

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-PAUL BRASSELET

Homologie des fibrés à singularités

Mémoires de la S. M. F., tome 61 (1979)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__61__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ

AVEC LE CONCOURS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SUPPLÉMENT au numéro de SEPTEMBRE 1979

MÉMOIRE N° 61

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 61, 1979, 78 p.

HOMOLOGIE DES FIBRÉS A SINGULARITÉS
(par J.-P. BRASSELET)

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

11, rue Pierre - et - Marie - Curie,
75231 PARIS CEDEX 05

Publication trimestrielle

SUPPLÉMENTS au Bulletin de la Société mathématique de France.

- Les "Comptes rendus des séances", qui avaient paru annuellement de 1911 à 1938, ne sont plus disponibles séparément, mais sont tous incorporés, année par année, dans la réimpression du Bulletin de la Société mathématique de France, tomes 39 (1911) à 66 (1938), y compris, pour chacune des années 1911, 1921, 1922, 1923 et 1924 (séances du "Cinquantenaire" et séances ordinaires de 1924), les tables qui n'existaient pas à l'origine.

Les autres suppléments ci-après sont disponibles séparément :

- 1939. - Conférences de la Réunion internationale des mathématiciens [1937. Paris].
- "Mémoires" :
 1. FORT (Jacques). - Contribution à l'étude des éléments tertiaires ... (Thèse).
 2. GIRAUD (Jean). - Méthode de la descente.
 3. GRILLET (P.-A.). - Homomorphismes principaux de tas et de groupoïdes (Thèse).
 4. BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques (Thèse).
 5. BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Espaces de fonctions bornées et continues ... (Thèse).
 6. VO-KHAC Khoan. - Etude des fonctions quasi stationnaires ... (Thèse).
 7. BERNAT (Pierre). - Sur le corps enveloppant d'une algèbre de Lie résoluble.
 8. MALLIAVIN-BRAMERET (Marie-Paule). - Largeurs d'anneaux et de modules (Thèse).
 9. RENAULT (Guy). - Etude des sous-modules compléments dans un module (Thèse).
 10. ZINN-JUSTIN (Nicole). - Dérivations dans les corps et anneaux ... (Thèse).
 11. BERTIN (Jean-Etienne). - Variété de Picard de type linéaire commutatif (Thèse).
 12. AUBIN (Jean-Pierre). - Approximation des espaces de distributions ... (Thèse).
 13. DEUTSCH (Nimet). - Interpolation dans les espaces vectoriels ... (Thèse).
 14. ROBERT (Pierre). - Sur l'axiomatique des systèmes générateurs ... (Thèse).
 15. FOUQUES (Alfred). - Systèmes de α -idéaux dans un demi-groupe ... (Thèse).
 16. LEHMANN (Daniel). - Quelques propriétés des connexions induites ... (Thèse).
 17. BRUTER (Claude P.). - Vue d'ensemble sur la théorie des matroïdes.
 18. DIXMIER (Suzanne). - Sur les p -groupes ... (Thèse).
 19. Contributions à la théorie des séries trigonométriques ...
 20. KRÉE (Paul R.). - Distributions quasi homogènes et intégrales singulières.
 21. de MATHAN (Bernard). - Approximations diophantiennes dans un corps local (Thèse).
 22. CHADEYRAS (Marcel). - Essai d'une théorie noethérienne homogène ... (Thèse).
 23. KOSKAS (Maurice). - Structures algébriques multivoques. Applications (Thèse).
 24. SPECTOR (René). - Sur la structure locale des groupes abéliens ... (Thèse).
 25. Colloque de théorie des nombres [1969, Bordeaux].
 26. MARTY (Robert). - Sous-groupes fonctoriels et relativisations (Thèse).
 27. DHOMBRES (Jean G.). - Sur les opérateurs multiplicativement liés (Thèse).
 28. GATESOUE (Michel). - Sur les transformées de Fourier radiales (Thèse).
 29. DELAROCHE (Claire). - Extensions des C^* -algèbres (Thèse).
 30. RAÏS (Mustapha). - Distributions homogènes sur des espaces de matrices (Thèse).

- 31-32. Colloque d'analyse fonctionnelle [1971. Bordeaux].
- 33. Sur les groupes algébriques (ANANTHARAMAN et LUNA).
- 34. Contributions à l'analyse fonctionnelle (BONNARD, BOLLEY et CAMUS).
- 35. Contributions au calcul des probabilités (CONZE, REINHARD, BECKER, JACOD et DANG NGOC NGHIEM).
- 36. ROBERT (Gilles). - Unités elliptiques.
- 37. Journées arithmétiques [1973. Grenoble].
- 38. Journées de géométrie analytique [1972. Poitiers].
- 39-40. Table ronde d'analyse non archimédienne [1972. Paris].
- 41. RAYNAUD (Michèle). - Théorème de Lefschetz ... (Thèse).
- 42. FAKIR (Sabah). - Objets algébriquement clos ... (Thèse).
- 43. LIGOZAT (Gérard). - Courbes modulaires de genre 1 (Thèse).
- 44. ENOCK (Michel) et SCHWARTZ (Jean-Marie). - Une dualité dans les algèbres de von Neumann.
- 45. MOULIN (Hervé). - Prolongement des jeux à deux joueurs de somme nulle (Thèse).
- 46. Journées sur la géométrie de la dimension infinie ... [1975. Lyon].
- 47. PUIG (Luis). - Structure locale dans les groupes finis (Thèse).
- 48. Colloque sur les formes quadratiques [1975. Montpellier].
- 49-50. Utilisation des calculateurs en mathématiques pures [1975. Limoges].
- 51-52. Contributions à l'étude des opérateurs elliptiques et hypoelliptiques (B. HELFFER, G. MÉTIVIER).
- 53. KANTOR (Jean-Michel). - Formes ... ; HENDRIKS (Harris). - Obstruction ...
- 54. Fonctions harmoniques et théorèmes limites ... (A. RAJGI, J. ROSENBERG).
- 55-56. SOTO ANDRADE (Jorge). - Représentations de certains groupes symplectiques finis (Thèse).
- 57. VÉLU (Jacques). - Courbes elliptiques ... (Thèse).
- 58. EL ZEIN (Fouad). - Complexe dualisant ... (Thèse)
- 59. Colloque sur les formes quadratiques [2. 1977. Montpellier].
- 60. Analyse non convexe [1977. Pau].
- 61. BRASSELET (Jean-Paul). - Homologie des fibrés à singularités (Thèse).

HOMOLOGIE DES FIBRÉS

À SINGULARITÉS

(Suite spectrale des applications C -stratifiées)

par

Jean-Paul BRASSELET*

[Univ. LILLE I]

RESUME.— La notion d'application C -stratifiée généralise celle de fibré à singularités au cas où la fibre singulière n'est pas réduite à un point. Le but de ce travail est de construire, par des méthodes purement homologiques et pour de telles applications, une suite spectrale généralisant la suite spectrale de Serre. Elle est, dans certains cas, duale de la suite spectrale de I. Fâry. Entre autres applications, on complète les résultats de Bredon, Conner et Dyer, Antonelli concernant les fibrés à singularités et les actions semi-libres de groupes.

Partie de thèse Sc. Maths (voir [6])

* Equipe de Recherche associée au C.N.R.S. N° 07 590
Université de Lille I - 59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

TABLE DES MATIERES

<i>Introduction.</i>	7
<i>Chapitre I - <u>DEFINITIONS ET RESUME DE LA DEMONSTRATION.</u></i>	
1) Définitions et exemples.	9
a) définitions.	9
b) exemples.	11
c) propriétés.	12
2) Le résultat principal (résumé de la démonstration).	16
<i>Chapitre II - <u>PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES.</u></i>	
3) Extensions de modules différentiels gradués.	22
4) Le théorème de Shih pour les complexes simpliciaux.	31
5) Réalisation de l'isomorphisme de Thom au niveau des complexes de chaînes singulières.	37
<i>Chapitre III - <u>DEMONSTRATION DU THEOREME PRINCIPAL.</u></i>	
6) Démonstration de la proposition 2.1.	41
7) Démonstration de la proposition 2.3.	42
8) Démonstration de la proposition 2.4.	43
9) Triangulations adaptées.	45
10) La proposition fondamentale.	47
11) Démonstration du théorème 2.5.	57
<i>Chapitre IV - <u>PROPRIETES ET APPLICATIONS DE LA SUITE SPECTRALE DES APPLICATIONS C-STRATIFIEES.</u></i>	
12) Propriétés.	61
13) Suite exacte de Smith-Gysin.	67
14) Applications aux actions de groupes.	69
<i><u>Appendice : Fibrés sur fibrés en théorie semi-simpliciale.</u></i>	73
<i><u>Bibliographie.</u></i>	77

Introduction.

L'objet de ce travail est de construire, pour les fibrés à singularités, une suite spectrale généralisant la suite spectrale de Serre (théorème 2.5.). En fait, la construction sera valable pour une classe d'applications plus large que celle des fibrés à singularités et pour laquelle la fibre singulière n'est pas obligatoirement réduite à un point. Nous les avons appelées applications C-stratifiées pour des raisons explicitées au chapitre I.

Cette étude permet une réponse partielle aux problèmes posés par les fibrés à singularités (Montgomery et Samelson [22]), entre autres celui des relations entre les propriétés homologiques des espaces en cause. Les résultats obtenus dans ce domaine complètent ceux de Bredon [7], Conner et Dyer [14], Antonelli [3].

L'essentiel de la construction de la suite spectrale se fait dans la théorie de l'homologie singulière. Cependant, les propriétés topologiques des applications C-stratifiées amènent à travailler également en homologie simpliciale, à partir d'une triangulation de l'espace "de base". Nous n'utilisons donc pas la notion de faisceau.

Parmi les propriétés de la suite spectrale, signalons la dualité avec la suite spectrale de I. Fáry [18] dans l'intersection de leurs domaines de définition, et plusieurs propriétés héritées de celles de la suite spectrale des fibrés (J.P. Serre [23]).

Les différents chapitres se répartissent ainsi :

Dans le chapitre I, on donne la définition et quelques exemples d'applications C-stratifiées. Dans certains cas particuliers, on obtient directement, à partir de la définition, des généralisations des suites exactes de Wang et de Gysin. La seconde partie de ce chapitre consiste en un résumé de la démonstration du résultat principal (Théorème 2.5).

La démonstration proprement dite fait l'objet des deux chapitres suivants :

Le chapitre II établit quelques préliminaires algébriques concernant les morphismes d'extensions de modules différentiels gradués et le théorème de Shih pour les complexes simpliciaux.

Le chapitre III est consacré à la démonstration des résultats du chapitre I ; on y montre notamment l'existence de triangulations adaptées (Proposition 9.2), la proposition fondamentale 10.1 et le résultat principal (Théorème 2.5).

Enfin, dans le chapitre IV, on donne les propriétés de la suite spectrale des applications C -stratifiées et quelques-unes de ses applications (Suite exacte de Smith-Gysin, actions semi-libres de groupes).

En appendice, on trouvera une étude des fibrés sur fibrés en théorie semi-simpliciale.

Ce mémoire est un résumé d'une partie de ma thèse [6].

Je tiens à remercier ici M. H. Cartan pour toute l'aide qu'il m'a apportée par ses remarques pertinentes et ses précieux conseils. Je lui dois d'importantes améliorations dans la présentation et la rédaction.

Ma reconnaissance va tout particulièrement à M. W. Shih, les innombrables discussions que j'ai eues avec lui ont toujours été très fécondes et ont eu une importance décisive sur l'achèvement de ce travail.

Qu'il me soit permis de remercier également Mme M.H. Schwartz et MM. D. Lehmann et M. Sébastiani pour l'appui enthousiaste et les conseils amicaux et fructueux qu'ils m'ont apportés.

Mesdames Raymonde Béarat et Arlette Lengaigne ont assuré avec une particulière rapidité et compétence la frappe de ce travail. Je les en remercie ici très vivement.

I - DEFINITIONS ET RESUME DE LA DEMONSTRATION.

1) Définitions et exemples.

a) Définitions.

On se donne une fois pour toutes un anneau commutatif unitaire Λ .
Les homologies seront calculées à valeurs dans Λ .

Définition 1.1. - Soit N un sous-espace fermé d'un espace topologique Y , on suppose N et $Y-N$ paracompacts et connexes. On dit qu'un voisinage fermé U de N dans Y est un voisinage tubulaire s'il existe une rétraction par déformation $\omega : U \rightarrow N$ qui fait de U un fibré topologique localement trivial, de base N , et dans laquelle chaque fibre reste stable.

On note $\overset{\circ}{U}$ l'intérieur de U dans Y et $\partial U = U - \overset{\circ}{U}$.

La fibre D de $\omega : U \rightarrow N$ est contractible sur son point base $\{0\}$.
 ∂U est un sous-espace de $Y-N$, homéomorphe à un fibré localement trivial, de base N , et de fibre notée ∂D .

Définition 1.2. - Soit N un sous-espace fermé d'un espace topologique Y . On dit que le couple (Y, N) est un espace C-stratifié si N et $Y-N$ sont des espaces paracompacts, connexes, et si N admet dans Y un voisinage tubulaire tel que la fibre ∂D de ∂U soit une variété topologique.

On dira que (Y, N) est un espace C-stratifié de codimension v si ∂D est de dimension $v-1$.

Remarque 1.3. - Si N et $Y-N$ sont des variétés topologiques, on a : $v = \dim(Y-N) - \dim N$.

Dans la suite, lorsqu'on se donnera un espace C-stratifié, on ne précisera pas toujours le voisinage tubulaire qui lui est attaché. Celui-ci sera sous-entendu dans la donnée de l'espace C-stratifié.

L'appellation "espace C-stratifié" est justifiée par la situation suivante: si $(N, Y-N)$ est une stratification d'un ensemble analytique complexe Y vérifiant les conditions (a) et (b) de Whitney, il existe une rétraction locale d'un voisinage de N dans Y , sur N . (R. Thom, Séminaire Bourbaki n° 281, décembre 1964). (voir aussi [26]).

Exemple 1.4. - Soit Y une variété à bord connexe ∂Y , ∂Y admet un voisinage "collier" U , dans Y , homéomorphe à $\partial Y \times [0, 1]$ ([9]). Un tel voisinage est un voisinage tubulaire et le couple $(Y, \partial Y)$ est un espace C-stratifié.

Définition 1.5. - On dira qu'un espace C-stratifié est orientable si la fibre ∂D de ∂U est une sphère d'homologie et si le faisceau d'orientation du fibré $\omega : U \rightarrow N$ est constant (si N et Y sont des variétés, les faisceaux d'orientation de Y et de N coïncident donc sur N).

Définition 1.6. - On dira qu'un espace C-stratifié est triangulable si Y, N et ∂U sont des espaces topologiques triangulables et si la fibre ∂D de ∂U est une variété topologique compacte.

Définition 1.7. - Soient (X, M) et (Y, N) deux espaces C-stratifiés ; une application C-stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres (F, F_0) est une application continue et surjective de X sur Y telle que $M = f^{-1}(N)$ et que :

- (i) les restrictions de f à $(X-M)$ et M soient des projections d'espaces fibrés topologiques (de Serre) de fibres respectives F et F_0 .
- (ii) N admette dans Y un voisinage tubulaire dont l'image réciproque par f soit un voisinage tubulaire de M dans X .

La fibre F est appelée fibre régulière et F_0 fibre singulière.

Propriété 1.8. - Soit $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C-stratifiée de fibres (F, F_0) , il existe un voisinage tubulaire U de N dans Y

tel que $T = f^{-1}(U)$ soit un voisinage tubulaire de M dans X , et que la restriction de f à $\partial T = T - \overset{\circ}{T}$ soit la projection d'un fibré de base $\partial U = U - \overset{\circ}{U}$ et de fibre F (restriction du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ à ∂U). De plus, on a un diagramme commutatif dans lequel toutes les flèches sont des projections de fibrés :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\lambda} & \partial T \\ f|_M \downarrow & & \downarrow f|_{\partial T} \\ N & \xleftarrow{\omega} & \partial U \end{array}$$

Corollaire 1.9. - Notons μ et ν les codimensions de (X, M) et (Y, N) respectivement. Lorsque toutes les données sont des variétés topologiques, on a :

$$\dim F - \dim F_0 = \mu - \nu.$$

b) Exemples d'applications C-stratifiées.

Exemple 1.10. - Soit G un groupe de Lie compact opérant de manière C^∞ sur une variété différentiable C^∞ et connexe X . On suppose que G opère semi-librement sur X , c'est-à-dire librement en dehors de l'ensemble M des points de X laissés fixes par l'action de G . La projection canonique de X sur l'espace des orbites $Y = X/G$ est une application C-stratifiée.

Citons comme cas particuliers :

i) Les applications de Hopf $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^5$ et $f : \mathbb{R}^{16} \rightarrow \mathbb{R}^9$ obtenues par actions respectives de S^1 , des quaternions et des nombres de Cayley ([25], § 20).

ii) L'application de la sphère unité de \mathbb{R}^3 sur le disque unité de \mathbb{R}^2 définie, pour tout point de coordonnées (x_0, x_1, x_2) , par $f(x_0, x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

Exemple 1.11. - L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(z) = z^d$. (en identifiant \mathbb{R}^2 à \mathbb{C}).

On remarque que les fibres F et F_0 peuvent être isomorphes sans que l'application $f : X \rightarrow Y$ soit projection de fibré ; ceci est le cas de l'exemple suivant :

Exemple 1.12. - Soit D^2 le disque unité de \mathbb{R}^2 paramétré par $(r, \psi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi[$. L'application du tore plein $X = D^2 \times S^1$ sur $Y = D^2$ définie par $f(r, \psi, \theta) = (r, \theta)$ est une application C-stratifiée de fibres (S^1, S^1) .

La notion d'application C-stratifiée est, en quelque sorte, une généralisation de celle de fibré à singularités [22]. En particulier, une application C-stratifiée dont la fibre est un point est un fibré à singularités convergent au sens de Hu [20].

c) Propriétés.

Dans certains cas particuliers, les applications C-stratifiées possèdent des propriétés qui résultent directement de leur définition. On en donne deux exemples : lorsque N et $Y-N$ sont d'homologie réduite nulle (Propriété 1.13 ci-dessous) et lorsque F et F_0 ont respectivement le type d'homologie d'une sphère et d'un point (Propriété 1.16 ci-dessous).

