

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MARCEL CHADEYRAS

**Essai d'une théorie noethérienne homogène pour
les anneaux commutatifs dont la graduation est
aussi générale que possible**

Mémoires de la S. M. F., tome 22 (1970)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1970__22__3_0

© Mémoires de la S. M. F., 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESSAI D'UNE THÉORIE NOÉTHÉRIENNE HOMOGÈNE
POUR LES ANNEAUX COMMUTATIFS DONT LA GRADUATION
EST AUSSI GÉNÉRALE QUE POSSIBLE

par

Marcel CHADEYRAS (*)

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION.	5
CHAPITRE I	
<u>LES ANNEIDES ET CERTAINES DE LEURS PROPRIETES ELEMENTAIRES</u>	
1 - Notions d'annéïde et de modulofide.	20
2 - Anneaux et modules associés. Sous-annéïdes et sous-modulofides. . . .	23
3 - La notion de graduation.	25
4 - Quotients - Morphismes	29
CHAPITRE II	
<u>PHENOMENE D'AGGLUTINATION. ANELS ET MONELS</u>	
1 - Le phénomène d'agglutination.	34
2 - Anels et monels.	37
3 - Structure des agglutinés.	47
4 - Définition des polynômes.	61
CHAPITRE III	
<u>HOMOMORPHISMES. IDEAUX ET SOUS-MONELS</u>	
1 - Propriétés des homomorphismes.	67
2 - Opérations sur les idéaux.	74
3 - Idéaux premiers, primaires, maximaux.	77
4 - Anels de fractions.	83
5 - Idéaux larges.	92

(*) Thèse Sc. Math. Clermont-Ferrand, 1969.

CHAPITRE IV

PROPRIETES NOETHERIENNES GENERALES

1 - Anels et monels noethériens.	97
2 - Le théorème de Hilbert.	102
3 - Monoïdes noethériens.	109

CHAPITRE V

ANNEIDES NOETHERIENS FORTS

1 - Décomposition primaire.	121
2 - Intersection des puissances d'un idéal.	125
3 - Annéides de fractions.	134
BIBLIOGRAPHIE.	141
INDEX DES NOTATIONS	142
INDEX TERMINOLOGIQUE.	142

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude des anneaux gradués commutatifs à graduation aussi générale que possible, dont les idéaux homogènes satisfont à la condition noethérienne : toute chaîne strictement croissante d'idéaux homogènes est finie (on verra que cela n'implique nullement la condition analogue pour les idéaux quelconques). Pour faire comprendre l'expression "graduation aussi générale que possible", rappelons d'abord les diverses significations que le terme "anneau gradué" a eues jusqu'à présent en Algèbre. Dès le début de la théorie des anneaux sont apparus les premiers spécimens de cette notion, tels les anneaux de polynômes ou de séries formelles à plusieurs variables. Bien plus tard, quand d'autres anneaux du même type sont apparus (tels les anneaux de classes d'homologie et de cohomologie) la notion générale de grade s'est dégagée comme synthèse des notions particulières comme le degré (total, ou par rapport à l'ensemble des variables) d'un monôme, ou le poids d'un monôme lorsqu'on attribue un poids à chaque variable. Et on a appelé anneaux gradués des anneaux commutatifs où certains éléments non nuls, dits homogènes, sont munis d'un grade $\omega(a)$; tout élément non nul d'un tel anneau est somme libre d'éléments homogènes. Ces grades (pour lesquels ab \neq 0 entraîne $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$) étaient toujours supposés parcourir une partie stable d'un groupe additif de type \mathbb{Z} ou \mathbb{Z}^n . (0 est parfois considéré comme homogène de grade ou indéterminé, ou absorbant ∞). D'autres anneaux gradués sont apparus ; par exemple les squelettes des corps valués, cas particulier des corps des [3], qui sont parties homogènes de certains anneaux, gradués par un groupe quelconque, commutatif ou non. Pour certains anneaux, les grades parcourent un ensemble plus général muni d'une loi de composition interne.

Jusqu'ici, dans les cas concrets d'anneaux gradués rencontrés dans diverses branches mathématiques, les grades parcourent toujours une partie convenable d'un groupe commutatif. Aussi, N.Bourbaki définit la notion d'anneau gradué dans le seul cas où les grades parcourent une partie d'un monoïde ou demi-groupe (ensemble muni d'une loi interne associative) commutatif, avec élément neutre. Et, de plus, il se restreint souvent au cas où le monoïde est simplifiable (c'est-à-dire a tous ses éléments réguliers), ou même est un groupe. Notons qu'il définit d'abord un groupe G commutatif gradué de type Δ (où Δ est un ensemble quelconque) comme une décomposition de G en somme directe de sous-groupes :
$$G = \bigoplus_{\lambda \in \Delta} G_{\lambda}.$$

Les définitions de N.Bourbaki appellent d'autres remarques.

L'ensemble des grades des éléments non nuls d'un anneau gradué est une partie d'un monoïde commutatif Δ , noté additivement, et ayant un élément neutre 0. N.Bourbaki admet que certains grades $\delta \in \Delta$ puissent être "vides", c'est-à-dire qu'aucun élément non nul ne soit de grade δ . Ce point de vue sera adopté dans ce travail, car il a des avantages certains. D'une part, on pourra considérer, simultanément, toute une famille d'anneaux gradués tels que les grades des éléments non nuls de chaque anneau parcourent une partie (dépendant de l'anneau) d'un même ensemble. D'autre part, considérons un seul anneau gradué. Il peut arriver (par exemple dans les gradués de certains anneaux locaux) que, pour certains grades α et β , quels que soient les éléments a de grade α et b de grade β , on ait $ab = 0$. Dans ce cas, la structure de l'anneau n'indique pas quel peut être le composé des grades α et β , ce que cachait la donnée préalable du composé par la donnée du monoïde. Si, inversement, on part de la seule structure d'anneau dont le groupe additif est gradué par l'ensemble Δ , on peut ou bien supposer non défini le composé de α et β , et la loi interne sur Δ , non partout définie, sera malcommode. Ou bien on peut prendre pour composé l'un quelconque des grades $\delta \in \Delta$; mais alors Δ sera-t-il plongeable dans un groupe, ou même seulement dans un monoïde? Dans la structure plus générale où nous nous placerons, nous n'imposerons à la loi de composition sur Δ , outre d'être partout définie, que la condition : pour tous $a, b \in A$, si $ab \neq 0$, $\omega(ab)$ est égal au composé de $\omega(a)$ et $\omega(b)$. Enfin, N.Bourbaki se limite par une hypothèse générale de commutativité des anneaux et de leurs monoïdes de grades. Cela restreint le champ d'application de la théorie; par exemple sont exclus les linéarisés (ou anneaux associés) des corps non commutatifs. Toutefois, ce dernier point est peu important dans la perspective de notre travail, consacré essentiellement aux anneaux commutatifs.

Rappelons donc la définition de N.Bourbaki, une des plus générales que l'on trouve actuellement. On se donne un anneau A commutatif et unitaire, un monoïde Δ (que nous noterons ici multiplicativement) commutatif et possédant un élément neutre, noté 1, et une application φ de Δ dans l'ensemble $S(A)$ des sous-groupes du groupe additif de A , définie par $\varphi(\lambda) = A_\lambda$. On dit que le triple (A, Δ, φ) (ou, par abus de langage, que A) est un anneau gradué de type Δ , et que Δ est une graduation de A si et seulement si : (1) le groupe additif de A est égal à $\bigoplus_{\lambda \in \Delta} A_\lambda$; (2) pour tous $\lambda, \mu \in \Delta$, on a $A_\lambda A_\mu = \{xy; x \in A_\lambda, y \in A_\mu\} \subset A_{\lambda\mu}$. L'ensemble $H = \bigcup_{\lambda \in \Delta} A_\lambda$ est dit la partie homogène de l'anneau gradué A , et les éléments de H sont dits éléments homogènes de A .

Cette nouvelle structure est donc construite à partir de structures

données, en leur imposant certaines conditions de coordination. Mais, on voit aisément que la donnée de la partie homogène H , munie de l'addition et de la multiplication induites par celles de A , suffit à déterminer, à une isomorphie près, presque tout le reste de la structure. En effet, deux éléments non nuls a, b de H appartiennent à un même A_λ si et seulement si leur somme est dans H ; ils sont alors dits "addibles" dans H . Comme 0 appartient à tout A_λ , nous notons⁽¹⁾ $A_\lambda^* = A_\lambda \setminus \{0\}$ et $H^* = H \setminus \{0\}$. L'addibilité est une relation d'équivalence dans H^* dont les classes sont les A_λ^* non vides. Ainsi, le support et la structure additive de H déterminent, indépendamment de Δ et φ , les A_λ^* non vides, les $A_\lambda = A_\lambda^* \cup \{0\}$ correspondants, et l'ensemble $D^*(H) = \{A_\lambda; \lambda \in \Pi\}$ de ces derniers (on désigne par Π l'ensemble des grades λ non vides). Puisque (A, Δ, φ) est un anneau gradué, chaque A_λ est un groupe abélien pour l'addition induite par celle de H , et $\lambda \neq \mu$ implique $A_\lambda \cap A_\mu = \{0\}$; le groupe additif de A est la somme directe $\bigoplus_{\lambda \in \Pi} A_\lambda$. En vertu de la condition (2) de la définition, la multiplication est partout définie sur H ; elle est aussi commutative, associative, et distributive par rapport à l'addibilité et à l'addition de H ; elle définit, par distributivité, la multiplication dans $A = \bigoplus_{\lambda} A_\lambda$. Comme $\bar{\varphi}^{-1} : A_\lambda \mapsto \lambda$ est une bijection de $D^*(H)$ sur Π , cet ensemble de grades non vides est défini, à une bijection près, par la donnée de H . De plus, si $\lambda, \mu \in \Pi$ sont tels que $A_\lambda A_\mu \neq \{0\}$, leur composé $\lambda \mu$ est déterminé par la structure de H , comme l'unique $\delta \in \Pi$ tel que $A_\lambda A_\mu \subset A_\delta$. Donc Π est défini, par la structure de H , à une isomorphie près pour la composition des grades λ, μ tels que $A_\lambda A_\mu \neq \{0\}$.

Les seuls caractères que la structure de H ne détermine pas sont l'ensemble $\Delta \setminus \Pi$ des grades vides et la composition des grades $\lambda, \mu \in \Delta$ tels que $A_\lambda A_\mu = \{0\}$. Ces caractères n'ont pratiquement aucun rôle dans l'anneau gradué. Aussi il semble naturel, dans la structure d'anneau gradué, de ne considérer comme essentiel que ce qui est déterminé par la donnée de H et de sa structure. Ainsi, deux structures (A, Δ, φ) et (A', Δ', φ') pourront être considérées comme un même anneau gradué si leurs parties homogènes respectives H et H' , munies de leurs addition et multiplication, coïncident. Cela établit un isomorphisme canonique entre A et A' , que l'on considérera comme une identification. Quant aux applications $\varphi : \Delta \rightarrow D(H) = D^*(H) \cup \{\{0\}\}$ et $\varphi' : \Delta' \rightarrow D(H)$, on les considère comme différentes graduations possibles de cet anneau gradué (on pourra les dire graduations équivalentes de l'anneau abstrait $A = A'$).

(1) On notera $E \setminus F$, et non $E - F$, la "différence ensembliste" $\{x \in E; x \notin F\}$, afin d'éviter toute interférence avec les notations algébriques. Pour tout ensemble E possédant un élément "zéro" noté 0 , on posera généralement $E^* = E \setminus \{0\}$.

Ce procédé est analogue à celui concernant les valuations : on considère deux valuations (au sens de M.Krasner, [3], exposé 3) d'un même corps K comme équivalentes si l'une est puissance positive de l'autre. Et on considère une classe de valuations équivalentes comme une "place" (au sens classique), généralisation de la notion de point de la géométrie algébrique classique. On sait que l'équivalence de deux valuations peut se caractériser par l'égalité de l'anneau V de valuation (considéré comme anneau abstrait, et indépendamment de son inclusion dans le corps valué). K étant le corps des fractions de V , la structure de V détermine K à l'identification canonique près ; et il détermine la "place", c'est-à-dire la famille, dépendant d'un paramètre réel positif, des valuations d'anneau V . La donnée de V revient à définir les valuations considérées à une isomorphie près de leurs groupes, c'est-à-dire à définir tout ce qu'ont en commun ces valuations de la même place. La valeur particulière du paramètre, dans chaque valuation est un caractère secondaire que V ne fournit pas. On voit donc une certaine analogie de conception entre d'une part l'anneau gradué A (au sens précédent), la structure homogène H , et les différentes applications $\varphi : \Delta \rightarrow D(H)$, et d'autre part le corps valué K , l'anneau de valuation V , et les différentes valeurs du paramètre dont dépend la famille des valuations équivalentes d'anneau V .

Cependant, comme on l'a vu plus haut, la donnée de H renseigne en partie sur φ . Si $\lambda, \mu \in \Delta$ sont non vides, et si $\varphi(\lambda) \varphi(\mu) = A_\lambda A_\mu \neq \{0\}$, le grade $\lambda \mu$ n'est pas vide et l'on a $\varphi(\lambda) \varphi(\mu) \subset \varphi(\lambda \mu)$. Organisons donc $\Delta_0 = D(H)$ par la loi partielle suivante : pour tous $S, T \in D(H)$ tels que $ST \neq \{0\}$,

définissons le composé $S * T$ comme l'unique élément U de $D(H)$ tel que $S T \subset U$.

Alors, φ induit une bijection de Π sur $D^*(H)$ telle que $\varphi(\lambda \mu) = \varphi(\lambda) * \varphi(\mu)$ chaque fois que le composé à gauche est défini. Supposons, comme nous le ferons dans tout ce travail, que Δ possède un élément vide absorbant, noté 0 (si un tel élément n'existe pas déjà, on peut l'adjoindre à Δ sans changer le fond du problème). Alors, φ induit une bijection φ_0 de $\Pi \cup \{0\}$ sur $D(H)$ puisque $\varphi(0) = \{0\}$. On voit donc que la donnée de φ équivaut à celle :

(a) de l'inverse $\psi : D(H) = \Delta_0 \rightarrow \Pi \cup \{0\}$ de sa bijection φ_0 ;

(b) de l'extension de $\Pi \cup \{0\}$ en un ensemble plus grand Δ ; (c) de la fermeture de la transportée par ψ de la loi partielle sur $D(H)$, en une loi partout définie sur Δ , associative, et admettant l'élément absorbant 0 .

Définissons une application canonique $\omega_0 : H \rightarrow D(H) = \Delta_0$ par $\omega_0(0) = \{0\}$ et en prenant pour $\omega_0(a)$, lorsque $a \neq 0$, l'unique élément de $D(H)$ qui contienne a . On appellera $\omega_0(a)$ le grade propre de a . Si on pose $\omega = \psi \circ \omega_0$, on appellera $\omega(a)$ le grade de a dans la graduation définie par φ (ou, par abus de langage, dans la graduation Δ). H étant donnée, il est clair que la donnée

de ψ est équivalente à celle de ω .

Sans la condition d'associativité de la loi de Δ exigée par N. Bourbaki, la graduation la plus simple de l'anneau gradué considéré aurait été la suivante : prendre Δ_0 pour ensemble de grades (en posant $\{0\} = 0$), l'identité sur Δ_0 pour application ψ , et, lorsque S et T dans Δ_0 sont tels que $S \cap T = \{0\}$, poser $S * T = 0$. Si la loi sur Δ_0 est associative, donc satisfait à la définition de N. Bourbaki, on peut l'appeler graduation propre de l'anneau gradué. La multiplication de H étant associative, on pourrait s'attendre à priori à ce qu'il en soit toujours ainsi. Mais dans cette analyse de la notion d'anneau gradué au sens de N. Bourbaki que nous a suggérée M. Krasner, nous avons constaté que la loi sur Δ_0 n'est pas forcément associative, même en choisissant autrement les composés $S * T$ lorsque $S \cap T = \{0\}$. Et cela arrive même dans des cas simples.

Revenons à l'analogie avec la théorie des valuations. Dans cette théorie, l'anneau V de valuation est déterminé par la structure plus compliquée de son corps valué de fractions ; et V permet de reconstruire cette structure, à l'équivalence de valuation près. On renverse ensuite le procédé, en caractérisant axiomatiquement tout anneau abstrait qui est anneau de quelque valuation de son corps de fractions ; on obtient, à partir de cette classe d'anneaux, toutes les places possibles par la construction rappelée plus haut. M. Krasner nous a suggéré d'appliquer une méthode analogue à la théorie des anneaux gradués (caractériser axiomatiquement toute partie homogène H qui est celle de quelque anneau gradué ; puis obtenir à partir de là tous les anneaux gradués possibles), en débarrassant la définition de N. Bourbaki des restrictions qui n'empêchent pas la construction à effectuer, et des conditions concernant la partie non essentielle de la structure. On abandonne donc l'hypothèse de commutativité de l'anneau A et de l'ensemble Δ des grades, ainsi que l'existence d'un élément neutre dans Δ . (Cependant, ces hypothèses seront reprises dans la majeure partie de ce travail, consacré aux anneaux commutatifs). Mais surtout, on n'imposera des conditions qu'aux seuls grades non vides, et on n'imposera l'associativité qu'aux triples α, β, γ tels que $A_\alpha A_\beta A_\gamma \neq \{0\}$. Bien entendu, on maintient les conditions : (1) $A = \bigoplus_{\lambda \in \Pi} A_\lambda$ (en éliminant les grades vides) ; (2) $A_\alpha A_\beta \subset A_{\alpha\beta}$. On remarque alors que, lorsque $A_\alpha A_\beta A_\gamma \neq \{0\}$, l'associativité du produit de α, β, γ vient de (2) et de l'associativité dans l'anneau.

Ainsi, on appellera finalement anneau gradué au sens le plus général la structure (A, Π, f) suivante : A est un anneau arbitraire, Π est un ensemble muni d'une loi de composition en général partielle, et f est une application de Π dans l'ensemble $S^*(A)$ des sous-groupes $\neq \{0\}$ du groupe

additif de A . Ces données vérifient les axiomes : ($\forall \alpha \in \Pi$, on notera $f(\alpha) = A_\alpha$):
 1° $\forall \alpha, \beta \in \Pi$, $\alpha \beta$ est défini si et seulement si $A_\alpha A_\beta \neq \{0\}$; 2° si $\alpha \beta$ est défini, on a $A_\alpha A_\beta \subset A_{\alpha \beta}$; 3° le groupe additif de A est $\bigoplus_{\lambda \in \Pi} f(\lambda) = \bigoplus_{\lambda \in \Pi} A_\lambda$.

On appelle partie homogène de cet anneau l'ensemble $H = \bigcup_{\lambda \in \Pi} A_\lambda$ organisé par l'addition partielle et la multiplication induites par celles de A . On considère que les structures (A, Π, f) et (A, Π', f') sont un même anneau gradué s'il existe un isomorphisme $\eta: \Pi' \rightarrow \Pi$ tel que $f' = f \circ \eta$. Une manière canonique de définir Π et f est de prendre pour Π l'ensemble $D^*(H) = \{A_\lambda; \lambda \in \Pi\}$ (il est indépendant du choix de Π), muni de la loi $S * T$ (avec $S, T \in D^*(H)$) définie si et seulement si $S T \neq \{0\}$ par $S T \subset S * T$; et de prendre pour f l'identité de $D^*(H)$. On définira les graduations possibles de l'anneau gradué considéré comme les couples (Δ, φ) où Δ est un ensemble muni d'une loi de composition partout définie et ayant un élément absorbant 0 , et où φ est une application $\Delta \rightarrow \Delta_0 = D(H)$, injective sur l'image réciproque $\varphi^{-1}(D^*(H))$, et telle que $\varphi(0) = \{0\}$ et que $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \subset \varphi(\alpha\beta)$ pour tous $\alpha, \beta \in \Delta$. (On dira souvent : la graduation Δ, φ étant sous-entendue).

Il semblerait alors souhaitable, pour la commodité, de restreindre le choix de Δ aux cas où sa loi est associative (nous dirons : aux graduations associatives). Ce fut un étonnement (partagé, je crois, par MM. Krasner et Samuel) de constater qu'un anneau gradué (au sens précédent (A, Π, f)) peut très bien n'avoir aucune graduation associative. On le voit dans certains cas très simples, lorsque la loi partielle de Π n'est déjà pas associative. Ce phénomène ne peut se produire que pour des triples de grades $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$ tels que $A_\alpha A_\beta A_\gamma = \{0\}$; si les produits $A_\alpha A_\beta$ et $A_\beta A_\gamma$ sont différents de $\{0\}$, et s'il en est de même de $A_{\alpha\beta} A_\gamma$ et de $A_\alpha A_{\beta\gamma}$, les produits $(\alpha\beta)\gamma$ et $\alpha(\beta\gamma)$ sont définis dans Π ; mais rien ne les oblige à être égaux, comme on le montrera. On verra même un exemple d'anneau gradué où Π est un ensemble fini muni d'une loi partout définie et commutative, mais, à part cela, quelconque. Ce dernier exemple, il est vrai, est téréatologique; il s'étend au cas où Π est dénombrable. On est donc obligé d'abandonner toute condition préalable d'associativité sur les grades. Donc, un anneau gradué au sens considéré possèdera toujours une graduation propre Δ_0 , qui sera ou non associative. On verra que la plus grande partie de ce travail est indépendante de l'associativité de la graduation. On verra par contre certains résultats importants où l'hypothèse d'associativité semble indispensable. Aussi, on considèrera de préférence les graduations associatives, s'il en existe. De même, nous éviterons toute complication artificielle, lorsque la classe d'anneaux gradués le permet : Pour les anneaux commutatifs, nous nous limiterons à leurs graduations

commutatives. Pour les anneaux unitaires où 1 est homogène, nous nous limiterons presque toujours aux graduations Δ où le grade de 1 est neutre.

Passons à la caractérisation axiomatique de la partie homogène H de ces anneaux gradués. H satisfait évidemment aux axiomes suivants (a addible à b sera noté $a \# b$) :

I. H est un monoïde par rapport à sa multiplication, et possède un élément (bilatéralement) absorbant 0 .

II. 0 est addible avec tout élément de H ; l'addibilité est réflexive, symétrique ($a \# b$ implique $b \# a$) et presque transitive (si $b \neq 0$, les relations $a \# b$ et $b \# c$ impliquent $a \# c$). Pour tout élément a non nul de H , l'ensemble $A(a) = \{x \in H ; x \# a\}$ est un groupe abélien pour l'addition induite par celle de H .

III. La multiplication est bilatéralement distributive par rapport à l'addibilité et à l'addition : pour tout $c \in H$, $a \# b$ implique $ca \# cb$, $ac \# bc$, $c(a + b) = ca + cb$, $(a + b)c = ac + bc$.

Inversement, lorsqu'un ensemble H , muni d'une multiplication et d'une addition partielle, vérifie ces axiomes, on montre aisément qu'il est la partie homogène d'un anneau gradué : L'élément neutre 0_a de tout groupe $A(a)$ est 0 ; en effet $0 \in A(a)$, et comme 0_a se caractérise par $0_a = 0_a + 0_a$, on en déduit $0 = 00_a = 0(0_a + 0_a) = 00_a + 00_a = 0 + 0$, d'où $0 = 0_a$.

Sur $H^* = H \cup \{0\}$, l'addibilité est évidemment une relation d'équivalence ; ainsi, les $A^*(a) = A(a) \cup \{0\}$ distincts forment une partition de H^* , et les groupes additifs $A(a)$ distincts ont deux à deux en commun le seul élément 0 . Si donc $D^*(H)$ est l'ensemble de ces groupes, on prendra leur somme directe

$\oplus_{G \in D^*(H)} G$ pour groupe additif de l'anneau A à construire. On y définit la multiplication à partir de celle de H , grâce à sa nécessaire distributivité bilatérale par rapport à l'addition dans A . Alors, l'associativité et la distributivité pour l'addition de la multiplication dans A se déduisent immédiatement des propriétés d'associativité et de distributivité de celle de H . De plus, si la multiplication de H est commutative, celle de A l'est aussi ; si un élément est unité dans H , il l'est aussi dans A . Pour support de Π on prendra $D^*(H)$, et pour f l'application identique. Seules les conditions 1° et 2° restent à remplir. Pour tous $S, T \in D^*(H)$, tous $a, a' \in S$ et tous $b, b' \in T$, les conditions $a \# a'$, $b \# b'$ impliquent $ab \# a'b'$. En effet, elles entraînent par distributivité $ab \# a'b$ et $a'b \# a'b'$, $ab' \# a'b'$ et $ab \# ab'$; si $ab' \neq 0$, ou si $a'b \neq 0$, la presque transitivité implique $ab \# a'b'$; sinon, la conclusion est encore vraie, selon une remarque de M. Krasner, car on a alors $ab = a(b + b') \# a'(b + b') = a'b'$. En particulier, dans tous les cas où $S \cap T \neq \{0\}$, il existe un unique élément $U \in D^*(H)$ tel que $S \cap T \subset U$; et on

prendra alors par définition U comme composé de S et T . Les conditions 1° et 2° sont alors vérifiées.

La structure H satisfaisant aux axiomes I, II, III s'appelle annéïde. Elle a été introduite par M. Krasner [4], qui l'a précisée dans ses cours et séminaires. Ainsi, le noyau ultime et intrinsèque de la notion d'anneau gradué est la notion d'annéïde. Dès lors, deux manières d'étudier les anneaux gradués sont possibles : à partir de l'anneau et d'une de ses graduations, comme l'ont fait jusqu'ici la plupart des auteurs. Ou bien à partir de l'annéïde H , méthode adoptée par M. Krasner dans la théorie des corpoïdes [4], et qui sera généralement adoptée dans ce travail. (Certains résultats seront reformulés en termes d'anneaux gradués). Dans la première méthode, l'addition est partout définie. Mais cet avantage est plus apparent que réel dans bien des cas : d'abord la non-addibilité d'éléments de H se retrouve dans la non-homogénéité de leur somme. Mais surtout, les notions homogènes sont obtenues en imposant, aux notions correspondantes de l'anneau abstrait, certaines conditions supplémentaires d'homogénéité. Aussi intervient une foule d'éléments non-homogènes, qui probablement sont souvent superflus ou parasites. Ils risquent d'alourdir certaines propriétés ou démonstrations de la théorie, en estompant ce qui est essentiel. Dans la deuxième méthode, l'annéïde H détermine toute la structure, à quelques caractères secondaires près. Donc, toutes les notions doivent pouvoir se formuler en termes d'éléments homogènes, ainsi que les démonstrations. Si parfois, quelques éléments non-homogènes peuvent y figurer à titre auxiliaire, cette méthode doit permettre de "doser" leur emploi, en se limitant chaque fois à ceux qui sont nécessaires.

