}} (\pi_{\psi}^*) = \dim \bigcap_{s_j = a \text{ ou } b} \text{Ker} (d_2^{s_1} d_2^{s_2} \dots d_2^{s_{i-1}} d_2)$.

Les fonctions $\dim \pi_{\psi}^*/_{\Gamma_{i+1}} (\pi_{\psi}^*)$ sont donc semi-continues supérieurement. \square

Exemple 12.

Soit $H^* = H^*(S^3 \vee S^3 \vee S^8) \simeq \wedge(x, y, t)/(xy, tx, ty, t^2)$. Nous avons vu qu'il existait pour la cohomologie H^* deux espaces : l'un est formel, et l'autre, générique, a pour modèle $(S_a^3 \vee S_b^3) \cup_{\omega} e^8$ avec $\omega = [S_a^3, [S_a^3, S_b^3]]$.

Vérifions le principe de semi-continuité des automorphismes : $\text{Aut}(S^3 \vee S^3 \vee S^8) \simeq \simeq G L_2(Q) \times Q^*$, tandis que $\text{aut}(S^3 \vee S^3 \cup_{\omega} e^8)$ est isomorphe au sous-groupe de $G L_2(Q)$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha\delta \neq 0$.

La semi-continuité de l'homotopie est évident $\pi_*(S^3 \vee S^3 \vee S^8) \simeq (L_V)^{**+1}$ algèbre de Lie libre sur l'espace vectoriel gradué $V : V^2 = Q \oplus Q$, $V^7 = Q$ et $V^i = 0$ $i \neq 2, 7$. Tandis que $\pi_*(S^3 \vee S^3 \vee S^8) \simeq H^{**+1}(L_V, d)$ pour la dérivation définie par $dV^2 = 0$, $dx = [y, [y, z]]$, si x désigne une base de V^7 et (y, z) une base de V^2 .

Quant à la cohomologie sphérique, dans $S^3 \vee S^3 \vee S^8$, toutes les classes sont sphériques.

Dans $(S^3 \vee S^3) \cup_{\omega} e^8$, seules le sont les classes de cohomologie correspondant aux sphères S^3 .

Exemple 13. Espace des courbes fermées ([19]).

Soit $(\wedge X, d)$ une A.D.G.C. munie d'un quasi-isomorphisme $(\wedge X, d) \xrightarrow{\varphi} m_T$ (modèle minimal d'un espace simplement connexe T). Construisons $(\wedge(X, X'), \tilde{d})$ avec

$$|x'| = |x| - 1.$$

$$\tilde{d}x = dx$$

$\tilde{d}x' = sdx$ où s est la dérivation de degré -1 définie sur les générateurs par

$$s(x') = 0 \quad s(x) = x'.$$

$(\wedge(X, X'), \tilde{d})$ est un modèle pour l'espace $\tilde{\Omega}T$ des courbes fermées sur T .

Proposition : Soit H^* une Q-A.G.C. Désignons par $\tilde{\Omega}(\wedge Z, D)$ l'espace des courbes fermées sur un espace filtré $(\wedge Z, D)$. Alors, les fonctions $\dim Z^i(\tilde{\Omega}(\wedge Z, -))$, $\dim H^i(\tilde{\Omega}(\wedge Z, -))$, $\dim F^i H^i(\tilde{\Omega}(\wedge Z, -))$, $\dim F^i Z^i(\tilde{\Omega}(\wedge Z, -))$, $\dim \pi_\psi^i(\tilde{\Omega}(\wedge Z, -))$, $\dim {}_S \pi_\psi^i(\tilde{\Omega}(\wedge Z, -))$ sont semi-continues supérieurement.

Fonctions relativement stables.

Une fonction φ de l'ensemble des orbites d'une variété $W(H^*)$ dans N est dite relativement stable s'il existe un ouvert dense U de W sur lequel elle est constante.

On en déduit que si $D \in U$, alors sur toutes les courbes passant par D , φ est une constante sauf en un nombre fini de points.