Dans ce qui suit, si F_0 est composé d'un nombre fini de points, nous noterons $F_0 = \{\text{pts}\}$; un espace réduit à un point sera noté 0 .

Cas où N et $Y-N$ ont une homologie réduite nulle.

Propriété 1.13. - Soient (X, M) un espace C -stratifié orientable, de codimension μ , (Y, N) un espace C -stratifié de codimension ν , et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C -stratifiée de fibres (F, F_0) . Supposons N et $Y-N$ connexes par arcs et d'homologie réduite, à coefficients dans l'anneau principal Λ , nulle en toutes dimensions. Si, de plus, les systèmes locaux formés par $H_i(F_0)$ et $H_i(F)$ sur N et $Y-N$ respectivement sont triviaux pour tout i , on a la suite exacte :

$$(2) \quad \dots \rightarrow H_q(F) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_{q-\mu}(F_0) \xrightarrow{\psi} H_{q-1}(F) \rightarrow \dots$$

Démonstration : Le couple (X, M) est un espace C -stratifié orientable, on a donc un isomorphisme de Thom :

$$H_q(X, X-M) \simeq H_{q-\mu}(M)$$

et la suite exacte longue d'homologie du couple $(X-M, X)$ s'écrit :

$$\dots \rightarrow H_q(X-M) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_{q-\mu}(M) \rightarrow H_{q-1}(X-M) \rightarrow \dots$$

D'autre part, les suites spectrales de Serre de chacun des fibrés

$f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ et $f|_M : M \rightarrow N$ dégénèrent. Elles donnent lieu à des isomorphismes :

$$H_q(F) \simeq H_q(X-M) \text{ et } H_q(F_0) \simeq H_q(M).$$

On en déduit le résultat.

Corollaire 1.14. - Dans les hypothèses de la propriété 1.13, soit Y une ν -sphère homologique et $f : (X, M) \rightarrow (Y, 0)$ une application C -stratifiée de fibres $(F, \{\text{pts}\})$, alors $H_q(X; \mathbb{Z}) = H_q(F; \mathbb{Z})$ pour $q \neq \mu, \mu-1$.

Remarquons que, si N est vide, X est l'espace total d'un fibré de base contractile et on sait qu'on a alors $H_q(X; \mathbb{Z}) = H_q(F; \mathbb{Z})$ pour tout q .

Corollaire 1.15. - Dans les conditions de la propriété 1.13., si X est une μ -sphère homologique et Y une ν -sphère homologique, il est impossible de trouver une application C-stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, 0)$ dont les fibres soient F , une sphère homologique orientée de dimension strictement inférieure à $\mu-1$, et $F_0 = \{\text{pts}\}$.

Remarquons qu'il existe des applications C-stratifiées $f : (S^\mu, M) \rightarrow (S^\nu, 0)$ de fibres $(S^{\mu-1}, \{\text{pts}\})$. Par exemple, soit $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{Y}$ l'application de la sphère unité de \mathbb{R}^3 sur $[-1, +1]$ définie par $\tilde{f}(x_0, x_1, x_2) = x_0$. L'application f considérée est l'application $f : S^2 \rightarrow S^1$ obtenue à partir de \tilde{f} en identifiant les points -1 et $+1$ dans \tilde{Y} (mais sans identifier les pôles $(-1, 0, 0)$ et $(+1, 0, 0)$ dans S^2).

Signalons d'autre part que, dans certains cas d'applications C-stratifiées, applications $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (S^\nu, 0)$ ou $f : (P^n(\mathbb{R}), 0) \rightarrow (S^\nu, 0)$ par exemple, la propriété 1.13. permet de calculer l'homologie de la fibre régulière F .

Cas où F est une sphère d'homologie et F_0 un point.

Propriété 1.16. - Soient (X, M) un espace C-stratifié orientable de codimension μ , (Y, N) un espace C-stratifié de codimension ν et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C-stratifiée de fibres (F, F_0) . Si F_0 a le type d'homologie d'un point et F celui d'une sphère orientée (de dimension $\mu-\nu$), on suppose en outre que N et $Y-N$ sont connexes par arcs et que $H_p(Y-N) = 0$ pour $p \geq \alpha$, alors $H_{p+\mu}(X) \simeq H_p(M)$ par $p \geq \alpha - \nu + 1$.

Démonstration : La suite exacte de Gysin du fibré en sphères

$f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ s'écrit :

$$\dots \rightarrow H_p(Y-N) \rightarrow H_{p+(\mu-\nu)}(X-M) \rightarrow H_{p+(\mu-\nu)}(Y-N) \rightarrow H_{p-1}(Y-N) \rightarrow \dots$$

On déduit de cette suite exacte et de l'hypothèse faite sur $Y-N$, que $H_q(X-M) = 0$ pour $q \geq \alpha + \mu - \nu$. Le résultat est alors une conséquence de la suite exacte (2).

De la propriété 1.16. découlent des théorèmes de non existence :

Théorème 1.17. - Il est impossible de trouver une application C-stratifiée $f : (S^n, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres $F = S^{\mu-\nu}$ orientée et $F_0 = 0$, et telle que $H_p(Y-N) = 0$ pour tout $p \geq \nu-1$.

En effet, s'il existe une telle application, M et N sont réduits à un point, ce qui est en contradiction avec le théorème 1 de [22].

Remarquons que l'exemple 1.10. (ii) est un exemple d'application C-stratifiée $f : (S^n, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres $(S^{\mu-\nu}, 0)$ telle que $H_p(Y-N) = 0$ pour tout $p > \nu-1$.

Théorème 1.18. - Si X est une variété topologique de dimension n et telle que $H_n(X) = 0$, il est impossible de trouver une application C-stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres $F = S^{\mu-\nu}$ orientée et $F_0 = 0$, et telle que $H_p(Y-N) = 0$ pour tout $p \geq \nu-1$.

Dans le cas où Λ est un corps, on déduit de la suite exacte de Gysin du fibré en sphères $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ et de la suite exacte (2) :

Corollaire 1.19. - Dans les hypothèses de la propriété 1.16., et si Λ est un corps, il vient :

$$\begin{aligned} \dim H_p(X) &\leq \dim H_p(Y-N) + \dim H_{p-(\mu-\nu)}(Y-N) + \dim H_{p-\mu}(N) \\ \dim H_p(X) &\geq \dim H_p(Y-N) - \dim H_{p-(\mu-\nu)-1}(Y-N) - \dim H_{p-\mu-1}(N) \end{aligned}$$

Les propriétés 1.13. et 1.16. ont été énoncées pour des applications C-stratifiées particulières. La suite spectrale que l'on va construire sera, en quelque sorte, une généralisation de ces résultats aux applications C-stratifiées quelconques.

2) Le résultat principal (Résumé de la démonstration).

Pour tout espace Y , on notera $C(Y)$ le complexe des chaînes singulières normalisé de Y à coefficients dans Λ , $C_p(Y)$ le sous-groupe des chaînes de dimension p et $H_p(Y)$ le groupe d'homologie à coefficients dans Λ en dimension p .

Dans toute la suite, $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ désignera une application C-stratifiée de fibres (F, F_0) .

a) La première étape de la démonstration consiste à construire un complexe homotopiquement équivalent à $C(X)$ et dans lequel interviennent les complexes de chaînes singulières des diverses bases et fibres.

Soit (X, M) un espace C-stratifié orientable et de codimension μ ; l'isomorphisme de Thom $H_{n-\mu}(M) \rightarrow H_n(X, X-M)$ est induit par un morphisme de modules différentiels gradués $\delta : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X, X-M)$, où $C^{(-\mu)}_M$ désigne le complexe $C(M)$ gradué comme suit : $C^{(-\mu)}_n(M) = C_{n-\mu}(M)$.

Notons ρ un relèvement (morphisme de modules gradués) de la surjection p dans la suite exacte courte de modules différentiels gradués :

$$0 \rightarrow C(X-M) \rightarrow C(X) \xrightarrow{p} C(X, X-M) \rightarrow 0$$

et soit Ψ' le morphisme composé $(d\rho - \rho d) \circ \delta : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X-M)$. On peut former la somme tordue $C(X-M) \oplus_{\Psi'} C^{(-\mu)}(M)$, munie de la différentielle $d_{\Psi'}(a, b) = (da + \Psi'b, db)$, ([24]).

Proposition 2.1. - Les modules différentiels gradués $C(X)$ et $C(X-M) \otimes_{\psi'} C^{(-\mu)}(M)$ ont même type d'homotopie.

On utilise alors le résultat de Shih [24] :

Théorème 2.2. - Soit $f : E \rightarrow B$ un fibré localement trivial de base B connexe par arcs, de fibre F et de groupe structural G ; on peut lui associer une cochaîne fondamentale $\tilde{\tau} : C(B) \rightarrow C(G)$ de degré -1 et un produit tensoriel tordu $C(B) \otimes_{\tau} C(F)$, muni de la différentielle

$$d^{\tau}(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes dy + \tilde{\tau} \cap (x \otimes y),$$

tels qu'il existe une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes :

$$C(B) \otimes_{\tau} C(F) \xrightleftharpoons[f^{\tau}]{\nabla^{\tau}} C(E).$$

Ce résultat s'étend aux fibrés de Serre. Si $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ est une application C -stratifiée de fibres (F, F_0) , on a donc des équivalences d'homotopie

$$C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F) \xrightleftharpoons[f_1^{\tau_1}]{\nabla_1^{\tau_1}} C(X-M) \quad C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) \xrightleftharpoons[f_0^{\tau_0}]{\nabla_0^{\tau_0}} C(M)$$

Notons $[C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]^{(-\mu)}$ le complexe $C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)$ muni de la graduation :

$$[C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]_n^{(-\mu)} = \sum_{i+j=n-\mu} C_i(N) \otimes C_j(F_0)$$

Proposition 2.3. - Soient (X, M) un espace C -stratifié orientable et de codimension μ et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C -stratifiée de fibres (F, F_0) , posons $\Psi'' = f_1^{\tau_1} \circ \psi' \circ \nabla_0^{\tau_0}$; le complexe de chaînes $C(X)$

est homotopiquement équivalent au complexe :

$$(3) \quad \left[\underset{\tau_1}{C(Y-N)} \underset{\tau_1}{\otimes} \underset{\tau_1}{C(F)} \right] \underset{\Psi''}{\otimes} \left[\underset{\tau_0}{C(N)} \underset{\tau_0}{\otimes} \underset{\tau_0}{C(F_0)} \right]^{(-\mu)}$$

(Démonstration au paragraphe 7).

b) Les suites spectrales de Serre des fibrés $f|_{X-M}$ et $f|_M$ s'obtiennent en filtrant de manière convenable chacun des deux termes de la somme tordue (3). Malheureusement, le morphisme Ψ'' et la différentielle $d_{\Psi''}$ ne respectent pas, à notre connaissance, ces filtrations. Nous sommes conduits à construire un nouveau complexe pour lequel cette propriété sera vérifiée.

Pour tout espace Y muni d'une triangulation, $K(Y)$ désignera le complexe (normalisé) des chaînes simpliciales orientées défini par la triangulation de Y et $K_p(Y)$ le sous-ensemble des chaînes simpliciales de dimension p .

A l'aide des équivalences d'homotopie de complexes de chaînes $K(N) \rightarrow C(N)$ et $K(Y-\overset{\circ}{U}) \rightarrow C(Y-N)$, nous montrons (paragraphe 8) un analogue à la proposition 2.3. :

Proposition 2.4. - Soient (X, M) et (Y, N) deux espaces C -stratifiés et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C -stratifiée de fibres (F, F_0) . On suppose (X, M) orientable et de codimension μ et les espaces Y et N triangulables. Pour tout voisinage tubulaire U de N dans Y et pour toute triangulation de Y admettant N et $Y-\overset{\circ}{U}$ pour sous-complexes, il existe un cycle Ψ tel que le complexe de chaînes $C(X)$ soit homotopiquement équivalent au complexe :

$$(4) \quad \left[\underset{\tau_1}{K(Y-\overset{\circ}{U})} \underset{\tau_1}{\otimes} \underset{\tau_1}{C(F)} \right] \underset{\Psi}{\otimes} \left[\underset{\tau_0}{K(N)} \underset{\tau_0}{\otimes} \underset{\tau_0}{C(F_0)} \right]^{(-\mu)}.$$

Pour tout espace Y muni d'une triangulation, on note $Y^{(p)}$ la p -squelette de Y , ensemble des simplexes de dimension inférieure ou égale à p .

La suite spectrale associée à la filtration $F_p(K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)) = K(N^{(p)}) \otimes C(F_0)$ est isomorphe, à partir du terme E^2 , à la suite spectrale de Serre du fibré $f|_M : M \rightarrow N$. On note $E_{p,q}^r(M)$ son terme E^r de bidegré (p,q) et d_M^r sa différentielle.

De même, la suite spectrale associée à la filtration $F_p(K(Y \overset{\circ}{\cup} \overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F)) = K((Y \overset{\circ}{\cup} \overset{\circ}{U})^{(p)}) \otimes C(F)$ est isomorphe, à partir du terme E^2 , à la suite spectrale de Serre du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$. On note $E_{p,q}^r(X-M)$ son terme E^r de bidegré (p,q) et d_{X-M}^r sa différentielle.

c) Le résultat principal s'énonce comme suit :

Théorème 2.5. - Soient (X,M) et (Y,N) deux espaces C -stratifiés et $f : (X,M) \rightarrow (Y,N)$ une application C -stratifiée de fibres (F,F_0) . Supposons (X,M) orientable et de codimension μ et (Y,N) triangulable et de codimension ν . Pour tout entier $k \geq \nu-1$, il existe une filtration de (4) induisant une suite spectrale de termes $(k)E_{p,q}^r$ convergeant vers le gradué associé à une filtration convenable de $H_*(X)$. Pour tout $r \leq k - (\nu-1)$, le terme $(k)E_{p,q}^r$ entre dans la suite exacte courte (compatible avec les différentielles d^r) :

$$(5) \quad 0 \rightarrow E_{p,q}^r(X-M) \rightarrow (k)E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-k, q+k-\mu}^r(M) \rightarrow 0.$$

Posons $\alpha = k - (\nu-1)$; pour tout $r \leq \alpha$, la suite exacte (5) est scindée, en tant que suite exacte de modules différentiels gradués ; pour $r = \alpha$, la

différentielle d^α définie sur ${}_{(k)}E^\alpha = E^\alpha(X-M) \oplus E^\alpha(M)$ est donnée par

$$d^\alpha(x, y) = (d_{X-M}^\alpha(x) + \psi^\alpha(y), d_M^\alpha(y)) \quad \text{où}$$

$$\psi^\alpha : E_{p,q}^\alpha(M) \rightarrow E_{p+v-1, q+\mu-v}^\alpha(X-M) \quad \text{est induit par } \psi.$$

Remarque 2.6. - Le morphisme ψ^α est indépendant du relèvement ρ de p et, si $\alpha \geq 2$, du voisinage tubulaire U de N dans Y et de la triangulation de Y .

Remarque 2.7. - Pour $k \leq \mu$, la suite spectrale est du premier quadrant.

Corollaire 2.8. - La suite exacte d'homologie associée à la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow E^\alpha(X-M) \rightarrow {}_{(k)}E^\alpha \rightarrow E^\alpha(M) \rightarrow 0$$

s'écrit :

$$(6) \quad \dots \rightarrow E_{p,q}^{\alpha+1}(X-M) \rightarrow {}_{(k)}E_{p,q}^{\alpha+1} \rightarrow E_{p-k, q+k-\mu}^{\alpha+1}(M) \xrightarrow{\psi^{\alpha+1}} E_{p-\alpha, q+\alpha-1}(X-M) \rightarrow \dots$$

où $\psi^{\alpha+1}$ se déduit de ψ^α par passage à l'homologie des différentielles d_{X-M}^α et d_M^α .

Corollaire 2.9. - Pour $k = v$, c'est-à-dire $\alpha = 1$, la suite exacte (6) s'écrit :

$$(7) \quad \dots \rightarrow H_p(Y-N; H_q(F)) \rightarrow {}_{(v)}E_{p,q}^2 \rightarrow H_{p-v}(N; H_{q-(\mu-v)}(F_o)) \xrightarrow{\psi^2} H_{p-1}(Y-N; H_q(F)) \rightarrow \dots$$

Pour $k \geq v+1$, le terme E^2 est égal à :

$$(8) \quad E_{p,q}^2 = H_p(Y-N; H_q(F)) \oplus H_{p-k}(N; H_{q+k-\mu}(F_0)).$$

C'est, en tant que module différentiel gradué, une somme directe si $k > v+1$ et une somme tordue (par ψ^2) si $k = v+1$.

Proposition 2.10. - Dans le cas de la suite spectrale obtenue pour $k = v$, on peut construire une triangulation cellulaire (D) de Y telle que la filtration de $H_*(X)$ soit donnée par $F_p(H_*(X)) = H_*(f^{-1}(D^{(p)}))$ où $D^{(p)}$ désigne le p -squelette de (D) .

Démonstration au paragraphe 12 (d).

Remarque 2.11. - La suite spectrale est somme directe des suites spectrales de Serre des fibrés $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ et $f|_M : M \rightarrow N$ jusqu'à un certain rang α . Le choix de k détermine ce rang. Le morphisme ψ^α perturbant la somme directe est, brièvement parlant, induit par l'inverse d'un isomorphisme de Thom et un morphisme bord. Il exprime la manière dont sont "rattachés" les deux fibrés.

II - PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES.

3) Extensions de modules différentiels gradués.

Tous les modules et morphismes de modules considérés seront des Λ -modules et Λ -homomorphismes de modules.

On rappelle que, si (A, d_A) et (B, d_B) sont deux modules différentiels gradués (en abrégé MDG), l'espace $\text{Hom}(A, B)$ peut être muni d'une structure de MDG comme suit :

$$\text{Hom}^{-r}(A, B) = \text{Hom}_r(A, B) = \prod_i \text{Hom}(A_i, B_{i+r})$$

$$(df)(a) = d_B f(a) - (-1)^{\deg f} f(d_A a) .$$

Deux morphismes f et g de $\text{Hom}_r(A, B)$ sont dits homotopes par une homotopie ϕ (et on écrit $\phi : f \simeq g$) s'il existe $\phi \in \text{Hom}_{r+1}(A, B)$ tel que :

$$g - f = d\phi = d_B \phi + (-1)^r \phi d_A$$

Deux morphismes homotopes induisent le même homomorphisme en homologie.