Il existe un autre avantage plus concret de la deuxième méthode : A étant un anneau commutatif gradué, considérons une partie multiplicativement stable M (avec $0 \notin M$). Si M n'est pas un ensemble d'éléments homogènes, en général l'anneau A_M des fractions ne possèdera pas de graduation naturellement déduite de celle de A . En effet, l'inverse d'un élément non-homogène n'est pas, en général, une somme de quotients d'éléments homogènes. Pour cette raison, le vrai "corps de fractions homogène" de A (si A est sans diviseur de 0) n'est pas A_A^* , mais A_H^* . Et le vrai "anneau localisé homogène de A par rapport à un idéal p homogène premier" n'est pas $A_{A..p}$, mais $A_{H..(p \cap H)}$. Ainsi, le vrai domaine de la théorie des fractions dans l'homogène est l'annéïde H , et non l'anneau A . Ceci est particulièrement visible dans le cas des corpoïdes, c'est-à-dire des annéïdes Q où $Q^* = Q \setminus \{0\}$ est un groupe multiplicatif. Dans la théorie des annéïdes, ce sont eux les véritables "corps dans l'homogène" (on a $Q = Q_Q^*$) ; et leurs propriétés sont analogues à celles des corps (voir [4]).

Par contre, si $A = \bar{Q}$ est l'anneau gradué associé à Q , on a $A_Q^* = A$, tandis que A_A^* (attention, A peut n'être pas intègre : I, § 2, ex. 2) n'a pas une structure homogène favorable. Toutes ces raisons nous ont fait préférer la deuxième méthode comme méthode de base. Bien entendu, ceci ne se rapporte qu'à la théorie générale des anneaux gradués, et pas forcément à certaines applications de ces anneaux. Lorsque des éléments non-homogènes interviennent effectivement, la première méthode s'impose ; c'est le cas, par exemple, des anneaux de polynômes appliqués à la géométrie algébrique affine.

D'ailleurs, M. Krasner a introduit la notion d'annéïde comme une généralisation de la notion de corpsïde [4] (analogue au passage de la notion de corps à celle d'anneau), et non comme partie homogène d'un anneau gradué. Mentionnons toutefois qu'une classe, assez particulière, d'annéïdes a été envisagée indépendamment par Sagastume Berra [7], à partir des anneaux gradués. Quant à la notion de corpsïde, introduite également par M. Krasner en 1944, elle a son origine dans la théorie des corps valués (voir [3], squelette d'un corps valué). Dans son Séminaire [4], M. Krasner a développé la théorie des corpsïdes commutatifs et "sans torsion" (c'est-à-dire dont le groupe des grades est sans torsion). Il a montré qu'ils admettent une théorie des extensions, d'algébricité, de séparabilité, de transcendance aussi précise que celle de Steinitz pour les corps. Mais cette théorie est plus riche, car l'extension d'un tel corpsïde peut se manifester en partie par l'extension de son corps (ce corps est l'ensemble des éléments addibles à 1), et en partie par celle de son groupe (des grades). M. Krasner a montré⁽²⁾ que les extensions finies de tels corpsïdes admettent une théorie de Galois de même type que celle des corps (sauf que la deuxième partie du théorème de Galois se démontre par d'autres méthodes, car le théorème de l'élément primitif n'est plus valable). Dans l'exposé cité [4], M. Krasner développe d'ailleurs la théorie des annéïdes des polynômes (d'un ensemble arbitraire de variables) sur un tel corpsïde q . En effet, si on fixe les grades des variables (qu'on suppose, dans ce cas, pris dans un surgroupe abélien sans torsion du groupe de q), les polynômes seront, par définition, les sommes formelles de monômes d'un même grade, et on peut montrer que ces polynômes forment un annéïde. Ces annéïdes (qui sont factoriels), jouent le même rôle dans la théorie des extensions corpsïdales que les anneaux de polynômes dans celle des extensions de corps. Toute la théorie élémentaire des anneaux commutatifs (idéaux, anneaux quotients, corps de fractions) reste vraie, avec des changements minimes (et en remplaçant, bien entendu, les corps

(2) Cette théorie n'est pas encore publiée. Elle a été plusieurs fois exposée dans ses cours de Clermont-Ferrand, 1961-62, de Paris 1966-67, ainsi que dans son séminaire sur la théorie des corps valués.

par les corpsides) dans ces annéfides. Elle se transporte d'ailleurs aux annéfides quelconques.

On peut envisager les anneaux gradués \bar{q} et $\bar{q}[X]$ qui correspondent à ces corpsides q , ou à ces annéfides de polynômes $q[X]$. On a vu que cela est plutôt une complication, à cause des éléments non homogènes ; de plus, ces derniers masquent l'analogie des corpsides avec les corps. D'autre part, soit k un corps valué, et soit S son squelette, qui est un corpside ; là, rien ne correspond, dans la structure du corps valué k , aux éléments non homogènes de \bar{S} , ou de $\bar{S}[X]$; donc, leur introduction semble ici artificielle.

Dans la théorie des anneaux gradués existe l'analogie homogène de la notion de module. On peut la définir en partant soit du point de vue des anneaux gradués, soit de celui des annéfides. Nous nous bornerons à donner les définitions sous les deux formes ; le lecteur saisira aisément leur signification.

On appelle module gradué sur un anneau gradué (A, Π, f) la structure (E, Σ, g) suivante : E est un A -module, Σ est un ensemble muni d'une loi de composition externe (partielle en général) dont le domaine d'opérateurs est Π , et g est une application de Σ dans l'ensemble $S^*(E)$ des sous-groupes $\neq \{0\}$ du groupe additif de E . ($\forall \xi \in \Sigma$, on notera $g(\xi) = E_\xi$). Ces données vérifient les axiomes : 1° $\forall \alpha \in \Pi, \forall \xi \in \Sigma, \alpha \xi$ est défini si et seulement si $f(\alpha)g(\xi) = A_\alpha E_\xi \neq \{0\}$; 2° si $\alpha \xi$ est défini, on a $A_\alpha E_\xi \subset E_{\alpha \xi}$; 3° le groupe additif de E est $\bigoplus_{\xi \in \Sigma} g(\xi) = \bigoplus_{\xi \in \Sigma} E_\xi$. (De même, dans Σ , l'associativité des scalaires pourra n'être pas vérifiée). L'ensemble $M(E) = \bigcup_{\xi \in \Sigma} E_\xi$ est dit partie homogène de E . Posons $C^*(M) = \{g(\xi) = E_\xi ; \xi \in \Sigma\}$ et $C(M) = C^*(M) \cup \{0\}$. Si (Δ, φ) est une graduation de A , on appelle Δ -graduation de E tout couple (Γ, ψ) vérifiant les conditions suivantes : Γ est un ensemble muni d'une loi de composition externe partout définie, dont Δ est le domaine d'opérateurs ; ψ est une application $\Gamma \rightarrow \Gamma_0 = C(M)$, injective sur l'image réciproque $\psi^{-1}(C^*(M))$, et telle que $\psi(0) = \{0\}$ et que $\varphi(\alpha)\psi(\xi) \subset \psi(\alpha\xi)$ pour tous $\alpha \in \Delta, \xi \in \Gamma$. Même lorsque Δ est associative, un module gradué peut n'avoir pas de Δ -graduation (Γ, ψ) dont la loi externe vérifie l'associativité des "scalaires".

On appelle moduloïde à gauche sur un annéfide H un ensemble M vérifiant les axiomes suivants : I. M est muni d'une multiplication externe, dont H est le domaine d'opérateurs à gauche, et qui vérifie l'associativité des scalaires. M possède un élément absorbant $0'$ tel que $a 0' = 0'$ pour tout $a \in H$. ($0'$ sera désormais noté 0). II. M est muni d'une addition partielle vérifiant les mêmes axiomes (II) que H (x addible à y est noté $x \# y$). III. La multiplication est bilatéralement distributive par rapport aux

additivités et aux additions : pour tout $a \in H$, $x \not\equiv y$ (avec $x, y \in M$) implique $ax \not\equiv ay$ et $a(x + y) = ax + ay$. Pour tout $x \in M$, $a \not\equiv b$ (avec $a, b \in A$) implique $ax \not\equiv bx$ et $(a + b)x = ax + bx$. De plus, si H possède un élément unité 1, et si $1x = x$ pour tout $x \in M$, le moduloïde est dit unitaire. Le moduloïde est dit régulier si, pour tout $x \in M^*$ et pour tous $a, b \in H$, la relation $ax \not\equiv bx$ implique $a \not\equiv b$.

En particulier, si H est un corpoïde Q , un Q -moduloïde unitaire V est dit un espace vectoriel sur Q . Il est dit espace vectoriel régulier ou strict, si de plus il est régulier. Les espaces vectoriels stricts sur les corpoïdes ont été étudiés en détail par M. Krasner. Ils ont pratiquement toutes les bonnes propriétés des espaces vectoriels sur les corps (la dimension, par exemple), et en plus quelques autres. Par contre, les espaces vectoriels non stricts peuvent avoir des structures très compliquées.

Le présent travail se distingue de ses prédécesseurs en ce qu'il essaie d'aborder l'étude effective des anneaux commutatifs, gradués au sens général. Ceux-ci n'ont donc pas forcément pour graduation un monoïde avec simplification (nous dirons, par abus de langage, une graduation associative simplifiable), ou même un monoïde. Notre modèle a été "Commutative Algebra" de O. Zariski et P. Samuel. Aussi, ce travail a été fait surtout dans la perspective noethérienne. Cependant, nous avons sciemment écarté l'étude similaire de certaines parties concernant les seuls anneaux dont les analogues homogènes possèdent toujours une graduation associative simplifiable. (Par exemple, les anneaux de Dedekind, les corps). En effet, dans l'optique générale de ce travail, leur étude paraît "relativement simple", donc "en bordure" de notre théorie. Cette étude a d'ailleurs été entamée ou faite sur certains points par d'autres auteurs. Par exemple, M. Krasner a étudié les corpoïdes et leurs extensions. C'est pourquoi nous avons laissé de côté ce qui concerne les analogues homogènes des corps, des anneaux de Dedekind, des valuations et des anneaux de polynômes et de séries formelles. Cependant, le manque de temps nous a empêchés pour l'instant d'étudier l'analogue homogène de l'algèbre locale (chap. VIII du volume II), et aussi d'essayer de voir s'il n'y a pas quelque simplification en remplaçant la considération des gradués des anneaux locaux par celle de leurs parties homogènes.

Nous espérons avoir construit une théorie homogène, sans doute non exhaustive, mais qui, dans les limites indiquées, présente une généralité suffisante.

Dans les anneaux et modules gradués aussi généraux que nous étudions, intervient un phénomène, absent dans les cas classiques étudiés auparavant, dit d'agglutination. De lui viennent l'essentiel de l'intérêt et de la difficulté.

Par exemple, pour des éléments homogènes a, b, c d'un anneau gradué, il peut arriver que b et c soient de grades différents, mais que $ab + ac$ soit homogène ; on dit que a agglutine b et c . Si de plus ab et ac sont non nuls (donc de même grade), on dit que le grade de a agglutine ceux de b et de c . On verra d'autres cas d'agglutination, et on précisera cette notion. Ce phénomène oblige pratiquement, pour une étude convenable des anneaux gradués, à envisager une structure très voisine de la leur, avec une partie homogène plus grande, et une graduation moins fine que celle de départ. Dans l'exemple précédent, pour a homogène non nul fixé, un élément x de l'anneau sera homogène dans la "quasi"-graduation que a définit, si ax l'est dans la graduation initiale ; alors, le "quasi"-grade de x sera par définition le grade de ax (quasi-grade 0 si $ax = 0$). Dans l'anneau, les éléments de "quasi"-grade nul forment un idéal ; pour un grade fixé λ , l'ensemble des éléments de "quasi"-grade 0 ou λ est un groupe additif abélien. L'anneau est la somme de ces groupes distincts, directe à l'idéal ci-dessus près (somme "quasi-directe").

On a ainsi obtenu la structure d'anneau quasi-gradué, à partir de celle d'anneau gradué, en dilatant, en quelque sorte, son zéro en un idéal. Les parties homogènes de tels anneaux, qui admettent aussi une caractérisation axiomatique, seront appelées anels. On considérera les modules quasi-gradués (sens analogue) sur de tels anneaux, et leurs parties homogènes seront appelées monels. Ces considérations conduisent aussi à une exploration, sur un anneau gradué donné, de ses graduations et quasi-graduations moins fines.

On définit, pour les anneaux gradués, les analogues des anneaux de polynômes. Là, les indéterminées elles-mêmes sont munies de grades, suivant le procédé utilisé par M. Krasner [4] pour les polynômes sur un corps. Ces grades seront pris dans un "prolongement" Δ' de la graduation Δ (Δ' est à Δ ce que Δ est à Δ_0). Alors, la définition du grade d'un monôme $a = X_1^{i_1} \dots X_p^{i_p}$ (avec a homogène) est basée sur le produit des grades des facteurs, mais sans nécessiter l'associativité de la graduation Δ' . Et un polynôme est dit homogène si ses monômes de grade non nul ont même grade. Cet ensemble de polynômes homogènes, organisé de manière évidente, n'est pas, en général, un anneau (cela peut venir du grade ξ_i d'une indéterminée X_i , qui diviserait 0 dans Δ' , ou bien entrerait dans un triple non associatif de Δ'). Mais cet ensemble est toujours un anel. Donc un anneau de polynômes sur un anneau gradué peut n'être pas naturellement un anneau gradué, sauf si on limite sérieusement le choix des grades ξ_i des X_i . Pour éviter cette limitation, nous avons employé les anneaux quasi-gradués. Ces derniers sont donc utiles en-dehors des problèmes qui ont conduit à les envisager.

Dans les anneaux et les modules quasi-gradués, nous avons pu, en

nous bornant aux parties homogènes et aux idéaux et sous-modules homogènes, construire une théorie analogue à celle des anneaux et modules (cette dernière est alors un cas particulier). Les résultats sont pour la plupart identiques ; quelques-uns nécessitent des hypothèses supplémentaires peu restrictives. Mais certaines notions sont modifiées, ou se dédoublent. Par exemple, soit \mathfrak{p} un idéal homogène ; dans l'homogène il est dit premier si ses éléments homogènes vérifient la condition habituelle ; et il est dit largement premier si (pour tous b homogène et α quelconque) les conditions αb homogène $\in \mathfrak{p}$ et $\alpha \notin \mathfrak{p}$ impliquent $b \in \mathfrak{p}$. Soit un idéal homogène maximal \mathfrak{m} (pas forcément maximal parmi les idéaux quelconques) d'un anneau quasi-gradué R , de graduation associative Δ , et tel que $R^2 \not\subset \mathfrak{m}$; on montre que \mathfrak{m} est largement premier et que la partie homogène de R/\mathfrak{m} est un corps.

De même, les généralités noethériennes classiques s'étendent avec peu de changements aux anneaux (et modules) quasi-gradués noethériens dans l'homogène (c'est-à-dire aux anels et monels noethériens). Cependant, si un anneau est noethérien, son anneau gradué peut ne pas l'être, comme certains de ses modules de type fini.

Considérons un anneau quasi-gradué et noethérien dans l'homogène (donc un anneau noethérien) s'il admet une graduation associative Δ , le sous-monofide Γ de Δ engendré par les grades non nuls est un monofide noethérien, c'est-à-dire que tout Γ -idéal de Γ possède un système fini de Γ -générateurs. Une caractérisation explicite des monofides noethériens a été obtenue dans ce travail.

Pour la transmission de la propriété noethérienne dans l'homogène, d'un anneau quasi-gradué à celui de ses polynômes à une variable de grade ξ , le théorème de Hilbert ne reste valable que sous certaines conditions sur ξ (même si la partie homogène donnée est un corps). En particulier, ce théorème reste vrai dans l'homogène si de plus, Δ étant associative et ξ quasi-régulier (c'est-à-dire qu'il existe $i \geq 0$ tel que, $\forall n \geq i$, $\alpha \xi^n = \beta \xi^n$ implique $\alpha \xi^i = \beta \xi^i$), ξ divise le grade $\omega(b)$ d'un élément homogène b , dont l'annulateur dans l'anneau est un idéal noethérien (au sens habituel).

Dans la théorie des anneaux noethériens, un rôle fondamental est joué par deux théorèmes : celui de Lasker-Noether qui montre que tout idéal irréductible est primaire, et celui de Krull, qui donne des conditions suffisantes pour que l'intersection des puissances d'un idéal soit (0). Dans la théorie homogène des anneaux gradués, le premier théorème subsiste si, outre la condition noethérienne dans l'homogène, on suppose que l'anneau gradué est fort. Fort signifie ceci : pour tout élément homogène non nul a , il existe un entier $i = i(a) \geq 0$ tel que les relations $0 \neq b a^n \neq c a^n \neq 0$ (avec b et c homogènes,

$n \geq 0$) impliquent $b a^i \neq c a^i$. Cette condition est vérifiée en particulier si tout grade non nul est quasi-régulier ; et on montre qu'elle est étrangère à la propriété noethérienne. Par suite, la classe des anneaux gradués forts et noethériens dans l'homogène, apparaît comme le domaine naturel de la théorie noethérienne homogène. Ce résultat est important dans ce travail, d'autant plus que la classe envisagée semble suffisamment vaste.

En ce qui concerne le théorème de Krull, ses conditions se généralisent avec de légères modifications. Elles ne sont pas plus restrictives que dans la théorie habituelle des anneaux commutatifs, sauf si les anneaux gradués sont tétalogiques d'un certain point de vue : plus précisément, cela peut arriver quand l'anneau gradué a trop d'éléments homogènes diviseurs de zéro.

Lors de l'étude du théorème de Krull et de ses conséquences, dans les cas défavorables, interviennent certains idéaux homogènes étroitement liés à la graduation propre Δ_0 . Un idéal homogène est dit large en un grade non nul α s'il contient tous les éléments homogènes de grade α . Il est dit large, s'il est large en tout grade dont il contient un élément non nul, et large aussi en tout multiple d'un tel grade. Lorsque l'anneau est muni de sa graduation propre Δ_0 , il existe une bijection entre l'ensemble des idéaux larges et celui des idéaux de Δ_0 . La somme de deux idéaux, dont un est large, est égale à leur réunion. Citons un exemple. Il existe un plus grand idéal homogène large L contenu à la fois dans l'ensemble de 0 et des ~~div~~diviseurs de 0, et dans un idéal homogène propre α . Certaines conditions sont suffisantes dans les anneaux abstraits pour que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha^n = (0)$; les conditions homogènes analogues impliquent seulement $\bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha^n \subset L$.

Ce travail contient encore une étude de localisation des anneaux gradués à l'aide de systèmes multiplicatifs homogènes (en particulier, de la partie homogène du complément d'un idéal homogène, premier dans l'homogène).

Dans le chapitre I se trouvent la définition des annéfides et moduloïdes et quelques généralités à leur sujet, en particulier la notion de graduation.

Le chapitre II introduit les notions d'anel et de monel, de sous-monel et d'idéal, étudie la structure des ensembles d'agglutinés, et définit les anels de polynômes.

Le chapitre III contient essentiellement les généralités sur les sous-monels et surtout sur les idéaux (des anels), en liaison avec les homomorphismes plus ou moins "homogènes". On y trouve en particulier des théorèmes d'isomorphisme, les diverses notions d'idéaux premiers ou primaires, l'étude des anels de fractions, et celle des idéaux larges.

Le chapitre IV commence l'étude des anels et monels noethériens, et donne des analogues homogènes au théorème de Hilbert pour les anels de polynômes. Ce chapitre se termine par l'analyse de la structure d'un monofde noethérien.

A partir du chapitre V, consacré aux seuls annéfdes noethériens, on ajoute presque partout l'hypothèse que ces annéfdes sont forts. Là, tout idéal irréductible est primaire, et la décomposition primaire d'un idéal existe. Cette hypothèse permet aussi une étude raisonnable du théorème de Krull : m étant un idéal propre, quelles conditions suffisent pour que $\bigcap_{n=1}^{\infty} m^n = (0)$, et sinon, que peut-on dire de cette intersection? Le chapitre s'achève par quelques considérations sur des annéfdes de fractions.

Je tiens à exprimer ma chaleureuse reconnaissance à Monsieur KRASNER. Il a été, dans toute la période de ce travail un tuteur sûr, un exemple, et un guide toujours abordable. Mais il a été beaucoup plus. Par une action à la fois patiente et subtile, il a su me conduire dans le chemin le plus favorable à l'acquisition d'une formation et d'un esprit de recherche grâce auxquels j'ai pu d'abord achever cette thèse. Qu'il sache que j'ai pleinement conscience de ma dette scientifique envers lui.

C'est grâce à Monsieur SAMUEL que j'ai pris goût à l'Algèbre commutative, lors de ses cours et séminaires à CLERMONT. L'attention qu'il a bien voulu porter à mon travail a été un puissant stimulant dans mon effort. De tout cela, je lui garde une profonde gratitude.

Monsieur LAFON a guidé avec bienveillance mes premiers pas vers la recherche. Sans ces débuts, je n'aurais peut-être pas osé entreprendre un travail plus vaste. Je considère que je lui dois beaucoup.

Je remercie sincèrement Monsieur BLANC qui a bien voulu accepter de présider mon jury, et Monsieur GUILLAUME qui a bien voulu accepter d'en faire partie. Leurs encouragements amicaux m'ont été d'un grand réconfort moral.

Chapitre I

LES ANNEIDES ET CERTAINES DE LEURS PROPRIETES ELEMENTAIRES

§ 1 - NOTIONS D'ANNEIDE ET DE MODULOIDE.

On appelle anneïde tout ensemble non vide A muni de deux lois internes : une addition, définie seulement pour certains couples dits addibles (notation $\#$), et une multiplication, vérifiant les axiomes :

A - Multiplication :

- 0 - $\forall a, b \in A, ab \in A$
- 1 - $\forall a, b, c \in A, (a b) c = a (b c)$
- 2 - Il existe un élément 0 de A , tel que $0 a = a 0 = 0, \forall a \in A$.

B - Addibilité :

- 1 - $\forall a \in A, a \# a$
- 2 - $\forall a, b \in A$, la relation $a \# b$ implique $b \# a$
- 3 - $\forall a \in A, a \# 0$
- 4 - $\forall a, b, c \in A$, les relations $a \# b, b \# c, b \neq 0$ impliquent $a \# c$.

Pour $a \in A, a \neq 0$, notons $A(a) = \{x \in A ; x \# a\}$, appelé domaine d'addibilité de a . Les axiomes $B_{3,4}$ montrent que $a \# b$ si et seulement s'ils appartiennent à un même domaine d'addibilité ; donc, deux tels domaines, ou sont confondus, ou ont en commun le seul élément 0 . On pose $D^* = \{A(a) ; a \in A, a \neq 0\}$ et $D = D^* \cup \{0\}$.

C - Addition : Chaque domaine d'addibilité est un groupe additif abélien (dit groupe d'addibilité), c'est-à-dire que, pour tout $A(d) \in D^*$, on a :

- 0 - $\forall a, b \in A(d), a + b \in A(d)$
- 1 - $\forall a, b, c \in A(d), (a + b) + c = a + (b + c)$
- 2 - $\forall a, b \in A(d), a + b = b + a$
- 3 - L'addition dans $A(d)$ possède un élément neutre
- 4 - Dans $A(d)$, tout élément possède un opposé.

(L'axiome C_0 équivaut à $C'_0 : \forall a, b \in A, a \# b$ implique $a \# a + b$).

D - Distributivité :

$\forall a, b, c \in A$, la relation $a \# b$ implique :

- 1 - $c a \# c b$
- 2 - $c (a + b) = c a + c b$
- 3 - $a c \# b c$
- 4 - $(a + b) c = a c + b c$.

Pour tout groupe additif $A(d)$, l'élément neutre e est égal à 0 .

De $e + e = e$, on déduit $0(e + e) = 0 e$, soit $0 + 0 = 0$. Ajoutons l'opposé $0'$ de 0 dans $A(d) : 0 + (0 + 0') = 0 + 0'$, d'où $0 + e = e$, soit encore $0 = e$, car e est neutre.

L'anneïde est dit commutatif s'il vérifie :

$$A \quad 3 - \forall a, b \in A, ab = ba.$$

L'anneïde est dit unitaire s'il vérifie :

$$A \quad 4 - \exists \text{ un élément } 1 \in A, 1 \neq 0 \text{ tel que } 1a = a1 = a, \forall a \in A.$$

L'anneïde est dit corpoïde si A^* (A privé du 0) est un groupe multiplicatif, c'est-à-dire s'il vérifie A 4 et

$$A \quad 5 - \forall a \in A, a \neq 0, \exists a' \in A \text{ tel que } aa' = a'a = 1.$$

Si de plus il est commutatif, il est dit corpoïde commutatif.

Un anneïde commutatif sans diviseur de zéro est dit intégrôïde si $A^* = A \setminus \{0\}$ est un semi-groupe (c'est-à-dire un monoïde avec simplification : si $a \neq 0, ab = ac$ impliquent $b = c$). Il est dit un intégrôïde régulier si, en plus, $a \neq 0$ et $ab \neq ac$ impliquent $b \neq c$.

Soit A un anneïde. On appellera moduloïde à gauche sur A , ou A -moduloïde à gauche, tout ensemble M non vide muni d'une loi interne additive, définie seulement pour certains couples dits addibles (notation $\#$), et d'une loi externe partout définie, ayant A pour domaine d'opérateurs, notée multiplicativement, vérifiant les axiomes :

A - Multiplication :

$$0 - \forall a \in A, \forall x \in M, ax \in M$$

$$1 - \forall a, b \in A, \forall x \in M, (ab)x = a(bx)$$

$$2 - \text{Il existe un élément } 0' \text{ de } M \text{ tel que, } \forall a \in A, \forall x \in M, \text{ on ait } a0' = 0x = 0'. \text{ (On le notera désormais } 0).$$

B - Addibilité :

$$1 - \forall x \in M, x \# x$$

$$2 - \forall x, y \in M, \text{ la relation } x \# y \text{ implique } y \# x$$

$$3 - \forall x \in M, x \# 0$$

$$4 - \forall x, y, z \in M, \text{ les relations } x \# y, y \# z, y \neq 0 \text{ impliquent } x \# z.$$

De même que plus haut, on notera pour $x \in M, x \neq 0$, par $M(x)$ le domaine d'addibilité de x . On pose de même :

$$C^* = \{M(x) ; x \in M, x \neq 0\} \text{ et } C = C^* \cup \{\{0\}\}.$$

C - Addition : Chaque domaine d'addibilité est un groupe additif abélien (dit groupe d'addibilité), c'est-à-dire que, pour tout $M(u) \in C^*$, on a :

$$0 - \forall x, y \in M(u), x + y \in M(u)$$

$$1 - \forall x, y, z \in M(u), (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$2 - \forall x, y \in M(u), x + y = y + x$$

$$3 - \text{L'addition dans } M(u) \text{ possède un élément neutre}$$

$$4 - \text{Dans } M(u), \text{ tout élément possède un opposé.}$$

(L'axiome C_0 équivaut à $C'_0 : \forall x, y \in M, \text{ la condition } x \# y \text{ implique } x \# x + y$).