Pour toutes les petites déformations D_1 de D , $\varphi(D_1) = \varphi(D)$. Cette proposition est intéressante pour les Q-A.G.C., H^* possédant une infinité de types d'homotopie réelle distincts.

Proposition 13.

Les fonctions $\dim F^i Z^i(\wedge Z, -)$, $\dim F^i H^i(\wedge Z, -)$, $\dim \pi_\psi^i(\wedge Z, -)$, $\dim {}_S \pi_\psi^i(\wedge Z, -)$ sont des fonctions relativement stables sur W .

A titre d'exemple : Prenons $S^3 \times (S^2 \vee S^2 \vee S^2)$. En chaque point D de W , $\dim F^1 H^1(\wedge Z, D) \geq 8$. Les types d'homotopie rationnelle forment donc une infinité d'ordre au moins égal à 8.

Mais pour chacune des fonctions φ ci-dessus, il existe une constante α_φ telle que l'adhérence dans W de l'ensemble des D tels que $\varphi(D) = \alpha_\varphi$ soit W tout entier. Ce raisonnement est valable chaque fois que W est connexe.

Annexe 1. Exemple d'espace intrinsèquement formel pour lequel $F^{H^1}(\wedge Z, d) \neq 0$.

Posons $X = S_C^5 \vee S_D^5 \vee S^{14} \vee S_A^{23} \vee S_B^{23} \cup e^{28}$

avec $= [S^{14}, S^{14}] + [S_A^{23}, S_C^5] + [S_B^{23}, S_D^5]$.

$H^*(X) = \wedge(x, y, z, t, t')/(xy, xz, yz, tx, t'y, ty-z^2, t'x-z^2, zt, zt', tt')$.

$$|x| = |y| = 5 \quad |z| = 14 \quad |t| = |t'| = 23.$$

Modèle bigradué.

$Z_O^5 : x, y$

$Z_O^{14} : z$

$Z_O^{23} : t, t'$

$Z_1^9 : t_1 \quad dt_1 = xy$

$Z_1^{18} : t_2 \quad dt_2 = xz$

$t_3 \quad dt_3 = yz$

$Z_1^{27} : t_4 \quad dt_4 = tx$

$t_5 \quad dt_5 = t'y$

$t_6 \quad dt_6 = ty-z^2$

$t_7 \quad dt_7 = t'x-z^2$

$Z_1^{36} : t_8 \quad dt_8 = zt$

$t_9 \quad dt_9 = zt'$

$Z_1^{45} : t_{10} \quad dt_{10} = tt'$

$Z_2^{13} : u_1 \quad du_1 = t_1x$

$u_2 \quad du_2 = t_1y$

$Z_2^{22} : u_3 \quad du_3 = t_2x$

$u_4 \quad du_4 = t_3y$

$u_5 \quad du_5 = t_2y - t_1z$

$u_6 \quad du_6 = t_3x + t_1z$

$Z_2^{>28} : \dots$

$Z_3^{17} : w_1 \quad dw_1 = u_1y + u_2x$

$w_2 \quad dw_2 = u_1x$

$w_3 \quad dw_3 = u_2y$

$Z_3^{26} : w_4 \quad dw_4 = u_3x$

$$\begin{aligned}
 w_5 & \quad dw_5 = u_4 y \\
 w_6 & \quad dw_6 = u_3 y + u_5 x + u_1 z \\
 w_7 & \quad dw_7 = u_4 x + u_6 y + u_2 z \\
 w_8 & \quad dw_8 = u_5 y + u_2 z \\
 w_9 & \quad dw_9 = u_6 x - u_1 z \\
 w_{10} & \quad dw_{10} = t_1 t_2 - u_3 y + u_1 z \\
 w_{11} & \quad dw_{11} = t_1 t_3 + u_4 x + u_2 z \\
 z_4^{21} : r_1 & \quad dr_1 = w_2 x \\
 & \quad r_2 \quad dr_2 = w_3 y \\
 & \quad r_3 \quad dr_3 = w_1 x + w_2 y \\
 & \quad r_4 \quad dr_4 = w_1 y + w_3 x \\
 & \quad r_5 \quad dr_5 = u_1 t_1 + w_2 y \\
 & \quad r_6 \quad dr_6 = u_2 t_1 - w_3 x
 \end{aligned}$$

$$z_5^{25} : \dim z_5^{25} = 8.$$

Il n'y a pas d'autre générateur en dimension inférieure à 27.