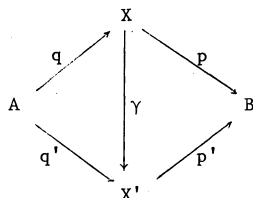
Si l'on se donne deux MDG, (A, d_A) et (B, d_B) , une extension de MDG sur B , de noyau A , est une suite exacte de MDG :

$$(E) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{q} X \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

L'extension (E) est dite équivalente à l'extension

$$(E') \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{q'} X' \xrightarrow{p'} B \longrightarrow 0$$

s'il existe un morphisme de MDG, γ , tel que le diagramme :



soit commutatif. γ est alors un isomorphisme.

On dit que l'extension (E) est triviale si elle est équivalente à l'extension :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

Notons $\text{Ext}_D^1(B, A)$ l'ensemble des classes d'extensions de MDG :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

et $\text{Ext}^1(B, A)$ l'ensemble des classes d'extensions de modules gradués B, A .

Ces ensembles sont fonctoriels en A et en B et on a un morphisme canonique

$$g : \text{Ext}_D^1(B, A) \longrightarrow \text{Ext}^1(B, A).$$

Désignons par $H_{-1}(\text{Hom}(B, A))$ le module d'homologie de dimension -1 du MDG $\text{Hom}(B, A)$, on a :

Proposition 3.1. - ([24], Proposition 1). La suite :

$$0 \longrightarrow H_{-1}(\text{Hom}(B, A)) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_D^1(B, A) \longrightarrow \text{Ext}^1(B, A)$$

est exacte, où ∂ est défini comme suit :

Pour tout cycle ψ de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$, on note $A \underset{\psi}{\otimes} B$ et on appelle somme tordue de A et B par ψ , le MDG défini par.:

$$(A \underset{\Psi}{\otimes} B)_n = A_n \otimes B_n$$

$$d_{\Psi}(a, b) = (d_A a + \Psi b, d_B b)$$

(Remarquons que d_{Ψ} est une différentielle si et seulement si Ψ est un cycle de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$). L'injection et la projection canoniques induisent une suite exacte de MDG :

$$(E_{\Psi}) \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow A \underset{\Psi}{\otimes} B \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

d'où un élément bien déterminé de $\text{Ext}_D^1(B, A)$.

Corollaire 3.2. - Si B est projectif, ∂ est un isomorphisme.

L'inverse de ∂ peut s'explicitier comme suit : Etant donnée une extension de MDG :

$$(E) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

dans laquelle B est projectif, on note $\rho : B \rightarrow X$ un morphisme de modules gradués tel que $p \circ \rho = 1$ (identité sur B) ; alors le morphisme

$\Psi = d_X \rho - \rho d_B$ est un cycle de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$ et les extensions (E) et (E_{Ψ}) sont équivalentes. On en déduit l'inverse de ∂ , lorsque B est projectif.

L'extension de MDG

$$(E_{\Psi}) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{l} A \underset{\Psi}{\otimes} B \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

donne lieu à une suite exacte d'homologie :

$$(9) \quad \dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{l_n} H_n(A \underset{\Psi}{\otimes} B) \xrightarrow{\pi_n} H_n(B) \xrightarrow{\Psi_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

où Ψ_n est l'homomorphisme déduit de Ψ par passage à l'homologie des différentielles d_A et d_B .

Proposition 3.3.- ([13], p. 73).- Soit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 (E_\Psi) & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow B \longrightarrow 0 \\
 & & & \alpha \downarrow & & \Psi & \downarrow \beta \\
 (E_{\Psi'}) & 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A' \oplus B' & \longrightarrow B' \longrightarrow 0 \\
 & & & & & \Psi' &
 \end{array}$$

où les flèches sont des morphismes de MDG. Pour qu'il existe un morphisme de MDG, $\xi : A \oplus B \longrightarrow A' \oplus B'$ rendant commutatif ce diagramme, il faut et il suffit qu'il existe une homotopie :

$$\Phi : \Psi' \circ \beta \sim \alpha \circ \Psi.$$

Proposition 3.4.- Soit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \xrightarrow{p} & B \longrightarrow 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow \beta \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{p'} & B' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où les flèches sont des morphismes de MDG et les lignes horizontales sont exactes. Supposons que B et B' soient des modules projectifs et qu'il existe un morphisme $\beta' \in \text{Hom}_O(B', B)$ tel que $\beta' \circ \beta = 1$ (identité) et $\beta \circ \beta' = 1 + h'$. Si Ψ est un cycle de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$ induit par un relèvement ρ de p , et si $\bar{\rho}$ est un relèvement de p' , le morphisme $\rho' = \gamma\rho\beta' - \bar{\rho}h'$ est encore un relèvement de p' et le cycle $\Psi' = d_{X, \rho'} - \rho'd_B$, satisfait à $\alpha\Psi = \Psi'\beta$.

Si $\beta' \circ \beta$ est homotope à l'identité, on obtient le résultat suivant, qui est aussi une conséquence de la proposition 2 bis de [24] :

Corollaire 3.5.- Soit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \xrightarrow{P} & B \longrightarrow 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \gamma \downarrow & & \beta \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & B' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où les flèches sont des morphismes de MDG et les lignes horizontales sont exactes. Supposons que B soit un module projectif et qu'il existe un morphisme de MDG $\beta' : B' \rightarrow B$ satisfaisant à :

$$\beta \circ \beta' = 1 \quad \beta' \circ \beta = 1 + d_B k + k d_B$$

avec $k \in \text{Hom}_{+1}(B, B)$. Alors, pour tout cycle Ψ de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$ induit par un relèvement de p , on a :

- i) $\Psi' = \alpha \Psi \beta'$ est un cycle de $\text{Hom}_{-1}(B', A')$
- ii) le morphisme $\Phi' = -\alpha \Psi k$ réalise une homotopie

$$\Phi' : \Psi' \beta \simeq \alpha \Psi.$$

La proposition 3.3 permet de montrer :

Proposition 3.6. - Etant donnée la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & B' & & \\
 & & & & \beta' \downarrow & & \\
 (E_{\Psi}) \quad 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \downarrow \Psi & & \beta \downarrow \\
 & & A' & & & & B'
 \end{array}$$

où les flèches sont des morphismes de MDG, posons $\Psi' = \alpha \Psi \beta'$ et $\beta' \beta = 1 + h$.

Pour qu'il existe un morphisme de MDG, θ , rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \downarrow \Psi & & \beta \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A' \oplus B' & \longrightarrow & B' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \theta & & \\
 & & & & A' \oplus B' & &
 \end{array}$$

il faut et il suffit que $\alpha\psi h$ soit homotope à zéro dans $\text{Hom}_{-1}(B, A')$.

Corollaire 3.7.- ([24], Proposition 2 bis).- Dans les hypothèses de la proposition 3.6., si on a une homotopie $k : \beta' \circ \beta \approx 1$, le morphisme θ existe et est donné par $\theta(a, b) = (\alpha(a) + \alpha\psi k(b), \beta(b))$.

De la même façon, on a :

Proposition 3.8.- Etant donnée la situation suivante :

$$(E_\psi) \quad \begin{array}{ccccccc} & & A' & & & & \\ & & \uparrow \alpha & & & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \alpha' & & \uparrow \psi & & \uparrow \beta' \\ & & A' & & & & B' \end{array}$$

où les flèches sont des morphismes de MDG, posons $\psi' = \alpha\psi\beta'$ et $\alpha'\alpha = 1 + h'$.

Pour qu'il existe un morphisme de MDG, θ' , rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \alpha' & & \uparrow \psi & & \uparrow \beta' \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A' \oplus B' & \longrightarrow & B' \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow \psi' & & \end{array}$$

il faut et il suffit que $h'\psi\beta'$ soit homotope à zéro dans $\text{Hom}_{-1}(B', A)$.

Corollaire 3.9.- ([24], Proposition 2). Dans les hypothèses de la proposition 3.8, si on a une homotopie $k' : \alpha' \circ \alpha \approx 1$, le morphisme θ' existe et est donné par $\theta'(a', b') = (\alpha'(a') + k'\psi\beta'(b'), \beta'(b'))$.

Corollaire 3.10.- ([24], Proposition 3). Dans les hypothèses des corollaires 3.7 et 3.9 le morphisme $\theta' \circ \theta$ est homotope à l'identité de

$A \oplus B$ au moyen de $k'' : A \oplus B \rightarrow A \oplus B$ défini par :

$$k''(a, b) = (k'(a) + k'\psi k(b), k(b)).$$

Suite spectrale associée à une somme tordue.

De même que pour le "mapping cylinder" ([11], exposé 3), on construit la suite spectrale d'une somme tordue de la façon suivante :

Nous entendrons par MDG filtré la donnée d'un module différentiel gradué (A, d_A) et, pour tout entier p , d'un sous-module $F_p A$ de A satisfaisant à :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \bigcup_p F_p A = A, \quad F_p A \subset F_{p+1} A, \quad F_p A = 0 \text{ si } p < 0, \\ \text{(ii)} \quad d_A(F_p A) \subset F_p A, \\ \text{(iii)} \quad F_p A = \bigoplus_n F_p A \cap A_n, \\ \text{(iv)} \quad \text{Pour tout } n, \text{ il existe } u(n) \text{ tel que } F_p(A_n) = A_n \\ \quad \quad \text{si } p \geq u(n). \end{array} \right.$$

Il existe alors une suite spectrale dont on note $E^r(A) = \bigoplus_{p,q} E_{p,q}^r(A)$ les modules bigradués et d_A^r les différentielles. $E^\infty(A)$ est le module bigradué associé au module gradué $H(A)$, filtré de la manière suivante : $F_p(H_n(A))$ est l'image dans $H_n(A)$ des cycles de $F_p(A_n)$.

Soient (B, d_B) un second MDG filtré et ψ un cycle de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$; on suppose qu'il existe un entier positif α , tel que :

$$(11) \quad \psi(F_p B) \subset F_{p-\alpha}(A)$$

ψ induit alors, pour $r \geq \alpha$, un homomorphisme

$$\psi^r : E_{p,q}^r(B) \rightarrow E_{p-\alpha, q+\alpha-1}^r(A)$$

et ψ^{r+1} se déduit de ψ^r par passage à l'homologie des différentielles d_A^r et d_B^r .

Définissons sur $A \otimes_\psi B$ la filtration croissante :

$$(12) \quad F_p(A \underset{\Psi}{\otimes} B) = F_p A \underset{\Psi}{\otimes} F_p B.$$

Lemme 3.11. - Si $\Psi(F_p B) \subset F_{p-\alpha} A$ avec $\alpha \geq 0$ et si les filtrations de A et B satisfont aux relations (10), la filtration (12) de $A \underset{\Psi}{\otimes} B$ satisfait également aux relations (10).

On en déduit une suite spectrale dont on note $E_{p,q}^r$ les modules gradués et d^r les différentielles. En tant que module gradué, le terme $E_{p,q}^0$ se décompose en somme directe :

$$E_{p,q}^0 = E_{p,q}^0(A) \underset{\Psi}{\otimes} E_{p,q}^0(B).$$

Si $\alpha > 0$ (dans (11)), la différentielle d_Ψ définie sur $A \otimes B$ induit sur E^0 l'opérateur $d^0 = (d_A^0, d_B^0)$. En tant que MDG, le terme E^1 entre dans l'extension :

$$(13) \quad 0 \longrightarrow E^1(A) \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^1(B) \longrightarrow 0$$

Supposons $\alpha = 1$ (dans (11)), et soit $z = (z', z'')$ un élément de $E_{p,q}^1$, un calcul classique montre que :

$$d^1(z) = (d_A^1(z') + \Psi^1(z''), d_B^1(z''))$$

et on a l'identification : $E_{p,q}^1 = E_{p,q}^1(A) \underset{\Psi^1}{\otimes} E_{p,q}^1(B)$.

La suite exacte d'homologie (9) associée à l'extension (13) s'écrit :

$$\dots \longrightarrow E_{p+1,q}^2(A) \longrightarrow E_{p+1,q}^2 \longrightarrow E_{p+1,q}^2(B) \xrightarrow{\Psi^2} E_{p,q}^2(A) \longrightarrow \dots$$

où Ψ^2 est l'homomorphisme induit par Ψ , déduit de Ψ^1 par passage à l'homologie des différentielles d_A^1 et d_B^1 .

Si $\alpha > 1$, l'extension (13) est triviale, le terme E^2 entre dans l'extension :

$$0 \longrightarrow E^2(A) \longrightarrow E^2 \longrightarrow E^2(B) \longrightarrow 0.$$

Par le même raisonnement, cette extension est non triviale si $\alpha = 2$ et triviale si $\alpha > 2$.

De façon générale, on a :

Proposition 3.12. - Soient A et B deux modules différentiels gradués filtrés, la donnée d'un cycle Ψ de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$ satisfaisant à (11) implique l'existence d'une suite spectrale associée à la filtration (12) du MDG $A \underset{\Psi}{\otimes} B$ et convergeant vers $H_{\Psi}^*(A \underset{\Psi}{\otimes} B)$ convenablement filtré. Pour $r \leq \alpha$, ses termes E^r entrent dans l'extension de MDG :

$$0 \longrightarrow E^r(A) \longrightarrow E^r \longrightarrow E^r(B) \longrightarrow 0$$

triviale pour $r < \alpha$, non triviale pour $r = \alpha$.

Autrement dit, sur $E_{p,q}^r = E_{p,q}^r(A) \underset{\Psi}{\otimes} E_{p,q}^r(B)$, la différentielle est :

$$d^r = (d_A^r, d_B^r) \text{ pour } r < \alpha$$

et
$$d^\alpha = (d_A^\alpha + \Psi^\alpha, d_B^\alpha)$$

où Ψ^α est induit par Ψ . La suite exacte d'homologie associée à l'extension :

$$0 \longrightarrow E^\alpha(A) \longrightarrow E^\alpha \longrightarrow E^\alpha(B) \longrightarrow 0$$

s'écrit :

$$\dots \longrightarrow E_{p,q}^{\alpha+1}(A) \longrightarrow E_{p,q}^{\alpha+1} \xrightarrow{\Psi^{\alpha+1}} E_{p,q}^{\alpha+1}(B) \longrightarrow E_{p-\alpha, q+\alpha-1}^{\alpha+1}(A) \longrightarrow \dots$$

où $\Psi^{\alpha+1}$ se déduit de Ψ^α par passage à l'homologie des différentielles d_A^α et $d_{B_1}^\alpha$.

4) Le théorème de Shih pour les complexes simpliciaux.

On appelle classiquement DGA-algèbre (resp. DGA-coalgèbre) un MDG avec produit (resp. co-produit) et augmentation ([11] exposé 2 et [19]).

On considère les données suivantes :

K et K' sont des DGA-coalgèbres, avec coproduit noté Δ ,
 $\bar{\alpha} : K \rightarrow K'$ est un morphisme de DGA-coalgèbres.

G est une DGA-algèbre avec produit ψ .

L est un MDG sur lequel opère G par le morphisme de MDG :

$$\bar{\sigma} : G \times L \longrightarrow L.$$

Si $\tilde{\tau}$ est un élément de $\text{Hom}_{-1}(K, G)$, on définit :

$$(14) \quad \tilde{\tau} \cap (k \otimes \ell) = (1 \otimes \bar{\sigma}) \circ (1 \otimes \tilde{\tau} \otimes 1) \circ (\Delta \otimes 1) (k \otimes \ell)$$

pour $k \in K$ et $\ell \in L$.

Supposons $K_i = G_i = 0$ pour $i < 0$ et définissons $\tilde{\tau}_i \cup \tilde{\tau}_j$ par :

$$(\tilde{\tau}_i \cup \tilde{\tau}_j) (k) = \psi \circ (\tilde{\tau}_i \otimes \tilde{\tau}_j) \circ \Delta(k)$$

On dit que $\tilde{\tau}$ est une cochaîne tordante si on a :

$$(15) \quad d \tilde{\tau}_n + \tilde{\tau}_{n-1} d + \sum_{i=1}^n \tilde{\tau}_i \cup \tilde{\tau}_{n-i} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dans ce cas, l'homomorphisme $d^T : K \otimes L \longrightarrow K \otimes L$ tel que

$$d^T(k \otimes \ell) = d(k \otimes \ell) + \tilde{\tau} \cap (k \otimes \ell) = dk \otimes \ell + (-1)^{\deg k} k \otimes d\ell + \tilde{\tau} \cap (k \otimes \ell)$$

est une différentielle. On note $K \otimes^T L$, et on appelle produit tensoriel tordu,
le produit tensoriel $K \otimes L$ muni de la différentielle d^T .

Soit alors $\tilde{\tau}'$ un élément de $\text{Hom}_{-1}(K', G)$ satisfaisant à $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}' \circ \bar{\alpha}$, il vient d'après [19] :

$$(16) \quad (\bar{\alpha} \otimes 1) [\tilde{\tau}' \cap (k \otimes \ell)] = \tilde{\tau}' \cap (\bar{\alpha} \otimes 1) (k \otimes \ell)$$

Lemme 4.1.- Si $\tilde{\tau}'$ est une cochaîne tordante, $\tilde{\tau}$ est une cochaîne tordante.

Lemme 4.2.- Si K et K' sont des modules libres, si $H_0(G) = \Lambda$ et si $\bar{\alpha}$ est une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes, $\bar{\alpha} \otimes 1$ est une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre $K \otimes L$ et $K' \otimes L$.

τ τ'

Démonstration.- Semblable à celle du lemme 3.3. de [19].

On suppose que L est un sous-MDG de L' et qu'il existe une rétraction par déformation r de L' sur L réalisant avec l'injection $i : L \rightarrow L'$ une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes. L'action $\bar{\sigma}$ de G sur L s'étend à L' par $\bar{\sigma}(g, \ell') = \bar{\sigma}(g, r(\ell'))$ et le produit tensoriel tordu $K \otimes L$ est bien défini.

τ

Lemme 4.3.- Si K est libre, l'injection $i \otimes 1$ et la rétraction $1 \otimes r$ réalisent une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre les complexes $K \otimes L$ et $K \otimes L'$.

τ

τ

Démonstration.- Voir ([19], lemme 3.3.).