D - Distributivité :

$$\forall a, b \in A, \forall x, y \in M :$$

- 1 - $x \# y$ implique $a x \# a y$
- 2 - $x \# y$ implique $a (x + y) = a x + a y$
- 3 - $a \# b$ implique $a x \# b x$
- 4 - $a \# b$ implique $(a + b) x = a x + b x$.

On voit aisément que l'élément neutre de tout groupe additif $M(u)$ est $0 \in M$. Les notions de moduloïde à droite sur A (modifier l'écriture du produit et l'axiome A_1), et de moduloïde unitaire (lorsque A est unitaire), sont les analogues du cas des modules.

Propriété fondamentale :

Les axiomes $D_{1,3}$ sont équivalents à la condition :

$\forall x, y \in M$ (resp. A), $\forall a, b \in A$, les relations $a \# b$, $x \# y$ impliquent $a x \# b y$.

Si $a \# b$ et $x \# y$, on a par distributivité :

$$a x \# b x, b x \# b y \text{ et } a x \# a y, a y \# b y.$$

Si $b x \neq 0$, ou si $a y \neq 0$, la transitivité montre que $a x \# b y$.

Si $b x = 0$ et $a y = 0$, on a par distributivité

$$(a + b) x \# (a + b) y \text{ d'où } a x + 0 \# 0 + b y.$$

La réciproque est évidente. Noter la conséquence suivante :

Si a et $b \in A$ sont tels que $A(a) A(b) \neq \{0\}$, il existe un et un seul $A(c) \in D^*$ tel que $A(a) A(b) \subset A(c)$.

De même, si $a \in A$ et $x \in M$ sont tels que $A(a) M(x) \neq \{0\}$, il existe un et un seul $M(y) \in C^*$ tel que $A(a) M(x) \subset M(y)$.

Remarques de calcul :

Dans A , l'écriture $a_1 + \dots + a_r = \sum_{i=1}^r a_i$ suppose les a_i addibles deux à deux. De même, l'écriture $(a_1 + \dots + a_r) + (b_1 + \dots + b_s)$ suppose que chaque somme entre parenthèses a le sens précédent, et que les totaux sont addibles. Par exemple, si a et b ne sont pas addibles, $a + (b - b)$ signifie $a + 0 = a$, mais $a + b - b$ n'a pas de sens dans A .

Lemme : Soient deux sommes (d'éléments addibles) de total non nul :

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^r a_i = a \neq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^s b_j = b \neq 0. \\ \text{Si } a \# b, \forall i \text{ et } j \text{ on a } a_i \# b_j. \end{array} \right.$$

En effet, l'axiome C_0 montre que $a_i \# a$, $b_j \# b$, d'où le résultat par transitivité par a et b . On a la règle : Après avoir remplacé par leur valeur 0 les parenthèses de total nul, on a donc le droit de "supprimer les

parenthèses".

Soient A un anneau, M un A-moduloïde à gauche, B et B' deux parties non vides de A, X et Y deux parties non vides de M. On notera : $X + Y$ l'ensemble des éléments de M de la forme $x + y$, avec $x \in X$, $y \in Y$ et $x \neq y$;

$B \times$ l'ensemble des éléments de M de la forme $\sum_{i=1}^n b_i x_i$ où $\forall i, b_i \in B, x_i \in X$ et les $b_i x_i$ addibles deux à deux ; $B \times = B \times$ lorsque $X = \{x\}$; enfin $B + B'$ et $B B'$ en considérant A comme moduloïde sur lui-même.

Un élément de $B \times$ (resp. de $B B'$) s'appelle une combinaison linéaire d'éléments de X (resp. de B') sur B. Lorsqu'on prend pour B l'anneau A, on dit combinaison linéaire d'éléments de X (resp. B'). Il faut bien remarquer qu'un même élément $x_i \in X$ peut intervenir plusieurs fois dans une somme

$\sum_{i=1}^n b_i x_i$, avec des éléments b_i non forcément addibles. On pourra éventuellement souligner ce fait en notant un élément de $B \times$ par

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{r_j} b_j^k x_j \right) = \sum_{j=1}^m \beta_j x_j$$

où les x_j sont tous distincts et où β_j est la somme formelle

$$\sum_{k=1}^{r_j} b_j^k \text{ appelée le coefficient de } x_j.$$

§ 2 - ANNEAUX ET MODULES ASSOCIES. SOUS-ANNEIDES ET SOUS-MODULES.

$$\text{Notons } \bar{A} = \bigoplus_{A(a) \in D^*} A(a) \quad (\text{resp. } \bar{M} = \bigoplus_{M(x) \in C^*} M(x))$$

le groupe somme directe des groupes additifs $A(a)$ (resp. $M(x)$). Organisons \bar{A} en anneau (resp. \bar{M} en \bar{A} -module à gauche) en étendant la loi multiplicative de A (resp. de M) par distributivité et réduction des termes semblables (c'est-à-dire appartenant à une même composante). Les propriétés d'associativité et de distributivité (et éventuellement la commutativité dans le cas de \bar{A}) sont évidentes ; de même, si A (resp. M) est unitaire, \bar{A} (resp. \bar{M}) l'est aussi. \bar{A} s'appelle l'anneau de l'anneau A. \bar{M} s'appelle le \bar{A} -module du A-moduloïde M. Il est clair que \bar{A} et \bar{M} sont des A-moduloïdes. Par contre, A (resp. M) n'est pas, en général, un A-moduloïde, le produit n'étant pas forcément partout défini. \bar{A} (resp. \bar{M}) sera dit anneau (resp. module) gradué généralisé.

B est dit un sous-anneau de A, et A un sur-anneau (ou une extension) de B si l'additivité et les lois de A induisent sur B une structure d'anneau, c'est-à-dire si on a (outre $B \subset A$) :

- 1 - L'additivité de B est la restriction à B de celle de A.
- 2 - $\forall a \in A^*$, $B \cap A(a)$ est sous-groupe additif de $A(a)$.
- 3 - $B^2 \subset B$.

N est dit un sous-moduloïde de M, et M un sur-moduloïde de N si l'additivité et les lois de M induisent sur N une structure de moduloïde sur le même annéïde A, c'est-à-dire si on a (outre $N \subset M$) :

- 1 - L'additivité de N est la restriction à N de celle de M.
- 2 - $\forall x \in M^*$, $N \cap M(x)$ est un sous-groupe additif de $M(x)$.
- 3 - $A \cap N \subset N$.

La condition $A \cap N \subset N$ équivaut à : $\forall a \in A$, $\forall x \in N$, on a $a \times x \in N$.

Il en est de même pour $B^2 \subset B$.

Un sous-moduloïde du A-moduloïde à gauche A (resp. à droite) est dit idéal à gauche (resp. à droite) de A. On appelle idéal bilatère un idéal à gauche et à droite de A. Lorsque A est commutatif, on dit simplement idéal.

\bar{A} étant un anneau gradué généralisé dont la partie homogène est un annéïde A, un sous-anneau S de \bar{A} est dit homogène s'il est de la forme \bar{B} , où B est un sous-annéïde de A. Visiblement, ceci équivaut à l'égalité

$$S = \bigoplus_{A(a) \in D^*} [S \cap A(a)], \text{ autrement dit à la condition : si } \bar{a} = \sum_i a_i$$

est la décomposition d'un $\bar{a} \in S$ en composantes homogènes, tous les a_i sont dans S. Par ailleurs, si B est un sous-annéïde de A, \bar{B} est un anneau, donc un sous-anneau de \bar{A} . Si un idéal (à droite, à gauche, ou bilatère) de A en est un sous-anneau homogène, il en est dit idéal homogène.

De même, un sous-module d'un \bar{A} -module \bar{M} , dont la partie homogène est M, est dit homogène s'il est de la forme \bar{N} , où N est un sous-moduloïde de M. (si N l'est, \bar{N} est un \bar{A} -module, donc un sous-module de \bar{M}). Il est évident qu'un sous-module P du \bar{A} -module \bar{M} est homogène si, et seulement si il contient avec un élément de \bar{M} toutes ses composantes homogènes. Visiblement, si B est un sous-annéïde de A, le sous-anneau homogène \bar{B} de \bar{A} en est un idéal (forcément homogène) si et seulement si B en est un de A.

Un annéïde A et l'anneau gradué \bar{A} sont dits annéïde [resp. anneau gradué] noethérien (resp. artinien) à gauche ou à droite si, respectivement, les idéaux à gauche ou à droite de A (ou, ce qui revient au même, de tels idéaux homogènes de \bar{A}) satisfont à la condition maximale (resp. minimale). Il sera dit noethérien ou artinien tout court s'il l'est à la fois à droite et à gauche.

Exemples d'annéïdes :

1°) Le squelette d'un corps valué est un corpoïde. Si q est un corpoïde "sans torsion" et $n \geq 1$ un entier donné, Krasner [4] définit les annéïdes de polynômes à n indéterminées sur q (sous certaines conditions).

2°) Nous appellerons annéide de Bourbaki la partie homogène d'un anneau gradué de Bourbaki [1]. Citons deux cas particuliers :

Soient k un corps, et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'indéterminées ; l'ensemble Q des fractions monômiales par rapport aux X_i à coefficients dans k , est un corpoïde. La partie A formée des monômes en est un sous-annéide.

Soient R un anneau intègre (commutatif, avec unité) et $G = \{\varepsilon, \sigma\}$ un groupe à deux éléments ($\sigma^2 = \varepsilon$). Soit $\bar{A} = R \varepsilon + R \sigma$ l'anneau gradué construit sur R et G de manière évidente. Soit A l'annéide associé. Alors, A est sans diviseur de 0, mais \bar{A} n'est pas intègre : $(\sigma - \varepsilon)(\sigma + \varepsilon) = 0$.

3°) Plus généralement, soient Δ un monoïde multiplicatif, commutatif et muni d'un annulateur (ou élément absorbant) noté 0. Soit R un anneau commutatif. Soit $(A_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ une famille d'anneaux tels que : $\forall \alpha \in \Delta$, A_α est isomorphe à un sous-anneau R_α de R ; $R_0 = \{0\}$; et, $\forall \alpha$ et $\beta \in \Delta$, $R_\alpha R_\beta \subset R_{\alpha\beta}$. Prenons pour ensemble d'homogénéité la partie $A = \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ de $\bar{A} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$.

Si x_α et y_β sont des éléments de A_α et A_β respectivement, par définition, leur produit sera l'élément de $A_{\alpha\beta}$ homologue du produit xy dans R des homologues x (de x_α) et y (de y_β). Alors, il est clair que A est un annéide.

Si, de plus, R et Δ ont un élément unité, respectivement 1 et ε , la condition $1 \in R_\varepsilon$ entraîne que 1 est unité de A .

§ 3 - LA NOTION DE GRADUATION.

On va définir sur D une loi de composition partielle. Afin de pouvoir l'écrire sans introduire de nouveau signe d'opération tout en distinguant le composé des éléments de D selon cette loi, de leur produit en tant que sous-ensembles de A (qui est différent, en général), nous introduisons l'abus d'écriture suivant : si $a \in A$ est non nul, son domaine d'addibilité sera noté $A(a)$ s'il est considéré comme sous-ensemble de A , et sera noté $\omega(a)$ s'il est considéré comme élément de D^* . (Quand il est indifférent de considérer ce domaine d'une manière ou de l'autre, on se permettra d'écrire $A(a) = \omega(a)$). De même, $\{0\} \subset A$ sera, comme élément de D , noté $\omega(0)$ ou 0. Pour tout $a \in A$, $\omega(a)$ sera dit son grade propre. Donc, $A(a) A(b)$ (ou $A(a) \{0\}$) désignera le produit de $A(a)$ et $A(b)$ (ou $\{0\}$) comme sous-ensembles de A , tandis que $\omega(a) \omega(b)$ (ou $\omega(a) \omega(0) = \omega(a) 0$) désignera leur produit dans D suivant la loi partielle ainsi définie :

- (L) $\left\{ \begin{array}{l} - \forall \omega(a) \in D, \text{ on pose } 0 \omega(a) = \omega(a) 0 = 0 \\ - \forall \omega(a) \text{ et } \omega(b) \in D^*, \text{ tels que } A(a) A(b) \neq \{0\}, \text{ on sait qu'il existe} \\ \quad \text{un unique } \omega(c) \in D^* \text{ tel que } A(a) A(b) \subset A(c) \text{ et on pose} \\ \quad \omega(a) \omega(b) = \omega(c). \end{array} \right.$

Le produit $\omega(a) \omega(b)$ n'est pas défini quand $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $A(a) A(b) = \{0\}$.

On appellera graduation de l'annéide A tout couple (Δ, θ) (qu'on notera simplement Δ quand il n'y aura pas d'ambiguïté sur θ), où Δ est un ensemble muni d'une loi de composition (notée multiplicativement) partout définie et comportant un annulateur (noté 0), et où $\theta : \Delta \rightarrow D$ est une surjection, qui est injective sur l'image réciproque $\theta^{-1}(D^*)$ de D^* par θ , et qui vérifie les conditions : $\theta(0) = 0$; et, $\forall \alpha, \beta \in \Delta$, on a $\theta(\alpha \beta) = \theta(\alpha) \theta(\beta)$ si $\theta(\alpha) \neq 0$, $\theta(\beta) \neq 0$ et $\theta(\alpha) \theta(\beta)$ est défini.

Le plus souvent, la restriction injective de θ à $\theta^{-1}(D^*)$ sera considérée comme une identification, et on identifie aussi l'annulateur 0 de Δ avec l'élément $\omega(0) = 0 \in D$. Sauf mention contraire, on supposera donc que $\Delta \supset D$. Si $d = \omega(a)$, en vertu de l'identification précédente (c'est-à-dire si $\theta(d) \neq 0$ ou si $d = 0$), d sera dit le grade de a dans Δ . Un $d \in \Delta$ sera dit un grade nul par rapport à A si $\theta(d) = 0$, et il sera dit vide dans A si, de plus, $d \neq 0$. Si $\theta(d) = \omega(a) \in D$, le même élément de D considéré comme sous-ensemble de A sera aussi noté A_d .

On appellera graduation propre de A (et de \bar{A}) la graduation Δ de support D , où on étend la loi partielle (L) à D tout entier en posant $\omega(a) \omega(b) = \omega(0) = 0$, quand $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $A(a) A(b) = \{0\}$.

Bien entendu, on a des considérations analogues pour l'ensemble C d'un A -moduloïde à gauche M . En usant de l'abus d'écriture analogue, on définira dans C la loi partielle de composition externe :

$$(L') \quad \left| \begin{array}{l} \forall \alpha \in D, \forall \xi \in C \text{ on pose } \alpha 0 = 0 \xi = 0. \\ \forall \omega(a) \in D, \forall \omega(x) \in C, a \neq 0, x \neq 0 \text{ tels que } A(a) M(x) \neq \{0\}, \text{ donc} \\ \text{est contenu dans un unique } M(y), \text{ on pose } \omega(a) \omega(x) = \omega(y). \end{array} \right.$$

Cette loi n'est pas forcément partout définie, ni associative pour les scalaires (ou éléments de D).

Lorsqu'est fixée une graduation (Δ, θ) de A , on appelle une Δ -graduation du A -moduloïde M , tout couple (Γ, ψ) formé d'un ensemble Γ sur lequel Δ opère multiplicativement à gauche, avec annulateur noté 0, et d'une surjection $\psi : \Gamma \rightarrow C$, dont la restriction à $\psi^{-1}(C^*)$ est injective, avec les conditions : $\psi(0) = 0$; $\forall d \in \Delta, \forall c \in \Gamma$, on a $d.0 = 0.c = 0$; $\forall d \in \Delta$ et $\forall c \in \Gamma$ tels que $\theta(d) \neq 0$, $\psi(c) \neq 0$ et $\theta(d) \psi(c)$ soit défini en vertu de (L') , on a $\psi(dc) = \theta(d) \psi(c)$. Si $\psi(c) = \omega(x) \in C$, cet élément de C considéré comme sous-ensemble de M , sera noté M_c . On pourra considérer la restriction de ψ à $\psi^{-1}(C^*)$ comme une identification, et identifier les zéros de Γ et de C , donc poser $\Gamma \supset C$. On a toujours $A_d M_c \subset M_{d.c}$.

Par exemple, on appellera Δ -graduation propre de M la graduation Γ_0 de support C où on étend la loi partielle (L') en posant $d.w(x) = w(0) = 0$ quand $d \neq 0$, $x \neq 0$ et $A_d M(x) = \{0\}$.

L'exemple 1 suivant montre qu'on ne peut pas forcément étendre (L) à D tout entier pour en faire un monoïde. Mais, parmi toutes les graduations possibles pour un annéide donné A , en existe-t-il toujours une associative, c'est-à-dire (au cas où A serait unitaire), pour laquelle l'anneau \bar{A} serait gradué au sens Bourbaki ? Existe-t-il une extension A' de A , ayant ou non le même ensemble D , et telle que tout groupe d'addibilité différent de $\{0\}$ contienne un non-diviseur de 0 ? Sans hypothèse supplémentaire, la réponse est partout négative, comme le montre l'exemple 2 suivant.

De même, lorsque Δ est une graduation associative de A , une Δ -graduation Γ de M sera dite associative si sa loi vérifie l'associativité des scalaires (ou éléments de Δ). Un exemple ultérieur montrera l'existence de Δ -graduations non associatives (chap. II, § 3).

Si $A = q$ est un corpoïde, D^* est visiblement un groupe par rapport à la loi de composition de Δ_0 . De plus, $R = q(1)$ est un corps (gauche, en général) car $R^* = R \dots \{0\}$ est un sous-groupe de $q^* = q \dots \{0\}$. Si $a \in q$ est non nul, $\sigma : R \rightarrow q(a)$ défini par $\sigma(x) = ax$, et $\tau : q(a) \rightarrow R$ défini par $\tau(y) = a^{-1}y$ sont des homomorphismes de groupes additifs, dont les composés sont des identités. Ce sont donc des isomorphismes, et $q(a)$ est un espace vectoriel bilatère de dimension 1 sur R . $D^* = \Delta_0^*$ est dit le groupe du corpoïde q , et q est dit sans torsion si le groupe D^* l'est. $R = q(1)$ est dit le corps du corpoïde.

Si A est un intégroré régulier, D^* est visiblement un monoïde commutatif avec simplification, par rapport à la loi de Δ_0 .

Exemple 1 : Soient R un anneau commutatif donné, R' et R'' deux anneaux isomorphes à R , deux d'entre eux ayant en commun le seul élément 0. Soient les anneaux produits $A_c = R \times R$, $A_a = R' \times (0)$ et $A_b = (0) \times R''$. Organisons la réunion $A = A_c \cup A_a \cup A_b$ de leurs groupes respectifs en annéide en posant pour le produit (les accents des composantes indiquant seulement l'appartenance des éléments) commutatif :

$$(x_1, y_1) (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2) ; (x_1, y_1) (x'_2, 0) = [(x_1 x_2)', 0].$$

$$(x_1, y_1) (0, y''_2) = [0, (y_1 y_2'')] ; (x', 0) (y', 0) = [0, (xy)''].$$

$$(0, x'') (0, y'') = (0, xy) ; (x', 0) (0, y'') = (0, 0).$$

Sur l'ensemble D , noté $\{0, \varepsilon, a, b\}$, correspondant, la loi (L) n'est point partout définie : ε est unité, $a^2 = b$ et $b^2 = \varepsilon$; mais ab et ba ne sont pas définis, et l'on ne peut étendre (L) à D tout entier pour en faire un monoïde :

si on prend $ab = a$, on a $\varepsilon = a^2 b \neq a(ab) = b$
 $ab = b$, $a = a b^2 \neq (ab) b = \varepsilon$
 $ab = \varepsilon$, $a = a b^2 \neq (ab) b = b$
 $ab = 0$, $a = a b^2 \neq (ab) b = 0$.

Cependant, $\Delta = D \cup \{c = a^3\} = \{0, \varepsilon, a, a^2, a^3\}$ est évidemment une graduation associative de A , puisque $\{\varepsilon, a, a^2, a^3\}$ est le groupe cyclique à quatre éléments engendré par a . Il suffit de poser $A_{a^2} = A_b$ et $A_{a^3} = \{0\}$, en prenant les mêmes A_ε , A_a et A_b que précédemment.

Exemple 2 : Soit n un entier ≥ 3 . Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble de n éléments muni d'une loi interne partout définie, commutative, et notée multiplicativement (cette loi donnée n'est pas forcément associative). Soit R un anneau intègre (commutatif et unitaire). Soit $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ où, $\forall i \in \mathbb{Z}$, on prend pour R_i le groupe additif de R .

(1°) A chaque $e_k \in E$, faisons correspondre une partie finie $P_k \subset \mathbb{Z}$, ainsi définie :

$$a) - (2k - 1) \in P_k$$

b) On répartit dans les P_k les $\frac{n(n-1)}{2}$ premiers entiers impairs positifs, chacun deux fois, et de manière que :

- chaque P_k contienne $(n-1)$ impairs distincts

- si $k \neq k'$, P_k et $P_{k'}$ n'ont en commun qu'un seul impair positif, noté $i_{k,k'}$.

c) On répartit les doubles des entiers impairs précédents, qui sont au nombre de $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$:

si $e_k^2 = e_{k''}$ on pose $-2(2k-1) \in P_{k''}$

si $k \neq k'$ et $e_k e_{k'} = e_{k''}$ on pose $2i_{k,k'} \in P_{k''}$.

Chacun de ces nombres pairs ne figure que dans un seul ensemble.

d) Les P_k ne contiennent pas d'autre entier.

(2°) a) A chaque P_k (donc à chaque α_k), on associe un groupe A_k isomorphe au sous-groupe additif suivant du groupe abélien $S : A_k \simeq \bigoplus_{i \in P_k} R_i$.

Soit $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ la partie du groupe somme directe $\bar{A} = \bigoplus_{k=1}^n A_k$.

b) Définition d'un produit dans A ; outre le cas trivial où l'un des facteurs est nul, distinguons deux cas :

Si $x \in A_k$ et $y \in A_{k'}$, avec $k \neq k'$. Le produit, élément z de $A_{k''}$ (si $e_k e_{k'} = e_{k''}$), se fera par composante, en doublant les indices des composantes. Plus précisément, seules les composantes d'indice $i_{k,k'}$ de x et y peuvent être toutes deux non nulles :

$$x = (\dots, x_{i_{k,k'}}, \dots); y = (\dots, y_{i_{k,k'}}, \dots)$$

On pose $x y = z = (\dots, z_{2i_{k,k'}}, \dots)$ avec $z_{2i_{k,k'}} = x_{i_{k,k'}} y_{i_{k,k'}}$

Si x et $y \in A_k$, le produit z , élément de $A_{k''}$ (si $e_k^2 = e_{k''}$), se fera par composante, en doublant les indices, mais en ne conservant que la composante d'indice $-2(2k-1)$ négatif, et en annulant les autres.

c) Ce produit fait de A un anneau commutatif de manière évidente (en particulier, l'associativité du produit est triviale, tout produit de trois termes étant nul).

(3°) $\forall k$ et k' , $A_k A_{k'} \neq (0)$, puisque l'anneau R est intègre, et $A_k A_{k'} \subset A_{k''}$ (notations du 1°). E est famille d'indices des A_k . Le produit (L) est défini partout sur $E \cup \{0\} = \Delta$ et coïncide sur E avec la loi de E (par construction).

Si la loi donnée sur E est non-associative, la graduation Δ de A sera non-associative, et toute autre graduation de A ne sera pas associative.

Remarque : La donnée de la loi sur E équivaut à la donnée de la répartition (1° - c) des $\frac{n(n-1)}{2}$ entiers pairs.

Remarque : Montrons, par récurrence sur n , que la répartition (1° - b) des entiers impairs est possible :

$$\begin{aligned} - \text{ si } n = 3, \text{ on prend } & A_1 = \{-1, 1, 3\} \\ & A_2 = \{-3, 1, 5\} \\ & A_3 = \{-5, 3, 5\}. \end{aligned}$$

- si la répartition est faite pour l'entier n , il reste, pour l'entier $n+1$, à répartir deux fois les n entiers impairs consécutifs suivants : $2n(n-1)+1, \dots$. On les attribue une première fois tous à A_{n+1} , puis une deuxième fois en en donnant un et un seul (arbitrairement) à chacun des A_1, \dots, A_n .

§ 4 - QUOTIENTS - MORPHISMES.

Désormais, A désigne un anneau commutatif.

Définition : Soit \mathfrak{J} un idéal de A . Deux éléments a et b de A sont dits congrus modulo \mathfrak{J} (on note $a \equiv b \pmod{\mathfrak{J}}$), ou même $a \equiv b$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) si et seulement si, ou bien a et $b \in \mathfrak{J}$, ou bien $a \notin \mathfrak{J}$, mais $a \not\equiv b$ et $a - b \in \mathfrak{J}$.

Il est clair que c'est une relation d'équivalence sur A : en particulier, si $a \equiv b$, $b \equiv c$ et $b \notin \mathfrak{J}$, on a : $b \neq 0$, $a \not\equiv b$ et $b \not\equiv c$, ce qui implique a, b et c additifs, d'où $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathfrak{J}$. Notons que, dans chaque groupe d'addibilité A_α , cette congruence se réduit à la congruence modulo le sous-groupe $\mathfrak{J}_\alpha = \mathfrak{J} \cap A_\alpha$. Les classes d'équivalence sont donc \mathfrak{J} ,

et les classes $a + \mathfrak{J}$ distinctes, avec $a \in A$, $a \notin \mathfrak{J}$ (pour chacune de ces dernières, noter que $a + \mathfrak{J} \subset A(a)$). Ainsi, on voit que cette congruence est la relation R d'équivalence la plus fine telle que $a \not\equiv b$ et $a - b \in \mathfrak{J}$ impliquent $a R b$.