Calculons $F_{\mathbb{Z}_2}^1(\wedge \mathbb{Z}_2, d)$.

Les seuls d_2 possibles sont définis sur \mathbb{Z}_2 par

$$\begin{aligned}
 d_2 u_1 &= \alpha z \\
 d_2 u_2 &= \beta z \\
 d_2 u_3 &= \gamma t + \gamma' t' \\
 d_2 u_4 &= \mu t + \mu' t' \\
 d_2 u_5 &= \nu t + \nu' t' \\
 d_2 u_6 &= \psi t + \psi' t'. \quad \alpha, \beta, \gamma, \gamma', \mu, \mu', \nu, \nu', \psi, \psi' \in \mathbb{Q}.
 \end{aligned}$$

L'obligation d'être un 2-cocycle entraîne la relation

$$(dd_2 + d_2 d)(w_i) = 0 \text{ pour } i=1, 2, 3.$$

Ceci nous amène à poser

$$d_2 w_1 = -\alpha t_3 - \beta t_2$$

$$d_2 w_2 = -\alpha t_2$$

$$d_2 w_3 = -\beta t_3.$$

La même relation pour $i=4, \dots, 11$ nous amène aux conclusions suivantes :

$$w_4 : [d_2 d(w_4)] = [\gamma t x + \gamma' t' x] = 0 \text{ entraîne } \gamma' = 0.$$

$$w_5 : [d_2 d (w_5)] = [\mu t y + \mu' t' y] = 0 \text{ entraîne } \mu = 0.$$

$$w_6 : [d_2 d (w_6)] = [\gamma t y + \gamma' t' y + \nu t x + \nu' t' x + \alpha z^2] = 0 \text{ entraîne } \gamma + \nu' + \alpha = 0.$$

$$w_7 : [d_2 d (w_7)] = [\mu t x + \mu' t' x + \psi t y + \psi' t' y + \beta z^2] = 0 \text{ entraîne } \mu' + \psi + \beta = 0.$$

$$w_8 : [d_2 d (w_8)] = [\nu t y + \nu' t' y + \beta z^2] = 0 \text{ entraîne } \nu = -\beta.$$

$$w_9 : [d_2 d (w_9)] = [\psi t x + \psi' t' x - \alpha z^2] = 0 \text{ entraîne } \psi' = \alpha.$$

$$w_{10} : [d_2 d (w_{10})] = [-\gamma t y - \gamma' t' y + \alpha z^2] = 0 \text{ entraîne } \gamma = \alpha.$$

$$w_{11} : [d_2 d (w_{11})] = [\mu t x + \mu' t' x + \beta z^2] = 0 \text{ entraîne } \mu' = -\beta.$$

Et donc $\gamma = \alpha$, $\gamma' = 0$, $\mu = 0$, $\mu' = -\beta$, $\nu = -\beta$, $\nu' = -2\alpha$, $\psi = 0$, $\psi' = \alpha$.

$F_{11}^Z(\Lambda Z, d)$ est donc de dimension 2 et est défini par

$$d_2 u_1 = \alpha z$$

$$d_2 u_4 = -\beta t'$$

$$d_2 u_2 = \beta z$$

$$d_2 u_5 = -\beta t - 2\alpha t'$$

$$d_2 u_3 = \alpha t$$

$$d_2 u_6 = -\alpha t'.$$

Les espaces $F_{11}^{B^1}(\Lambda Z, d)$ et $F_{>1}^{H^1}(\Lambda Z, d)$ étant nuls, $F^{H^1}(\Lambda Z, d)$ est de dimension 2.

X est intrinsèquement formel.

