

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOIS MURAT

Compacité par compensation

Mémoires de la S. M. F., tome 60 (1979), p. 125-127

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__60__125_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPACTITE PAR COMPENSATION

François MURAT*

Soient Ω un ouvert (borné ou non) de \mathbb{R}^N et $A_i (i = 1, 2, \dots, N)$ des matrices appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^{m'})$; Définissons Λ par :

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{C}^m \mid \xi \in \mathbb{R}^N, \left(\sum_{i=1}^N \xi_i A_i \right) \lambda = 0, \xi \neq 0 \}$$

Le résultat principal de cet exposé, qui présente des résultats obtenus en collaboration avec Luc Tartar, est le suivant :

THEOREME.

Si une matrice M appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)$ vérifie

$$(1) \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad \operatorname{Re}(M\lambda, \lambda) \geq 0$$

alors pour toute suite telle que :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{C}^m) \text{ faible} \\ \sum_{i=1}^N A_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \sum_{i=1}^N A_i \frac{\partial u_\infty}{\partial x_i} \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{C}^{m'}) \text{ faible} \\ (M u_n, u_n) \rightharpoonup \mu_\infty \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{C}) \end{array} \right.$$

on a

$$(3) \quad \operatorname{Re} \mu_\infty \geq \operatorname{Re}(M u_\infty, u_\infty) \quad \blacksquare$$

* Université P. et M. Curie (Paris VI) et CNRS ,
 Laboratoire d'Analyse Numérique,
 Tour 55-65, 5^{ème} étage, 4 Place Jussieu,
 75230 PARIS CEDEX 05.

Il s'agit là d'un résultat de semi-continuité inférieure faible de la forme bilinéaire $u \rightarrow (Mu, u)$.

Ce théorème a une réciproque (Condition de Legendre-Hadamard) :

Si une matrice M est telle que pour toute suite vérifiant (2), on ait la propriété (3), alors la matrice M vérifie (1).

Du théorème on déduit comme cas particuliers les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.

Soit Ω un ouvert (borné ou non) de \mathbb{R}^N et u_n et v_n deux suites telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{C}^N) \text{ faible} \\ v_n \rightharpoonup v_\infty \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{C}^N) \text{ faible} \\ \operatorname{div} u_n \text{ et } \operatorname{rot} v_n \text{ bornés dans } L^2(\Omega; \mathbb{C}) \text{ et } L^2(\Omega; \mathbb{C}^{N^2}) \end{array} \right. \quad (1)$$

alors les produits scalaires $(u_n, v_n) = \sum_{i=1}^N (u_n)_i (v_n)_i$ vérifient :

$$(u_n, v_n) \rightarrow (u_\infty, v_\infty) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{C}) \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 2.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , et u_n et v_n deux suites telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{C}) \\ v_n \rightharpoonup v_\infty \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{C}) \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \text{ et } \frac{\partial v_n}{\partial x_2} \text{ bornés dans } L^2(\Omega; \mathbb{C}) \end{array} \right.$$

alors les produits $u_n v_n$ vérifient :

$$u_n v_n \rightharpoonup u_\infty v_\infty \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{C}) \quad \blacksquare$$

(1) si $\varphi \in (\mathcal{D}'(\Omega))^N$, on définit $\operatorname{rot} \varphi \in (\mathcal{D}'(\Omega))^{N^2}$ par :

$$(\operatorname{rot} \varphi)_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \quad 1 \leq i, j \leq N$$

APPLICATION

La proposition 1 a d'importantes applications en théorie de l'homogénéisation (cf. par exemple [3]).

D'autre part ce type de résultats permet d'obtenir des théorèmes d'existence de solutions pour certains problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Ainsi, on déduit de la proposition 2 que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, où $\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$, le système

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + u_1 + \left(\int_{\Omega} \varphi u_1 u_2 \right) u_2 = f_1 \quad \text{dans } \Omega \\ -\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + u_2 - \left(\int_{\Omega} \varphi u_1 u_2 \right) u_1 = f_2 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{si } x_1 = a_1 \text{ ou } b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{si } x_2 = a_2 \text{ ou } b_2, \quad a_1 < x_1 < b_1 \end{array} \right.$$

a une solution unique telle que $u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ appartiennent à $L^2(\Omega)$.

Enfin, ce type de résultats permet de montrer que l'infimum de certaines fonctionnelles non convexes est atteint. On trouvera un exemple relatif à un problème d'élasticité non linéaire dans [1].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] John M. BALL

Convexity Conditions and Existence Theorems in Non Linear Elasticity .
Archiv for Rational Mechanics and Analysis 63, (4), 337-403.

[2] François MURAT

Compacité par Compensation .
Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université
Paris VI, 1976, n°14.
A paraître dans Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1978).

[3] Luc TARTAR

Cours Peccot au Collège de France, (1977), rédigé par F. MURAT.
A paraître.