Lemme : Pour qu'une relation d'équivalence R sur A soit une congruence modulo un idéal \mathfrak{J} , il faut et il suffit qu'elle vérifie les conditions : $\forall a, b, a', b' \in A$,

- 1) $a R b$ et non $a R 0$ impliquent $a \not\equiv b$
- 2) $a R b$, $a' R b'$, $a \not\equiv a'$ et $b \not\equiv b'$ impliquent $(a + a') R (b + b')$
- 3) $a R b$ et $a' R b'$ impliquent $(a a') R (b b')$.

On dit alors que R est normale pour l'additivité, et compatible avec la somme et le produit dans A . La congruence modulo \mathfrak{J} vérifie ces conditions ; c'est clair pour 1. Pour 2, c'est clair si a, b, a' et $b' \in \mathfrak{J}$; si $a \notin \mathfrak{J}$, $a \equiv b$ implique $a \not\equiv b$, $a - b \in \mathfrak{J}$ et $b \notin \mathfrak{J}$, d'où par transitivité (puisque a et b non nuls) a, b, a' et b' addibles entre eux, donc $a' - b' \in \mathfrak{J}$ et enfin $(a + a') - (b + b') = (a - b) + (a' - b') \in \mathfrak{J}$. Pour 3, c'est clair si $a \in \mathfrak{J}$ (d'où $b \in \mathfrak{J}$) ou $a' \in \mathfrak{J}$, car les produits sont dans \mathfrak{J} ; si aucun des éléments a, b, a' et b' n'est dans \mathfrak{J} , on a $a \not\equiv b$, $a - b \in \mathfrak{J}$, $a' \not\equiv b'$ et $a' - b' \in \mathfrak{J}$; par la propriété fondamentale, $a a'$, $b b'$ et $a b'$ sont addibles entre eux, d'où :

$$a a' - b b' = a a' - a b' + a b' - a' b' = a (a' - b') + (a - a') b' \in \mathfrak{J}.$$

Inversement, si la relation R d'équivalence vérifie ces conditions, $\mathfrak{J} = \{a \in A ; a R 0\}$ est un idéal de A : $0 \in \mathfrak{J}$; si a et $b \in \mathfrak{J}$ sont tels que $a \not\equiv b$, $b R 0$ entraîne $-b R 0$, qui, avec $a R 0$ entraîne $(a - b) R 0$

(tout ceci par la condition 2) ; si $a \in A$ (donc $a R a$), et $x R 0$, la condition 3 implique $a x R 0$. Montrons que R est la congruence modulo \mathfrak{J} .

Lorsque $a R 0$, soit $a \in \mathfrak{J}$, les relations suivantes sont équivalentes :

$a R b$, (par transitivité de R) $b R 0$, $b \in \mathfrak{J}$, $a \equiv b$. Lorsque $a \in \mathfrak{J}$, si $a R b$ ou si $a \equiv b$, on a $a \not\equiv b$ par la condition 1 : les relations suivantes sont donc équivalentes : $a R b$, (par la condition 2) $(a - b) R 0$, $a - b \in \mathfrak{J}$, $a \equiv b$.

L'ensemble quotient A/\mathfrak{J} est muni canoniquement d'une structure d'anneau : Notons $\varphi : A \rightarrow A/\mathfrak{J}$ la surjection canonique. Si α et $\alpha' \in A/\mathfrak{J}$, soient a et a' des représentants respectifs de ces classes, on pose $\alpha \alpha' = \varphi(a a')$, produit indépendant du choix de a et a' , grâce à la compatibilité (3) ; les axiomes A pour A/\mathfrak{J} se vérifient trivialement (le zéro est \mathfrak{J} , et, si $1 \in A$, l'unité est $1 + \mathfrak{J}$). Deux classes α et α' seront addibles si et seulement si elles contiennent un élément addible (soient a et a' respectivement) ; on pose alors $\alpha + \alpha' = \varphi(a + a')$, somme indépendante du

choix du couple d'addibles a et a' , grâce à la compatibilité (2). Les axiomes B pour A/\mathfrak{J} se vérifient aisément : pour B_4 , si $\alpha \not\equiv \beta$, $\beta \not\equiv \gamma$, $\beta \neq 0$, alors il existe $a \in \alpha$, b et $b' \in \beta$, $c \in \gamma$ tels que $a \not\equiv b$, $b' \not\equiv c$; mais $\beta \neq 0$ implique $b \neq 0$, $b' \neq 0$ et (définition de la congruence) $b \not\equiv b'$; d'où $a \not\equiv c$ par transitivité par b et b' . Les axiomes pour l'addition sont clairs : Remarquer que chaque domaine d'addibilité de A/\mathfrak{J} est isomorphe au quotient d'un groupe A_α d'addibilité de A par le sous-groupe $\mathfrak{J}_\alpha = \mathfrak{J} \cap A_\alpha$. La distributivité se vérifie immédiatement. A/\mathfrak{J} s'appelle l'anneïde quotient de A par \mathfrak{J} .

Remarquons que $\overline{(A/\mathfrak{J})}$ peut s'identifier à l'anneau quotient $\overline{A}/\overline{\mathfrak{J}}$ de l'anneau \overline{A} par son idéal homogène $\overline{\mathfrak{J}}$, et que cette identification organise $\overline{A}/\overline{\mathfrak{J}}$ en anneau gradué dont la graduation est, en quelque sorte, induite par celle de A (résultat bien connu dans les cas classiques). En effet, si $a \rightarrow a'$ est l'homomorphisme canonique de A sur A/\mathfrak{J} et $\bar{a} \rightarrow \bar{a}'$ celui de \overline{A} sur $\overline{A}/\overline{\mathfrak{J}}$, on a pour tout $a \in A$, en considérant a' et a'' comme sous-ensembles de \overline{A} , $a'' = a' + \mathfrak{J}$ et $a' = a'' \cap A$. Il en résulte que, si $a \not\equiv b$, $a'' + b'' = (a + b)'' = (a + b)' + \mathfrak{J} = a' + b' + \mathfrak{J}$ et que $a'' b'' = (a b)'' = (a b)' + \mathfrak{J} = a' b' + \mathfrak{J}$. Il en résulte facilement que si $\bar{a} = \sum_{i=1}^n a_i$ (les a_i deux à deux non addibles), $\psi : \sum_{i=1}^n a'_i \rightarrow \sum_{i=1}^n a'_i + \mathfrak{J} = \bar{a}''$ définit un homomorphisme de $\overline{(A/\mathfrak{J})}$ sur $\overline{A}/\overline{\mathfrak{J}}$. Mais $\bar{a}'' = 0$ entraîne, puisque tous les a'_i non nuls sont mutuellement non addibles comme le sont les a_i , que tous les a'_i sont nuls et que $\sum_{i=1}^n a'_i = 0$. Donc ψ est un isomorphisme.

Soient A un anneïde, M un A -moduloïde, et P un sous-moduloïde de M . La notion de congruence modulo P dans M est l'analogue de la congruence modulo \mathfrak{J} dans A . Les propriétés sont en tout point analogues, sauf pour la compatibilité (3) du lemme, que l'on remplace par la compatibilité avec le produit par un scalaire : (3') $\forall a \in A, \forall x$ et $y \in M$, $x R y$ implique $a x R a y$.

On notera indifféremment M/P ou $M - P$ l'ensemble des classes de cette congruence modulo P . On notera $\varphi : M \rightarrow M - P$ la surjection canonique. Alors, l'ensemble $M - P$ est muni canoniquement d'une structure de A -moduloïde : les mêmes considérations sont valables pour l'addibilité et l'addition ; enfin, si $a \in A$ et $\xi \in M - P$, on prend x quelconque dans ξ , et on pose $a \xi = \varphi(a x)$, produit indépendant du choix de x par la compatibilité (3') ; les propriétés sont immédiates. $M - P = M/P$ s'appelle le A -moduloïde quotient de M par P .

De la même manière que précédemment, on démontre $\overline{(M - P)}$ est canoniquement isomorphe au module quotient $\overline{M} - \overline{P}$ du \overline{A} -module \overline{M} par son sous-module \overline{P} . Ceci montre, comme il est connu dans le cas classique, que

$\bar{M} - \bar{P}$ peut être organisé en un \bar{A} -module gradué par la même graduation que \bar{M} .

Soient A et B deux anneïdes. Une application $u : A \rightarrow B$ est dite homomorphisme d'anneïdes si, $\forall a$ et $b \in A$, on a :

- 1 - $a \neq b$ implique $u(a) \neq u(b)$
- 1' - $u(a) \neq u(b)$, $u(a) \neq 0$, $u(b) \neq 0$ impliquent $a \neq b$
- 2 - $a \neq b$ implique $u(a + b) = u(a) + u(b)$
- 3 - $u(ab) = u(a)u(b)$.

Si l'axiome (1') n'est pas vérifié, on a une représentation (au sens de Bourbaki) que nous appellerons quasi-morphisme, ou homomorphisme faible.

Si, de plus, A et B sont unitaires, et si $u(1) = 1$, u sera dit homomorphisme (resp. quasi-morphisme) d'anneïdes unitaires. Il est clair que $u(0) = 0$. Si u est un quasi-morphisme ou un homomorphisme, on appelle noyau de u , et on note $\text{Ker } u = u^{-1}(0)$. Les axiomes 1, 2, 3 montrent que le noyau est un idéal de A , la surjection canonique $\varphi : A \rightarrow A/\mathfrak{J}$ est un homomorphisme.

Lorsque l'anneïde A n'est pas un anneau, l'injection canonique $A \rightarrow \bar{A}$ est seulement un quasi-morphisme.

Soient M et M' deux A -moduloïdes. Une application $u : M \rightarrow M'$ est dite un homomorphisme de A -moduloïdes si, $\forall a \in A$ et $\forall x$ et $y \in M$, on a :

- 1 - $x \neq y$ implique $u(x) \neq u(y)$
- 1' - $u(x) \neq u(y)$, $u(x) \neq 0$, $u(y) \neq 0$ impliquent $x \neq y$
- 2 - $x \neq y$ implique $u(x + y) = u(x) + u(y)$
- 3 - $u(ax) = a u(x)$.

Si l'axiome (1') n'est pas vérifié, on dit encore quasi-morphisme. De même, on voit dans les deux cas que $u(0) = 0$ et que $\text{Ker } u = u^{-1}(0)$ est un sous- A -moduloïde de M .

Si P est un sous-moduloïde de M , l'injection canonique est un homomorphisme, de même que la surjection canonique $M \rightarrow M/P$. L'injection canonique $M \rightarrow \bar{M}$ est un quasi-morphisme. Soit a fixé $\in A$; l'homothétie h de M définie par $h(x) = ax$ est un quasi-morphisme.

Un homomorphisme ou un quasi-morphisme $u : A \rightarrow B$ d'anneïdes (resp. $u : M \rightarrow N$ de A -moduloïdes) se prolonge par linéarité, de manière évidente, en un homomorphisme $\bar{u} : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ d'anneaux gradués (resp. $\bar{u} : \bar{M} \rightarrow \bar{N}$ de \bar{A} -modules). Un homomorphisme $v : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ (resp. $v : \bar{M} \rightarrow \bar{N}$) sera dit homogène [resp. quasi-homogène] si $v = \bar{u}$, où $u : A \rightarrow B$ (resp. $u : M \rightarrow N$) est un homomorphisme [resp. quasi-morphisme].

Les anneïdes ou moduloïdes (respectivement les anneaux gradués ou leurs modules gradués) peuvent être considérés comme les classes d'objets de deux catégories différentes : la catégorie forte, en prenant pour morphismes les

homomorphismes (resp. les homomorphismes homogènes), et la catégorie faible, en prenant comme morphismes les quasi-morphismes (resp. les homomorphismes quasi-homogènes). $X \rightarrow \bar{X}$ et $u \rightarrow \bar{u}$ définit visiblement un isomorphisme de la catégorie, forte ou faible, des annéides (resp. des A-moduloïdes) avec la catégorie de même nom des anneaux gradués (resp. des \bar{A} -modules gradués).

Une sous-catégorie de la catégorie forte ou faible des annéides ou des A-moduloïdes (et, également, son image par $X \rightarrow \bar{X}$, $u \rightarrow \bar{u}$) sera dite régulière si, quels que soient les objets X, Y de la catégorie, et quel que soit x fixé $\in X$, tous les $u(x)$, où u parcourt $\text{Hom}(X, Y)$ (dans la sous-catégorie), sont mutuellement addibles. Les sous-catégories régulières de la catégorie forte sont exactes, mais pas, en général, celles de la catégorie faible.

Chapitre II

PHENOMENE D'AGGLUTINATION. - ANELS ET MONELS

Dans ce qui suit, les annéfides sont supposés commutatifs.

§ 1 - LE PHENOMENE D'AGGLUTINATION.

Pour un élément non nul x d'un annéfide A , les propriétés d'être ou non diviseur de zéro, ou simplifiable, ou diviseur d'un autre élément non nul sont les mêmes que dans les anneaux. Mais, pour un annéfide dont les grades non nuls ne forment pas un groupe, la multiplication par un élément peut donner des résultats addibles à partir d'éléments qui ne le sont pas. Plus généralement, il peut en être de même dans l'application d'un quasi-morphisme, comme le montre l'injection canonique d'un annéfide A dans l'anneau \bar{A} associé. Ce phénomène sera appelé l'agglutination. Il conduit au dédoublement de certaines notions habituelles (par exemple, diviseur et pseudo-diviseur), et à l'apparition de notions nouvelles. D'autre part, vue l'importance de la condition préalable d'addibilité dans la plupart des raisonnements, il paraît souhaitable de réserver l'expression "régularité d'un élément", à la simplifiabilité dans une relation d'addibilité, avec un sens que l'on va préciser.

Soit x un élément non nul d'un annéfide A . x est dit régulier pour l'addibilité (ou régulier, s'il n'y a pas d'ambiguïté), si, $\forall a$ et $b \in A$, les relations $a x \neq b x$, $a x \neq 0$, $b x \neq 0$ impliquent $a \neq b$. L'annéfide A est dit régulier si tous ses éléments non nuls le sont ; dans ce cas, on dit que l'anneau \bar{A} est régulier.

Pour un élément non nul x de A , supposons qu'il existe un entier positif i tel que, $\forall n \geq i$, les relations $a x^n \neq b x^n$, $a x^n \neq 0$, $b x^n \neq 0$ impliquent $a x^i \neq b x^i$. Notons $i(x)$ le plus petit entier i vérifiant cette condition. x est dit quasi-régulier (ou quasi-régulier fort) d'exposant $i(x)$. Lorsque tous les éléments de A sont quasi-réguliers forts, il est dit quasi-régulier, ou annéfide fort. L'annéfide sera dit uniformément fort, ou uniformément quasi-régulier, si l'ensemble des exposants $i(x)$ est majoré. On appelle anneau fort l'anneau associé à un annéfide fort.

Pour x non nul de A , supposons que, $\forall a \in A$, il existe un entier positif $i(x, a)$ tel que $\forall b \in A$, $\forall n \geq i$, les relations $a x^n \neq b x^n$, $a x^n \neq 0$, $b x^n \neq 0$ impliquent $a x^i \neq b x^i$. Alors, x est dit quasi-régulier strict. Si tous les éléments de A le sont, A est dit para-régulier, ou annéfide strict ; l'anneau \bar{A} associé est dit strict.

Pour x non nul de A , supposons que, $\forall a$ et $b \in A$, il existe un entier positif $i(x, a, b)$ tel que $\forall n \geq i$, les relations $a x^n \neq b x^n$,

$a x^n \neq 0$, $b x^n \neq 0$ impliquent $a x^i \neq b x^i$. Alors, x est dit quasi-régulier large.

Un anneau A unitaire et sans diviseur de zéro est dit un quasi-domaine. Il est clair que l'ensemble des éléments réguliers (resp. bi-réguliers, resp. quasi-réguliers forts) de A est multiplicativement stable.

Si A est sans diviseur de 0, les notions d'élément de torsion, de moduloïde de torsion, se définissent de même que dans le cas des modules. Et l'ensemble des éléments de torsion d'un moduloïde est un sous-moduloïde.

Soit $u : B \rightarrow B'$ un quasi-morphisme d'anneaux (resp. de A -moduloïdes). Si $\{b_1, \dots, b_n\}$ est une famille d'éléments de B , addibles

deux à deux, alors les $u(b_i)$ sont addibles et $u\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) = \sum_{i=1}^n u(b_i)$.

Inversement, si u est un homomorphisme, et si les $u(b_i)$ sont non nuls, et addibles deux à deux, alors on a la même formule. En effet, il en résulte l'addibilité des b_i , puisque u est un homomorphisme. On dit alors que u se met en facteur. Si certaines images $u(b_i)$ sont nulles, il suffit de les supprimer pour mettre ensuite u en facteur. Par exemple, si c non nul est un élément régulier de l'anneau A , l'homothétie de A de rapport c est un

homomorphisme, et c se met en facteur dans toute somme $\sum_{i=1}^n c b_i$ (les $b_i \in A$)

où les produits $c b_i$ sont non nuls et addibles deux à deux.

Soit $u : B \rightarrow B'$ un homomorphisme (d'anneaux ou bien de A -moduloïdes), et soit $K = u^{-1}(0)$ son noyau. La relation $u(x) = u(y)$ implique ou bien $x \neq y$ et $x - y \in K$, ou bien x et $y \in K$.

Soient A un anneau, \bar{A} l'anneau associé, M un A -moduloïde (par exemple A lui-même), x un élément de M , et $\gamma = c_1 + c_2 + \dots + c_n \in \bar{A}$ (avec les c_i tous non addibles, lorsque $n \geq 2$). L'élément γx de \bar{M}

n'appartient pas à M , sauf dans les deux cas suivants :

1) Les $c_i x$ sont deux à deux addibles. Alors, on dit que x agglutine les c_i ; que γ est un agglutiné par x , ou un coefficient pour x ; que γx existe, ou a un sens ; que les c_i sont des co-facteurs pour x .

En particulier, soient a et b deux éléments de A , avec $a \neq 0$. a est dit un pseudo-diviseur de b , s'il existe un agglutiné γ par a tel que $\gamma a = b$. La somme formelle γ est dite co-pseudo-diviseur. Si de plus a n'est pas diviseur de b , il est dit pseudo-diviseur vrai ou propre de b . Lorsque $b = 1$, a est dit pseudo-inversible, et la somme formelle γ est appelée

co-pseudo-inverse. Un anneau sans diviseur ni pseudo-diviseur de 0 sera dit intègre (c'est alors, en particulier, un intégral) ; si de plus il a un élément unité, il sera dit domaine intègre, ou domaine.

2) Dans la décomposition de \bar{M} en somme directe des groupes d'additivité, $\bar{\gamma}$ admet au plus une composante non nulle y , que l'on donnera pour valeur à $\bar{\gamma} x$. C'est-à-dire que $\bar{\gamma}$ s'écrit

$\bar{\gamma} = (c_1 + \dots + c_r) + (d_1 + \dots + d_s) + \dots + (g_1 + \dots + g_v)$ de manière que, dans M :

$$d_1 x + \dots + d_s x = 0$$

.....

.....

$$g_1 x + \dots + g_v x = 0$$

et $y = c_1 x + \dots + c_r x$ nul ou non. On dira que $\bar{\gamma}$ est agglutiné large par x , que $\bar{\gamma}$ est un coefficient large pour x , que les c_i, d_j, \dots sont des co-facteurs larges pour x , que $\bar{\gamma} x$ existe au sens large.

Remarquons que si c_1, \dots, c_n sont agglutinés par x , ils sont aussi agglutinés par tout multiple $a x$ de x (avec $a \in A$) ; et aussi, $\forall a \in A$, les produits $a c_1, \dots, a c_n$ sont agglutinés par x .

Plus généralement, soient A et B deux anneaux (resp. M et P deux A -module) et $u : A \rightarrow B$ (resp. $M \rightarrow P$) un quasi-morphisme. Soit $\bar{\gamma} = c_1 + \dots + c_n$ (avec les c_i tous non additifs, lorsque $n \geq 2$) un élément

de \bar{A} (resp. de \bar{M}). En général, la somme formelle $u(\bar{\gamma}) = \sum_{i=1}^n u(c_i)$ n'est pas élément de B (resp. de P), sauf dans les deux cas suivants :

1) les éléments $u(c_i)$ sont deux à deux additifs. Alors, on dit que u agglutine les c_i , et que $\bar{\gamma}$ est agglutiné par u . Quel que soit $a \in A$,

remarquons que u agglutine aussi les $a c_i$;

2) dans la décomposition de \bar{B} (resp. \bar{P}) en somme directe des groupes d'additivité, $u(\bar{\gamma})$ admet au plus une composante non nulle y , qu'on lui donnera pour valeur. Alors, on dit que $\bar{\gamma}$ est agglutiné large par u .

Soit M un A -module, et fixons deux éléments $a \in A$ et $x \in M$. La multiplication par x (ou par a) des éléments de A agglutine dans A , et la multiplication par a des éléments de M agglutine dans M . Ce sont deux cas particuliers de l'agglutination par un quasi-morphisme de A -module. Dans un cas, le quasi-morphisme $u : A \rightarrow M$ est défini par $u(b) = b x$; dans l'autre cas, $u : M \rightarrow M$ est défini par $u(y) = a y$.

Le phénomène d'agglutination signifie que, dans un anneau gradué \bar{A} ,

ou dans un \bar{A} -module gradué \bar{M} , des éléments homogènes de grades différents peuvent, après application d'un homomorphisme (de A -modules, ou bien d'anneaux pour le seul \bar{A}) non homogène, donner des images de même grade ; c'est-à-dire que l'image d'un élément non homogène peut être homogène. Un cas particulier important est le produit par un élément homogène, soit x ; on dira que x est régulier si et seulement si, pour tout élément non homogène, la multiplication par x ne le rend pas homogène, sauf trivialement (c'est-à-dire avec des produits nuls, sauf un au plus). Si a et b sont homogènes, et si a divise b , on a appelé a diviseur ou pseudo-diviseur suivant que le co-diviseur était homogène ou non.

D'autre part, l'axiome relatif à l'addibilité pour un quasi-morphisme, montre que l'agglutination est une question de grades. En effet, pour les éléments d'un même grade, l'agglutination non triviale a lieu de la même manière ; on peut dire qu'un homomorphisme non homogène agglutine les grades. En particulier, l'agglutination non triviale par x des éléments c_i signifie que $\omega(c_i x) = \omega(c_i) \omega(x)$ a la même valeur, pour tout i . On dira dans ce cas que $\omega(x)$ agglutine les $\omega(c_i)$.

Pour un quasi-morphisme d'annéides (resp. de A -moduloïdes) donné, soit u , l'ensemble des agglutinés par u , et l'ensemble des agglutinés larges par u , n'ont pas en général une structure d'annéide (resp. de A -moduloïde), mais une structure très voisine : essentiellement, deux quelconques groupes d'addibilité distincts ont en commun un même sous-groupe, mais qui n'est pas forcément réduit à $\{0\}$. D'autre part, l'étude des A -moduloïdes monogènes conduit à envisager les parties de \bar{A} , intermédiaires entre A et \bar{A} , et n'en différant, outre le support, que par une modification de l'addibilité ; ces intermédiaires sont des ensembles d'agglutinés au sens précédent. Nous allons donc, pour la commodité et la clarté de l'exposé, introduire aussi brièvement que possible ces structures nouvelles.

§ 2 - ANELS ET MONELS.

a) Anels - Monels - Graduations :

On appellera anel tout ensemble non vide A muni de deux lois internes : une addition partielle et une multiplication, vérifiant les axiomes :

A - 0 - $\forall a$ et $b \in A$, $a b \in A$

1 - $\forall a, b$ et $c \in A$, $(a b) c = a (b c)$

2 - Il existe un élément 0 tel que $0 a = a 0 = 0$, $\forall a \in A$.

B - 1 - $\forall a \in A$, $a \not\# a$

2 - $\forall a$ et $b \in A$, la relation $a \not\# b$ implique $b \not\# a$

3 - Il existe une partie Ω de A , contenant 0 , et telle que

$$\forall a \in A, \forall e \in \Omega, \quad a \# e$$

4 - $\forall a, b$ et $c \in A$, les relations $a \# b$, $b \# c$, $b \notin \Omega$ impliquent $a \# c$.

Pour $a \notin \Omega$, soit $A(a) = \{x \in A ; x \# a\}$ le domaine d'addibilité de a ; il est clair que $a \# b$ si et seulement s'ils appartiennent à un même domaine. Donc deux tels domaines, ou sont confondus, ou ont Ω pour intersection. On pose :

$$D^* = \{A(a) ; a \in A, a \notin \Omega\} \quad \text{et} \quad D = D^* \cup \{\Omega\}.$$

C - Addition : Chaque élément de D est un groupe additif abélien. En particulier, $\forall a$ et $b \in A$, $a \# b$ implique $a \# a + b$. On voit aisément que 0 est élément neutre de chacun de ces groupes.

D - Relations entre addition et multiplication :

La double distributivité du produit par rapport à l'addibilité, et par rapport à l'addition est vérifiée, et, de plus :

$$5 - \forall a \in A, \forall e \in \Omega, a e \in \Omega \text{ et } e a \in \Omega.$$

La partie Ω est appelée le milieu de A . De plus :

l' anel est dit commutatif s'il vérifie :

$$A3 - \forall a \text{ et } b \in A, a b = b a.$$

l' anel est dit unitaire s'il vérifie :

$$A4 - \text{Il existe un élément } 1 \in A \text{ tel que } 1 a = a 1 = a, \forall a \in A.$$

Soit A un anel. On appellera A -monel à gauche, ou monel à gauche sur A , tout ensemble M non vide muni d'une addition partielle, et d'une loi externe partout définie, ayant A pour domaine d'opérateurs, notée multiplicativement, vérifiant les axiomes :

$$A - 0 - \forall a \in A, \forall x \in M, a x \in M$$

$$1 - \forall a \text{ et } b \in A, \forall x \in M, (a b) x = a (b x)$$

$$2 - \text{Il existe un élément } 0' \text{ de } M \text{ tel que, } \forall a \in A, \forall x \in M, \\ a 0' = 0 x = 0' \text{ (on le notera désormais } 0).$$

$$B - 1 - \forall x \in M, x \# x$$

$$2 - \forall x \text{ et } y \in M, \text{ la relation } x \# y \text{ implique } y \# x$$

$$3 - \text{Il existe une partie } \odot \text{ de } M, \text{ contenant } 0, \text{ et telle que :}$$

$$\forall x \in M, \forall e \in \odot, x \# e$$

$$4 - \forall x, y \text{ et } z \in M, \text{ les relations } x \# y, y \# z, y \notin \odot \text{ impliquent } x \# z.$$

Pour $x \notin \odot$, soit $M(x) = \{y \in A ; y \# x\}$ le domaine d'addibilité de x . De même, deux tels domaines ou sont confondus, ou ont \odot pour intersection. On pose : $C^* = \{M(x) ; x \in M, x \notin \odot\}$ et $C = C^* \cup \{\odot\}$.