Montrons qu'aucun de ces d_2 n'est intégrable. Prolongeons tout d'abord d_2 à Z_4^{21} .

$$d_2 r_1 = \alpha u_3$$

$$d_2 r_2 = \beta u_4$$

$$d_2 r_3 = \beta u_3 + \alpha(u_5 + u_6)$$

$$d_2 r_4 = \alpha u_4 + \beta(u_5 + u_6)$$

$$d_2 r_5 = \alpha u_5$$

$$d_2 r_6 = -\beta u_6.$$

La relation $d_2^2 + d d_3 + d_3 d = 0$ entraîne, vu l'absence de d_3 , que $[d_2^2] = 0$.

$$d_2^2 r_1 = d_2 \alpha u_3 = \alpha^2 t$$

$$d_2^2 r_2 = d_2 \beta u_4 = -\beta^2 t'.$$

Et donc $\alpha = \beta = 0$. □

Annexe 2. Déformation de modèles minimaux

Soit $(\Lambda Z, d)$ une Q-A.D.G.C. minimale. ΛZ est filtrée par les idéaux $\Lambda^p Z$;
 ΛZ est isomorphe canoniquement à l'espace vectoriel gradué $\bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p Z / \Lambda^{p+1} Z$.

La différentielle d peut donc s'écrire de manière naturelle $d = d_2 + d_3 + \dots$
 avec $d_2 \in \Lambda^2 Z / \Lambda^3 Z$
 $d_3 \in \Lambda^3 Z / \Lambda^4 Z$
 $\dots\dots$

Le fait que d soit une différentielle, ($d^2 = 0$) entraîne la suite de relations suivantes

$$\begin{aligned} d_2^2 &= 0 \\ d_2 d_3 + d_3 d_2 &= 0 \\ d_2 d_4 + d_4 d_2 + d_3^2 &= 0 \\ \dots\dots \end{aligned}$$

En particulier $(\Lambda Z, d_2)$ est une Q-A.D.G.C. minimale de même partie quadratique, donc [17] de même structure d'algèbre de Lie d'homotopie que $(\Lambda Z, d)$.

Intéressons-nous au problème suivant : peut-on classifier les Q-A.D.G.C. minimales de même structure d'algèbre de Lie d'homotopie ?

Ceci revient à considérer toutes les différentielles sur l'algèbre libre ΛZ qui sont minimales et qui possèdent la même partie quadratique d_2 .

Deux pareilles Q-A.D.G.C. minimales $(\Lambda Z, d)$ et $(\Lambda Z, d')$ sont équivalentes ssi il existe un automorphisme φ de ΛZ tel que $d' = \varphi^{-1} d \varphi$.

Ce problème est le problème dual de celui que nous avons traité dans les § 1 à 7. Les méthodes utilisées seront les mêmes.

A. 1. En exprimant les différentielles d considérées en termes de coefficients, on voit qu'elles forment une variété algébrique V sur laquelle opère un groupe $G = \text{aut.}(\Lambda Z)$. Deux différentielles d et d' sont dans la même orbite, ssi elles représentent le même type d'homotopie rationnelle.

Lemme 1 : $d_2 \in \overline{O(d)}$ $\forall d \in V$.

Démonstration : Considérons l'automorphisme φ_t de ΛZ suivant $\varphi_t(a) = t^{1-|a|} a$ pour tout a générateur de ΛZ . Donc $\varphi_t(a_1 \dots a_n) = t^{n-|a_1 \dots a_n|} a_1 \dots a_n$ et
 $\varphi_t d \varphi_t^{-1}(x) = d_2(x) + t d_3(x) + t^2 d_4(x) + \dots$ \square

Lemme 2 : L'espace tangent de Zariski à V au point d est formé des dérivations

$\theta : Z^r \rightarrow (\wedge^3 Z)^{r+1}$ qui vérifient $\theta d + d\theta = 0$.

Une *déformation* de d est une famille $d_t = d + tD_2 + t^2D_3 + \dots$ de différentielles de V . D_2 s'appelle la *déformation infinitésimale*. La déformation d_t est *triviale* s'il existe une famille à un paramètre φ_t d'automorphisme de $\wedge Z$ tel que $d = \varphi_t d_t \varphi_t^{-1}$.