Dans la suite du paragraphe, les ensembles simpliciaux seront notés \underline{B} , \underline{F} , ... ; $C(\underline{B})$ désignera le module Λ -libre ayant pour base l'ensemble simplicial \underline{B} , enfin on notera $\underline{F} \times_{\tau} \underline{B}$ le produit cartésien tordu de \underline{F} et \underline{B} à l'aide d'une fonction tordante $\tau : \underline{B} \rightarrow \underline{G}$ prenant ses valeurs dans un groupe simplicial, sous-monoïde du monoïde simplicial $\text{Hom}(\underline{E}, \underline{F})$ ([12], exposés 1 et 3).

Théorème 4.4. - (Shih [24]). - A tout produit cartésien tordu $\underline{F} \times_{\tau} \underline{B}$, on peut associer une cochaîne tordante de degré -1 , $\nabla^{\tau} : C(\underline{B}) \rightarrow C(\underline{G})$ appelée cochaîne fondamentale. Il existe une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre les complexes $C(\underline{F} \times_{\tau} \underline{B})$ et $C(\underline{B}) \otimes_{\tau} C(\underline{F})$.

La démonstration de Shih consiste à construire explicitement des morphismes de MDG

$$\nabla^{\tau} : C(\underline{B}) \otimes_{\tau} C(\underline{F}) \longrightarrow C(\underline{F} \times_{\tau} \underline{B})$$

$$f^{\tau} : C(\underline{F} \times_{\tau} \underline{B}) \longrightarrow C(\underline{B}) \otimes_{\tau} C(\underline{F})$$

tels que $f^{\tau} \circ \nabla^{\tau} = 1$ et $\nabla^{\tau} \circ f^{\tau} = 1 + d \phi^{\tau} + \phi^{\tau} d$ (où ϕ^{τ} est un endomorphisme de $C(\underline{F} \times_{\tau} \underline{B})$).

Cas d'un fibré de Serre :

Pour tout espace X , on notera (en principe, sans ambiguïté) \underline{X} l'ensemble simplicial des simplexes singuliers de X . On a, par définition $C(X) = C(\underline{X})$. Si $f : E \rightarrow B$ est un fibré de Serre, de fibre F , $f : E \rightarrow B$ est une fibration de Kan (appelée fibré de Kan dans [12]), de fibre \underline{F} . On peut lui faire correspondre une fibration minimale $f' : E' \rightarrow B$ qui en est un rétracte par déformation ([4], III théorème 4.1). La fibre \underline{F}' de $f' : E' \rightarrow B$ est un complexe minimal de \underline{F} , rétracte par déformation de \underline{F} .

Si B est connexe, il en est de même de \underline{B} et dans ce cas, $f' : E' \rightarrow B$ est un fibré de Kan ([4], IV proposition 2.2) isomorphe à un produit cartésien tordu $\underline{F}' \times_{\tau} \underline{B}$ ([4], [12]). On appellera encore cochaîne fondamentale associée au fibré $f : E \rightarrow B$ la cochaîne fondamentale associée à la fonction tordante τ . Comme \underline{E}' est un rétracte par déformation de \underline{E} , il vient d'après le théorème de Shih et le lemme 4.3 (appliqué à $L' = C(\underline{F}) = C(F)$ et $L = C(\underline{F}')$) :

Proposition 4.5. - Soit $f : E \rightarrow B$ un fibré de Serre de base B connexe et de fibre F , on peut lui associer une cochaîne fondamentale $\tilde{\tau}$ et un produit tensoriel tordu $C(B) \otimes_{\tau} C(F)$ tels qu'on ait une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre les complexes $C(E)$ et $C(B) \otimes_{\tau} C(F)$.

Par abus de notation, on notera encore ∇^{τ} et f^{τ} les morphismes $\nabla^{\tau} : C(B) \otimes_{\tau} C(F) \rightarrow C(E)$ et $f^{\tau} : C(E) \rightarrow C(B) \otimes_{\tau} C(F)$ réalisant cette équivalence d'homotopie.

Sous-fibrés. - Soit $f : E \rightarrow B$ un fibré localement trivial de fibre F et de groupe structural G et F' un sous-espace de F stable par l'action de G , on peut construire un fibré localement trivial $f' : E' \rightarrow B$ de fibre F' , sous-fibré de $f : E \rightarrow B$. Les fibrés simpliciaux correspondant à $f : E \rightarrow B$ et $f' : E' \rightarrow B$ sont associés au même fibré principal, on peut leur attribuer même fonction tordante τ et même cochaîne tordante $\tilde{\tau}$. Le complexe $C(B) \otimes_{\tau} C(F')$ est un sous-complexe de $C(B) \otimes_{\tau} C(F)$.

En notant par des crochets les classes d'équivalence dans les quotients $C(F, F') = C(F)/C(F')$ et $C(B) \otimes_{\tau} C(F)/C(B) \otimes_{\tau} C(F')$, on a :

Proposition 4.6. - Le complexe quotient $C(B) \otimes_{\tau} C(F)/C(B) \otimes_{\tau} C(F')$ est isomorphe à $C(B) \otimes_{\tau} C(F, F')$, muni de la différentielle :

$$\begin{aligned} d^{\tau}(b \otimes [c]) &= d(b \otimes [c]) + [\tilde{\tau} \cap (b \otimes c)] \\ &= d(b \otimes [c]) + \tilde{\tau} \cap (b \otimes [c]) \end{aligned}$$

où $c \in C(F)$ et $b \in C(B)$.

Démonstration. - Ceci vient de ce que \underline{F}' , sous-ensemble simplicial de \underline{F} , est stable par les opérateurs de dégénérescence, que \underline{F}' est stable par l'action de \underline{G} et enfin de la définition de $\tilde{\tau} \cap$.

Le théorème de Shih pour les complexes simpliciaux.

Pour tout espace topologique B muni d'une triangulation, on désigne par $B^{(p)}$ le p -squelette de B , ensemble des simplexes de dimension inférieure ou égale à p et $\bar{\alpha}$ l'injection canonique $\bar{\alpha} : K(B) \rightarrow C(B)$. On se propose de montrer le résultat suivant :

Proposition 4.7.- Soit B un espace topologique muni d'une triangulation (K) et base d'un fibré $f : E \rightarrow B$ de fibre F . On peut munir le produit tensoriel $K(B) \otimes C(F)$ d'une différentielle, encore notée d^τ , telle que, si $K(B) \otimes C(F)$ désigne le complexe ainsi obtenu, l'injection $\alpha = \bar{\alpha} \otimes 1 : K(B) \otimes C(F) \rightarrow C(B) \otimes C(F)$ soit un morphisme de MDG. Celui-ci est une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes respectant les filtrations suivantes :

$$\begin{aligned} F_p [K(B) \otimes C(F)] &= K(B^{(p)}) \otimes C(F) \\ F_p [C(B) \otimes C(F)] &= C(B^{(p)}) \otimes C(F) . \end{aligned}$$

On notera $\beta : C(B) \otimes C(F) \rightarrow K(B) \otimes C(F)$ un morphisme réalisant avec α cette équivalence d'homotopie.

Démonstration.- L'injection canonique $\bar{\alpha} : K(B) \rightarrow C(B)$ ([10], exposé 9 ou [15]) est une équivalence d'homotopie et respecte les filtrations suivantes :

$$(17) \quad F_p [K(B)] = K(B^{(p)}) \quad F_p [C(B)] = C(B^{(p)}) .$$

Si $\tilde{\tau}$ est une cochaîne fondamentale associée au fibré $f : E \rightarrow B$, $\tilde{\tau} \circ \bar{\alpha}$ est une cochaîne tordante (lemme 4.1.). On note $K(B) \otimes C(F)$ le produit tensoriel $K(B) \otimes C(F)$ muni de la différentielle $d^\tau(k \otimes f) = d(k \otimes f) + (\tilde{\tau} \circ \bar{\alpha}) \wedge (k \otimes f)$ et gradué comme suit :

$$(K(B) \otimes_{\tau} C(F))_n = \sum_{i+j=n} K_i(B) \otimes_{\tau} C_j(F) .$$

Le morphisme $\alpha = (\bar{\alpha} \otimes 1) : K(B) \otimes_{\tau} C(F) \rightarrow C(B) \otimes_{\tau} C(F)$ est, d'après le lemme 4.2., une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

En considérant la restriction du fibré E au p -squelette de B , on définit, par restriction, des cochaînes tordantes sur $C(B^{(p)}) \otimes_{\tau} C(F)$ et $K(B^{(p)}) \otimes_{\tau} C(F)$ et un morphisme :

$$\alpha_p : K(B^{(p)}) \otimes_{\tau} C(F) \rightarrow C(B^{(p)}) \otimes_{\tau} C(F)$$

induisant un isomorphisme en homologie. Comme les filtrations (17) sont finies, la proposition résulte du lemme suivant :

Lemme 4.8. - Soient K^p, L^p , ($p = 0, 1, \dots, n$) des complexes de chaînes composés de groupes abéliens libres, $\alpha_p : K^p \rightarrow L^p$ des morphismes induisant des isomorphismes en homologie et $i_p : K^p \rightarrow K^{p+1}$, $j_p : L^p \rightarrow L^{p+1}$ des injections telles que :

$$j_p \circ \alpha_p = \alpha_{p+1} \circ i_p \quad p = 0, 1, \dots, n-1$$

on peut alors construire des morphismes β_p réalisant avec les morphismes α_p une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes et tels que :

$$i_p \circ \beta_p = \beta_{p+1} \circ j_p \quad p = 0, 1, \dots, n-1 .$$

Démonstration. - Elle consiste à montrer que, dans la démonstration classique (par exemple [17], p. 154), tous les morphismes construits commutent avec les injections.

Corollaire 4.9. - Soit B un espace topologique muni d'une triangulation et base d'un fibré $f : E \rightarrow B$ de fibre F . Notons $E^p = f^{-1}(B^{(p)})$ la restriction du fibré au p -squelette de B . Les morphismes $\bar{\nabla}^p = \nabla^p \circ \alpha$ et

$\gamma^\tau = \beta \circ f^\tau$ réalisent une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes :

$$(18) \quad K(B) \otimes C(F) \xrightleftharpoons[\gamma^\tau]{\gamma^\tau} C(E)$$

et respectent les filtrations suivantes :

$$\begin{aligned} F_p [K(B) \otimes C(F)] &= K(B^{(p)}) \otimes C(F) \\ F_p [C(E)] &= C(E^p) . \end{aligned}$$

5) Réalisation de l'isomorphisme de Thom au niveau des complexes de chaînes singulières.

Dans ce paragraphe, nous explicitons, en suivant [2], une réalisation de l'isomorphisme de Thom au niveau des complexes de chaînes singulières. Par la suite, nous nous servirons de cette réalisation explicite, pour montrer que la différentielle de la suite spectrale respecte la filtration.

a) Rappels sur l'isomorphisme de Thom.

Soit $\lambda : T \rightarrow M$ un fibré localement trivial de base M et de fibre D . On suppose que D est un espace à point base $\{0\}$ tel que :

- (i) l'homologie réduite $\tilde{H}_*(D)$ est nulle en tous degrés.
- (ii) $H_q(D, D - \{0\}) = \begin{cases} 0 & q \neq \mu \\ \Lambda & q = \mu . \end{cases}$

M s'identifie à une section de T . Notons λ^0 la restriction de λ à $T-M$. Le faisceau de Leray de λ modulo λ^0 , engendré par le préfaisceau : $\Omega \rightarrow H^*(\lambda^{-1}(\Omega), \lambda^{-1}(\Omega) \cap T-M)$ (Ω ouvert de M), est appelé faisceau d'orientation du fibré λ et noté $H^*(\lambda, \lambda^0; \Lambda)$ [7]. C'est un faisceau localement constant de fibre :

$$H^q(D, D - \{0\}) = \begin{cases} 0 & q \neq \mu \\ \Lambda & q = \mu . \end{cases}$$

On dit que le fibré $\lambda : T \rightarrow M$ est Λ -orientable si son faisceau d'orientation est constant. (Si M et T sont des variétés, les faisceaux d'orientation de M et T coïncident sur M). Une orientation du fibré est une section u de $H^\mu(\lambda, \lambda^0; \Lambda)$ au-dessus de M telle que, pour tout x de M , $u(x) = u_x$ soit un générateur de la fibre en x . Si on se donne une orientation u , on dit que le fibré $\lambda : T \rightarrow M$ est Λ -orienté. La section u définit alors un élément de $H^\mu(T, T - M)$, encore noté u , et appelé classe fondamentale du fibré. L'application :

$$(19) \quad t_* = \lambda_* (u \cap .) : H_p(T, T - M) \rightarrow H_{p-\mu}(M)$$

est un isomorphisme, appelé isomorphisme de Thom.

b) Description du cap-produit par u .

Par exception, les complexes de chaînes singulières considérés en (b) et (c) seront les complexes non normalisés.

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un atlas de M composé d'ouverts de trivialisations du fibré $\lambda : T \rightarrow M$; on désigne par $E = \{\lambda^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ et par $C^E(T)$ le complexe des chaînes singulières, de T , petites d'ordre E ([10], exposé 8). On note \bar{u} un μ -cocycle représentant la classe fondamentale du fibré.

L'application $\pi : C_q^E(T, T - M) \rightarrow C_{q-\mu}^E(T)$ définie par $\pi(y) = \bar{u} \cap y$ est surjective et induit un isomorphisme en homologie [2].

Comme on opère sur des chaînes petites d'ordre E , nous pouvons expliciter π en en donnant une description pour un fibré trivial :

Puisque $H_*(D, D - \{0\})$ est Λ -libre de base finie, le cup-produit externe donne lieu à un isomorphisme $H^0(M) \otimes \bigwedge H^\mu(D, D - \{0\}) \cong H^\mu(T, T - M)$. La classe u s'écrit $z \cup v$ avec $z \in H^0(M)$ et v générateur de $H^\mu(D, D - \{0\})$. Désignons par \bar{z} et \bar{v} des cocycles représentant les classes z et v , l'application π s'écrit alors :

$$(20) \quad (\bar{z} \otimes \bar{v}) \cap : C_P(M) \otimes_{\Lambda} C_Q(D, D - \{0\}) \rightarrow C_P(M) \otimes_{\Lambda} C_{Q-\mu}(D)$$

c) Réalisation de l'isomorphisme de Thom [2]

La projection du fibré Λ -orientable $\lambda : T \rightarrow M$ admet pour relèvement la section canonique λ' du fibré. Elle induit un morphisme surjectif $\lambda : C(T) \rightarrow C(M)$ donnant lieu à un isomorphisme en homologie. L'isomorphisme inverse est induit par l'injection canonique $\lambda' : C(M) \rightarrow C(T)$.

Soit γ l'injection canonique $C^E(T) \rightarrow C(T)$ et γ' la surjection $C(T) \rightarrow C^E(T)$ induite par l'opérateur de subdivision barycentrique ([10] exposé 8, ou [17] chap. VII). γ' réalise avec γ une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

La composition des morphismes de MDG :

$$C_Q(T, T-M) \xrightarrow{\gamma'} C_Q^E(T, T-M) \xrightarrow{\pi} C_{Q-\mu}^E(T) \xrightarrow{\gamma} C_{Q-\mu}(T) \xrightarrow{\lambda} C_{Q-\mu}(M)$$

notée t , induit en homologie l'isomorphisme de Thom t_* .

Soit M^P une filtration finie de l'espace M ; on note $T^P = \lambda^{-1}(M^P)$. Les morphismes γ et γ' respectent les filtrations en $C(T^P)$ et $C(T^P, T^P - M^P)$. Il en est de même de π (voir (20)). On peut construire un morphisme π' réalisant avec π une équivalence d'homotopie et respectant aussi ces filtrations (lemme 4.8.).

Le morphisme composé :

$$(21) \quad t' : C^{(-\mu)}(M) \longrightarrow C(T, T - M)$$

défini par $t' = \gamma \circ \pi' \circ \gamma' \circ \lambda'$ induit en homologie l'inverse de t_* .

En notant

$$(22) \quad s = \gamma \circ \pi \circ \gamma' \quad \text{et} \quad s' = \gamma \circ \pi' \circ \gamma'$$

on en déduit :

Proposition 5.1.- Supposons le fibré $\lambda : T \rightarrow M$, Λ -orienté et soit M^P une filtration finie de l'espace M ; on peut réaliser l'isomorphisme de Thom par le morphisme composé :

$$C(T, T - M) \xrightarrow{s} C^{(-\mu)}(T) \xrightarrow{\lambda} C^{(-\mu)}(M)$$

et son inverse par :

$$C^{(-\mu)}(M) \xrightarrow{\lambda'} C^{(-\mu)}(T) \xrightarrow{s'} C(T, T-M)$$

de manière à ce que chacun des morphismes respecte les filtrations en M^P et $T^P = \lambda^{-1}(M^P)$.

Remarque 5.2.- Par la suite, nous noterons de la même manière les morphismes de MDG définis au niveau des complexes de chaînes normalisés et déduits des précédents au moyen de l'équivalence d'homotopie entre complexes de chaînes normalisé et non normalisé ([16]; théorème 4.1.). La proposition 5.1. est encore vraie pour les complexes de chaînes normalisés.

III - DEMONSTRATION DU RESULTAT PRINCIPAL.

Nous démontrons, dans ce chapitre, les résultats énoncés au chapitre I.

6) Démonstration de la proposition 2.1.

Soit (X, M) un espace C -stratifié orientable et soit

$\bar{\psi} = d\rho - \rho d$ un cycle de $\text{Hom}_{-1}(C(X, X-M), C(X-M))$ induit par un relèvement ρ de la projection $p : C(X) \rightarrow C(X, X-M)$; (nous expliciterons au paragraphe 10 (c) un tel relèvement ρ) ; le morphisme

$$\bar{\phi} : C(X-M) \underset{\bar{\psi}}{\oplus} C(X, X-M) \rightarrow C(X)$$

défini par $\bar{\phi}(x, y) = x + \rho(y)$ est un isomorphisme de MDG.

On note T un voisinage tubulaire de M dans X et $\lambda : T \rightarrow M$ la projection de T sur M . C'est un fibré Λ -orientable de base M . Le choix d'une orientation de $\lambda : T \rightarrow M$ donne lieu à un morphisme $t' : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(T, T-M)$ induisant en homologie l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme de Thom (remarque 5.2.).