C - Addition : Chaque élément de C est un groupe additif abélien. En particulier, $\forall x$ et $y \in M$, $x \# y$ implique $x \# x + y$. Enfin, 0 est élément neutre de chacun de ces groupes.

D - Relations entre addition et multiplication :

La double distributivité du produit pour l'additivité et l'addition dans A et M est vérifiée, et de plus :

$$5 - \forall a \in A, \forall x \in \mathcal{O}, a \cdot x \in \mathcal{O}; \forall a \in \Omega, \forall x \in M, a \cdot x \in$$

La partie \mathcal{O} est appelée le milieu de M.

Les notions de monel à droite sur A, et de monel unitaire sont les analogues du cas des modules. Noter que Ω est un anneau, et \mathcal{O} un Ω -module. L'anel est un corpoïde lorsque $A^* = A \cdot \{0\}$ est un groupe multiplicatif (III, § 3).

Lemme 1 : $\forall e \in \mathcal{O}$ (resp. Ω), $\forall x$ et $y \in M$ (resp. A), la relation

$$x \# y \text{ équivaut à } x \# e + y.$$

C'est évident si x (ou y) est dans \mathcal{O} . Si $x \notin \mathcal{O}$ et $y \notin \mathcal{O}$, $x \# y$ implique $y \in M(x)$ qui contient \mathcal{O} . Donc $e + y \in M(x)$.

Propriété fondamentale : $\forall x$ et $y \in M$ (resp. A) et $\forall a$ et $b \in A$, les relations $a \# b$ et $x \# y$ impliquent $a \cdot x \# b \cdot y$.

En effet, de même que dans le cas des moduloïdes et des annéfides, la transitivité le montre si $a \cdot y \notin \mathcal{O}$, ou si $b \cdot x \notin \mathcal{O}$. D'autre part, si $a \cdot y$ et $b \cdot x \in \mathcal{O}$, de $(a + b) \cdot x \# (a + b) \cdot y$ on déduit $a \cdot x + b \cdot x \# a \cdot y + b \cdot y$ d'où $a \cdot x \# b \cdot y$ grâce au lemme.

Dans la suite, nous supposons toujours les anels commutatifs.

Par ailleurs, il faut remarquer que bien des résultats suivants concernant les anels et les monels sont encore vrais sans les axiomes D_5 ; cependant, on ne considérera pas les objets plus généraux, pour ne pas s'éloigner trop de l'étude qui nous intéresse.

Notons \bar{A} (resp. \bar{M}) l'ensemble des sommes formelles finies d'éléments (non addibles) de A (resp. de M). L'addition par juxtaposition et réduction des termes addibles en fait évidemment un groupe additif abélien.

Organisons \bar{A} (resp. \bar{M}) en anneau (resp. \bar{A} -module) en étendant la loi multiplicative de A (resp. de M) aux sommes formelles par distributivité et réduction des termes addibles. Il est clair alors que \bar{A} est un anneau (resp. \bar{M} un \bar{A} -module). \bar{A} s'appelle l'anneau associé à l'anel A, et \bar{M} le module associé au monel M. Pour $x \in \bar{A}$, ses composantes dans les groupes d'additivité sont déterminées modulo le milieu Ω ; en quelque sorte, le groupe additif de \bar{A} est la "somme directe modulo Ω " de ces groupes, ou "somme quasi-directe". On a la même remarque pour \bar{M} . Remarquons qu'un anel de milieu (0) est un annéfide, et qu'un monel de milieu (0) sur un annéfide, est un moduloïde.

Soient A un anel (commutatif), M un A-monel, Ω et \mathcal{O} leurs milieux respectifs, et D et C respectivement les ensembles de parties de A et M définis plus haut. On se servira ici d'un abus d'écriture analogue à celui adopté pour les annéfides et les moduloïdes : on gardera l'écriture $A(a)$ et Ω

(resp. $M(x)$ et \odot) pour les opérations sur ces objets en tant que sous-ensembles de A (resp. M) ; on notera $\omega(a)$ et $\omega(0)$ (resp. $\omega(x)$ et $\omega(0)$) les mêmes objets, considérés comme éléments de D (resp. de C) pour les opérations qui seront définies dans D (resp. C). D est muni canoniquement d'une loi multiplicative partielle (L) , déduite de celle de A : $\forall a$ et $b \in A.. \Omega$, si $A(a) A(b) \not\subset \Omega$, la propriété fondamentale montre l'existence de $c \in A.. \Omega$ tel que $A(a) A(b) \subset A(c)$ et l'on pose $\omega(a) \omega(b) = \omega(c)$. L'axiome D_5 montre que $G \Omega \subset \Omega$, $\forall G \in D$; on pose donc $\omega(a) \omega(0) = \omega(0)$ et $\omega(0)^2 = \omega(0)$. De même, l'ensemble C est muni canoniquement d'une loi externe (L) partielle, ayant D comme ensemble d'opérateurs : $\forall a \in A.. \Omega$ et $\forall x \in M.. \odot$, si $A(a) M(x) \not\subset \odot$, la propriété fondamentale montre l'existence de $y \in M.. \odot$ tel que $A(a) M(x) \subset M(y)$ et l'on pose $\omega(a) \omega(x) = \omega(y)$. L'axiome D_5 montre que, $\forall G \in D$, $\forall H \in C$, on a $\Omega H \subset \odot$ et $G \odot \subset \odot$; on pose respectivement $\omega(0) \omega(x) = \omega(0)$, $\omega(a) \omega(0) = \omega(0)$ et $\omega(0) \omega(0) = \omega(0)$. Pour cette loi (L) dans D , l'élément $\omega(0)$ est absorbant, et pourra être noté 0 ; il en est de même pour l'élément $\omega(0)$ de C . Ceci posé, les définitions d'une graduation Δ d'un anel A , et de sa graduation propre Δ_0 de support D , et les définitions d'une Δ -gradation Γ d'un A -monel M , et de sa graduation propre Γ_0 de support C , sont identiques en tout point à celles relatives aux annéfides et modulofides ; nous renvoyons donc aux définitions et remarques du paragraphe correspondant.

L'anneau \bar{A} associé à un anel A muni d'une graduation Δ , et le \bar{A} -module \bar{M} associé à un A -monel muni d'une Δ -gradation Γ , seront dits quasi-gradués généralisés. Le grade d'un élément homogène $x \in A.. \Omega$ (resp. $x \in M.. \odot$) sera noté $\omega(x)$.

b) Sous-monels et idéaux - Notation BX - Loi modulaire :

Soient A un anel (commutatif) de milieu Ω , et M un A -monel de milieu \odot . Une partie non vide P de M sera dite un sous- A -monel de M , si les lois de M induisent sur P une structure de A -monel. Pour cela, il faut et il suffit que, $\forall \lambda \in \Gamma_0$, $P_\lambda = P \cap M_\lambda$ soit un sous-groupe additif de M_λ et que, $\forall a \in A$ et $\forall x \in P$, $ax \in P$. Ceci équivaut à la condition $P - P \subset P$ et $A P \subset P$ ($P - Q$ signifiant ici l'ensemble des $p - q$, avec $p \in P$, $q \in Q$ et $p \neq q$). On voit que le milieu de P est $P \cap \odot$. Une partie non vide \mathfrak{J} de A sera dite idéal de A si elle est un sous-monel du A -monel A . Une partie non vide B de A sera dite un sous-anel de A si les lois de A induisent sur B une structure d'anel. Pour cela, il faut et il suffit que, $\forall \alpha \in \Delta_0$, $B_\alpha = B \cap A_\alpha$ soit un sous-groupe additif de A_α , et que $\forall a$ et $b \in B$, $ab \in B$. Ceci équivaut à la condition $B - B \subset B$ et $B^2 \subset B$. On voit que le milieu de B est $B \cap \Omega$.

On a des remarques de calcul sur anels et monels analogues à celles des annéfides ou modulofides. L'expression $(a_1 + \dots + a_r) + (b_1 + \dots + b_s)$

suppose que dans chaque parenthèse les termes soient deux à deux addibles, et que les totaux soient addibles. On en déduit (\mathcal{G} désignant le milieu de l'anel ou du monel) : d'abord, soient $\sum_{i=1}^r a_i = a \notin \mathcal{G}$ et $\sum_{j=1}^s b_j = b \notin \mathcal{G}$ deux sommes

d'éléments addibles ; si $a \neq b$, quels que soient i et j , on a $a_i \neq b_j$. Ensuite, après avoir remplacé par leur total les parenthèses dont le total est dans le milieu, on a le droit de "supprimer les parenthèses".

Cependant, la notion de combinaison linéaire se complique. Soient M un A -monel, Ω et \mathcal{G} les milieux respectifs de A et M , B et X des parties non vides respectivement de A et de M . On appelle combinaison linéaire simple des éléments de X , sur B , toute somme finie de la forme

$$\sum_{x \in X} (b_1^x x + \dots + b_{r(x)}^x x) = \sum_{x \in X} \beta^x x, \text{ avec les } b_k^x \in B, \text{ avec } b_k^x \text{ et } b_1^x$$

non addibles si $k \neq 1$, et avec les $\beta_k^x x$ tous addibles entre eux. On appelle combinaison linéaire des éléments de X , sur B , toute somme finie de combinaisons linéaires simples dont les totaux sont addibles, c'est-à-dire (après un regroupement éventuel) dont les totaux sont dans le milieu \mathcal{G} , sauf un au plus. Par suite, on pourra noter la combinaison

$$\text{par } \sum_j \left\{ \sum_{x \in X} \beta_j^x x \right\}, \text{ (ou bien } \sum_j \left\{ \sum_i \beta_j^i x_i \right\}), \text{ où chaque accolade est une}$$

combinaison simple, et où des termes $\beta_{j,k}^x x$ et $\beta_{j_1,k_1}^y y$ d'accolades

différentes sont non addibles lorsqu'aucun n'est dans \mathcal{G} . On pourra isoler l'accolade dont le total n'est pas dans \mathcal{G} . L'ensemble de ces combinaisons linéaires sera noté BX , et appelé le produit de B et X . En particulier, si B est un idéal ou si X est un sous-monel, BX est évidemment un sous-monel. Si $X = \{x\}$, on pourra noter $B\{x\} = Bx$.

Il est clair que l'intersection d'une famille de sous-monels est un sous-monel. Cela justifie la définition suivante : on appelle sous-monel engendré par une partie X de M , et on note (X) , le plus petit sous-monel de M contenant X . On voit aisément (lorsque $X \neq \emptyset$) que $(X) = AX$ lorsque A est unitaire et $(X) = AX + \mathbb{Z}X$ (sens évident : des termes $n_x x$ intervenant dans les accolades des combinaisons) lorsque A n'est pas unitaire. Un monel est dit de type fini, s'il possède un système fini $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de générateurs, et il est dit monogène ou cyclique s'il est engendré par un seul élément : $X = \{x\}$. Dans ce dernier cas, il pourra être noté $(x) = Ax + \mathbb{Z}x$, et il peut être différent de Ax si A n'est pas unitaire. Ces résultats s'appliquent aux idéaux d'un anel.

Soient F et G deux sous-monels d'un A -monel donné M , de graduation propre Γ . On appelle somme de F et G , et on note $F + G$, le sous-monel engendré par $F \cup G$. Cette somme est l'ensemble des sommes finies $\sum_{\alpha \in \Gamma^*} (f_\alpha + g_\alpha)$ où pour tout α , on a $f_\alpha \neq g_\alpha$ et où, si $\alpha \neq \beta$, on a $(f_\alpha + g_\alpha) \neq (f_\beta + g_\beta)$. Après une éventuelle réduction, on constate que les totaux $(f_\alpha + g_\alpha)$ sont dans le milieu \mathcal{O} sauf un au plus, et les f_α (resp. g_α) ne sont pas dans \mathcal{O} , sauf un au plus. Donc, tout $x \in F + G$ pourra s'écrire $x = f_\gamma + g_\gamma + \sum_{\alpha \neq \gamma} (f_\alpha + g_\alpha)$ avec les conditions suivantes : lorsque $x \notin \mathcal{O}$, f_γ et g_γ sont addibles à x , les f_α et g_α (qui figurent) ne sont pas addibles à x , et chaque total $(f_\alpha + g_\alpha)$ est dans \mathcal{O} ; lorsque $x \in \mathcal{O}$, ou bien $x = \sum_{\alpha} (f_\alpha + g_\alpha)$ avec f_α et g_α addibles, et non situés dans \mathcal{O} , et $(f_\alpha + g_\alpha) \in \mathcal{O}$, ou bien $x = f_\gamma + g_\gamma$ avec f_γ et g_γ dans \mathcal{O} .

Théorème 1 : (loi modulaire dans les monels)

Soient E, F, G trois sous-monels d'un A -monel donné M de milieu \mathcal{O} .
Si $E \supset F$, et si F (resp. G) est comparable à \mathcal{O} (c'est-à-dire $F \subset \mathcal{O}$ ou $F \supset \mathcal{O}$)
on a $E \cap (F + G) = F + (E \cap G)$.

En résumé, la loi modulaire classique, encore vraie pour les modulofides, n'est pas forcément vérifiée dans les monels, comme le montre l'exemple qui suit.

L'inclusion $E \cap (F + G) \supset F + (E \cap G)$ est évidente. Soit $x \in F + G$. Dans l'écriture précédente de x : ou bien $F \subset \mathcal{O}$, donc les f_α et g_α sont nuls, et $x = f_\gamma + g_\gamma$. Ou bien $F \supset \mathcal{O}$, et la somme $s = \sum_{\alpha \neq \gamma} (f_\alpha + g_\alpha)$ est dans \mathcal{O} , donc dans F , donc $f_1 = f_\gamma + s \in F$ et $x = f_1 + g_\gamma$. Par suite, si $x \in E \cap (F + G)$, il s'écrit $x = f + g$ avec $f \in F \subset E$, $g \in G$, $f + g \in E$. On a $g = x - f \in E$, donc $g \in E \cap G$ et $x \in F + (E \cap G)$.

Corollaire : Soient E, F, G trois sous-monels d'un A -monel M de milieu \mathcal{O} , tels que $E \supset F$. Si F (resp. G) est comparable à \mathcal{O} , et si $E \cap G = F \cap G$ et $E + G = F + G$, on a $E = F$. En particulier, les relations $E \supset F$, $E \cap \mathcal{O} = F \cap \mathcal{O}$, $E + \mathcal{O} = F + \mathcal{O}$ impliquent $E = F$.

En effet $E = E \cap (E + G) = E \cap (F + G) = F + E \cap G = F + (F \cap G) = F$.
Noter que théorème et corollaire s'appliquent aux idéaux d'un anel.

Exemple contraire où $F + G$ est différent de l'ensemble S des sommes

$f + g$ (avec $f \in F$, $g \in G$), et où la loi modulaire classique est en défaut.

Soit L le \mathbb{Z} -module libre $L = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b + \mathbb{Z}c + \mathbb{Z}d$, de base $\{a, b, c, d\}$.

Soient M_1 et M_2 des \mathbb{Z} -modules isomorphes à L^2 (nous les noterons comme L^2 ,

par abus d'écriture). Soit M le \mathbb{Z} -monel formé de la réunion de M_1 et M_2 , ces

derniers ayant, par définition, en commun le milieu $\mathcal{O} = \mathbb{Z}(a, a) + \mathbb{Z}(b, b)$.

Considérons les sous- \mathbb{Z} -monels suivants de M : $G = G_1 \cup G_2$ donné par

$G_1 = \mathbb{Z}(c, 0) \subset M_1$ et $G_2 = \mathbb{Z}(d, 0) \subset M_2$. Puis F donné par $F_1 = \mathbb{Z}(a + c, a)$

et $F_2 = \mathbb{Z}(b + d, b)$. Puis H donné par $H = \mathbb{Z}(a + b, a + b) \subset \mathcal{O}$ et $E = F + H$.

D'abord $F \cap \mathcal{O} = (0, 0)$. Ensuite, E_1 est formé des couples

$(n(a + c) + p(a + b), n a + p(a + b))$ avec $n, p \in \mathbb{Z}$, et de même E_2 des couples.

$(n(b + d) + p(a + b), n b + p(a + b))$. Soit $y \in E \cap G$; si par exemple

$y \in M_1$, sa deuxième composante $n a + p(a + b)$ doit être nulle, donc on a

$n = p = 0$, et $E \cap G = (0, 0)$.

Il est clair que $E \cap (F + G)$ contient $F + (E \cap G) = F$. Prenons

$f_1 = (a + c, a) \in F_1$, $g_1 = (-c, 0) \in G_1$, $f_2 = (b + d, b) \in F_2$, $g_2 = (-d, 0) \in G_2$.

Alors $f_1 + g_1 = (a, a)$ est dans \mathcal{O} , non dans E , et il en est de même pour

$f_2 + g_2 = (b, b)$. Leur somme $x = (f_1 + g_1) + (f_2 + g_2) = (a + b, a + b)$ est

élément de H et de $F + G$, donc de $E = F + H$ et de $E \cap (F + G)$. Noter que x

ne peut s'écrire $f + g$ (avec $f \in F$, $g \in G$), donc que S et $F + G$ sont différents.

D'autre part, il est clair que $x = (a + b, a + b) \notin F$. Par suite, on a

$E \cap (F + G) \neq F = F + (E \cap G)$.

c) Anels et monels quotients :

Congruence modulo un sous-monel : P étant un sous- A -monel de M , soit

R la relation d'équivalence dans M la plus fine telle que les relations

$x, y \in M$, $x \not\equiv y$, $x - y \in P$ impliquent $x R y$. Nous noterons dans la suite

$x + P$ (où $x \in M$ est donné) l'ensemble des éléments $x + p$, avec $p \in P$, $p \not\equiv x$.

Deux éléments x et y de M seront dits congrus modulo P , et on

notera $x \equiv y (P)$ (ou bien $x \equiv y$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) s'ils vérifient

l'une quelconque des conditions équivalentes suivantes :

I - $x R y$

II - ou bien $x \not\equiv y$ et $x - y \in P$, ou bien x et y ne sont pas addibles,
mais il existe $e \in \mathcal{O}$ tel que $x - e \in P$ et $y - e \in P$

III - ou bien $x \not\equiv y$ et $y \in x + P$, ou bien x et y ne sont pas addibles,
mais il existe $e \in \mathcal{O}$ tel que x et $y \in e + P$

IV - il existe $z \in M$ tel que x et $y \in z + P$.

II et III sont deux manières de dire la même condition, et elles

entraînent évidemment IV. Inversement, si IV est vérifiée, et si $z \notin \mathcal{O}$, soient $x = z + p$ et $y = z + p'$; par transitivité par z , les éléments z , p et p' sont addibles, donc aussi x et y ; on a donc $x - y = (z + p) - (z + p') = p - p' \in P$.

La restriction de R à un groupe d'addibilité M_λ est évidemment la congruence modulo $P_\lambda = P \cap M_\lambda$. Si une classe ξ modulo R rencontre \mathcal{O} , soit $e \in \mathcal{O} \cap \xi$, puisque $\xi_\lambda = \xi \cap M_\lambda$ égale $e + P_\lambda$, la transitivité de R par e implique $\xi = \bigcup_{\lambda \in \Gamma_0} \xi_\lambda = e + P$. Si au contraire ξ ne rencontre pas \mathcal{O} , $\forall x \in \xi$,

on a $x \notin \mathcal{O}$ et $\xi \supset x + P$. Alors, si x et y sont deux éléments non addibles tels que $x + P$ et $y + P$ ne rencontrent pas \mathcal{O} (donc, d'après ce qui précède, sont contenus dans des classes modulo R ne rencontrant pas \mathcal{O}), aucun élément de $x + P$ n'est addible à un élément de $y + P$; la dernière condition de la définition de R est donc vide entre élément de $x + P$ et élément de $y + P$; R étant la plus fine possible, $x + P$ et $y + P$ seront donc dans des classes modulo R distinctes. Donc, si ξ ne rencontre pas \mathcal{O} , $\forall x \in \xi$, on a $\xi = x + P$.

On notera M/P l'ensemble quotient correspondant, et ϕ la surjection canonique : $M \rightarrow M/P$. Les classes modulo P sont donc, d'une part les classes $e + P$ pour $e \in \mathcal{O}$, d'autre part les classes $x + P$, pour $x \in M$, $x \notin e + P$, $\forall e \in \mathcal{O}$.

Les mêmes résultats sont valables en remplaçant M , \mathcal{O} et P respectivement par un anel A , son milieu Ω , et un idéal \mathfrak{J} . On notera A/\mathfrak{J} l'ensemble quotient correspondant, et ϕ la surjection canonique : $A \rightarrow A/\mathfrak{J}$.

Lemme 2 : La congruence modulo P est normale par rapport à l'additivité, et compatible avec l'addition et avec le produit par un scalaire, c'est-à-dire :

- (1) S'il n'existe aucun $e \in \mathcal{O}$ tel que $x \equiv e$, la relation $x \equiv y$ implique $x \# y$.
- (2) Les relations $x \equiv y$, $x' \equiv y'$, $x \not\equiv x'$ et $y \not\equiv y'$ impliquent $x + x' \equiv y + y'$.
- (3) $\forall a \in A$, $x \equiv y$ implique $ax \equiv ay$.

Réciproquement, dans M , toute relation d'équivalence normale et compatible au sens précédent, est une congruence modulo un sous-monel de M . (Noter que la première partie de la condition (1) équivaut à $x \notin \mathcal{O} + P$)

En effet, (1) résulte de III. (3) résulte de II, car si $x - y \in P$ (resp. $x - e \in P$), comme P est un sous-monel, $ax - ay \in P$ (resp. $ax - ae \in P$, et $a \in \mathcal{O}$). Pour (2), si par exemple $x \notin \bigcup_{e \in \mathcal{O}} e + P$, nous savons que $x \# y$ et que x et $y \notin \mathcal{O}$. Donc, par

transitivité, les éléments x , y , x' et y' sont deux à deux addibles : comme alors $x - y$ et $x' - y'$ sont dans P (grâce à III) on a :
 $(x + x') - (y + y') = (x - y) + (x' - y') \in P$, donc $x + x' \equiv y + y'$. Si,

au contraire, tous les éléments x, y, x' et $y' \in \mathcal{O} + P$, alors (grâce à IV) $3e$ et $e' \in \mathcal{O}$ tels qu'on ait $x - e \in P, y - e \in P, x' - e' \in P$ et $y' - e' \in P$. Mais on sait que $x \not\equiv x'$ équivaut à $x - e \not\equiv x' - e'$; on a donc $(x + x') - (e + e') = (x - e) + (x' - e') \in P$, et de même pour $y + y'$; d'où enfin $x + x' \equiv y + y'$.

Réciproquement, soit S une relation d'équivalence dans M , vérifiant les conditions du lemme. On pose $P = \{x \in M ; x S 0\}$. Que P soit un sous-monel se vérifie trivialement. Comparons S et la congruence modulo P .

Lorsque $x \not\equiv y$, $x \equiv y$ équivaut à $(x - y) S 0$ par définition de P ; ceci, grâce à la condition (2) pour S , équivaut à $x S y$ (ajouter $\frac{+}{-} y$ aux deux membres). Lorsque x et y ne sont pas addibles, $x \equiv y$ signifie (II) qu'il existe $e \in \mathcal{O}$ tel que $x - e \in P$ et $y - e \in P$, et nous venons de voir que cela équivaut à $x S e$ et $y S e$. D'où $x S y$. Inversement, $x S y$ implique (condition (1) pour S) qu'il existe $e \in \mathcal{O}$ tel que $x S e$, d'où $y S e$ par transitivité de S .

On notera $\varphi : M \rightarrow M/P$ la surjection canonique de M sur l'ensemble quotient M/P (qui pourra aussi être noté $M - P$).

Dans un anel A , on a les mêmes résultats pour les classes et la congruence modulo un idéal \mathfrak{J} (notons-la encore $a \equiv b \pmod{\mathfrak{J}}$, ou $a \equiv b$), sauf qu'ici cette congruence est considérée dans A en tant qu'anel des opérateurs, et pas seulement dans A en tant que A -monel. A cause de cela, on a non seulement : $\forall a, b \equiv b'$ implique $a b \equiv a b'$, mais la condition (qui aurait été plus forte dans le cas non commutatif) :

(3') Les relations $a \equiv a'$ et $b \equiv b'$ impliquent $a b \equiv a' b'$.

Montrons maintenant que M/P est un A -monel et que A/\mathfrak{J} est un anel.

Cette rédaction, non détaillée, sera faite pour les A -monels. Pour les anels, les modifications sont minimales.

Soient donc P un sous- A -monel de M , et φ la surjection canonique : $M \rightarrow M/P$. Organisons M/P en A -monel ainsi : $\forall a \in A, \forall \varphi(x) \in M/P$, on pose $a \varphi(x) = \varphi(ax)$, définition indépendante (compatibilité (3)) du choix de x dans la classe. Les axiomes (A) se vérifient trivialement. Deux classes ξ et $\xi' \in M/P$ seront dites addibles si et seulement si elles contiennent un élément addible (soient x et x' respectivement) ; alors, on pose $\xi + \xi' = \varphi(x + x')$. La définition est indépendante (compatibilité (2)) du choix du couple (x, x') . La classe somme $\varphi(x + x') = (x + x') + P$ contient l'ensemble des $x + x' + p$ (où $p \in P$, p addible à x et x'), mais peut en être différente (prendre $x' = -x \notin P$). M/P satisfait aux axiomes des A -monels ; la vérification, longue, est sans difficulté. Faisons deux remarques : on prend pour milieu \mathcal{O}_1 de M/P l'ensemble des $\varphi(e)$ distincts, pour $e \in \mathcal{O}$. Tout groupe d'addibilité de M/P est isomorphe au groupe additif quotient d'un

groupe M_λ par le sous-groupe $P \cap M_\lambda$ (restreindre à M_λ la partition de M par la congruence modulo P).