Une A.D.G.C. minimale $(\wedge Z, d)$ est dite *rigide* si toutes ses déformations sont triviales. De manière équivalente, $(\wedge Z, d)$ est *rigide* si son orbite est ouverte dans une extension algébriquement close.

A. 2. Introduisons une théorie cohomologique filtrée pour calculer la rigidité.

Soit (Δ^p, δ) le complexe défini par :

$$p > 0 \quad \Delta^p = \{\theta \in \text{Der}^p \wedge Z \mid \theta : Z^r \rightarrow (\wedge^{p+2} Z)^{r+p}\}.$$

$$p = 0 \quad \Delta^0 = \{\theta \in \text{Der}^0 \wedge Z \mid \theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots$$

$$\text{avec } \theta_1 : Z^r \rightarrow (\wedge^1 Z / \wedge^{1+1} Z)^r \text{ et } \theta_1 d_2 = d_2 \theta_1\}.$$

$\delta : \Delta^p \rightarrow \Delta^{p+1}$ est défini par :

$$\delta(\theta) = d\theta - (-1)^{|\theta|} \theta d.$$

Les groupes de cohomologie se notent ${}_F H^1(d)$.

Théorème A : Si ${}_F H^1(d) = 0$ alors d est rigide.

Théorème B : Si ${}_F H^2(d) = 0$ alors d est rigide ssi ${}_F H^1(d) = 0$.

L'espace $(\wedge Z, d)$ est dit π_* -formel, s'il est équivalent à $(\wedge Z, d_2)$. L'espace $(\wedge Z, d)$ est dit π_* -intrinsèquement formel s'il est équivalent à $(\wedge Z, d_2)$ et s'il n'existe sur V qu'une seule orbite.

Théorème C : $(\wedge Z, d_2)$ est π_* -intrinsèquement formel ssi d_2 est rigide dans une extension algébriquement close.

Théorème C' : Si ${}_F H^1(d_2) = 0$ alors d_2 est π_* -intrinsèquement formel.

Les démonstrations de ces théorèmes sont mots pour mots les mêmes que dans le cas dual. Nous les omettons.

Exemple 14.

Soit π_* l'algèbre de Lie à deux générateurs, l'un de degré 2 et l'autre de degré 5 et dont tous les crochets sont nuls.

Construisons l'espace π_* -formel.

$$Z : x, y \quad |x| = 2 \quad |y| = 5$$

$$d_2x = 0$$

$$d_2y = 0.$$

C'est le modèle minimal de $K(Q,2) \times K(Q,5)$.

Une déformation d_3 est définie par :

$$d_3y = \alpha x^3$$

$$d_3x = 0.$$

On peut vérifier que $\dim_F H^1(d_2) = 1$ et que

$$\dim_F H^1(d_2 + d_3) = 0.$$

L'espace $(\wedge Z, d_2 + d_3)$ est rigide, c'est le modèle minimal de $P^2(\mathbb{C})$.

Il n'existe que ces deux types d'homotopie rationnelle pour l'algèbre de Lie π_* donnée.

A. 3. Nous avons considéré aux n° A. 1. et A. 2. les types d'homotopie rationnelle d'algèbre de Lie d'homotopie fixée. Nous pouvons considérer maintenant les types d'homotopie rationnelle d'espace vectoriel Z^* d'homotopie fixée.

Munissons $\wedge Z^*$ de la différentielle nulle, nous obtenons un espace formel pour la structure Z^* d'homotopie.

Nous pouvons considérer la variété V des différentielles d sur $\wedge Z$. Nous pouvons de nouveau parler de déformation, de rigidité, d'orbites, ...

Proposition : Si $(\wedge Z, d)$ est rigide, alors la structure d'algèbre de Lie sur Z^* induite est rigide. La réciproque est vraie si $Z^p = 0$ $p < 1$ et $p \geq 3l-1$.

Démonstration : Si d est une différentielle, il en est de même de sa partie quadratique d_2 .