D'autre part, l'injection $\epsilon : (T, T-M) \rightarrow (X, X-M)$ induit un morphisme de MDG (homomorphisme d'excision) encore noté ϵ

$$\epsilon : C(T, T-M) \rightarrow C(X, X-M)$$

Posons

$$(23) \quad \delta = \epsilon \circ t' \quad \text{et} \quad \psi' = \bar{\psi} \circ \delta$$

Le morphisme :

$$(24) \quad \theta' : C(X-M) \underset{\psi'}{\oplus} C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X-M) \underset{\bar{\psi}}{\oplus} C(X, X-M)$$

défini par $\theta'(x,y) = (x, \delta(y))$ est un morphisme de MDG, il induit un isomorphisme en homologie (proposition 3.8.). Il en est de même du morphisme

$\phi' : C(X-M) \otimes_{\psi'} C^{(-\mu)}(M) \longrightarrow C(X)$ défini par :

$$\phi'(x,y) = \bar{\phi} \circ \theta'(x,y) = x + \rho \delta(y) .$$

On en déduit la proposition.

7) Démonstration de la proposition 2.3.

Soient (X,M) un espace C -stratifié orientable et

$f : (X,M) \rightarrow (Y,N)$ une application C -stratifiée de fibres (F, F_0) . D'après la proposition 4.5., on peut associer au fibré $f|_M : M \rightarrow N$ de fibre F_0 une cochaîne fondamentale $\tau_0 \in \text{Hom}_{-1}(C(N), C(\underline{G}_0))$ (où \underline{G}_0 est un groupe simplicial d'automorphismes du complexe minimal de \underline{F}_0) et des morphismes de MDG :

$$\tau_0 : C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) \longrightarrow C(M) \quad f^{\tau_0} : C(M) \longrightarrow C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)$$

réalisant une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes. On notera

$$\tau_0 \circ f^{\tau_0} = 1 + d\phi^{\tau_0} + \phi^{\tau_0}d \quad \text{avec} \quad \phi^{\tau_0} \in \text{Hom}_1(C(M), C(M)).$$

De même, on peut associer au fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$, de

fibre F , une cochaîne fondamentale $\tau_1 \in \text{Hom}_{-1}(C(Y-N), C(\underline{G}))$ et des morphismes de MDG :

$$\tau_1 : C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F) \longrightarrow C(X-M) \quad f^{\tau_1} : C(X-M) \longrightarrow C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F)$$

réalisant une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes. On notera

$$\tau_1 \circ f^{\tau_1} = 1 + d\phi^{\tau_1} + \phi^{\tau_1}d \quad \text{avec} \quad \phi^{\tau_1} \in \text{Hom}_1(C(X-M), C(X-M)) .$$

Posons $\psi'' = f^{\tau_1} \circ \psi' \circ \tau_0$, où ψ' est défini en (23) et

formons la somme tordue (que nous avons notée (3)) :

$$\left[\underset{\tau_1}{C(Y-N)} \underset{\tau_1}{\otimes} \underset{\tau_1}{C(F)} \right] \underset{\psi''}{\otimes} \left[\underset{\tau_0}{C(N)} \underset{\tau_0}{\otimes} \underset{\tau_0}{C(F_0)} \right]^{(-\mu)}$$

On déduit alors directement du corollaire 3.10., la proposition :

Proposition 7.1. - Les morphismes de MDG

$$\nabla_2 : \left[\underset{\tau_1}{C(Y-N)} \underset{\tau_1}{\otimes} \underset{\tau_1}{C(F)} \right] \underset{\psi''}{\otimes} \left[\underset{\tau_0}{C(N)} \underset{\tau_0}{\otimes} \underset{\tau_0}{C(F_0)} \right]^{(-\mu)} \longrightarrow \underset{\psi'}{C(X-M)} \underset{\psi'}{\otimes} \underset{\psi'}{C^{(-\mu)}(M)}$$

$$f_2 : \underset{\psi'}{C(X-M)} \underset{\psi'}{\otimes} \underset{\psi'}{C^{(-\mu)}(M)} \rightarrow \left[\underset{\tau_1}{C(Y-N)} \underset{\tau_1}{\otimes} \underset{\tau_1}{C(F)} \right] \underset{\psi''}{\otimes} \left[\underset{\tau_0}{C(N)} \underset{\tau_0}{\otimes} \underset{\tau_0}{C(F_0)} \right]^{(-\mu)}$$

$$\text{définis par } \nabla_2(a, b) = (\nabla_1^{\tau_1}(a) + \phi^{\tau_1}_{\psi'} \nabla_0^{\tau_0}(b), \nabla_0^{\tau_0}(b))$$

$$\text{et } f_2(x, y) = (f_1^{\tau_1}(x) + f^{\tau_1}_{\psi'} \phi^{\tau_0}(y), f^{\tau_0}(y))$$

réalisent une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

Corollaire 7.2. - (Proposition 2.3). - Le morphisme de MDG :

$$\phi' \circ \nabla_2 : \left[\underset{\tau_1}{C(Y-N)} \underset{\tau_1}{\otimes} \underset{\tau_1}{C(F)} \right] \underset{\psi''}{\otimes} \left[\underset{\tau_0}{C(N)} \underset{\tau_0}{\otimes} \underset{\tau_0}{C(F_0)} \right]^{(-\mu)} \longrightarrow \underset{\tau_0}{C(X)}$$

réalise une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

8) Démonstration de la proposition 2.4.

Les hypothèses sont les mêmes qu'au paragraphe précédent. On note U un voisinage tubulaire de N dans Y . $Y - \overset{\circ}{U}$ est un rétracte par déformation de $Y - N$ et l'inclusion $i : C(Y - \overset{\circ}{U}) \rightarrow C(Y - N)$ induit un isomorphisme en homologie. La cochaîne fondamentale $\overset{\sim}{\tau}_1$ du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ induit par restriction une cochaîne fondamentale $\overset{\sim}{\tau}_1 \circ i$ sur $C(Y - \overset{\circ}{U})$. D'après le lemme 4.2., on a :

$$\text{Proposition 8.1.} - \text{ Le morphisme } i \otimes 1 : \underset{\tau_1}{C(Y - \overset{\circ}{U})} \underset{\tau_1}{\otimes} \underset{\tau_1}{C(F)} \rightarrow \underset{\tau_1}{C(Y - N)} \underset{\tau_1}{\otimes} \underset{\tau_1}{C(F)}$$

est un morphisme de MDG, il réalise une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

On note j un morphisme de MDG $j : C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F) \rightarrow C(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F)$ réalisant avec $i \otimes 1$ cette équivalence d'homotopie.

Supposons N et $Y - \overset{\circ}{U}$ munis d'une triangulation, et notons $\bar{\alpha}$ les injections canoniques $\bar{\alpha} : K(N) \rightarrow C(N)$ et $\bar{\alpha} : K(Y-\overset{\circ}{U}) \rightarrow C(Y-\overset{\circ}{U})$. Il résulte de la proposition 4.7. :

Proposition 8.2. - Les morphismes

$$\alpha_0 = \bar{\alpha} \otimes 1 : K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) \longrightarrow C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)$$

et

$$\alpha_1 = \bar{\alpha} \otimes 1 : K(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F) \longrightarrow C(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F)$$

réalisent des équivalences d'homotopie de complexes de chaînes.

On note :

$$\beta_0 : C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) \longrightarrow K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)$$

et

$$\beta_1 : C(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F) \longrightarrow K(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F)$$

des morphismes de MDG réalisent avec α_0 et α_1 respectivement ces équivalences d'homotopie.

Le morphisme :

$$(25) \quad \Psi : K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) \longrightarrow K(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F) ,$$

obtenu comme composition $\Psi = \beta_1 \circ j \circ \Psi'' \circ \alpha_0$, est un cycle de degré -1 .

Il vient, d'après le corollaire 3.10 :

Proposition 8.3. - Il existe une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes :

$$\left[\begin{array}{c} K(Y-U) \\ \tau_1 \end{array} \oplus C(F) \right] \oplus \left[\begin{array}{c} K(N) \\ \tau_0 \end{array} \oplus C(F_0) \right] \xrightleftharpoons[\beta']{\alpha'} \left[\begin{array}{c} C(Y-N) \\ \tau_1 \end{array} \oplus C(F) \right] \oplus \left[\begin{array}{c} C(N) \\ \tau_0 \end{array} \oplus C(F_0) \right]^{(-\mu)}$$

décrite de la manière suivante :

Si, pour $i = 0, 1$, on a $\alpha_i \circ \beta_i = 1 + d\phi_i + \phi_i d$, α' et β' sont définis par :

$$\alpha'(a, b) = (\alpha_1(a) + \phi_1 \psi'' \alpha_0(b), \alpha_0(b))$$

$$\text{et } \beta'(x, y) = (\beta_1(x) + \beta_1 \psi'' \phi_0(y), \beta_0(y)).$$

Corollaire 8.4. - (Proposition 2.4.) - Le morphisme $\phi' \circ \nabla_2 \circ \alpha'$ réalise une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre $C(X)$ et le complexe (3) :

$$\left[\begin{array}{c} K(Y-U) \\ \tau_1 \end{array} \oplus C(F) \right] \oplus \left[\begin{array}{c} K(N) \\ \tau_0 \end{array} \oplus C(F_0) \right]^{(-\mu)}$$

9) Triangulations adaptées.

Soit (Y, N) un espace C -stratifié, de codimension v ; rappelons que $\partial U = U - \bar{U}$ est l'espace total d'un fibré de base N et de fibre une variété topologique de dimension $v-1$. On note $\omega : \partial U \rightarrow N$ la restriction à ∂U de la projection de U sur N en tant que fibré.

Définition 9.1. - Soit (Y, N) un espace C -stratifié de codimension v et U un voisinage tubulaire de N dans Y , on dit qu'une triangulation (K) de Y est une triangulation adaptée au triple (Y, N, U) si (K) est compatible avec une triangulation (K_1) de N et une triangulation (K_2) de ∂U et si de plus, pour tout simplexe σ de $K_1^{(q)}$, $\omega^{-1}(\sigma)$ est un sous-complexe de dimension $q+v-1$ de (K_2) .

Proposition 9.2.- Soit (Y, N) un espace C -stratifié triangulable, pour tout voisinage tubulaire U de N dans Y , le triple (Y, N, U) admet des triangulations adaptées.

On montre d'abord le lemme suivant :

Lemme 9.3.- Soient (Y, N) un espace C -stratifié triangulable et de codimension v et U un voisinage tubulaire de N dans Y . On peut construire des triangulations (K_1) et (K_2) de N de ∂U respectivement, telles que, pour tout simplexe σ de dimension q de (K_1) , $\omega^{-1}(\sigma)$ soit un sous-complexe de dimension $q+v-1$ de (K_2) .

Démonstration.- On appelle (K_1) une triangulation simpliciale de N assez fine pour que tout simplexe de (K_1) soit contenu dans un ouvert de trivialisatation du fibré $\omega : \partial U \rightarrow N$. En se servant du corollaire 1 de [1], on construit (K_2) par récurrence au-dessus des squelettes de dimensions successives de (K_1) .

Démonstration de la proposition 9.2.-

Donnons nous une triangulation (K') de U compatible avec une triangulation (K_1) de N ([21] ; lemme 3.7.). On peut subdiviser (K') de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

- a) tout simplexe σ de (K') ayant au moins un sommet dans N ne rencontre pas ∂U ,
- b) tout simplexe de (K_1) est contenu dans un ouvert de trivialisatation du fibré $\omega : \partial U \rightarrow N$.

On appelle alors (K_2) une triangulation de ∂U satisfaisant au lemme 9.3.

Notons V l'ensemble des simplexes fermés de (K') dont au moins un sommet est situé dans N et V' le sous-complexe de V composé des simplexes de V n'ayant pas de sommet dans N . V' ne rencontre pas ∂U . On sait construire une triangulation (K) de $Y - \overset{\circ}{V}$ compatible avec une sous-triangulation de V' sur V' et de (K_2) sur ∂U , puis une triangulation de V compatible avec (K) sur N et avec la sous-triangulation de V' sur V' . La réunion de cette triangulation sur V et de (K) sur $Y - \overset{\circ}{V}$ fournit une triangulation de Y , encore notée (K) , satisfaisant à la proposition.

Corollaire 9.4. - Soient (Y, N) un espace C -stratifié triangulable et de codimension v et U un voisinage tubulaire de N dans Y . Notons (K) une triangulation adaptée au triple (Y, N, U) et ∂U^P la restriction de ∂U au p -squelette de N , on a : $K(\partial U^P) \subset K((\partial U)^{(p+v-1)})$.

10) La proposition fondamentale.

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de montrer la proposition suivante :

Proposition 10.1. - Soient (X, M) et (Y, N) deux espaces C -stratifiés et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C -stratifiée de fibres (F, F_0) . Supposons que (X, M) soit orientable et que (Y, N) soit triangulable et de codimension v ; on note U un voisinage tubulaire de N dans Y et (K) une triangulation adaptée au triple (Y, N, U) . On peut construire un morphisme de modules différentiels gradués homotope à Ψ (et encore noté Ψ), tel que :

$$\Psi[K(N^{(p)}) \otimes C(F_0)] \subset K((Y-U)^{(p+v-1)}) \otimes C(F).$$

La proposition résultera, en partie, de la commutativité à homotopie près du grand diagramme ci-dessous. Nous montrerons la commutativité à homotopie près de chacun des éléments de ce diagramme en définissant à chaque fois les flèches qui interviennent dans ces éléments :

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) \xrightarrow{\nabla^{\tau_0}} C(M) \xrightarrow{1} C(M) \xrightarrow{1} C(M) \\
\downarrow i'' \quad \textcircled{7} \quad \downarrow i' \quad \textcircled{1} \quad \downarrow \lambda' \\
[K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)] \otimes_{\tau} C(D) \xrightarrow{\nabla^{\tau_0} \otimes 1} C(M) \otimes_{\tau} C(D) \xrightarrow{\nabla^{\tau}} C(T) \xrightarrow{\delta} C(X, X-M) \\
\downarrow j'' \quad \textcircled{8} \quad \downarrow j' \quad \textcircled{2} \quad \downarrow s' \\
[K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)] \otimes_{\tau} C(D, \partial D) \xrightarrow{\nabla^{\tau_0} \otimes 1} C(M) \otimes_{\tau} C(D, \partial D) \xrightarrow{\nabla^{\tau}} C(T, \partial T) \xrightarrow{\varepsilon} C(T, T-M) \\
\downarrow \psi \quad \textcircled{9} \quad \downarrow \psi_1 \quad \textcircled{4} \quad \downarrow \psi_2 \quad \textcircled{5} \quad \downarrow \psi_3 \quad \textcircled{6} \\
[K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)] \otimes_{\tau} C(\partial D) \xrightarrow{\nabla^{\tau_0} \otimes 1} C(M) \otimes_{\tau} C(\partial D) \xrightarrow{\nabla^{\tau}} C(\partial T) \xrightarrow{i} C(T-M) \xrightarrow{\varepsilon} C(X-M) \\
\downarrow g \quad \textcircled{12} \quad \downarrow \nabla^{\tau'} \otimes 1 \\
[K(N) \otimes_{\tau'} C(\partial D')] \otimes_{\tau_1} C(F) \xrightarrow{\nabla^{\tau'} \otimes 1} C(\partial U) \otimes_{\tau_1} C(F) \xrightarrow{i \otimes 1} C(Y-U) \otimes_{\tau_1} C(F) \xrightarrow{j} C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F) \\
\downarrow \beta_1 \quad \textcircled{11} \quad \downarrow \beta_1 \\
K(\partial U) \otimes_{\tau_1} C(F) \xrightarrow{i \otimes 1} K(Y-U) \otimes_{\tau_1} C(F)
\end{array}
\end{array}$$

a) Commutativité à homotopie près du diagramme 1.

(X, M) désigne un espace C -stratifié orientable et de codimension μ , et T un voisinage tubulaire de M dans X .

Le voisinage T est l'espace total d'un fibré localement trivial, de base M , de fibre D et de groupe structural G .

Soit, comme précédemment, \underline{D} l'ensemble simplicial défini par les simplexes singuliers de D et notons e_0 le générateur de $C_0(D)$, c'est-à-dire le 0-simplexe singulier que définit le point base de D . De l'existence de la section canonique du fibré $\lambda : T \rightarrow M$, on déduit :

Lemme 10.2. - On peut définir une fonction tordante $\tau : \underline{M} \rightarrow \underline{G}$, associée au fibré $\lambda : T \rightarrow M$, de manière à ce que, pour tout x de \underline{M} et, pour toute suite i_1, \dots, i_k (éventuellement vide), on ait :

$$\tau(x) (s_{i_1} \dots s_{i_k} e_0) = s_{i_1} \dots s_{i_k} e_0 \quad (\text{où les } s_i \text{ sont les opérateurs dégénérescence}).$$

On a, d'après Shih (proposition 4.5.), une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes :

$$C(M) \otimes_{\tau} C(D) \xrightleftharpoons[\tau]{\nabla^T} C(T)$$

Proposition 10.3. - Soient d et d^T les différentielles ordinaire et tordue respectivement, sur $C(M) \otimes C(D)$; on peut construire une cochaîne fondamentale $\tilde{\tau}$, associée au fibré $\lambda : T \rightarrow M$, de manière à ce que l'on ait :

$$(d^T - d)(e_0) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^T(x \otimes e_0) = \nabla(x \otimes e_0).$$

Démonstration. - Soit ∇ l'opérateur d'Eilenberg-Mac-Lane $\nabla : C(M) \otimes C(D) \rightarrow C(D \times M)$ ([16], page 64) et soient ∂ et ∂^T les différentielles des MDG $C(\underline{D} \times \underline{M})$ et $C(\underline{D} \times_{\tau} \underline{M})$ respectivement ;

on déduit du lemme 10.2 que l'on a :

$$(\partial^T - \partial) \circ \nabla(x_n \otimes e_0) = 0$$

pour tout $x_n \in C_n(M)$. La proposition résulte alors des expressions explicites de d^T et de ∇^T ([24], formules (1) page 27).

Notons $i' : C(M) \rightarrow C(M) \otimes_t C(D)$ l'application définie par tensorisation par e_0 et λ' le morphisme $\lambda' : C(M) \rightarrow C(T)$ défini par la section canonique du fibré $\lambda : T \rightarrow M$. On a :

Corollaire 10.4.-

- i) L'application i' est un morphisme de MDG.
- ii) Le diagramme (1) commute à homotopie près.