Dans le cas du quotient A/\mathfrak{J} , notons encore φ la surjection canonique $A \rightarrow A/\mathfrak{J}$. Pour $\varphi(a)$ et $\varphi(b) \in A/\mathfrak{J}$, on posera $\varphi(a) \varphi(b) = \varphi(a \cdot b)$, définition indépendante (condition (3')) du choix de a et de b dans les classes correspondantes.

d) Homomorphismes - Régularité :

Soient M et M_1 deux A -monels, et \mathcal{O} et \mathcal{O}_1 leurs milieux respectifs. Une application $f: M \rightarrow M_1$ est dite homomorphisme de A -monels si, $\forall x$ et $y \in M$, $\forall a \in A$:

- 1 - la relation $x \not\# y$ implique $f(x) \not\# f(y)$, et on a $f(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}_1$
- 1' - les relations $f(x) \not\# f(y)$, $f(x) \notin \mathcal{O}_1$, $f(y) \notin \mathcal{O}_1$ impliquent $x \not\# y$
- 2 - la relation $x \not\# y$ implique $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- 3 - $f(ax) = a f(x)$.

Si f vérifie (1, 2, 3), mais non (1'), il est dit homomorphisme faible ou quasi-morphisme. Remarquer que lorsque l'image $f(M)$ n'est pas contenue dans un seul groupe d'additivité de M_1 , la première partie de la condition (1) implique $f(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}_1$.

Soient A et A_1 deux anels de milieux respectifs \mathcal{O} et \mathcal{O}_1 . Les notions analogues d'homomorphisme et quasi-morphisme d'anel se définissent de même, en remplaçant (3) par : 3 bis - $\forall a$ et $b \in A$, $f(a \cdot b) = f(a) f(b)$. Un homomorphisme (resp. quasi-morphisme) d'anel est dit unitaire si A et A_1 sont unitaires et si $f(1) = 1$. Un homomorphisme f (d'anel ou de monels) sera dit un isomorphisme s'il est bijectif et si $f(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1$.

Pour les anneaux [resp. modules] quasi-gradués, un homomorphisme est dit homogène (resp. quasi-homogène) si sa restriction aux parties homogènes est un homomorphisme (resp. quasi-morphisme) (voir I, § 3).

Anels réguliers, forts, stricts. Soit A un anel de milieu Ω . Pour un élément x de A , $x \notin \Omega$, la notion de régularité est analogue à celle donnée dans les anneaux : x est dit régulier si, quels que soient a et b dans A , les relations $a \cdot x \not\# b \cdot x$, $a \cdot x \notin \Omega$, $b \cdot x \notin \Omega$ impliquent $a \not\# b$. L'anel A est dit régulier si tout élément hors du milieu est régulier. De même, pour définir la quasi-régularité forte ou stricte, on remplacera dans les hypothèses (voir § 1) $a \cdot x^n \neq 0$ et $b \cdot x^n \neq 0$ par $a \cdot x^n \notin \Omega$ et $b \cdot x^n \notin \Omega$. On a de même les notions d'anel fort, d'anel strict.

Soient A un anel de milieu Ω et de graduation (Δ, θ) , \mathfrak{J} un idéal de A , et $\varphi: A \rightarrow A/\mathfrak{J}$ l'homomorphisme canonique. Posons $D^* = \{A(a) ; a \in A \dots \Omega\}$ et

$D = D^* \cup \{\Omega\}$; comme élément de D , Ω pourra être noté 0 . De même, dans A/\mathfrak{J} , notons D_1^* et $D_1 = D_1^* \cup \{\Omega_1\}$. Définissons une application $\psi : D \rightarrow D_1$,

déduite de φ ainsi : on pose $\psi(\Omega) = \{\varphi(\omega) ; \omega \in \Omega\} = \{\omega + \mathfrak{J} ; \omega \in \Omega\} = \Omega_1$

et pour tout $a \in A.. \{ \bigcup_{\omega \in \Omega} (\omega + \mathfrak{J}) \}$, on pose :

$$\psi(A(a)) = (A/\mathfrak{J})_{a+\mathfrak{J}} = \Omega_1 \cup \left\{ \varphi(a') ; a' \in A_{a..} \{ \bigcup_{\omega \in \Omega} (\omega + \mathfrak{J}) \} \right\}.$$

Il est clair que ψ est surjective, et injective sur l'image réciproque $\psi^{-1}(D_1^*)$. Ceci, joint aux propriétés de la multiplication dans A/\mathfrak{J} , montre (I, § 3, définition d'une graduation) que (Δ, θ) étant une graduation de A , il en résulte que $(\Delta, \psi \circ \theta)$ est une graduation de A/\mathfrak{J} .

De même, si M est un A -monel de Δ -graduation Γ , et si P est un sous-monel de M , Γ peut être considéré canoniquement comme une Δ -graduation de M/P .

§ 3 - STRUCTURE DES AGGLUTINES.

a) Agglutinés simple et large par un quasi-morphisme

Soient A un anel (commutatif), M et M_1 deux A -monels, et Ω , \mathcal{O} et \mathcal{O}_1 leurs milieux respectifs. Soit $f : M \rightarrow M_1$ un quasi-morphisme de monels.

Un élément $\xi = \sum_{i=1}^s x_i$ (les x_i deux à deux non addibles) de \bar{M} sera dit agglutiné

par f si, $\forall i$ et $j \leq s$, $f(x_i) \not\equiv f(x_j)$; le lemme 1 du paragraphe (2) montre que cette définition est indépendante de l'expression de ξ ; alors, $\forall a \in A$,

$a \xi = \sum_{i=1}^s a x_i$ est aussi agglutiné par f . L'ensemble de ces agglutinés est noté

\bar{M}^f et appelé l'agglutiné (ou addibilisé) de M par f . Deux éléments

ξ et $\xi' = \sum_{j=1}^r x'_j$ de \bar{M}^f seront dits addibles (dans l'agglutiné), ou addibles

par f si, $\forall i \leq s$, $\forall j \leq r$, $f(x_i) \not\equiv f(x'_j)$. On note alors $\xi \not\equiv_f \xi'$ (ou sans l'indice f s'il n'y a pas d'ambiguïté). Leur somme est par définition obtenue par juxtaposition et réduction des termes addibles dans M . Cette multiplication et cette addition partielle font de \bar{M}^f un A -monel. D'abord, le milieu de \bar{M}^f est $\mathcal{O}' = \{\xi \in \bar{M}^f ; \forall i, f(x_i) \in \mathcal{O}_1\}$. \mathcal{O}' est le sous-groupe additif de \bar{M}

⁻¹
engendré par $f(\mathcal{O}_1)$. Vérifions les axiomes B_3 et B_4 : $\forall \xi \in \mathcal{O}'$,

$\forall \eta = \sum_{j=1}^r y_j \in \bar{M}^f$ il est clair que $f(x_i) \neq f(y_j)$, donc que ξ et η sont addibles par f . Si ξ, η et $\zeta \in \bar{M}^f$ sont addibles par f , et si $\eta \notin \mathcal{O}'$, il existe y_1 dans la somme η tel que $f(y_1) \notin \mathcal{O}_1$; donc $f(y_1)$ transmet l'additivité, $\forall i$ et $\forall k$, entre $f(x_i)$ et $f(z_k)$. D'autre part, la propriété fondamentale entraîne l'axiome D_3 de \bar{M}^f , car $a \neq b$ et $f(x_i) \neq f(x_j)$ entraînent $f(a x_i) = a f(x_i) \neq b f(x_j) = f(b x_j)$. Pour les autres axiomes, la vérification est triviale.

Soient A et A_1 deux anels (commutatifs) de milieux Ω et Ω_1 respectivement. Soit $f : A \rightarrow A_1$ un quasi-morphisme d'anel. L'agglutiné par f , soit \bar{A}^f , est un anel. La vérification est analogue. Remarquons que l'axiome A_0 et la distributivité du produit par rapport à l'additivité sont conséquences de la propriété fondamentale; pour l'axiome A_0 par exemple, ξ et $\eta \in \bar{A}^f$ signifie que (avec les notations habituelles), $\forall i$ et j , $f(x_i) \neq f(x_j)$, et $\forall k$ et l , $f(y_k) \neq f(y_l)$, d'où $f(x_i y_k) = f(x_i) f(y_k) \neq f(x_j) f(y_l) = f(x_j y_l)$.

Si nous considérons ces résultats dans le cas particulier d'un moduloïde M sur un anneau A (commutatif), il faut bien remarquer qu'un agglutiné de M par un quasi-morphisme f est un A -monel, et non un A -moduloïde, lorsque $\bar{f}^1(0)$ est différent de $\{0\}$. De même l'agglutiné d'un anneau sera en général un anel.

Lorsque M est un A -monel, le \bar{A} -module \bar{M} peut être considéré comme un \bar{A} -monel d'autant de façons qu'il y a de choisir son milieu \mathcal{O}' . Celui-ci sera un sous- \bar{A} -module de \bar{M} , contenant le milieu \mathcal{O} de M . Nous ne distinguons pas les deux structures (monel et module) lorsque $\mathcal{O}' = \{0\}$. Lorsque $\mathcal{O}' \neq \{0\}$, il y a danger à les confondre, par exemple dès que l'on envisage un sur- \bar{A} -monel de M . Dans le cas précédent, si $\bar{f}^1(0) = M$, l'agglutiné $\bar{M}^f = \bar{M}$ est un monel, sur A et sur \bar{A} , égal à son milieu, bien qu'il ait aussi une structure sous-jacente de \bar{A} -moduloïde (et de \bar{A} -module). On a des remarques analogues sur l'anneau \bar{A} d'un anel A .

Soient A un anel (commutatif), et M un A -monel. Pour un élément fixé a de A , l'homothétie h de M , définie par $h(x) = a x$, est un quasi-morphisme. L'agglutiné de M par h est un A -monel qui sera noté \bar{M}^a , et appelé l'agglutiné de M par a .

De même, pour un élément fixé x de M (resp. A), l'application

$f : A \rightarrow M$ (resp. $A \rightarrow A$) définie par $f(a) = a \cdot x$ est un quasi-morphisme de A-monels. \bar{A}^f est un A-monel qui sera noté \bar{A}^x et appelé l'agglutiné (ou addibilisé) de A par x. Son addibilité pourra être notée $\#_x$, afin d'éviter

les confusions. Pour x non nul dans A, si la suite des \bar{A}^{x^n} , $n = 1, 2, 3, \dots$, est stationnaire, x est quasi-régulier.

Soient A un anel (commutatif) et M un A-monel, munis de graduations. Soient Ω et \mathcal{O} leurs milieux. On notera $\omega(z)$ le grade d'un élément z de A, ou de M, non situé dans le milieu. Soient $a, b \in A$ et $x \in M$ (resp. A). Par définition d'une graduation, la condition $a \cdot x \notin \mathcal{O}$ (resp. Ω) implique $\omega(a \cdot x) = \omega(a) + \omega(x)$. De là il résulte, si $a \cdot b \cdot x \notin \mathcal{O}$ (resp. Ω) l'associativité du produit des grades :

$$[\omega(a) + \omega(b)] + \omega(x) = \omega(a) + [\omega(b) + \omega(x)].$$

Lemme 1 : Lorsque la graduation de A est commutative, soient des éléments non situés dans le milieu $a, b, c, d \in A$ et $x \in M$ (resp. A) tels que $a \cdot x \# b \cdot x$ et $c \cdot x \# d \cdot x$. Si de plus le produit des grades de b, c et x (ou bien de a, d et x) est associatif, on a : $a \cdot c \cdot x \# b \cdot d \cdot x$.

Si $a \cdot c \cdot x$ et $b \cdot d \cdot x$ ne sont pas dans le milieu, $a \cdot x$ et $b \cdot x$ non plus, par l'axiome D_5 . Donc, par l'hypothèse du lemme $\omega(a \cdot x) = \omega(b \cdot x)$ et, par la remarque précédente :

$\omega(a \cdot c \cdot x) = \omega(c) + \omega(a \cdot x) = \omega(c) + \omega(b \cdot x) = \omega(c) + [\omega(b) + \omega(x)]$. On montre de même que $\omega(b \cdot d \cdot x) = \omega(b) + [\omega(c) + \omega(x)]$. La démonstration s'achève par l'associativité.

Corollaire 1 : Supposons la graduation de l'anel A associative et commutative, et celle du A-monel M associative. Si $x \in M$ (resp. A) agglutine deux sommes formelles d'éléments de A, il agglutine leur produit. En particulier, \bar{A}^x est un anel.

Corollaire 2 : En plus des conditions du corollaire 1, supposons que A soit un anneau, que M soit un A-moduloïde, et que $x \neq 0$ ne soit pas élément de torsion (resp. diviseur de 0). Alors, \bar{A}^x est un anneau.

Ces corollaires sont des conséquences immédiates du lemme. Pour le corollaire 2, l'hypothèse sur x montre que le milieu de \bar{A}^x est $\{0\}$. L'exemple contraire suivant montre l'utilité de l'associativité, non seulement pour le lemme, mais aussi pour le corollaire 2.

Exemple contraire 1 : Soit Δ_0 le monoïde commutatif formé de l'anneau 0 et des monômes à quatre variables a, b, c, d avec les relations $a \cdot d = b \cdot c = 0$. Soient k le corps à deux éléments, \bar{A} l'anneau gradué de type Δ_0 des polynômes sur k en a, b, c, d (avec $a \cdot d = b \cdot c = 0$), et enfin A l'anneau associé (on peut considérer Δ_0 comme support de A). Δ_0 est la graduation

propre de A , et est commutatif et associatif. Notons M la plus petite partie de \bar{A} , contenant A , qui soit un A -moduloïde où $a \nparallel b$ et $c \nparallel d$. Partant de A , on étend donc l'addibilité en imposant ces conditions, et leurs conséquences dues à la distributivité du produit par un élément de A , et à la transitivité par les éléments non nuls. Si, pour $n \geq 0$, on a dans M : $a^n \nparallel b^n$, le produit par a montre $a^{n+1} \nparallel a b^n$; de $a \nparallel b$, on déduit grâce au produit par $b^n \in A$, $a b^n \nparallel b^{n+1}$; comme $a b^n \neq 0$, il vient $a^{n+1} \nparallel b^{n+1}$; donc, \forall l'entier $n \geq 0$, on a $a^n \nparallel b^n$ dans M . On en déduit, si i, j, k, l sont des entiers ≥ 0 vérifiant $i + j = k + l$ que $a^i b^j \nparallel a^k b^l$ dans M . Il en est de même pour le couple des variables c et d . Finalement, M est formé uniquement, outre les éléments de A , des polynômes (sur k) homogènes soit en a et b , soit en c et d . Remarquons que le A -moduloïde M est engendré par 1 , considéré comme élément de M , et que M est l'agglutiné \bar{A}^1 de A par $1 \in M$. Mais M n'est pas un annéïde (ni un anel), puisque $a c$ et $b d$ ne sont pas addibles dans M . C'est-à-dire que $a + b \in M$, $c + d \in M$, mais $(a + b)(c + d) = a c + b d \notin M$. Il en résulte, grâce au lemme, que, quelle que soit la graduation commutative et associative Δ de A , une quelconque Δ -gradation Γ de M ne jouit pas de l'associativité des scalaires, ce que l'on peut vérifier directement. Reprenons les notations de la démonstration du lemme, en posant $x = 1 \in M$. Pour les grades, évidemment non nuls, de $a c$ et $b d \in M$, on a comme précédemment : $\omega(a c) = \omega(c) [\omega(b) \omega(1)]$ et $\omega(b d) = \omega(b) [\omega(c) \omega(1)]$. S'il y avait associativité pour Γ , on en déduirait :

$$\omega(a c) = [\omega(c) \omega(b)] \omega(1) = [\omega(b) \omega(c)] \omega(1) = \omega(b d), \text{ d'où une contradiction.}$$

Exemple contraire 2 : Voici un annéïde C , déduit d'un anneau de polynômes, dont la graduation est intrinsèquement non associative. Soit B l'annéïde commutatif des monômes sur $\mathbb{Z}/(2)$, en a, b, c, d, x avec les relations $a d = b c = 0$. Soit C la plus petite partie de \bar{B} , contenant B , qui soit un annéïde où $a x \nparallel b x$ et $c x \nparallel d x$. Partant de B , on obtient donc C en étendant l'addibilité par ces conditions et par la propriété fondamentale. On montre que (les entiers sont positifs) : $\forall i, j, k, l, m$ vérifiant $1 \leq i + j = k + l \leq m$, on a $a^i b^j x^m \nparallel a^k b^l x^m$ et de même avec c et d ; $\forall i, j, m$ vérifiant $1 \leq i + j \leq m$, on a $a^i c^j x^m \nparallel b^i d^j x^m$. Ce sont, dans le passage de B à C , les seules extensions de l'addibilité. Par contre, $a c x$ et $b d x$ ne sont pas addibles, ni $a^i c^j x^m$ et $b^i d^j x^m$ si $m < i + j$. Soit Γ une graduation de C . Il est clair que la loi commutative sur Γ n'est pas associative; $a c x$ et $b d x$ étant non nuls et non addibles,

on a en effet :

$$\begin{aligned}\omega(a) [\omega(x) \omega(d)] &= \omega(a) \omega(x d) = \omega(a) \omega(x c) = \omega(a x c) \neq \omega(b x d) = \\ &= \omega(b x) \omega(d) = \omega(a x) \omega(d) = [\omega(a) \omega(x)] \omega(d).\end{aligned}$$

M et M_1 étant toujours des monels sur un anel A (commutatif), et

$f : M \rightarrow M_1$ un quasi-morphisme, soit encore $\xi = \sum_{i=1}^s x_i$ un élément de \bar{M} .

ξ sera dit agglutiné large par f si la somme formelle $\sum_{i=1}^s f(x_i)$ après réduction des termes addibles dans M_1 , est un élément de M_1 , que l'on notera $f(\xi)$.

On sait que l'expression de ξ (avec les x_i non addibles entre eux) est unique

modulo \mathcal{O} . Si donc $\xi = \sum_{i=1}^s (x_i + e_i)$, avec $\forall i, e_i \in \mathcal{O}$, est une autre

expression de ξ , on a $\sum_{i=1}^s e_i = 0$, donc $\sum_{i=1}^s f(e_i) = f(\sum_{i=1}^s e_i) = f(0) = 0$.

On en déduit :

$$\sum_{i=1}^s f(x_i + e_i) = \sum_i [f(x_i) + f(e_i)] = \sum_i f(x_i) + \sum_i f(e_i) = \sum_i f(x_i).$$

Donc, $f(\xi)$ ne dépend pas de l'expression de ξ .

On note Λ^f l'ensemble de ces agglutinés larges, et on appelle

Λ^f l'agglutiné large de M par f. D'abord, $\forall a \in A$ et $\forall \xi \in \Lambda^f$, il est clair

que $a \xi \in \Lambda^f$. Donc Λ^f est une partie de \bar{M} , stable par le produit par les

éléments de A. Deux éléments ξ et η de Λ^f seront dits addibles dans Λ^f si et seulement si $f(\xi)$ et $f(\eta)$ sont addibles dans M_1 ; alors, $\xi + \eta$ s'obtiendra par juxtaposition, puis réduction des termes addibles dans M. Ces deux

opérations font alors de Λ^f un A-monel. Le milieu de Λ^f est l'ensemble

des $\xi \in \Lambda^f$ tels que $f(\xi) \in \mathcal{O}_1$. Les axiomes de A-monel se vérifient pour Λ^f

encore plus aisément que pour \bar{M}^f ; en effet, on raisonne, pour les questions d'addibilité, sur l'élément $f(\xi)$ de M_1 et non sur les termes $f(x_i)$. Enfin,

une étude analogue, faite sur un quasi-morphisme d'anel $f : A \rightarrow B$, conduit à un agglutiné large qui est un anel.

Dans l'exemple où M est un monel sur un anel A (commutatif), où on fixe $x \in M$ (resp. A) et où f est le quasi-morphisme de A-monels $A \rightarrow M$

(resp. $A \rightarrow A$) défini par $f(a) = a x$, l'agglutiné large sera noté Λ^x . Alors,

dans les conditions du corollaire 1, Λ^x est un anel. Si, de plus, A est un

annéide, et si x non nul dans A est ni diviseur, ni pseudo-diviseur de 0, alors Λ^x est un annéide.

Diviseurs d'un élément. Plaçons-nous, pour simplifier l'exposé, dans le cas d'un anel unitaire A . Soient $x, b \in A, x \neq 0$. Nous dirons que x est diviseur (resp. pseudo-diviseur, resp. diviseur large) de b , s'il existe un élément $\delta \in A$ (resp. $\delta \in \bar{A}^x$, resp. $\delta \in \Lambda^x$) tel que $b = \delta x$. Il sera dit pseudo-diviseur (resp. diviseur large) propre, si de plus $\delta \notin A$ (resp. $\delta \in \bar{A}^x$). De là les notions de diviseur de 0, de pseudo-diviseur de 0, de diviseur large de 0. De là aussi les notions d'élément inversible, pseudo-inversible, inversible large.

L'anel unitaire A est dit intègre si, pour tout élément c non nul de A , l'homothétie de rapport c est injective. L'anel unitaire A est dit un quasi-domaine s'il n'a pas de diviseur de 0. Il est appelé domaine s'il n'a de diviseur de 0 d'aucune sorte.

b) Anels et monels intermédiaires. Factorisation d'un quasi-morphisme

Revenons au cas où $f : M \rightarrow M_1$ est un quasi-morphisme de monels. Que l'on considère M comme partie de \bar{M}^f ou de Λ^f , ses éléments ont la même addibilité. Et Λ^f ne diffère en quelque sorte de \bar{M}^f que par un agrandissement du milieu (et par l'agrandissement corrélatif du A -monel). Si donc Λ^f est différent de \bar{M}^f , il ne peut être un simple agglutiné \bar{M}^h . Lorsque f est donnée, l'ensemble des A -monels intermédiaires entre M et \bar{M} , et dont l'addibilité induit sur les éléments de M l'addibilité par f , admet \bar{M}^f comme plus petit élément. Inversement, pour l'ensemble des A -monels, intermédiaires entre M et \bar{M} , dans lesquels les éléments de M ont une même addibilité donnée, il existe un plus petit élément : on prend l'un P de ces A -monels et l'injection canonique $j : M \rightarrow P$; on voit que \bar{M}^j est ce plus petit élément. Ces agglutinés simples \bar{M}^f par un quasi-morphisme, seront aussi appelés les petits intermédiaires entre M et \bar{M} . Notons que M et \bar{M} en sont, le premier par l'identité de M , le second par l'injection canonique de M dans \bar{M} .

En particulier, si A est un anel unitaire, tout (A -monel) petit intermédiaire entre A et \bar{A} est un agglutiné \bar{A}^f ; (f quasi-morphisme de A -monels) il est même un agglutiné \bar{A}^x , en posant $x = 1 \in \bar{A}^f$ (il n'est pas, en général, un \bar{A}^y , avec $y \in A$). Il en résulte que tout petit intermédiaire qui est un anel se trouve parmi les \bar{A}^x précédents. Mais nous avons vu plus haut qu'un \bar{A}^x

n'est pas forcément un anel, même si la graduation de A est associative.

Lemme 2 : (a) Soit $f : M \rightarrow M_1$ un quasi-morphisme de A -monels.

Il existe un unique homomorphisme de A -monels, $f' : \bar{M}^f \rightarrow M_1$,
prolongeant f .

(b) Soit $f : A \rightarrow B$ un quasi-morphisme d'anel.

Il existe un unique homomorphisme d'anel $f' : \bar{A}^f \rightarrow B$, prolongeant f .

Tout $\xi \in \bar{M}^f$ (resp. \bar{A}^f) s'écrit $\xi = \sum_{i=1}^s x_i$, où les $f(x_i)$ sont

mutuellement addibles, mais non les x_i . On pose nécessairement

$f'(\xi) = \sum_{i=1}^s f(x_i)$, ce qui est indépendant de l'expression de ξ (on l'a

vu pour la définition de \bar{A}^f). Il est clair que f' prolonge f , est unique, et

est un quasi-morphisme. Enfin, si ξ et $\eta = \sum_{j=1}^r y_j \in \bar{M}^f$ (resp. \bar{A}^f) sont tels
que $f'(\xi) \neq f'(\eta)$, $f'(\xi) \notin \mathcal{O}_1$, $f'(\eta) \notin \mathcal{O}_1$, il est clair que

l'addibilité (dans M_1 , resp. B) se transmet par $f'(\xi)$ et $f'(\eta)$ vers $f(x_i)$
et $f(y_j)$. Donc ξ et η sont addibles dans \bar{M}^f (resp. \bar{A}^f), et f' est un
homomorphisme.

En particulier, un quasi-morphisme $f : M \rightarrow M_1$ de A -monels se
prolonge de manière unique en un homomorphisme $\bar{f} : \bar{M} \rightarrow \bar{M}_1$ de \bar{A} -modules.
Il suffit de prendre $\bar{f} = (u \circ f)'$ où u est l'injection canonique $M_1 \rightarrow \bar{M}_1$.
Un quasi-morphisme d'anel se prolonge de même en un homomorphisme d'anneaux.

Ce lemme montre que tout quasi-morphisme se factorise canoniquement
en $f = f' \circ j$, où j est l'injection canonique $M \rightarrow \bar{M}^f$ (resp. $A \rightarrow \bar{A}^f$).

Il est maintenant clair que l'agglutiné large \bar{A}^f est l'agglutiné simple de \bar{M}^f
(resp. \bar{A}^f) par f' . On sait déjà que cette seconde agglutination se borne à
"étendre le milieu" du A -monel \bar{M}^f (resp. de l'anel \bar{A}^f).

En particulier, si A est un anel d'anneau \bar{A} (resp. M un A -monel
de A -module \bar{M}), et si B est un anel intermédiaire entre A et \bar{A} (resp. M_1
un A -monel intermédiaire entre M et \bar{M}), on déduit B de A (resp. M_1 de M)
grâce au plus à deux agglutinations simples : la première par l'injection
canonique $f : A \rightarrow B$ (resp. $M \rightarrow M_1$), la seconde par f' . On obtient donc ainsi,
par au plus deux agglutinations simples, tout anel (resp. A -monel) intermédiaire.

Comme application, soit A un anel (commutatif) unitaire, et soit
un A -monel monogène $M = A \cdot x = (x)$ (pour ces notations, voir chap. II, § 2 b).

Le quasi-morphisme $f : A \rightarrow M = A \times$ défini par $f(a) = a \times$ est en général non surjectif. Il se prolonge en un homomorphisme $f' : \bar{A}^X \rightarrow M$, qui se prolonge à

son tour en un homomorphisme surjectif $f'' : \bar{A}^X = \overline{\bar{A}^X}^{f'} \rightarrow M = A \times$. Par définition du milieu de \bar{A}^X , l'image de ce milieu par f'' est le milieu de M . Un théorème d'isomorphie (vu ultérieurement) montre alors que $A \times = M$ est isomorphe à un quotient du A -monel \bar{A}^X par un sous-monel. Si, de plus, une graduation de A est associative, et si $\omega(x)$ associe les scalaires dans une graduation de M , $M = A \times = \bar{A}^X \times$ sera un \bar{A}^X -monel, isomorphe (comme \bar{A}^X -monel) à un quotient de l'anel \bar{A}^X par un idéal. Ces résultats s'appliquent évidemment au cas d'un moduloïde monogène sur un anneau unitaire.