Si $(\wedge Z, d)$ est rigide, $(\wedge Z, d_2)$ l'est également parmi les modèles minimaux à différentielle quadratique. Or, $(\wedge Z, d_2)$ est rigide ssi l'algèbre de Lie duale l'est également. Si $Z^p = 0$ $p < 1$ et $p \geq 3l-1$, alors $d_3 = d_4 = d_5 = \dots = 0$, et la réciproque est vraie.

En particulier, si tous les générateurs sont de degré un, alors l'algèbre minimale est rigide ssi l'algèbre de Lie duale l'est.

Exemple 15.

Soit $(\wedge Z, d)$ l'algèbre minimale définie par $Z^p = 0$ $p \neq 1$.

$Z^1 : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$.

$$dx_1 = dx_2 = 0$$

$$dx_4 = x_1 x_3$$

$$dx_3 = x_1 x_2$$

$$dx_5 = x_1 x_4 + x_2 x_3.$$

Cette algèbre est rigide [18].

Exemple 16.

Considérons toutes les A.D.G.C. minimales à quatre générateurs x, y, z, t de degrés respectifs 2, 3, 4, 5. Les dérivations d de $\text{Der}^1(\wedge Z)$ vérifient

$$dx = 0$$

$$dy = \alpha x^2$$

$$dz = \beta xy$$

$$dt = \gamma x^3 + \delta xz.$$

Représentons-les par les points $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de Q^4 correspondants. Pour que d soit une différentielle, il faut que β soit nul ou que α et δ soient nuls.

La variété V est donc réunion des deux variétés irréductibles V_1 et V_2 suivantes :

$$V_1 : \beta = 0$$

$$V_2 : \alpha = \delta = 0.$$

Il existe exactement sept types d'homotopie rationnelle réalisant cet espace vectoriel d'homotopie. Décrivons-les en examinant les différentes structures d'algèbre de Lie :

a) L'espace $(1, 0, 0, 1)$ d'orbite $(\alpha, 0, \gamma, \delta)$, $(\alpha\delta \neq 0)$ est rigide dans V .

Il est cependant π_* -intrinsèquement formel (c'est-à-dire défini avec unicité par la structure d'algèbre de Lie d'homotopie). $\pi_* : [x], [x, x], [z], [x, z]$.

b) L'espace $(0, 0, 0, 1)$ d'orbite $(0, 0, \gamma, \delta)$, $(\delta \neq 0)$ est π -intrinsèquement formel et H -intrinsèquement formel. $\pi_* : [x], [y], [z], [x, z]$.

$$\begin{aligned} H^* : \wedge(x, y, z) / (xz) \quad & |x| = 2 \\ & |y| = 3 \\ & |z| = 4. \end{aligned}$$

c) L'espace $(1, 0, 0, 0)$ d'orbite $(\alpha, 0, \gamma, 0)$, $(\alpha \neq 0)$ est également π_* -intrinsèquement formel et H^* -intrinsèquement formel.

C'est le modèle minimal de $S^2 \times K(Q, 4) \times K(Q, 5)$.

d) Considérons la structure suivante d'algèbre de Lie sur π_* :

$$\pi_* : [x], [y], [x, y], [t]. \quad |x| = 2, \quad |y| = 3, \quad |t| = 5.$$

Il existe exactement deux types d'homotopie rationnelle réalisant cette structure d'algèbre de Lie.

d') $(0, 1, 1, 0)$ d'orbite $(0, \beta, \gamma, 0)$, $(\beta\gamma \neq 0)$ est un espace rigide dans V et π_* -rigide.

d'') $(0, 1, 0, 0)$ d'orbite $(0, \beta, 0, 0)$, $(\beta \neq 0)$ est l'espace π_* -formel correspondant.

e) Il reste un dernier cas à considérer, celui où π_* est défini par :

$$\begin{aligned} \pi_* : [x], [y], [z], [t]. \quad & |x| = 2, \quad |y| = 3 \\ & |z| = 4, \quad |t| = 5. \end{aligned}$$