Démonstration.- (i) vient de ce que l'on a :

$$d^T(x_n \otimes e_0) = d(x_n \otimes e_0) = dx_n \otimes e_0 \quad \text{pour } x_n \in C_n(M).$$

De la définition de ∇ ([16]), et de celle de $\lambda : C(T) \rightarrow C(M)$, on déduit que :

$$\lambda \circ \nabla^T \circ i'(x_n \otimes e_0) = \lambda \circ \nabla(x_n \otimes e_0) = x_n$$

d'où (ii) en utilisant le fait que λ' et λ réalisent une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

b) Commutativité à homotopie près des diagrammes 2,3.

Le bord ∂T de T est l'espace total d'un fibré de base M et de fibre ∂D , associé au même fibré principal que le fibré $\lambda : T \rightarrow M$. On peut donc lui associer la même cochaîne fondamentale $\tilde{\tau}$ et on a, d'après la proposition 4.6., une équivalence d'homotopie :

$$C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(D, \partial D) \underset{f^\tau}{\overset{\nabla^\tau}{\rightleftarrows}} C(T, \partial T)$$

Notons $r : C(T, \partial T) \rightarrow C(T, T-M)$ le morphisme déduit de l'inclusion $\partial T \rightarrow T-M$ et δ_r l'injection canonique $\delta_r : C(T, T-M) \rightarrow C(T, \partial T)$. r et δ_r réalisent une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes et on a $r \circ \delta_r = \text{identité}$.

Soit $s' : C(T) \rightarrow C(T, T-M)$ le morphisme défini en (22), on définit le morphisme de MDG $j' : C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(D) \rightarrow C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(D, \partial D)$ par la composition :

$$j' = f^\tau \circ \delta_r \circ s' \circ \nabla^\tau$$

Proposition 10.5. - Le diagramme (2) est commutatif à homotopie près.

De plus, si M^p désigne une filtration finie de l'espace M , le morphisme j' respecte les filtrations suivantes de $C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(D)$ et $C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(D, \partial D)$:

$$F_p \left[C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(D) \right] = C(M^p) \underset{\tau}{\otimes} C(D)$$

$$F_p \left[C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(D, \partial D) \right] = C(M^p) \underset{\tau}{\otimes} C(D, \partial D)$$

Démonstration. - La commutativité à homotopie près du diagramme est évidente. Pour montrer le respect des filtrations, on regarde comment est transformé un simplexe singulier de $C(M^p)$ par chacun des morphismes entrant dans la définition de j' . Le résultat provient de la définition de ∇^τ et f^τ ([16]) et de la proposition 5.1.

D'autre part, le diagramme (3) commute, par définition même de δ (voir (23)).

c) Commutativité à homotopie près des diagrammes 4, 5, 6.

L'homomorphisme d'excision $\epsilon : C(T, T-M) \rightarrow C(X, X-M)$ est induit par l'injection, encore notée ϵ , $\epsilon : T \rightarrow M$.

On peut écrire le diagramme commutatif de MDG :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & C(X-M) & \longrightarrow & C(X) & \xrightarrow{p} & C(X, X-M) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \varepsilon & & \uparrow \varepsilon & & \uparrow \varepsilon & & \\
 0 & \longrightarrow & C(T-M) & \longrightarrow & C(T) & \xrightarrow{p_3} & C(T, T-M) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow i & & \uparrow 1 & & \uparrow r & & \\
 (26) \quad 0 & \longrightarrow & C(\partial T) & \longrightarrow & C(T) & \xrightarrow{p_2} & C(T, \partial T) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \nabla^\tau & & \uparrow \nabla^\tau & & \uparrow \nabla^\tau & & \\
 0 & \longrightarrow & C(M) \otimes C(\partial D) & \longrightarrow & C(M) \otimes C(D) & \xrightarrow{p_1} & C(M) \otimes C(D, \partial D) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \tau & & \tau & & \tau & &
 \end{array}$$

dans lequel les homomorphismes de la colonne de droite induisent des isomorphismes en homologie.

Etant donné un relèvement ρ_0 de p_0 dans la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow C(D) \longrightarrow C(\partial D) \xrightarrow{p_0} C(D, \partial D) \longrightarrow 0 .$$

on définit un relèvement ρ_1 de p_1 en posant :

$$\rho_1(x \otimes [y]) = x \otimes \rho_0[y] \quad \text{où} \quad [y] \in C(D, \partial D)$$

Notons $\Psi_0 = d\rho_0 - \rho_0 d$ et $\Psi_1 = d^\tau \rho_1 - \rho_1 d^\tau$, il vient :

$$(27) \quad \Psi_1(x \otimes [y]) = (-1)^{\deg x} x \otimes \Psi_0[y] + \tilde{\tau} \cap (x \otimes \rho_0[y]) - \rho_1(\tilde{\tau} \cap (x \otimes [y]))$$

où, d'après (14), la différence des deux derniers termes est égale à :

$$(28) \quad (1 \otimes ([\bar{\sigma}(1 \otimes \rho_0) - \rho_0 \bar{\sigma}] \circ (\tilde{\tau} \otimes 1))) (\Delta(x) \otimes [y])$$

A l'aide du relèvement ρ_1 , on peut construire (proposition 3.4.)

un cycle Ψ_2 de $\text{Hom}_{-1}(C(T, \partial T), C(\partial T))$ tel que $\nabla^\tau \Psi_1 = \Psi_2 \nabla^\tau$.

L'injection canonique $\delta_r : C(T, T-M) \rightarrow C(T, \partial T)$ est un morphisme de MDG tel que $r \circ \delta_r$ soit l'identité de $C(T, T-M)$. On peut donc d'après le corollaire 3.5., construire un cycle Ψ_3 de $\text{Hom}_{-1}(C(T, T-M), C(T-M))$ tel que l'on ait une homotopie : $\Phi_3 : i \circ \Psi_2 \approx \Psi_3 \circ r$.

Enfin, soit C^F le complexe des chaînes singulières petites d'ordre $F = \{T, X-M\}$, notons δ_ε la projection $\delta_\varepsilon : C(X, X-M) \rightarrow C(T, T-M)$ composée de la projection canonique $C(X, X-M) \rightarrow C^F(X, X-M)$ et de l'isomorphisme $C^F(X, X-M) \rightarrow C(T, T-M)$; $\delta_\varepsilon \circ \varepsilon$ est l'identité de $C(T, T-M)$. D'après la proposition 3.4., on peut construire un cycle $\bar{\Psi}$ de $\text{Hom}_{-1}(C(X, X-M), C(X-M))$ induit par un relèvement ρ de p et tel que l'on ait $\varepsilon \circ \Psi_3 = \bar{\Psi} \circ \varepsilon$.

On pourra choisir, au paragraphe 6, pour cycle $\bar{\Psi}$, le cycle ainsi déterminé.

Proposition 10.6. - Les diagrammes (4) et (6) commutent, le diagramme (5) commute à homotopie près. De plus, pour toute filtration M^P de l'espace M , le morphisme Ψ_1 respecte les filtrations suivantes de $C(M) \otimes C(D, \partial D)$ et $C(M) \otimes C(\partial D)$:

$$F_p \left[C(M) \otimes C(D, \partial D) \right]_\tau = C(M^P) \otimes C(D, \partial D)$$

$$F_p \left[C(M) \otimes C(\partial D) \right]_\tau = C(M^P) \otimes C(\partial D).$$

Démonstration. - Les commutativités sont évidentes, le respect des filtrations vient de la formule (28).

d) Commutativité à homotopie près des diagrammes 7, 8, 9.

En plus des hypothèses énoncées en (a), on suppose que M est l'espace total d'un fibré $f : M \rightarrow N$ de fibre F_0 et de base un espace N muni d'une triangulation.

On note $N^{(p)}$ le p -squelette de la triangulation donnée de N et $M^P = f^{-1}(N^{(p)})$ la restriction du fibré $f : M \rightarrow N$ à $N^{(p)}$. Enfin $\tilde{\tau}_0$ désigne une cochaîne fondamentale associée au fibré $f : M \rightarrow N$ et $\tilde{\tau}$ la cochaîne fondamentale associée au fibré $\lambda : T \rightarrow M$ et précédemment définie (proposition 10.3).

Proposition 10.7. - L'application $d^{\bar{\tau}}$ définie sur le produit tensoriel $[K(N) \otimes C(F_o)] \otimes C(D)$ par :

$$d^{\bar{\tau}}(x \otimes y \otimes z) = d^{\tau_o}(x \otimes y) \otimes z + (-1)^{\deg(x \otimes y)} x \otimes y \otimes dz + \hat{\gamma}_{\bar{\tau}} \cap (\hat{\gamma}^{\tau_o}(x \otimes y) \otimes z)$$

est une différentielle. Soit $[K(N) \otimes_{\tau_o} C(F_o)] \otimes_{\bar{\tau}} C(D)$ le MDG ainsi déterminé ; on peut construire une équivalence d'homotopie

$$[K(N) \otimes_{\tau_o} C(F_o)] \otimes_{\bar{\tau}} C(D) \xrightleftharpoons[\hat{f}^{\tau_o}]{\hat{\gamma}^{\tau_o} \otimes 1} C(M) \otimes_{\tau} C(D)$$

respectant les filtrations suivantes :

$$\begin{aligned} F_p [K(N) \otimes_{\tau_o} C(F_o)] \otimes_{\bar{\tau}} C(D) &= (K(N^{(p)}) \otimes C(F_o)) \otimes C(D) \\ F_p [C(M) \otimes_{\tau} C(D)] &= C(M^p) \otimes C(D) \end{aligned}$$

Démonstration. - Que $d^{\bar{\tau}}$ soit une différentielle et que $\hat{\gamma}^{\tau_o} \otimes 1$ soit une équivalence d'homotopie résultent de (18) et du lemme 4.2. On déduit du corollaire 4.9 que les filtrations sont respectées et le lemme 4.8 explicite \hat{f}^{τ_o} .

La proposition est encore valable en remplaçant $C(D)$ par $C(\partial D)$ ou $C(D, \partial D)$. Dans chacun des cas, on note \hat{f}^{τ_o} un morphisme réalisant l'équivalence d'homotopie avec $\hat{\gamma}^{\tau_o} \otimes 1$.

Définissons

$$i'' : K(N) \otimes_{\tau_o} C(F_o) \longrightarrow [K(N) \otimes_{\tau_o} C(F_o)] \otimes_{\bar{\tau}} C(D)$$

par tensorisation par $e_o \in C_o(D)$ et posons :

$$j'' = \hat{f}^{\tau_o} \circ j'_o (\hat{\gamma}^{\tau_o} \otimes 1) \quad \text{et} \quad \hat{\psi} = \hat{f}^{\tau_o} \circ \psi_1 \circ (\hat{\gamma}^{\tau_o} \otimes 1)$$

Proposition 10.8.-

- i) i'' est un morphisme de MDG rendant commutatif le diagramme (7).
 ii) Les diagrammes (8) et (9) commutent à homotopie près.
 iii) Le morphisme composé $\tilde{\psi} \circ j'' \circ i''$ respecte les filtrations suivantes :

$$F_p \left[\overline{K}(N) \otimes C(F_0) \right] = K(N^{(p)}) \otimes C(F_0)$$

$$F_p \left[\overline{K}(N) \otimes C(F_0) \right] \xrightarrow[\tau_0]{\tau} C(\partial D) = (K(N^{(p)}) \otimes C(F_0)) \otimes C(\partial D)$$

Démonstration.- (i) provient de la définition de $\tilde{\tau}$ et donc de $d^{\tilde{\tau}}$ (même démonstration qu'au corollaire 10.3). (ii) est évident.
 (iii) résulte des propositions 10.5., 10.6. et 10.7.

e) Commutativité à homotopie près des diagrammes 10 et 11.

Nous supposons désormais donnée une application C-stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$, de fibres (F, F_0) , pour laquelle (X, M) est un espace C-stratifié orientable et (Y, N) un espace C-stratifié triangulable. On note U un voisinage tubulaire de N dans Y dont l'image réciproque $T = f^{-1}(U)$ est un voisinage tubulaire de M dans X . En plus des notations des paragraphes précédents, on désigne par $\tilde{\tau}_1$ et $\tilde{\tau}'$ des cochaînes fondamentales associées aux fibrés $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ et $\omega : \partial U \rightarrow N$ respectivement. La fibre de $\omega : \partial U \rightarrow N$ est notée $\partial D'$.

Le fibré $f|_{\partial T} : \partial T \rightarrow \partial U$ est la restriction du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ à ∂U (propriété 1.8.). La cochaîne fondamentale de $f|_{\partial T} : \partial T \rightarrow \partial U$ est donc la restriction de $\tilde{\tau}_1$ à ∂U , on la note encore $\tilde{\tau}_1$. Il vient, par définition de f^{τ_1} (paragraphe 7) et des morphismes j et β_1 (propositions 8.1. et 8.2.) :

Proposition 10.9. - Pour toute triangulation de Y compatible avec ∂U et $Y-U$, les diagrammes (10) et (11) commutent à homotopie près.

g) Commutativité à homotopie près du diagramme 12.

D'après la propriété 1.8., ∂T est l'espace total d'un fibré sur fibré de base N de deux manière différentes. De même qu'à la proposition 10.7. on définit une équivalence d'homotopie :

$$\left[\begin{array}{c} K(N) \\ \tau' \end{array} \otimes C(\partial D') \right] \otimes_{\tau_1} C(F) \xrightarrow[\hat{f}^{\tau'}]{\hat{v}^{\tau'} \otimes 1} C(\partial U) \otimes_{\tau_1} C(F)$$

d'où un morphisme de MDG :

$$g : \left[\begin{array}{c} K(N) \\ \tau_0 \end{array} \otimes C(F_0) \right] \otimes_{\tau} C(\partial D) \longrightarrow \left[\begin{array}{c} K(N) \\ \tau' \end{array} \otimes C(\partial D') \right] \otimes_{\tau_1} C(F)$$

obtenu par composition $g = \hat{f}^{\tau'} \circ f^{\tau_1} \circ v^{\tau} \circ (\hat{v}^{\tau} \otimes 1)$. Comme précédemment, on désigne par $\partial U^p = \omega^{-1}(N^{(p)})$ la restriction du fibré $\omega : \partial U \rightarrow N$ au p-squelette de N .

Proposition 10.10. - Le diagramme (12) est commutatif à homotopie près. De plus, le morphisme composé $(\hat{v}^{\tau'} \otimes 1) \circ g$ respecte les filtrations suivantes :

$$\begin{aligned} F_p \left[\left(\begin{array}{c} K(N) \\ \tau_0 \end{array} \otimes C(F_0) \right) \otimes_{\tau} C(\partial D) \right] &= \left[\begin{array}{c} K(N^{(p)}) \\ \tau_0 \end{array} \otimes C(F_0) \right] \otimes_{\tau} C(\partial D) \\ F_p \left[\left(\begin{array}{c} C(\partial U) \\ \tau_1 \end{array} \otimes C(F) \right) \right] &= C(\partial U^p) \otimes C(F) \end{aligned}$$

Démonstration : D'après la proposition 10.7., il suffit de montrer que g respecte les filtrations en $K(N^{(p)})$. Pour cela, nous allons donner une décomposition explicite de ce morphisme, sous forme "semi-simpliciale" et en utilisant le fait que ∂T est l'espace d'un fibré sur fibré, de base N , de deux manières différentes (propriété 1.8. et Appendice).

Si $f : E \rightarrow B$ désigne un fibré de Serre, de fibre F , le complexe minimal associé à l'ensemble simplicial \underline{F} des simplexes singuliers de F sera encore noté \underline{F} .

Nous montrerons en appendice (proposition 15.1) que l'on peut écrire $\underline{\partial T}$ sous forme de "double produit cartésien tordu", plus précisément, qu'il existe des fonctions tordantes τ'' et τ_1'' telles que l'on ait des isomorphismes μ_i et ν_i :

$$C(\underline{\partial D} \times_{\tau} (\underline{F}_0 \times_{\tau_0} \underline{N})) \xrightarrow{\mu_1} C((\underline{\partial D} \times_{\tau''} \underline{F}_0) \times_{\tau_0} \underline{N}) \xrightarrow{\nu_1} C(\underline{\partial T})$$

$$C(\underline{F} \times_{\tau_1} (\underline{\partial D}' \times_{\tau'} \underline{N})) \xrightarrow{\mu_2} C((\underline{F} \times_{\tau_1''} \underline{\partial D}') \times_{\tau'} \underline{N}) \xrightarrow{\nu_2} C(\underline{\partial T}) .$$

D'après la proposition 15.1., les isomorphismes μ_i et ν_i respectent les filtrations de ces complexes en $\underline{N}^{(p)}$ (ensemble simplicial des simplexes singuliers de $N^{(p)}$) et $\underline{\partial T}^p$ (avec $\partial T^p = \lambda^{-1} \circ f^{-1}(N^{(p)}) = f^{-1} \circ \omega^{-1}(N^{(p)})$). Il en est de même du morphisme composé $\psi = \mu_2^{-1} \circ \nu_2^{-1} \circ \nu_1 \circ \mu_1$. Mais celui-ci rentre précisément dans la composition (voir théorème 4.4.) :

$$\begin{aligned}
& [K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)] \otimes_{\tau} C(\partial D) \xrightarrow{\hat{V}^{\tau_0} \otimes 1} C(F_0 \times_{\tau_0} N) \otimes_{\tau} C(\partial D) \xrightarrow{\nabla^{\tau}} C(\partial D \times_{\tau} (F_0 \times_{\tau_0} N)) \xrightarrow{\hat{\psi}} \\
& \longrightarrow C(F_1 \times_{\tau_1} (\partial D' \times_{\tau'} N)) \xrightarrow{f^{\tau_1}} C(\partial D' \times_{\tau'} N) \otimes_{\tau_1} C(F) \xrightarrow{\hat{f}^{\tau'}} [K(N) \otimes_{\tau'} C(\partial D')] \otimes_{\tau_1} C(F)
\end{aligned}$$

où tous les morphismes respectent les filtrations en $\underline{N}^{(p)}$, d'où le résultat.

g) Démonstration de la proposition 10.1.