Soient A un anel, et B un agglutiné de A qui soit un anel. Il est clair que pour B les notions d'idéal et de sous- A -monel se confondent.

Soit \bar{A} (resp. \bar{M}) un anneau (resp. un \bar{A} -module) quasi-gradué d'ensemble homogène A (resp. M). Un homomorphisme quasi-homogène produit un changement de la structure quasi-gradué : l'anneau (resp. le module) abstrait reste le même, mais l'ensemble homogène s'étend (des éléments nouveaux s'homogénéisent), et la quasi-gradation change, avec un groupement des grades.

Dans l'anneau quasi-gradué \bar{A} (d'ensemble homogène A) la multiplication par un élément x homogène d'un \bar{A} -module \bar{M} , quasi-gradué, conduit à considérer \bar{A} comme un \bar{A} -module quasi-gradué dont l'ensemble homogène est $\bar{A}^X \supset A$. Si, de plus, il y a associativité d'une graduation de \bar{M} , l'ensemble \bar{A}^X des nouveaux éléments homogènes est multiplicativement stable, d'où pour \bar{A} une nouvelle structure d'anneau quasi-gradué. Inversement, toute quasi-gradation de l'anneau abstrait \bar{A} , pour laquelle l'ensemble homogène contient A , ou bien possède pour ensemble homogène un tel \bar{A}^X , ou un anel qui s'en déduit par une extension du milieu de \bar{A}^X .

c) Agglutinés par une partie multiplicative de A . Divisions des idéaux :

Outre les agglutinés des types précédents (\bar{M}^f et \bar{A}^f), il apparaît aussi des ensembles d'agglutinés dont la structure est en général plus complexe. Nous allons étudier sommairement deux cas.

Soient A un anel (commutatif), M un A -monel, et P une partie non vide de M . Considérons les ensembles :

$$T = T(A, P) = \bigcap_{x \in P} \bar{A}^X = \left\{ \bar{\gamma} = \sum_{i=1}^s c_i \in \bar{A} ; \forall x \in P, \forall i \text{ et } j, c_i x \neq c_j x \right\}$$

et $\Lambda = \Lambda(A, P) = \bigcap_{x \in P} \bar{A}^X$. Ces ensembles sont stables par multiplication

par les éléments de A . Deux éléments $\bar{\gamma}$ et $\bar{\gamma}'$ de T seront dits addibles dans T si et seulement s'ils le sont dans \bar{A}^X , $\forall x \in P$; la somme est définie de

manière évidente. Dans T , les axiomes suivants des A -monels sont vérifiés : A, B_1, B_2 , les distributivités et la propriété fondamentale. Mais on a une structure plus complexe que celle de A -monel. On trouve dans T deux parties \mathcal{O} et \mathcal{O}' telles que $(0) \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \subset T$, que \mathcal{O} est l'ensemble des éléments de T addibles à tout dans T , et que \mathcal{O}' est la plus grande partie de T pour laquelle les éléments de $T \setminus \mathcal{O}'$ transmettent l'addibilité. On considère l'ensemble $E \subset \mathcal{P}(T)$ des parties non vides de T formées d'éléments mutuellement addibles. E étant inductif, soit G un élément maximal. Dans T , la relation $\gamma \neq \gamma'$ implique $\gamma \neq \gamma + \gamma'$, puisque cela est vrai dans chaque \bar{A}^x . Donc G est stable par l'addition de T . De plus, pour chaque $x \in P$, G est une partie d'un groupe d'addibilité de \bar{A}^x , contient 0 , et contient, avec un élément γ , son opposé. G est donc un groupe abélien, encore appelé groupe d'addibilité. \mathcal{O} est l'intersection de ces éléments maximaux. Pour A , une étude analogue en tout point est évidente.

Appliquons ces considérations à la division d'un idéal a d'un anel commutatif A par une partie non vide b de A . La notion classique $a : b = \{c \in A ; \forall b \in b, c b \in a\} = \{c \in A ; c b \subset a\}$ donne encore le plus grand idéal \mathfrak{J} de A tel que $\mathfrak{J} b \subset a$. On peut aussi définir deux autres divisions :

$$a : b = \{ \gamma \in T(A, b) ; \forall b \in b, \gamma b \in a \}$$

$a : b = \{ \gamma \in \Lambda(A, b) ; \forall b \in b, \gamma b \in a \}$. Ces deux parties de \bar{A} sont stables par multiplication par les éléments de A . Mais ce qui précède montre qu'en général leur structure ne sera pas assez simple pour être commode. Notons cependant que $b \supset b'$ implique que le quotient de a par b est contenu dans celui de a par b' (quelle que soit la division envisagée). On a des considérations analogues pour la division d'un sous- A -monel d'un monel M , par une partie non vide de M .

Soient A un anel (commutatif), M un A -monel, et S une partie non vide, multiplicativement stable de A . On appellera agglutiné de M par S la partie de \bar{M} définie par $\bar{M}^S = \{ \xi \in \bar{M} ; \exists s \in S, \xi \in \bar{M}^s \} = \bigcup_{s \in S} \bar{M}^s$, qui

évidemment est stable par multiplication par les éléments de A et qui est munie de l'addibilité par S ainsi définie : ξ et $\eta \in \bar{M}^S$ sont addibles par S si et seulement s'il existe $t \in S$ tel que, $\forall i$ et j , $t x_i \neq t y_j$; la somme se calcule alors dans \bar{M} . Dire que ξ et $\eta \in \bar{M}^S$ sont addibles par S , grâce à t , équivaut à dire qu'ils sont éléments addibles d'un même agglutiné simple \bar{M}^σ , avec $\sigma \in S$. En effet, si $\xi \in \bar{M}^s$ et $\eta \in \bar{M}^t$ sont addibles par S

grâce à t , on le voit en posant $\sigma = r s t$. (Par contre, si on ne supposait pas S multiplicativement stable, il pourrait arriver que deux tels éléments

ξ et $\eta \in \bar{M}^S$ soient addibles par S , sans appartenir à un même agglutiné simple \bar{M}^u , $u \in S$; et $\xi + \eta$ pourrait n'être pas dans \bar{M}^S). Il est facile de voir que \bar{M}^S est un A-monel dont le milieu est $\mathcal{O}_S = \bigcup_{s \in S} \mathcal{O}_s$, où \mathcal{O}_s

est le milieu de \bar{M}^s . En effet, quel que soit $\xi \in \mathcal{O}_s$, il existe $s \in S$ tel que les $s x_i$ appartiennent au milieu \mathcal{O} de M ; quel que soit $\eta \in \bar{M}^S$, il existe $r \in S$ tel que les $r y_j$ soient addibles entre eux, donc aussi les $s r y_j$; comme $r s x_i \in \mathcal{O}$, $\forall i$ (axiome D_5), ξ et η sont des éléments addibles de \bar{M}^{rs} . Soient ξ , η et $\zeta \in \bar{M}^S$, avec $\eta \notin \mathcal{O}_s$, ξ et η étant addibles par S , de même que η et ζ . Il existe u et $v \in S$ tels que ξ et η soient éléments addibles de \bar{M}^u , et η et ζ de \bar{M}^v . Alors, ξ et η (resp. η et ζ) sont éléments addibles de \bar{M}^{uv} , avec $\eta \notin \mathcal{O}_{uv}$; donc ξ et ζ sont addibles dans \bar{M}^{uv} , et aussi dans \bar{M}^S . La vérification des autres axiomes des A-monels, pour \bar{M}^S , est alors immédiate.

On a les résultats analogues pour la réunion $\bigcup_{s \in S} \Lambda^s$ des agglutinés larges Λ^s ($s \in S$) de M .

Soient A un anel (commutatif) et S une partie non vide, multiplicativement stable de A . Le A-monel \bar{A}^S (resp. Λ^S) est un anel (même lorsque la graduation n'est pas associative). Soient $\xi, \eta \in \bar{A}^S$; donc il existe $s, t \in S$ tels que $\xi \in \bar{A}^s$ et $\eta \in \bar{A}^t$; alors $(st)(\xi \eta) = (s\xi)(t\eta)$ montre, avec la propriété fondamentale dans A , que $\xi \eta \in \bar{A}^{st}$; donc \bar{A}^S est multiplicativement stable. Soit $\eta \in \bar{A}^t$ et soient ξ et ξ' deux éléments addibles de \bar{A}^s , donc éléments addibles d'un \bar{A}^s (avec $s, t \in S$); la propriété fondamentale dans A montre que $(st)(\eta \xi) = (t\eta)(s\xi) \neq (t\eta)(s\xi') = (st)(\eta \xi')$, donc que $\eta \xi$ et $\eta \xi'$ sont éléments addibles de \bar{A}^{st} . Les autres vérifications sont triviales.

d) Agglutination par un grade :

Soient A un anel (commutatif) de graduation Δ (commutative), et M un A-monel (éventuellement A) ayant une Δ -graduation Γ (éventuellement Δ). Les éléments d_1, \dots, d_p de Δ seront dits agglutinés par le grade $\gamma \in \Gamma$ si des $d_i \gamma$ ont la même valeur. Cela s'appelle l'agglutination dans Δ par un grade γ . On peut considérer de même l'agglutination dans Γ par un grade $d \in \Delta$. Définissons l'agglutination dans A par un grade.

Définition. Lemme 3 : Soient A un anel de graduation Δ et de

milieu Ω , ξ un élément de Δ , et e un entier ≥ 1 . (1) Soit $a \in A$. Si $a \notin \Omega$ et si pour toute factorisation $a = f_1 \dots f_q$ (les $f_j \in A$), le produit

$\omega(f_1) \dots \omega(f_q) \xi \dots \xi$ (e facteurs ξ) est associatif et non nul, sa valeur

$\omega(a) \xi^e$ est par définition le grade $\omega'(a)$ dans l'agglutiné qui suit.

Dans tous les autres cas, on pose $\omega'(a) = 0$. (2) Soit $\bar{A}^{\xi, e}$ la partie de \bar{A}

formée des $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i$ tels que les $\omega'(a_i)$ non nuls aient la même valeur,

qui sera le grade $\omega'(\alpha)$; on pose $\omega'(\alpha) = 0$ si tous les $\omega'(a_i)$ sont nuls.

$\bar{A}^{\xi, e}$ est un A-monel, appelé l'agglutiné de A par ξ, e , et Δ en est une

Δ -graduation; $\omega'(a)$ est donc le Δ -grade de a.

On convient que $\bar{A}^{\xi, 0}$ désigne l'anel A, et $\bar{A}^{\xi, 1}$ le monel $\bar{A}^{\xi, 1}$.

On a $\omega'(a) = 0$ dans les trois cas suivants : ou bien $a \in \Omega$. Ou bien $a \notin \Omega$,

et, pour toute factorisation $a = f_1 \dots f_q$ de a, $\omega(f_1) \dots \omega(f_q) \xi \dots \xi$ est

associatif et nul. Ou bien $a \notin \Omega$ et il existe une factorisation $a = f_1 \dots f_q$

telle que $\omega(f_1) \dots \omega(f_q) \xi \dots \xi$ ne soit pas associatif (cette non-associativité

provient d'un produit de trois facteurs dont l'un contient nécessairement ξ ,

puisque $a \notin \Omega$. Noter aussi que $\xi \dots \xi$ peut ne pas être associatif).

On peut montrer que, si un produit donné $p = \omega(f_1) \dots \omega(f_q) \xi \dots \xi$ n'est pas associatif, il existe un triple $\alpha \beta \gamma$, produit extrait du précédent

(c'est-à-dire dont les termes α, β, γ sont des produits de certains facteurs

de p), non-associatif, et dont l'un des facteurs est ξ . Dans un triple $\alpha \beta \gamma$

extrait de p, appelons longueur (≥ 3) le nombre des facteurs du produit p qui

y figurent. Lorsque p n'est pas associatif, prenons parmi les triples non-

associatifs extraits de p, un triple $\alpha \beta \gamma$ de longueur minimale m. Si

$\gamma = \gamma' \gamma''$, supposons que les triples $\alpha (\beta \gamma') \gamma''$ et $(\alpha \beta) \gamma' \gamma''$

soient associatifs. Les triples $\beta \gamma' \gamma''$ et $\alpha \beta \gamma'$ sont de longueur

strictement inférieure à m, donc sont associatifs. On a alors :

$$(\alpha \beta) (\gamma' \gamma'') = [(\alpha \beta) \gamma'] \gamma'' = [\alpha (\beta \gamma')] \gamma'' = \alpha [(\beta \gamma') \gamma''] = \alpha [\beta (\gamma' \gamma'')].$$

Donc, le triple $\alpha \beta (\gamma' \gamma'')$ serait associatif, une contradiction. Il en

résulte que si $\alpha \beta (\gamma' \gamma'')$ est un triple, extrait de p, non associatif de

longueur minimale, il en existe un autre (soit $\alpha (\beta \gamma') \gamma''$, soit $(\alpha \beta) \gamma' \gamma''$)

de même longueur, où le dernier terme $\gamma = \gamma' \gamma''$ est remplacé par son

sous-facteur γ'' (noter que tout est associatif dans le produit γ qui est

de longueur $\leq m - 2$). En particulier, si ξ figure dans le terme γ du triple

non associatif $\alpha \beta \gamma$, il existe un triple non associatif de même longueur

$\alpha_1 \beta_1 \xi$.

Si, dans le triple non associatif minimal $\alpha \beta \gamma$, le facteur ξ

figure dans β seulement, un raisonnement analogue conduit à un triple

non associatif minimal où l'un des termes (au milieu ou à une extrémité) est ξ .

Notons le cas singulier où ξ, \dots, ξ (pour $e \geq 4$) ne serait pas associatif, et où, par suite, $\bar{A}^{\xi, e} = \bar{A}$.

Organisons $L = \bar{A}^{\xi, e}$ en A-monel. Posons que $\alpha = \sum_i a_i$ et $\beta = \sum_j b_j$

sont addibles dans L si et seulement si, quels que soient i et j, les $\omega'(a_i)$ et $\omega'(b_j)$ non nuls sont la même valeur, la somme se calculant alors

dans \bar{A} . Le milieu \mathcal{O} de L sera l'ensemble des $\alpha = \sum_i a_i$ tels que $\omega'(a_i) = 0$

pour tout i. On fait le produit $c \alpha$ de $\alpha \in L$ par $c \in A$ comme dans le A-monel \bar{A} . Remarquons que, grâce à la définition de ω' , pour c et $a \in A$, si $\omega'(c a) \neq 0$, pour toute factorisation $c a = g_1 \dots g_q$, il y a associativité de $\omega(g_1) \dots \omega(g_q)$ ξ, \dots, ξ , et l'on a :

$\omega'(c a) = \omega(c a) \xi^e = \omega(c) \omega(a) \xi^e = \omega(c) \omega'(a)$. Donc, d'une part $c \alpha$ est dans L, et d'autre part Δ (ou $\Delta \xi^e$) est une Δ -gradation de L, et il est

cohérent d'appeler $\omega'(\alpha)$ un grade. Si $\alpha = \sum_i a_i$, $\beta = \sum_j b_j$ et $\alpha' = \sum_k a'_k$ sont

éléments de L, si dans L on a $\alpha \neq \beta \neq \alpha'$, et si $\beta \notin \mathcal{O}$, il existe un terme b_{j_0} de β tel que $\omega'(b_{j_0}) \neq 0$; donc les grades $\omega'(a_i)$ et $\omega'(a'_k)$ non nuls sont égaux à $\omega'(b_{j_0})$ d'où $\alpha \neq \alpha'$ (axiome B_4). Soient $c \in A$, et α et β deux éléments addibles de L ; les $\omega'(a_i)$ et $\omega'(b_j)$ non nuls sont égaux.

Si $\omega'(c \alpha)$ et $\omega'(c \beta)$ sont non nuls, donc respectivement égaux à un $\omega'(c a_i) \neq 0$ et à un $\omega'(c b_j) \neq 0$, la remarque précédente montre que :

$\omega'(c a_i) = \omega(c) \omega'(a_i) = \omega(c) \omega'(b_j) = \omega'(c b_j)$. Donc $c \alpha$ et $c \beta$ sont addibles

(axiome D_1). Soient c et $d \in A$, $c \neq d$, et $\alpha \in L$. La remarque montre que si, pour un i, $\omega'(c a_i) \neq 0$, on a $\omega'(c a_i) = \omega(c) \omega'(\alpha)$. Si $\omega'(c \alpha)$ et $\omega'(d \alpha)$ sont non nuls, on déduit d'abord que $\omega(c)$ et $\omega(d)$ sont non nuls, donc égaux ; ensuite qu'au moins un terme $c a_i$ (resp. $d a_j$) est tel que

$0 \neq \omega'(c a_i) = \omega(c) \omega'(a_i) = \omega(d) \omega'(a_j) = \omega'(d a_j)$. Donc $c \alpha$ et $d \beta$ sont addibles (axiome D_3). La vérification des autres axiomes est immédiate,

et $L = \bar{A}^{\xi, e}$ est bien un A-monel intermédiaire entre A et \bar{A} .

Il faut bien noter que $\bar{A}^{\xi, e}$ n'est pas forcément un anel : Dans l'exemple contraire 2 (suite au lemme 1), prenons l'anneau de C, et considérons l'agglutiné $L = \bar{C}^{\omega(x)}$, en notant $\omega(x)$ le grade de x dans une gradation de C. Alors, $a + b$ et $c + d$ sont dans L, mais leur produit $a c + b d$ n'y est pas.

Lemme 4 : Soit A un anel de graduation Δ , ξ un élément de Δ , et e un entier ≥ 1 . Si, dans Δ , tout produit de trois termes, dont l'un, extérieur, est ξ , est associatif (on dira que ξ associe, dans Δ), $\bar{A}^{\xi, e}$ est un anel de milieu $\bigoplus_{d \in \Delta'} A_d$, où Δ' est la partie de Δ annulée par ξ^e . (cet anel pourra être noté \bar{A}^{ξ^e}).

Notons $\Gamma = [\omega(A), \xi]$ la partie de Δ engendrée par $\omega(A)$ et ξ , c'est-à-dire la plus petite partie stable de Δ , contenant $\omega(A)$ et ξ . Une condition suffisante pour le lemme 4 est que tout produit de trois termes de Γ , dont l'un extérieur est ξ , soit associatif. Alors, on dira que ξ associe extérieurement dans Γ , et cela implique, pour tout entier $i \geq 1$, que ξ^i (qui est alors un produit associatif) associe dans Γ , extérieurement et intérieurement. Montrons-le. D'abord, si $\lambda \in \Gamma$ associe dans Γ extérieurement, la commutativité montre qu'il associe intérieurement ; on a (avec $\alpha, \beta \in \Gamma$) $(\alpha \lambda) \beta = \beta (\alpha \lambda) = (\beta \alpha) \lambda = (\alpha \beta) \lambda = \alpha (\beta \lambda) = \alpha (\lambda \beta)$. Ensuite, si ξ et ξ^i associent dans Γ , on a (avec $\alpha, \beta \in \Gamma$) :

$$(\alpha \beta) \xi^{i+1} = [(\alpha \beta) \xi^i] \xi = [\alpha (\beta \xi^i)] \xi = \alpha [(\beta \xi^i) \xi] = \alpha [\beta (\xi^i \xi)] = \alpha (\beta \xi^{i+1}),$$

ce qui montre que ξ^{i+1} associe dans Γ .

Montrons le lemme. On a $\mathcal{O} = \{\alpha \in \bar{A}^{\xi, e} ; \forall i, \omega(a_i) \xi^e = 0\}$, donc le milieu du A-monel $L = \bar{A}^{\xi, e}$ est celui annoncé. Restent à vérifier les axiomes A et D des anels, ce qui est immédiat, sauf peut-être pour les suivants : Si α et $\beta \in L$, étudions $\alpha \beta = \sum_{i,j} a_i b_j$. Lorsque $i \neq i_1$ et $j \neq j_1$,

et que $\omega'(a_i b_j)$ et $\omega'(a_{i_1} b_{j_1})$ sont non nuls, on a évidemment

$$\omega'(a_i) = \omega'(a_{i_1}) \neq 0, \omega'(b_j) = \omega'(b_{j_1}) \neq 0, \text{ et enfin}$$

$$\begin{aligned} \omega'(a_i b_j) &= \omega(a_i) \omega'(b_j) = \omega(a_i) \omega'(b_{j_1}) = \omega(a_i) [\omega(b_{j_1}) \xi^e] = \\ &= \omega(b_{j_1}) [\omega(a_i) \xi^e] = \omega(b_{j_1}) \omega'(a_i) = \omega(b_{j_1}) \omega'(a_{i_1}) = \omega'(a_{i_1} b_{j_1}). \end{aligned}$$

On notera l'intervention de l'associativité par ξ^e . Donc, $\alpha \beta$ est élément de L (Axiome A₀). Ensuite, soient $\alpha, \alpha', \beta \in L$ vérifiant $\alpha \neq \alpha'$. Si deux termes, soient $a_i b_j$ et $a'_k b_l$, appartenant respectivement aux sommes $\alpha \beta$ et $\alpha' \beta$, ont des grades $\omega'(a_i b_j)$ et $\omega'(a'_k b_l)$ non nuls, on a :

$$\begin{aligned} \omega'(b_j) &= \omega'(b_l) \neq 0, \omega'(a_i) = \omega'(a'_k) \neq 0, \text{ et enfin} \\ \omega'(a_i b_j) &= \omega(a_i) \omega'(b_j) = \omega(a_i) \omega'(b_l) = \omega(a_i) [\omega(b_l) \xi^e] = \\ &= \omega(b_l) [\omega(a_i) \xi^e] = \omega(b_l) \omega'(a_i) = \omega(b_l) \omega'(a'_k) = \omega'(a'_k b_l). \end{aligned}$$

(Noter encore l'associativité par ξ^e). Il en résulte l'additivité de $\alpha \beta$ et de $\alpha' \beta$ (axiome D_1).

Remarques : 1°) Si ξ associe dans $\Gamma = [\omega(A), \xi]$ (ou dans Δ), le A-monel $\bar{A}^{\xi, e}$ se déduit de A : pour le milieu, par l'"adjonction" éventuelle à Ω de groupes entiers d'additivité de A ; et pour les groupes d'additivité, par la "somme" de groupes entiers d'additivité. On a en effet (voir lemme 3, remarque sur l'associativité) : $\omega'(a) = \omega(a) \xi^e$, d'où le résultat.

2°) Si ξ associe dans Δ , $s \xi^e = t \xi^e$ (avec $s, t \in \Delta$) est une relation d'équivalence R dans Δ , compatible avec la loi de Δ . En effet, $\gamma = \xi^e$ associe dans Δ , et les relations $s \gamma = t \gamma$, $u \gamma = v \gamma$ (avec $u, v \in \Delta$) impliquent $(s u) \gamma = s (u \gamma) = s (v \gamma) = (s v) \gamma = v (s \gamma) = v (t \gamma) = (t v) \gamma$. Donc l'ensemble quotient Δ/R , muni de la loi quotient est une graduation de l'anel $\bar{A}^{\xi, e}$. (Attention : Δ ou $\Delta \xi^e$ n'en sont pas).

Lemme 5 : Soient A un anel de graduation Δ , et $\xi \in \Delta$.

L'ensemble $L' = \bar{A}^{\xi, \infty} = \bigcup_{e \geq 1} \bar{A}^{\xi, e} = \bigcup_{e \geq 0} \bar{A}^{\xi, e}$ possède une structure de A-monel. Si, de plus, ξ associe, il possède une structure d'anel.

Il est clair que $\bar{A}^{\xi, e} \subset \bar{A}^{\xi, e+1}$ et que $\mathcal{O}_e \subset \mathcal{O}_{e+1}$ (\mathcal{O}_e désignant ici le milieu de $\bar{A}^{\xi, e}$). Deux éléments de L' seront dits addibles dans L' s'ils sont éléments addibles de l'un des $\bar{A}^{\xi, e}$. Le milieu de L' sera $\mathcal{O}' = \bigcup_{e \geq 1} \mathcal{O}_e$. On est ainsi ramené à l'étude des agglutinés $\bar{A}^{\xi, e}$, d'où les résultats annoncés grâce aux lemmes 3 et 4.

Remarques complémentaires sur l'agglutination par un grade, ou par un ensemble de grades.

3°) Soient D une partie non vide de Δ , et s un élément donné de D. Nous allons définir un A-monel agglutiné $\bar{A}(s, D)$ par une légère extension de la définition jointe au lemme 3. Soit $a \in A \dots \Omega$; si, pour toutes les factorisations possibles $a = f_1 \dots f_q$ (les $f_j \in A$) et $s = d_1 \dots d_r$ (les $d_i \in D$), le produit $\omega(f_1) \dots \omega(f_q) d_1 \dots d_r$ est associatif et non nul, sa valeur $\omega(a)s$ est par définition le grade $\omega'(a)$ de a dans $\bar{A}(s, D)$; dans les autres cas, ce grade est nul.

Par une démonstration presque identique à celle du lemme 3, on peut montrer que, pour c et a $\in A$, la relation $\omega'(c a) \neq 0$ implique $\omega'(c a) = \omega(c) \omega'(a)$ et que $\bar{A}(s, D)$ est un A-monel intermédiaire entre A et \bar{A} . Si, de plus, tout élément d de D associe dans Δ , $\bar{A}(s, D)$ est un anel. Si l'on prend $s = \xi^e$ et $D = \{\xi, \xi^2, \dots, \xi^e\}$, on obtient comme cas particulier $\bar{A}^{\xi, e}$.

Lorsque $D \subset D' \subset \Delta$, le A-monel $\bar{A}(s, D')$ est un agglutiné de $\bar{A}(s, D)$. En effet, des factorisations plus nombreuses dans D' que dans D pour s , peuvent augmenter les cas de non-associativité, donc augmenter le milieu.