ANNEXE 2

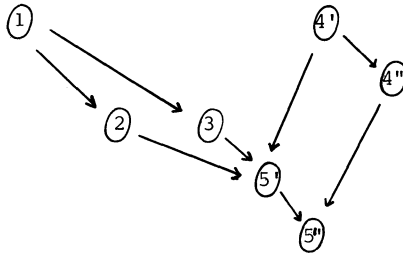
De nouveau, deux types d'homotopie :

e') $(0, 0, 1, 0)$ d'orbite $(0, 0, \gamma, 0)$, $\gamma \neq 0$. Cet espace est π_* -rigide et H^* -intrinsèquement formel.

Il admet comme modèle $\mathbb{C}P(2) \times K(\mathbb{Q}, 3) \times K(\mathbb{Q}, 4)$.

e'') $(0, 0, 0, 0)$, modèle minimal de $K(\mathbb{Q}, 2) \times K(\mathbb{Q}, 3) \times K(\mathbb{Q}, 4) \times K(\mathbb{Q}, 5)$ est formel, π_* -formel et H^* -intrinsèquement formel.

Il est intéressant de résumer cet exemple par un diagramme où les flèches indiquent les possibilités de passer d'un espace à l'autre par passage à l'adhérence.



Les numéros correspondent à des structures d'algèbre de Lie différentes. $(4')$ et (1) sont rigides dans V .

Bibliographie

- [1] Body R. and Douglas R. Homotopy types within a rational homotopy type [topology 13 (1974), 209-214].
- [2] Bousfield A. and Gugenheim V. On P.L. de Rham theory and rational homotopy type (memoirs of the A.M.S. n° 179 (1975)).
- [3] Cartan H. La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal (Colloque de topologie, Bruxelles (1950)).
- [4] Félix Y. Polynôme de Poincaré de l'espace des lacets d'un espace coformal simplement connexe (publ. internes, Lille (1979)).
- [5] Félix Y. Classification homotopique des espaces rationnels à cohomologie donnée (thèse, Louvain-la-Neuve (1979)).
- [6] Félix Y. Descente galoisienne des types d'homotopie rationnelle (rapport sémin. math. pures, Louvain-la-Neuve (1979)).
- [7] Flanigan F.J. Algebraic geography : varieties of structure constants (Pac. J. Math. 27 (1) (1968) 71-79).
- [8] Friedlander E., Griffiths P.A. and Morgan J. Homotopy theory and differential forms (Seminario di Geometria, (1972) Firenze).
- [9] Gerstenhaber N. On the deformation of rings and algebras (Ann. of Math. 79 (1964) 59-103).
- [10] Halperin S. and Stasheff J. Obstructions to homotopy equivalences (preprint (1976)).
- [11] Lehmann D. Théorie homotopique des formes différentielles (Astérisque 45 (1977)).
- [12] Lemaire J.M. and Sigrist F. Dénombrement des types d'homotopie rationnelle (C.R. Acad. Sci. Paris 287A, 109-112 (1973)).
- [13] May J.P. Matrix Massey products (J. of Algebra 12 (1969) 533-558).
- [14] Nijenhuis A. and Richardson J. Cohomology and deformation in graded Lie algebras (Bull. A.M.S. 72 (1966) 1-29).
- [15] Quillen D. Rational homotopy theory (Ann. of Math. 90 (1969) 205-295).
- [16] Stasheff J. Rational homotopy-obstruction and perturbation theory (Lect. Notes in Math. n° 673 (1978) 7-31).
- [17] Sullivan D. Infinitesimal computations in topology (Publ. de l'I.H.E.S. 47 (1978) 269-331).
- [18] Vergne M. Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étu-

BIBLIOGRAPHIE

de de la variété des algèbres de Lie nilpotentes (Bull. Soc. Math.
France 98 (1970) 81-116).

- [19] Vigué M. Quelques problèmes d'homotopie rationnelle (thèse (1978) Lille).

Y. FÉLIX
Université catholique
de Louvain
2, chemin du Cyclotron
1348 LOUVAIN-LA-NEUVE
BELGIQUE