Avec les notations des paragraphes précédents, on définit le morphisme

$$\hat{\Psi} : K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) \longrightarrow K(Y-U) \otimes_{\tau_1} C(F)$$

par la composition

$$\hat{\Psi} = (i \otimes 1) \circ \beta_1 \circ (\hat{V}^{\tau'} \otimes 1) \circ g \circ \hat{\psi} \circ j'' \circ i'$$

(voir le grand diagramme). Le morphisme Ψ étant celui défini en (25), c'est-à-dire par :

$$\Psi = \beta_1 \circ j \circ f^{\tau_1} \circ \bar{\psi} \circ \delta \circ \hat{V}^{\tau_0},$$

on a :

(i) Les morphismes Ψ et $\hat{\Psi}$ sont égaux à homotopie près, autrement dit : le grand diagramme commute à homotopie près. (corollaire 10.4, propositions 10.5, 10.6, 10.8, 10.9 et 10.10)

$$(ii) \quad \hat{\Psi}[K(N^{(p)}) \otimes C(F_0)] \subset K((Y-U)^{(p+v-1)}) \otimes C(F)$$

ce qui provient du respect des filtrations par les différents morphismes intervenant dans la composition de $\hat{\psi}$ (Propositions 10.8, 10.10, 4.7 et corollaire 9.4).

La proposition 10.1 résulte directement de (i) et (ii).

11) Démonstration du théorème 2.5.

$$\text{Notons } A = K(Y-U) \underset{\tau_1}{\otimes} C(F) \quad \text{et} \quad B = [K(N) \underset{\tau_0}{\otimes} C(F_0)]^{(-\mu)}$$

en tant que MDG. Pour un entier $k \geq 0$ fixé, on filtre A et B comme suit :

$$F_p(A) = K[(Y-U)^{(p)}] \otimes C(F)$$

$$(k)F_p(B) = K[N^{(p-k)}] \otimes C(F_0) .$$

La suite spectrale associée à la filtration $F_p(A)$ de A est, à partir du terme E^2 , isomorphe à la suite spectrale de Serre (en homologie) du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$. On note $E_{p,q}^r(X-M)$ son terme E^r de bidegré (p,q) .

La suite spectrale associée à la filtration $F_p(K(N) \underset{\tau_0}{\otimes} C(F_0)) = K(N^{(p)}) \otimes C(F_0)$ de $K(N) \underset{\tau_0}{\otimes} C(F_0)$ est isomorphe, à partir du terme E^r , à la suite spectrale de Serre (en homologie) du fibré $f|_M : M \rightarrow N$. On note $E_{p,q}^r(M)$ son terme E^r de bidegré (p,q) . Si $(k)E_{p,q}^r(B)$ désigne le terme E^r de bidegré (p,q) de la suite spectrale associée à la filtration $(k)F_p(B)$ de B , on a la relation :

$$(k)E_{p,q}^r(B) = E_{p-k, q+k-\mu}^r(M) .$$

D'après le paragraphe 3 (formule (12)), on déduit des filtrations de A et B la filtration suivante de la somme tordue $A \underset{\psi}{\otimes} B$:

$$(29, k) \quad (k)F_p(A \underset{\psi}{\otimes} B) = F_p(A) \otimes (k)F_p(B)$$

$$= [K((Y-U)^{(p)}) \otimes C(F)] \otimes [K(N^{(p-k)}) \otimes C(F_0)]$$

Les morphismes Ψ et $\hat{\Psi}$ sont homotopes et induisent le même morphisme en homologie. Les sommes tordues $A \underset{\Psi}{\otimes} B$ et $A \underset{\hat{\Psi}}{\otimes} B$ ont même homologie. On pourra donc se permettre de noter encore Ψ le morphisme $\hat{\Psi}$.

D'après la proposition 10.1 ; on a $\Psi \left[{}_{(k)}F_p(B) \right] \subset F_{p-(k-v+1)}(A)$.

On en déduit :

Corollaire 11.1. - Dans les conditions de la proposition 10.1, et pour tout entier $k \geq v-1$, la différentielle d_Ψ définie sur la somme tordue $A \underset{\Psi}{\otimes} B$ respecte la filtration (29,k).

Cette filtration induit donc, pour $k \geq v-1$, une filtration de $H_*(X)$, notée :

$$(30,k) \quad {}_{(k)}F_p \left[H_*(X) \right] .$$

La proposition 10.1 montre que Ψ satisfait à la relation (11) du paragraphe 3 (avec $\alpha = k-(v-1)$). Pour que la suite spectrale déduite de la filtration (29,k) du MDG $A \underset{\Psi}{\otimes} B$ converge, il suffit donc que l'on ait $k \geq v-1$ (lemme 3.11).

Le théorème 2.5. est alors une application directe de la proposition 3.12.

IV - PROPRIETES ET APPLICATIONS DE LA SUITE SPECTRALE DES APPLICATIONS

C-STRATIFIEES.

Dans tout ce chapitre, (X, M) désignera un espace C-stratifié orientable; de codimension μ , (Y, N) un espace C-stratifié triangulable, de codimension ν , et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C-stratifiée de fibres (F, F_0) . Sauf indication du contraire, on suppose que les fibres F et F_0 sont connexes.

PROPRIETES.

12) Propriétés.

a) Cas d'un fibré de Serre.

Proposition 12.1. - Soit $f : X \rightarrow Y$ un fibré de Serre, de fibre F , et N un sous-espace fermé de Y , notons $M = f^{-1}(N)$; si les données (X, M) , (Y, N) et f , satisfont aux hypothèses énoncées ci-dessus, le terme E^2 de la suite spectrale (obtenue pour $k = \nu$) de l'application C-stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ est isomorphe au terme E^2 de la suite spectrale de Serre du fibré $f : X \rightarrow Y$.

Démonstration. - L'équivalence d'homotopie $C(X) \xrightarrow{\tau} K(Y) \otimes_{\tau} C(F)$ démontrée au corollaire 4.9. donne lieu à une équivalence d'homotopie :

$$K(Y) \otimes_{\tau} C(F) \xrightarrow{\tau} [K(Y-U) \otimes_{\tau} C(F)] \otimes_{\psi} [K(N) \otimes_{\tau} C(F)]^{(-\nu)}.$$

Cette équivalence d'homotopie respecte la filtration :

$F_p [K(Y) \otimes_{\tau} C(F)] = K(Y^{(p)}) \otimes_{\tau} C(F)$ de $K(Y) \otimes_{\tau} C(F)$ (définie par les lemmes 12.8 et 12.9) et la filtration $(29, \nu)$ de la somme tordue. Un calcul long, mais facile, montre que l'homotopie est d'ordre $r \leq 1$, d'où le résultat ([13], chap. XV, prop. 3.1.).

b) Suite spectrale du premier quadrant.

La suite spectrale d'une application C-stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ converge si $k \geq v-1$. Dans ce cas, elle est toujours dans le secteur $p \geq 0$, $q \geq \inf(0, \mu-k)$. Elle vérifie donc toutes les propriétés des suites spectrales du premier quadrant. En particulier, on a :

1°) Finitude des groupes d'homologie.

Proposition 12.2.- (voir [23], proposition 1 du chapitre III).

Si Λ est un anneau principal, si les systèmes locaux formés par $H_i(F; \Lambda)$ et $H_i(F_0; \Lambda)$ sur $Y-N$ et N respectivement sont triviaux pour tout i , et si les groupes d'homologie de F , F_0 , $Y-N$ et N sont des Λ -modules de type fini en toutes dimensions, il en est de même pour X .

2°) La suite exacte des termes de bas degré.

Proposition 12.3.- (voir [13], théorème 5.12a du chapitre XV).

Les suites spectrales obtenues pour $k = (v+1), \dots, \mu$ donnent lieu, pour $\mu > 2$, à une suite exacte :

$$H_2(X) \rightarrow H_2(Y-N; H_0(F)) \xrightarrow{d^2} H_0(Y-N; H_1(F)) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(Y-N; H_0(F)) \rightarrow 0$$

où la différentielle d^2 est celle de la suite spectrale de Serre du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$.

Pour $\mu = 2$ ($v = 1$), la suite exacte s'écrit :

$$H_2(X) \rightarrow H_2(Y-N; H_0(F)) \oplus H_0(N; H_0(F_0)) \xrightarrow{d^2} H_0(Y-N; H_1(F)) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(Y-N; H_0(F)) \rightarrow 0.$$

3°) Cas où les homologies de $Y-N$, N , F et F_0 sont nulles en grande dimension.

Proposition 12.4.- (voir [23], proposition 3 du chapitre III). Soit

$f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C-stratifiée de fibres (F, F_0) , si Λ

est un corps et si les systèmes locaux formés par $H_i(F; \Lambda)$ et $H_i(F_0; \Lambda)$ sur $Y-N$ et N respectivement sont triviaux pour tout $i \geq 0$, supposons que l'on ait :

$$\begin{aligned} H_p(Y-N) &= 0 \text{ pour } p > n & H_p(N) &= 0 \text{ pour } p > n-v-1 \\ H_p(F) &= 0 \text{ pour } p > m & H_p(F_0) &= 0 \text{ pour } p > m-(\mu-v) + 1 \end{aligned}$$

alors $H_p(X) = 0$ pour $p > m+n$ et $H_{m+n}(X)$ est isomorphe à :

$$H_{m+n}(X) \approx [H_n(Y-N) \otimes H_m(F)] \oplus [H_{n-v-1}(N) \otimes H_{m-(\mu-v)+1}(F_0)] .$$

On remarquera que les conditions portant sur les degrés ne sont pas naturelles puisque, par exemple, si N et $Y-N$ sont des variétés et si $Y-N$ est de dimension n , alors N est de dimension $n-v$.

4°) Suite exacte de Serre.

Proposition 12.5.- (voir [23], proposition 5 du chapitre III). Soit $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C -stratifiée de fibres (F, F_0) , si Λ est un anneau principal, supposons que le système local formé par $H_i(F; \Lambda)$ sur $Y-N$ soit trivial pour tout $i \geq 0$ et qu'il existe des entiers p et q tels que :

- i) $v-1 \leq p \leq \mu$, $p + q \leq \mu$
- ii) $H_i(Y-N; \Lambda) = 0$ pour $0 < i < p$
- iii) $H_i(F; \Lambda) = 0$ pour $0 < i < q$

On a alors la suite exacte :

$$\begin{aligned} H_{p+q-1}(F; \Lambda) &\rightarrow H_{p+q-1}(X; \Lambda) \rightarrow H_{p+q-1}(Y-N; \Lambda) \rightarrow H_{p+q-2}(F; \Lambda) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow H_2(Y-N; \Lambda) \rightarrow H_1(F; \Lambda) \rightarrow H_1(X; \Lambda) \rightarrow H_1(Y-N; \Lambda) \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

L'homomorphisme $d^n : H_n(Y-N; \Lambda) \rightarrow H_{n-1}(F; \Lambda)$, $1 \leq n \leq p+q-1$ est l'homomorphisme de transgression du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$. En posant $q = 1$, on a :

Corollaire 12.6.- Soit $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C-stratifiée de fibres (F, F_0) . Supposons que Λ soit un anneau principal et que le système local formé par $H_i(F; \Lambda)$ sur $Y-N$ soit trivial pour tout $i \geq 0$; supposons de plus que $H_i(X; \Lambda) = 0$ pour tout $i > 0$ et qu'il existe un entier $p \leq \mu-1$ tel que $H_i(Y-N; \Lambda) = 0$ pour $0 < i < p$. Alors, on a $H_i(F, \Lambda) = 0$ pour $0 < i < p-1$.

c) Morphismes de suites spectrales.

Proposition 12.7.- Soient $(_{(k)}E^r, d^r)$ les termes et différentielles de la suite spectrale d'une application C-stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres (F, F_0) et $(E^r(X-M), d_{X-M}^r)$ les termes et différentielles de la suite spectrale de Serre du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$, l'inclusion $X-M \rightarrow X$ induit, pour $r \geq 2$, des homomorphismes :

$$i_*^r : E^r(X-M) \rightarrow (_{(k)}E^r$$

$$i_* : E^\infty(X-M) \rightarrow (_{(k)}E^\infty$$

$$i_* : H_*(X-M) \rightarrow H_*(X)$$

tels que $d^r i_*^r = i_*^r d_{X-M}^r$.

Démonstration.- Avec les notations du paragraphe 11, l'inclusion $X-M \rightarrow X$ induit l'injection naturelle $i : A \rightarrow A \underset{\Psi}{\oplus} B$ définie par $i(a) = (a, 0)$. Celle-ci est un morphisme de MDG compatible avec les filtrations $F_p(A)$ et $(_{(k)}F_p(A \underset{\Psi}{\oplus} B))$ (formule (29, k)). On en déduit la proposition.

d) Filtration de $H_*(X)$ (pour $k = v$).

Nous démontrons ici la proposition 2.10. Celle-ci précise la filtration $(30, k)$ de $H_*(X)$, dans le cas où $k = v$. Elle résulte des deux lemmes suivants :

Lemme 12.8. - Soient (Y, N) un espace C -stratifié triangulable, U un voisinage tubulaire de N dans Y , et ω la projection du fibré $\omega : \partial U \rightarrow N$. Il est possible de construire une triangulation cellulaire (D) de Y satisfaisant aux conditions suivantes :

- i) (D) est compatible avec une triangulation (K_2) de ∂U ,
- ii) toute cellule de (D) est transverse à N (autrement dit, il existe une triangulation (K_1) de N telle que, pour toute q -cellule σ de (D) , $\sigma \cap N$ soit un sous-complexe de dimension $q-v$ de (K_1)),
- iii) pour tout q -simplexe s de (K_1) , $\omega^{-1}(s)$ est un sous-complexe de dimension $q+v-1$ de (K_2) ,
- iv) toute cellule de (D) est contractile.

Démonstration. - Similaire à celle de la proposition 9.2.

Lemme 12.9. - Supposons Y muni de la triangulation définie au lemme 12.8, l'équivalence d'homotopie entre $C(X)$ et

$$A \underset{\Psi}{\oplus} B = \underset{\tau_1}{\left[K(Y-U) \underset{\tau_1}{\oplus} C(F) \right]} \underset{\Psi}{\oplus} \underset{\tau_0}{\left[K(N) \underset{\tau_0}{\oplus} C(F_0) \right]}^{(-\mu)}$$

décrite au corollaire 8.4. respecte les filtrations suivantes :

$$F_p[C(X)] = C(X^p) = C(f^{-1}(D^{(p)}))$$

$$\text{et } F_p \underset{\Psi}{\left[A \underset{\Psi}{\oplus} B \right]} = \underset{\tau_1}{\left[K((Y-U)^{(p)}) \underset{\tau_1}{\oplus} C(F) \right]} \underset{\tau_0}{\oplus} \underset{\tau_0}{\left[K(N^{(p-v)}) \underset{\tau_0}{\oplus} C(F_0) \right]}^{(-\mu)}.$$

Démonstration. - On vérifie que les morphismes induisant l'équivalence d'homotopie respectent les filtrations naturellement induites sur chacune des sommes tordues.

e) Comparaison avec la suite spectrale de I. F  ry.

Nous admettrons ici le résultat :

Proposition 12.10. - Dans les hypothèses suivantes :

- a) X et Y sont localement compacts,
- b) Le couple (Y, N) est un espace C -stratifié orientable,
- c) Y est une variété topologique, N et $Y-N$ sont des variétés topologiques orientées,
- d) F et F_0 sont des variétés topologiques orientées,

la suite spectrale (obtenue pour $k = v+1$) de l'application C -stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres (F, F_0) est duale de la suite spectrale de I. F  ry ([18]; cas particulier de deux strates).

APPLICATIONS.

La plupart des résultats qui suivent sont exprimés en homologie. Il est facile d'en écrire l'équivalent en cohomologie. On supposera que N et $Y-N$ sont connexes par arcs et que les systèmes locaux formés par $H_1(F_0)$ et $H_1(F)$ sur N et $Y-N$ respectivement sont triviaux pour tout i . L'anneau des coefficients (que l'on omettra) sera toujours Λ .

Dans le cas où les homologies réduites de N et $Y-N$ sont nulles en toutes dimensions, la suite spectrale, écrite pour $k = v+1$, permet de retrouver la propriété 1.13. De plus, le morphisme ψ de la suite exacte (2) est donné par la différentielle d^{v+1} de la suite spectrale.

De même, si F_0 a le type d'homologie d'un point et F celui d'une sphère orientée de dimension $\mu-v$, la suite spectrale, écrite pour $k = v$, permet de retrouver la propriété 1.16.

13) Suite exacte de Smith-Gysin.

Proposition 13.1. - Soient (X, M) un espace C -stratifié orientable de codimension μ , (Y, N) un espace C -stratifié triangulable de codimension ν et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C -stratifiée de fibres (F, F_0) . Si F_0 a le type d'homologie d'un point et F celui d'une sphère orientée (de dimension $\mu - \nu > 0$), on suppose en outre que N et $Y - N$ sont connexes par arcs, on a alors la suite exacte de Smith-Gysin :

$$(31) \quad \dots \rightarrow H_p(Y - N) \rightarrow H_{p+\mu-\nu}(X) \rightarrow H_{p+\mu-\nu}(Y - N) \oplus H_{p-\nu}(N) \xrightarrow{d^{\mu-\nu+1}} H_{p-1}(Y - N) \rightarrow \dots$$

Démonstration. - Le terme $E_{p,q}^2$ de la suite spectrale obtenue pour $k = \mu$ est égal à :

$$E_{p,q}^2 = H_p(Y - N; H_q(F)) \oplus H_{p-\mu}(N; H_q(F_0)) .$$

Pour tout entier p fixé, il est nul sauf éventuellement :

$$E_{p,0}^2 = H_p(Y - N) \oplus H_{p-\mu}(N)$$

et
$$E_{p,\mu-\nu}^2 = H_p(Y - N) .$$

En appliquant le lemme classique de deux lignes ([13], XV, théorème 5.11.), on obtient la suite exacte (31).

Cette proposition, ainsi que les corollaires 13.2. et 13.6. ci-dessous ont été obtenus par Bredon dans les cadres suivants : en cohomologie à supports compacts, à l'aide de la suite spectrale de Fâry ([7] ; IV, 12) et en cohomologie de Čech, dans le cas d'actions de S^1 sur une variété différentiable X avec nombre fini de types d'orbites ([8] ; p. 161). Dans les hypothèses de la proposition 12.10., les résultats de [7] et ceux de ce paragraphe sont duaux.

D'après la proposition 12.7., la suite exacte de Gysin du fibré en sphères $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ et la suite exacte (31) entrent dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \rightarrow H_p(Y-N) \rightarrow H_{p+\mu-\nu}(X) \rightarrow H_{p+\mu-\nu}(Y-N) \oplus H_{p-\nu}(N) & \xrightarrow{d^{\mu-\nu+1}} & H_{p-1}(Y-N) \rightarrow \dots \\
 \uparrow = & \uparrow i_* & \uparrow (id, 0) & & \uparrow = \\
 \dots \rightarrow H_p(Y-N) \rightarrow H_{p+\mu-\nu}(X-M) \longrightarrow H_{p+\mu-\nu}(Y-N) & \xrightarrow{\theta} & H_{p-1}(Y-N) \rightarrow \dots
 \end{array}$$

où i_* est induit par l'injection $X-M \rightarrow X$, et où θ est le cap-produit par la classe d'Euler $e \in H^{\mu-\nu+1}(Y-N)$ du fibré $f|_{X-M}$. La première composante de la différentielle :

$$d^{\mu-\nu+1} : H_{p+(\mu-\nu+1)}(Y-N) \oplus H_{p-\nu+1}(N) \rightarrow H_p(Y, N)$$

est donc le cap-produit par e . De même que dans [7] (ex. (21), page 172 et ex. (53), page 117), cela permet de montrer :

Corollaire 13.2. - Supposons, en plus des hypothèses de la proposition 13.1., que Y soit localement compact. Dans ces conditions, on a :

- a) S'il existe un entier α tel que $H_p(X) = 0$ pour $p > \alpha$, alors $H_p(N) = 0$ pour $p > \alpha + \mu - 1$ et $H_p(Y-N) = 0$ pour $p > \alpha + (\mu - \nu) + 1$.
- b) S'il existe un entier β tel que $H_p(X) = 0$ pour $p < \beta$, alors $H_p(N) = 0$ pour $p < \beta - \mu$ et $H_p(Y-N) = 0$ pour $p < \beta$.

Du corollaire 13.2., on déduit le théorème démontré en cohomologie modulo 2 par Conner et Dyer ([14], Théorème 1.1.) :

Théorème 13.3. - Soit $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C -stratifiée de fibres F , une sphère $S^{\mu-\nu}$ orientée, et F_0 , un point, si X est compact et tel que $H^p(X) = 0$ pour $p \geq \alpha$, alors $H^p(M) = 0$ pour $p \geq \alpha$ et $H^p(Y) \approx H^p(N)$ pour $p \geq \alpha - (\mu - \nu)$.

Par une démonstration en tous points analogue à celle de Conner et Dyer [14], on peut alors généraliser les résultats de [3] et [14] comme suit :

Théorème 13.4. - Soit $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C-stratifiée de fibres F, une sphère S^r orientée, et F_0 , un point, si X est une n-sphère homologique, il existe k tel que M soit une $n-k(r+1)$ -sphère homologique.

Fibrations de Hopf.

On déduit immédiatement de la suite exacte (31) :

Corollaire 13.5. - Soit $f : (\mathbb{R}^u, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^v, 0)$ une application C-stratifiée de fibres $(S^{u-v}, 0)$, avec S^{u-v} orientée, alors $\mu = 2(v-1)$.

Rappelons que, en supposant de plus que l'application f est propre, Timourian [27] a montré que l'on ne trouve que les fibrations à singularités de Hopf, avec : $(\mu, v) = (2, 2), (4, 3), (8, 5)$ ou $(16, 9)$ (voir les exemples 1.10 (i) et 1.11 (avec $d = 1$)).

Inégalité de Bredon.

Corollaire 13.6. - Dans l'hypothèse de la proposition 13.1. et si Λ est un corps, posons $m = \mu - v + 1$. Il vient, pour tout entier p :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \dim H_{p-\mu+jm}(N) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \dim H_{p+jm}(X) + \dim H_{p-m}(Y-N)$$

Démonstration. - Identique à ([7] ; IV 12).

On trouvera des équivalents cohomologiques de cette inégalité dans Bredon ([7] ; IV.12) et ([8] ; théorème 10.9., p. 163).

Signalons d'autre part que la suite exacte (31) permet aussi de retrouver la première inégalité du corollaire 1.19.

14) Applications aux actions de groupes.

Dans ce paragraphe, différentiable signifiera différentiable de classe C^∞ .

a) Voisinages tubulaires. ([8] : VI.2). Soient G un groupe de Lie compact, et M une variété différentiable sur laquelle G agit différemment. Un fibré vectoriel différentiable E , de base M , est un G -fibré (différentiable) si G agit différemment sur E , linéairement sur les fibres, et si la projection du fibré est équivariante.

Considérons une variété différentiable X sur laquelle G agit différemment. Il existe une métrique riemannienne sur X pour laquelle G est un groupe d'isométries.

L'ensemble des points fixes par l'action de G , noté $M = X^G$, est une sous-variété de X non nécessairement connexe. Toute composante connexe A de X^G admet un voisinage tubulaire ouvert invariant Ω au sens suivant : il existe un G -fibré vectoriel différentiable E , de base A , et un difféomorphisme équivariant

$$\psi : E \rightarrow \Omega$$

tel que la restriction de ψ à la section nulle de E soit l'inclusion de A dans Ω .

Puisque G est compact, tout voisinage tubulaire ouvert invariant de A contient un voisinage tubulaire T fermé et invariant. T est un voisinage tubulaire de A dans X au sens de la définition 1.1.

Notons $f : X \rightarrow X/G = Y$ la projection de X sur l'espace des orbites et N l'image de X^G par f . Si X^G est connexe et si l'action de G sur X est semi-libre, c'est-à-dire libre en dehors de X^G , l'application $f : (X, X^G) \rightarrow (X/G, N)$ est une application C -stratifiée de fibres $(G, \{e\})$.

b) Actions de S^1 , S^3 et des tores.

Dans toute la suite, où il s'agit d'actions semi-libres de G sur une variété différentiable X , on suppose que X^G et $X/G - X^G$ sont

connexes par arcs et que le système local formé par $H_1(F)$ (où F est homéomorphe à G) est trivial sur $X/G - X^G$.

La suite exacte de Smith-Gysin (proposition 13.1.) et ses corollaires s'appliquent au cas d'actions semi-libres de S^1 et de S^3 (groupe des quaternions de norme 1). On obtient :

Proposition 14.1. - Soit $G = S^n$ l'un des groupes S^1 ou S^3 ; supposons qu'il existe une action semi-libre de G sur une variété différentiable X et que l'ensemble des points fixes X^G soit connexe. Posons $v = \dim X/G - \dim X^G$. Dans ces conditions, on a la suite exacte :

$$\dots \rightarrow H_p(X/G - X^G) \rightarrow H_{p+n}(X) \rightarrow H_{p+n}(X/G - X^G) \oplus H_{p-v}(X^G) \rightarrow H_{p-1}(X/G - X^G) \rightarrow \dots$$

Corollaire 14.2. - Dans les hypothèses de la proposition 14.1., posons $\mu = \dim X - \dim X^G$; s'il existe un entier α tel que $H_p(X) = 0$ pour $p \geq \alpha$, alors $H_p(X^G) = 0$ pour $p \geq \alpha + \mu - 1$ et $H_p(X/G - X^G) = 0$ pour $p \geq \alpha + (\mu - v) + 1$.

Par des démonstrations du même type que celles de [8], la proposition 14.1 permet de retrouver, en homologie, des résultats similaires à ceux de Bredon, notamment les théorèmes 10.9, 10.11, 10.12, de ([8] ; chapitre III). On en déduit un cas particulier d'un résultat de A. Borel ([5] ; XIII).

Théorème 14.3. - Supposons que le tore $G = T^k$ opère sur une n -sphère homologique avec deux types d'orbites et sans points fixes. Pour tout sous-tore $H \subset T^k$ de dimension $k-1$, notons $r(H)$ l'entier, compris entre -1 et n pour lequel X^H est une $r(H)$ -sphère homologique. Si H décrit l'ensemble des sous-tores de T^k de dimension $k-1$, on a :

$$n + 1 = \sum_H (r(H) + 1).$$

On a, bien entendu, convenu que l'ensemble vide est une (-1) -sphère.

Les résultats du paragraphe 1,c s'appliquent également aux actions de S^1 et de S^3 . En particulier, on a :

Théorème 14.4.- Soit $n = 1$ ou 3 , il est impossible de construire une action semi-libre de $G = S^n$ sur une sphère $X = S^m$ et telle que X^G soit connexe et $H_p(X/G - X^G) = 0$ pour tout $p \geq \dim X - \dim X^G - (n+1)$.

Théorème 14.5.- Soit X une variété différentiable de dimension m , telle que $H_m(X) = 0$; il est impossible de construire une action semi-libre de $G = S^n$ ($n = 1$ ou 3) sur X , telle que X^G soit connexe et $H_p(X/G - X^G) = 0$ pour tout $p \geq \dim X - \dim X^G - (n+1)$.

APPENDICE

15) Fibrés sur fibrés en théorie semi-simpliciale.

Nous montrons qu'en théorie semi-simpliciale, un fibré sur fibré peut s'exprimer sous forme de double produit cartésien tordu (Proposition 15.1.). Nous renvoyons à ([6] ; Appendice 1) pour le détail des démonstrations. Contrairement aux notations précédentes, les complexes (semi)-simpliciaux seront notés tels que X . Nous utilisons, sans les rappeler, les définitions de [4], dont le lecteur est supposé avoir connaissance.

Soit $p : X \rightarrow B$ un G -fibré de fibre F ; on suppose que la fibre F est la base d'un G' -fibré $\pi : E \rightarrow F$ de fibre F' et que G est un groupe d'automorphismes du G' -fibré principal $\hat{\pi} : \hat{E} \rightarrow F$ auquel est associé $\pi : E \rightarrow F$ ([4] ; Proposition 4.4.).

Il existe donc un homomorphisme de G dans le groupe des homéomorphismes de $\hat{\pi} : \hat{E} \rightarrow F$ qui commutent avec l'action de G' . L'image de $g \in G$ par cet homomorphisme sera noté \hat{g} . Les homéomorphismes induits sur F (en tant que base de $\hat{\pi} : \hat{E} \rightarrow F$) sont ceux qui définissent l'action de G sur F dans le G -fibré $p : X \rightarrow B$.

L'homéomorphisme $\hat{g} \times 1 : \hat{E} \times F' \rightarrow \hat{E} \times F'$ est compatible avec la relation d'équivalence qui définit $E = \hat{E} \times_{G'} F'$. G est alors un groupe d'homéomorphismes de E qui commute avec π .

On peut définir un G -fibré $\omega : T \rightarrow B$ de fibre E , associé au même G -fibré principal $\hat{p} : \hat{X} \rightarrow B$ que le G -fibré $p : X \rightarrow B$, en posant $T = \hat{X} \times_G E$. Comme l'action de G commute avec π , π induit une application $\lambda : T \rightarrow X$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{X} \times E & \xrightarrow{\pi \times 1} & \hat{X} \times F \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T & \xrightarrow{\lambda} & X
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont les projections canoniques sur le quotient.

Les opérations de G et de G' sur \hat{E} commutent, $\hat{Z} = \hat{X} \times_G \hat{E}$ peut être considéré comme G' -fibré principal de base X , l'action de G' sur \hat{Z} étant définie par l'action de G' sur \hat{E} . On a un isomorphisme :

$$(\hat{X} \times_G \hat{E}) \times_{G'} F' \simeq \hat{X} \times_G (\hat{E} \times_{G'} F')$$

et $\lambda : T \rightarrow X$ est un G' -fibré de fibre F' associé au G' -fibré principal $\hat{\lambda} : \hat{Z} \rightarrow X$.

On dira que T est fibré (en $\lambda : T \rightarrow X$) sur le fibré $p : X \rightarrow B$.

$$\begin{array}{ccc}
 T & & \\
 \downarrow \lambda & \searrow \omega & \\
 X & \xrightarrow{p} & B
 \end{array}$$

On peut alors construire des fonctions tordantes régulières τ, τ' et τ'' (notations ξ de [4]) et des produits cartésiens tordus (réguliers) tels que l'on ait des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc}
 F \times B & \xrightarrow{i_1} & X \\
 \tau & & \\
 F' \times F & \xrightarrow{i_2} & E \\
 \tau' & &
 \end{array}$$

$$F' \times X \xrightarrow[\tau'']{i_3} T \quad E \times B \xrightarrow[\tau]{i_4} T.$$

L'action de G sur $F' \times F$ étant définie comme ci-dessus (par l'intermédiaire de i_2), on définit les doubles produits cartésiens tordus :

$$F' \times (F \times B) \quad \text{et} \quad (F' \times F) \times B$$

$$\tau'' \quad \tau \quad \tau' \quad \tau$$

par :

$$(F' \times (F \times B))_{\tau'' \tau}^n = ((F' \times F) \times B)_{\tau' \tau}^n = F'_n \times F_n \times B_n$$

et avec, pour opérateurs face et dégénérescence :

$$(i) \quad \partial_0(f', f, b) = (\tau''(i_1(f, b)) \cdot \partial_0 f', \tau(b) \partial_0 f, \partial_0 b)$$

$$\text{et } \partial_0(f', f, b) = (\tau(b)(\tau'(f) \cdot \partial_0 f', \partial_0 f), \partial_0 b) \quad \text{respectivement,}$$

$$(ii) \quad \partial_i(f', f, b) = (\partial_i f', \partial_i f, \partial_i b), \quad i > 0$$

$$(iii) \quad s_i(f', f, b) = (s_i f', s_i f, s_i b), \quad i \geq 0.$$

Lemme. - Les applications

$$\mu : F' \times (F \times B) \longrightarrow (F' \times F) \times B$$

$$\tau'' \quad \tau \quad \tau' \quad \tau$$

$$\nu : (F' \times F) \times B \longrightarrow T$$

$$\tau' \quad \tau$$

définies par :

$$\mu(f', f, b) = (f', f, b)$$

$$\nu(f', f, b) = \beta(b)(i_2(f', f), \delta^n) \quad (\text{avec } b \in B_n)$$

où $\{\beta(b)\}$ définit un G -atlas du G -fibré $\omega : T \rightarrow B$ et où δ^n est l'élément générateur de l'ensemble simplicial type Δ^n (voir [4]), sont des isomorphismes (de fibrés de base B).

Remarquons que l'on a :

$$p \circ \lambda \circ v(f', f, b) = \omega \circ v(f', f, b) = b.$$

On en déduit :

Proposition 15.1. - Soit $\lambda : T \rightarrow X$, G' -fibré de fibre F' sur le G -fibré, $p : X \rightarrow B$, de fibre F ; on peut construire des fonctions tordantes τ , τ' et τ'' telles que l'on ait des isomorphismes de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccc} C(F' \times_{\tau''} (F \times_{\tau} B)) & \xrightarrow{\mu} & C((F' \times_{\tau'} F) \times_{\tau} B) \\ C((F' \times_{\tau'} F) \times_{\tau} B) & \xrightarrow{\nu} & C(T). \end{array}$$

De plus, si $B^{(p)}$ est une filtration de B et si $T^p = \omega^{-1}(B^{(p)})$, μ et ν respectent les filtrations induites sur chacun des complexes.

B I B L I O G R A P H I E

=====

- [1] ARMSTRONG M.A. - Extending triangulations,
Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 701-704.
- [2] ANTOINE P. - Notes sur les isomorphismes de Thom,
d'après un cours de H. Cartan
Multigraphié, Lille 1964-65.
- [3] ANTONELLI P.L. - Structure theory for Montgomery-Samelson
fiberings between manifolds I,
Canadian J. Math., 21 (1969), 170-179.
- [4] BARRATT-GUGENHEIM-MOORE - On semisimplicial fibre-bundles,
Am. J. Math., 81, (1959), 639-657.
- [5] BOREL A. - Seminar on transformation groups,
Annals of Mathematic Studies, 46,
Princeton University Press, 1960.
- [6] BRASSELET J.P. - Suite spectrale des applications C^0 -stratifiées,
(multigraphié) - Thèse - Lille 1977.
- [7] BREDON G.E. - Sheaf Theory,
Mac Graw Hill Series in Higher Mathematics,
1967.
- [8] BREDON G.E. - Introduction to compact transformation groups,
Academic Press, 1972.
- [9] BROWN M. - Locally flat imbeddings of topological
manifolds,
Ann. of Math., 75 (1962), 331-341.
- [10] CARTAN H. - Topologie Algébrique,
Séminaire E.N.S., 1948-49.
- [11] CARTAN H. - Algèbres d'Eilenberg-Mac Lane et homotopie,
Séminaire E.N.S., 1954-55.
- [12] CARTAN H. - Quelques questions de topologie,
Séminaire E.N.S., 1956-57.
- [13] CARTAN H. et EILENBERG S. - Homological Algebra,
Princeton Mathematical Series, 1956.
- [14] CONNER P.E. et DYER E. - On singular fiberings by spheres,
Mich. Math. J. 6, (1959), 303-311.

- [15] EILENBERG S. - Singular Homology Theory,
Ann. of Math. 45, (1944), 407-447.
 - [16] EILENBERG S. et MAC LANE S. - On the groups $H(\pi, n)$.
Ann. of Math. 58, (1953), 55-106.
 - [17] EILENBERG S. et STEENROD N. - Foundations of Algebraic Topology,
Princeton Mathematical Series, 1952.
 - [18] FÁRY I. - Valeurs critiques et Algèbres spectrales
d'une application,
Ann. of Math. 63, (1956), 437-490.
 - [19] GUGENHEIM V.K.A.M. - On a theorem of E.H. Brown,
Ill. J. Math. 4, (1960), 292-311.
 - [20] HU S.T. - On fiberings with singularities,
Mich. Math. J. 6, (1959), 131-149.
 - [21] HUDSON J.F.P. - Piecewise linear Topology,
Benjamin, 1969.
 - [22] MONTGOMERY D. et SAMELSON H. - Fiberings with singularities,
Duke Math. J. 13, (1946), 51-56.
 - [23] SERRE J.P. - Homologie singulière des espaces fibrés,
Ann. of Math. 54, (1951), 425-505.
 - [24] SHIH W. - Homologie des espaces fibrés,
Publications Mathématiques, IHES, n° 13.
 - [25] STEENROD N. - The topology of fibre bundles,
Princeton University Press (1951).
 - [26] THOM R. - Ensembles et morphismes stratifiés,
Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 240-284.
 - [27] TIMOURIAN J.G. - Fiber bundles with discrete singular set,
J. Math. Mech., 18, (1968), 61-70.
-