4°) Soient $S \subset D$ deux parties non vides de Δ , S étant multiplicativement stable (les deux principaux cas à envisager sont $D = S$ et $D = \Delta$). La réunion $R = \bar{A}(S, D) = \bigcup_{s \in S} \bar{A}(s, D)$ peut être munie d'une

structure de A-monel. D'abord, R est stable par multiplication par les éléments de Δ . Si $\alpha = \sum_i a_i \in \bar{A}(s, D)$, il est clair que $\alpha \in \bar{A}(rs, D)$, pour

tout $r \in S$. Par définition, les éléments α , et $\beta = \sum_j b_j$ de R seront addibles

dans R , s'il existe t tels que les $\omega'_t(a_i)$ et $\omega'_t(b_j)$ non nuls soient égaux (ω'_t désignant le grade dans $\bar{A}(t, D)$), c'est-à-dire s'ils sont éléments de $\bar{A}(t, D)$, et y sont addibles. On voit alors que R est un A-monel dont le milieu est $\mathcal{O} = \bigcup_{s \in S} \mathcal{O}_s$, où \mathcal{O}_s est le milieu de $\bar{A}(s, D)$. En effet, si

$\alpha = \sum_i a_i$ est tel que (dans $\bar{A}(s, D)$) $\omega'_s(a_i) = 0$ pour tout i , et si

$\beta = \sum_j b_j \in \bar{A}(r, D)$, il est clair que $\omega'_{rs}(a_i) = 0$, que $\beta \in \bar{A}(rs, D)$, donc

que α et β sont addibles (axiome B_3). D'autre part, soient $\alpha, \beta, \gamma \in \bar{A}(S, D)$, α et β étant éléments addibles de $\bar{A}(r, D)$, β et γ éléments addibles de $\bar{A}(s, D)$, et $\beta \notin \mathcal{O}$. Donc, α et β (resp. β et γ) sont éléments addibles de $\bar{A}(rs, D)$, et $\beta \notin \mathcal{O}_{rs}$. Alors, α et γ sont addibles dans $\bar{A}(rs, D)$, donc dans R (axiome B_4). La vérification pour R des autres axiomes est triviale.

§ 4 - DEFINITION DES POLYNOMES.

Nous supposerons toujours commutatifs les anels et anneaux considérés, ainsi que leurs graduations éventuelles. Soit A un anel donné, de graduation donnée Δ . Rappelons que $\omega(a)$ désigne le grade d'un élément $a \in A$, avec $\omega(a) = 0$ si a est dans le milieu. On note $\omega(A)$ l'ensemble des grades des éléments de A (c'est un support de la graduation propre Δ^*), \bar{A} l'anneau de A , et $\Delta^* = \Delta \cup \{0\}$. Lorsque A est unitaire, $\omega(1)$ peut ou non être unité dans Δ .

On appellera prolongement de la graduation Δ de A toute graduation Δ' de A vérifiant les conditions suivantes : il existe une surjection $\theta : \Delta' \rightarrow \Delta$, injective sur l'image réciproque $\theta^{-1}(\Delta^*)$; on a $\theta(0) = 0$; quels que soient d' et $d'_1 \in \theta^{-1}(\Delta^*)$, on a $\theta(d') \theta(d'_1) = \theta(d' d'_1)$ chaque fois que le premier membre est non nul. Lorsque cette dernière condition est imposée même quand le premier membre est nul, on dira que Δ'

prolonge strictement Δ ; dans ce cas, Δ peut être identifié à la partie

$\theta^{-1}(\Delta^*) \cup \{0\}$ de Δ' . Par exemple, la graduation Δ de A est un prolongement, en général non strict, de la graduation propre Δ_0 .

Soient p indéterminées X_1, \dots, X_p . Pour toute suite $(i) = (i_1, \dots, i_p)$ de p entiers naturels, on pose $i = i_1 + \dots + i_p$. Soit la somme formelle "à p variables" de monômes :

$$f = f(X) = f(X_1, \dots, X_p) = \sum_{0 \leq i \leq n} (a_{(i),1} + \dots + a_{(i),r_i}) X_1^{i_1} \dots X_p^{i_p} \\ = \sum_{0 \leq i \leq n} \alpha_{(i)} X^{(i)}, \text{ avec les cofacteurs } a_{(i),s} \in A,$$

deux termes d'une même parenthèse n'étant pas addibles. Une telle somme formelle est simplement un polynôme à p variables sur l'anneau \bar{A} , les coefficients $\alpha_{(i)} \in \bar{A}$ étant réduits. Elle est dite nulle si tous ses coefficients sont nuls. Deux sommes sont égales si elles sont formées des mêmes monômes (c'est-à-dire si les coefficients correspondants sont égaux).

Définition 1 : On se donne un anel A , sa graduation Δ , et un p -uple $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p) \in \Delta^p$. La somme formelle f sera dite un polynôme à p variables sur A , de pente ξ (ou, plus brièvement un polynôme de pente ξ , ou un ξ -polynôme, s'il n'y a pas d'ambiguïté) si et seulement si, quel que soit le sur-anel B de A , de graduation Δ , et quel que soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in B^p$ avec, pour tout $j = 1, \dots, p$, $\omega(x_j) = \xi_j$, $f(x) = f(x_1, \dots, x_p)$ a tous ses termes addibles. ξ_j est appelé le grade de la variable X_j , et l'on note $\omega(X_j) = \xi_j$.

Lorsqu'on suppose A unitaire et $\omega(1)$ unité de Δ , on exige que 1 soit aussi unité de B .

Définition 2 : Supposons donnés un anel A , et une graduation Δ de A . Une somme formelle f sera dite un pré-polynôme si et seulement si il existe un prolongement Δ' de Δ et un p -uple $\xi \in \Delta'^p$ tels que f soit un ξ -polynôme.

Par suite, deux polynômes f et g seront considérés comme distincts, ou bien si les sommes formelles f et g sont distinctes, ou bien si elles sont égales, mais si on les considère comme polynômes avec des pentes différentes. La définition 2 conduit à étudier si une somme formelle donnée est ou non un pré-polynôme. Ce problème, que l'on traitera ailleurs, a été résolu par M. Krasner [4] dans le cas des corps "sans torsion" (c'est-à-dire tels que Δ_0^* soit un groupe sans torsion).

A , Δ et $\xi \in \Delta^P$ étant donnés, f est un ξ -polynôme si et seulement si, quels que soient B et x envisagés à la définition 1, les grades $w(a_{(i)}, s x^{(i)})$ non nuls sont égaux. Si, dans Δ , trois grades w_1, w_2, w_3 ont un produit non associatif, quel que soit le sur-anel B de A , et quels que soient b_1, b_2 et $b_3 \in B$ de grades respectifs w_1, w_2, w_3 , le produit $b_1 b_2 b_3$ appartient au milieu de B . Cette remarque conduit à la définition suivante du ξ -grade, noté $w'(a x^{(i)})$, d'un monôme $a x^{(i)} = a x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p}$ (avec $a \in A$). On note Ω le milieu de A .

Définition 3 : A , Δ et $\xi \in \Delta^P$ sont donnés. Si $a \notin \Omega$, et si, pour toute factorisation $a = a_1 \dots a_q$ (les $a_j \in A$) de a , le produit $w(a_1) \dots w(a_q) \xi_1 \dots \xi_1 \xi_2 \dots \xi_p \dots \xi_p$ est associatif et non nul (le facteur ξ_k figurant i_k fois), sa valeur $w(a) \xi^{(i)}$ est le ξ -grade du monôme $a x^{(i)}$. Dans tous les autres cas, ce ξ -grade est nul. (On dit grade, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur ξ).

Pour la commodité, on notera le produit précédent plus brièvement par $w(a_1) \dots w(a_q) \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p}$, grâce à un abus d'écriture. Précisons les divers cas où $w'(a x^{(i)}) = 0$: Ou bien $a \in \Omega$. Ou bien $a \notin \Omega$, et pour toute factorisation de a , le produit $w(a_1) \dots w(a_q) \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p}$ est associatif et nul (outre cette condition d'associativité, il suffit qu'il soit nul pour une factorisation de a). Ou bien $a \notin \Omega$, et il existe une factorisation $a = a_1 \dots a_q$ telle que $w(a_1) \dots w(a_q) \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p}$ ne soit pas associatif. Les monômes de grade nul ne prennent que des valeurs appartenant au milieu de B . Donc :

Lemme 1 : Pour que f soit un polynôme de pente ξ , il suffit que ses monômes de grade non nul aient le même grade.

Ce grade commun est appelé le ξ -grade ou la ξ -hauteur de f (on dit pente et hauteur par analogie avec la théorie des corps de M. Krasner [4]). On note $w'(f(\xi))$, ou $w'(f)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la pente. On pose $w'(f) = 0$ lorsque tout monôme est de grade nul. Il est clair que le produit de deux monômes, dont un est de grade nul, a un grade nul.

Si le monôme $(ab) x^{(i)+(j)}$ vérifie la condition d'associativité de la définition 3, et est de grade non nul, il en est évidemment de même des monômes facteurs $a x^{(i)}$ et $b x^{(j)}$, et le grade du produit $(ab) x^{(i)+(j)}$ est bien sûr égal au produit des grades de $a x^{(i)}$ et $b x^{(j)}$. Ces remarques entraînent le résultat :

Lemme 2 : Si deux ξ -polynômes f et g vérifient la condition suffisante du lemme 1, $f g$ la vérifie aussi, donc est un ξ -polynôme. De plus, si $\omega'(f g) \neq 0$, on a $\omega'(f g) = \omega'(f) \omega'(g)$.

En effet, dans le produit formel $f g$ non réduit, les monômes auront pour grade ou 0, ou $\omega'(f g)$. Il en est de même après réduction.

Notons $A_{\xi}[X] = A_{(\xi_1, \dots, \xi_p)}[X_1, \dots, X_p]$ l'ensemble des polynômes de pente ξ vérifiant la condition suffisante du lemme 1, et montrons qu'il a une structure d'anel. Deux éléments f et g seront dits addibles si les grades $\omega'(f)$ et $\omega'(g)$ sont égaux, ou si l'un de ces grades est nul. Alors, la somme formelle $f + g$ est dans $A_{\xi}[X]$ et sera leur somme.

$\mathcal{O} = \{\varphi \in A_{\xi}[X] ; \omega'(\varphi) = 0\}$ sera le milieu de $A_{\xi}[X]$, qui satisfait évidemment aux axiomes des anels. En particulier, le lemme 2 montre que $A_{\xi}[X]$ est une partie multiplicativement stable de $\bar{A}[X]$, et que les axiomes D_1 et D_5 sont vérifiés. Ce lemme montre enfin que Δ est une graduation du sur-anel $A_{\xi}[X]$ de A (sur-anel unitaire si A est unitaire).

Théorème : Soient A un anel de graduation Δ , et un p -uple $\xi \in \Delta^p$. L'ensemble des polynômes à p variables sur A et de pente ξ , est l'anel $A_{\xi}[X]$ des sommes formelles dont les monômes de ξ -grade non nul ont même ξ -gradé. Δ est une graduation de ce sur-anel de A . Si de plus, A est unitaire, et si $\omega(1)$ est unité dans Δ , $A_{\xi}[X]$ est sur-anel unitaire de A , et sa graduation propre contient les ξ_j .

Lorsque A est unitaire et que $\omega(1)$ est unité de Δ , considérons un polynôme f de pente ξ (c'est-à-dire vérifiant seulement les conditions de la définition 1). En particulier, si on prend $B = A_{\xi}[X]$ et $x = X$, le grade de $x_j = X_j$ est $\omega(X_j) = \omega(1)\omega(X_j) = \omega(1)\xi_j = \xi_j$. Alors, $f(x) = f(X)$ doit nécessairement avoir ses termes addibles dans $A_{\xi}[X]$, donc ses monômes de grade non nul ont le même grade.

Lorsque A n'est pas unitaire (attention : $X_j \notin A_{\xi}[X]$), construisons un sur-anel B' de $A_{\xi}[X]$ comme suit. Dans la nouvelle somme formelle

$$F = \sum_{0 \leq i \leq n} (\alpha_{(i)} + n_{(i)}) X^{(i)} \quad \text{où } \alpha_{(i)} \in \bar{A} \text{ et } n_{(i)} \in \mathbb{Z}, \text{ le } \xi\text{-grade d'un}$$

monôme sera défini pour les uns par la définition 3. Pour un monôme $n X^{(i)}$

(n entier $\neq 0$), ce ξ -grade sera $\xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p}$ si ce produit est associatif et

non nul, et 0 dans le cas contraire. Notons B' l'ensemble des sommes formelles F dont les monômes de ξ -grade non nul ont même grade ; ce grade est noté $\omega'(F)$ et appelé la ξ -hauteur ou le ξ -grade de F (avec $\omega'(F) = 0$ si tout monôme a un grade nul). Comme pour $A_{\xi}[X]$, en considérant d'abord le produit

de deux monômes, on voit que le lemme 2 est encore vrai dans B' . Comme pour $A_\xi[X]$, on en déduit que B' est un sur-anel de A de graduation Δ ; il est clair que B' est un sur-anel de $A_\xi[X]$. De plus, $1 X_j$ (avec $1 \in \mathbb{Z}$) est un élément de B' dont le ξ -grade est $\omega'(1 X_j) = \xi_j$ par définition. Alors, soit f un polynôme de pente ξ . En particulier, si on prend $B = B'$ et $x = (1 X_1, \dots, 1 X_p)$, on voit, de même que ci-dessus, que les monômes de grade non nul de f ont le même grade. Le lemme 1 complète la démonstration dans les deux cas.

Remarquons que, même si A est un anneau, l'anel $A_\xi[X]$ n'est pas forcément un anneau, puisque des monômes non nuls peuvent avoir un grade nul (définition 3).

Corollaire : Soient A un anel de graduation Δ , ξ et $\eta \in \Delta$, et X et Y deux indéterminées. $A_{\{\xi, \eta\}}[X, Y]$ et $(A_\xi[X])_\eta[Y]$ représentent le même anel.

Soit un polynôme $f(X, Y) \in A_{\{\xi, \eta\}}[X, Y]$, donc dont les monômes $a X^i Y^j$ de grade non nul ont même grade. Il peut être considéré comme une somme formelle polynomiale en Y , à cofacteurs dans $A_\xi[X]$; de plus, la condition vérifiée par les grades des monômes $a X^i Y^j$ entraîne que cette somme est un polynôme en Y .

Inversement, un polynôme $g(Y) \in (A_\xi[X])_\eta[Y]$ a pour cofacteurs des polynômes $\varphi(X)$ éléments de $A_\xi[X]$. Chaque fois qu'à un de ces cofacteurs $\varphi(X)$ correspond un "monôme" $\varphi(X) Y^j$ de grade non nul $\sigma(g)$, le même "monôme" peut être considéré comme une somme formelle appartenant à $\bar{A}[X, Y]$, mais dont les monômes sont, ou de grade nul, ou de grade égal à $\sigma(g)$, grâce à la définition 3. Donc g est élément de $A_{\{\xi, \eta\}}[X, Y]$. Ceci étant, l'identité des structures d'anel est évidente. Ce corollaire s'étend à p variables X_1, \dots, X_p et q variables Y_1, \dots, Y_q .

Substitutions dans un polynôme. Soient A un anel, Δ une graduation de A , p et q deux entiers ≥ 1 , $\xi \in \Delta^p$ et $\eta \in \Delta^q$. Soit f un polynôme sur A , à p variables X_j ($j = 1, \dots, p$), de pente ξ , et soient g_1, \dots, g_p des polynômes sur A à q variables Y_k ($k = 1, \dots, q$), chacun de pente η . Si, quel que soit $j = 1, \dots, p$, le η -grade du polynôme g_j est ξ_j ou 0, il est clair que la somme formelle $h = f[g_1(Y), \dots, g_p(Y)] \in \bar{A}[Y_1, \dots, Y_q]$ est un polynôme de pente η . En effet, puisque f est un ξ -polynôme, donc vérifie les conditions du théorème, il suffit d'utiliser le lemme 2 pour étudier le η -grade des monômes produits dans l'expression non réduite de h . On dit que h est obtenu par substitution, dans f , des polynômes g_j aux variables X_j .

Cas d'un annéïde : Soient A un annéïde de graduation Δ , et $\xi \in \Delta$. Notons $\Gamma = [\omega(A), \xi]$ la partie de Δ engendrée par $\omega(A)$ et ξ . Pour que $A_\xi[X]$ soit un annéïde, il faut et il suffit que ξ associe extérieurement dans Γ et que ξ ne divise pas 0 dans Γ . En effet, la condition est évidemment nécessaire. Inversement, si elle est vérifiée, on sait (II, 3, démonstration du lemme 4) que ξ^i associe dans Γ . Le seul monôme $a X^i$ de grade $\omega'(a X^i)$ nul, est celui où $a = 0$. Si $a \neq 0$, l'associativité montre que $\omega'(a X^i) = \omega(a) \xi^i$, qui est non nul puisque ξ ne divise pas zéro.

Soit f un polynôme à p variables sur un anneau quasi-gradué \bar{A} , de graduation Δ . S'il existe un prolongement Δ' de la graduation Δ de \bar{A} , et un p -uplet $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p) \in \Delta'^p$ tels que, quel que soit le sur-anneau quasi-gradué \bar{B} de \bar{A} , de graduation Δ' , et quelles que soient les valeurs $x_j \in \bar{B}$, homogènes et de grade ξ_j respectivement, données aux variables X_j , la valeur $f(x_1, \dots, x_p)$ prise par f est homogène, alors on dit que f est un polynôme homogène pour les grades ξ_j attribués aux variables (ou pour la pondération ξ_j des variables X_j). Le théorème précédent montre que, pour f , être ou non homogène (Δ' et ξ étant fixés) pour les variables X_j pondérées par les grades respectifs ξ_j , dépend uniquement de Δ' et de ξ , sans que les sur-anneaux \bar{B} aient à intervenir.

Chapitre III

HOMOMORPHISMES - IDEAUX ET SOUS-MONELS

On rappelle que les anels considérés sont toujours commutatifs, ainsi que leurs graduations éventuelles. Dans ce chapitre, bien des résultats seront donnés sans démonstration, car les preuves correspondantes en sont aisées, sinon triviales. Rappelons (II, § 2, th. 1) la loi modulaire propre aux anels et monels, qui se réduit à la forme classique pour les annéfdes et modulofdes.

§ 1 - PROPRIETES DES HOMOMORPHISMES.

Lemme 1 : Soient M et M_1 deux ensembles, \mathcal{O} et L deux parties de M , \mathcal{O}_1 une partie de M_1 . Soit $u : M \rightarrow M_1$ une application telle que $u(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}_1$. Les conditions suivantes sont équivalentes : (1) $u(L..L \cap \mathcal{O}) \cap \{\mathcal{O}_1..u(L \cap \mathcal{O})\} = \emptyset$; (2) $u(L) \cap \mathcal{O}_1 \subset u(L \cap \mathcal{O})$.

Si (2) est vérifiée, soit $y \in u(L..L \cap \mathcal{O}) \cap \{\mathcal{O}_1..u(L \cap \mathcal{O})\}$; on déduit $y \in u(L) \cap \mathcal{O}_1 = u(L \cap \mathcal{O})$, ce qui contredit $y \in \mathcal{O}_1..u(L \cap \mathcal{O})$, puisque $u(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}_1$; on a donc (1). Inversement, si (1) est vraie, prenons $y \in u(L) \cap \mathcal{O}_1$. Supposons que $y \notin u(L \cap \mathcal{O})$; comme $y \in u(L)$, on a $y \in u(L..L \cap \mathcal{O})$, et comme $y \in \mathcal{O}_1$, on a $y \in \mathcal{O}_1..u(L \cap \mathcal{O})$; on en déduit (par (1)) que $y \in \emptyset$. Donc $u(L) \cap \mathcal{O}_1 \subset u(L \cap \mathcal{O})$. (L'inclusion inverse est triviale).

Définition 1 : Soient M et M_1 deux A -monels, \mathcal{O} et \mathcal{O}_1 leurs milieux respectifs, et $u : M \rightarrow M_1$ un quasi-morphisme. Pour un sous-monel L de M , on dira que u vérifie $[m, L]$, s'il vérifie les conditions équivalentes du lemme. On dira que u vérifie $[m]$, s'il vérifie $[m, L]$ pour tout sous-monel L de M . On notera de même les propriétés analogues pour un quasi-morphisme d'anel, en remplaçant $M, M_1, \mathcal{O}, \mathcal{O}_1$ respectivement par des anels A, A_1 , leurs milieux Ω, Ω_1 , et en remplaçant les sous-monels L par les idéaux \mathfrak{J} de A .

Remarque 1 : Dans le cas des annéfdes et des modulofdes, les conditions précédentes sont trivialement vérifiées.

Remarque 2 : Lorsque $L \subset \mathcal{O}$, u vérifie $[m, L]$.

Remarque 3 : La condition $[m, M]$ équivaut à $u(\mathcal{O}) \supset \mathcal{O}_1$ lorsque u est surjectif, et à $u^{-1}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}$ lorsque u est injectif. On a le résultat analogue pour les anels.

La condition $[m, M]$ s'écrit $u(M.. \mathcal{O}) \cap \{\mathcal{O}_1..u(\mathcal{O})\} = \emptyset$ ou $u(M) \cap \mathcal{O}_1 = u(\mathcal{O})$. La première assertion est triviale. Pour le cas injectif, on a $u^{-1}(\mathcal{O}_1) = \{x \in M ; u(x) \in \mathcal{O}_1\}$, et par injectivité $u^{-1}(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O} \cap S$

avec $S = \{x \in M.. \mathcal{O}; u(x) \in \mathcal{O}_1..u(\mathcal{O})\}$. Ceci montre l'équivalence de $\bar{u}^{-1}(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}$ avec $S = \emptyset$, c'est-à-dire avec $[m, M]$.

Remarque 4 : Si K est un sous-monél de M , l'homomorphisme canonique $\varphi : M \rightarrow M/K$ vérifie $[m, M]$ par définition de M/K , et, pour la même raison, vérifie $[m, L]$ pour tout sous-monél L contenant K . Mais φ ne vérifie pas forcément $[m, L]$ lorsque L et K ne sont pas comparables. De même, si \mathfrak{J} est un idéal d'un anel A , l'homomorphisme $\varphi : A \rightarrow A/\mathfrak{J}$ vérifie $[m, a]$ pour tout idéal a contenant \mathfrak{J} .

Exemple contraire 1 : Soit \mathbb{Z} l'anneau des entiers. Considérons le \mathbb{Z} -monél $M = M_a \cup M_b$, où M_a et M_b sont isomorphes au \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, et ont en commun le milieu $\mathcal{O} = \mathbb{Z} (1, 1)$. Prenons les sous-monéls $K = K_a \cup K_b = \mathbb{Z} \times (0) \cup \mathbb{Z} \times (0)$ et $L = (0) \times \mathbb{Z} \cup (0) \times \mathbb{Z}$ dont la somme $K + L$ est M . Notons $\varphi : M \rightarrow M/K$. Tout élément $(m, n)_a \in M_a$ est congru modulo K à $(n, n) \in \mathcal{O}$. Donc M/K est son propre milieu \mathcal{O}' . Tout élément de M/K , soit $(n, n) + K$, est image par φ de $(0, n)_a \in L$. Donc $\varphi(L) = M/P$, et on a $\varphi(L) \cap \mathcal{O}' = M/P$. Par contre, on a $L \cap \mathcal{O} = (0, 0)$ dont l'image est le zéro de M/P . Donc φ ne vérifie pas $[m, L]$.

Théorème 1 : Soient M et M_1 deux A -monéls de milieux respectifs \mathcal{O} et \mathcal{O}_1 , et soit $u : M \rightarrow M_1$ un quasi-morphisme de A -monéls.

- 1 - Pour tout sous-monél L_1 de M_1 , $\bar{u}^{-1}(L_1)$ est sous-monél de M .
En particulier, le noyau $\text{Ker } u = \bar{u}^{-1}(\mathcal{O})$ de u est un sous-monél.
- 2 - Soient B une partie de A , et X une partie de M ; on a $u(BX) \subset B u(X)$. On a l'égalité si de plus u est un homomorphisme vérifiant $\bar{u}^{-1}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}$.
- 3 - Soit L un sous-monél de M . Si u est un homomorphisme vérifiant $[m, L]$, $u(L)$ est un sous-monél de M_1 .
- 4 - Si u est un homomorphisme vérifiant $[m, M]$, pour tout sous-monél L contenant $\text{Ker } u$, $u(L)$ est un sous-monél.

Remarque 5 : Pour les moduloïdes, les conditions $[m, L]$ et (dans 2) $\bar{u}^{-1}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}$ sont triviales. En particulier, l'image d'un moduloïde par un homomorphisme est un moduloïde.

1 et 2 se montrent sans difficulté (pour 2, on utilise la notion de combinaison linéaire donnée en II, § 2 b). Pour 3 et 4, on a $u(0) = 0$, et pour tout $a \in A$ et tout $x \in L$, on a $u(ax) = a u(x)$. Soient $x' = u(x)$ et $y' = u(y)$ deux éléments addibles de $u(L)$, avec $x, y \in L$. Lorsque x' et $y' \notin \mathcal{O}_1$, u étant un homomorphisme, x et y sont addibles,

d'où $x' - y' = u(x) - u(y) = u(x - y) \in u(L)$. Lorsque $x' \in \mathcal{O}_1$, on a $x' \in u(L) \cap \mathcal{O}_1$. Dans le cas 3, la condition $[m, L]$ montre que $x' \in u(L \cap \mathcal{O})$ et

il existe $1 \in L \cap \mathcal{O}$ tel que $u(1) = x'$. Comme $1 \neq y$, on a $x' - y' = u(1) - u(y) = u(1 - y) \in u(L)$. Dans le cas 4, on a $x' \in u(M) \cap \mathcal{O}_1 = u(M \cap \mathcal{O}) = u(\mathcal{O})$, et il existe $z \in \mathcal{O}$ tel que $u(z) = x'$. Mais on a $u(x - z) = u(x) - u(z) = 0$, d'où $x - z \in \text{Ker } u \subset L$, et enfin $z \in L$, donc $z \in L \cap \mathcal{O}$. Alors, y et z étant des éléments additifs de L , on a $x' - y' = u(z) - u(y) = u(z - y) \in u(L)$.

Lemme 2 : Soit $u : M \rightarrow M_1$ un quasi-morphisme de A -monels.

- (1) Si u est injectif, $\text{Ker } u = (0)$.
 (2) Si u est un homomorphisme vérifiant $[m, M]$, et si $\text{Ker } u = (0)$, alors u est injectif.

(1) est trivial. Soient $x, y \in M$ tels que $u(x) = u(y)$.

Ou bien $u(x) \notin \mathcal{O}_1$, et u étant un homomorphisme, on a $x \neq y$, d'où on déduit $0 = u(x) - u(y) = u(x - y)$ et $x - y = 0$. Ou bien $u(x) \in \mathcal{O}_1$, et grâce à $[m, M]$, on a $u(x) \in u(M) \cap \mathcal{O}_1 \subset u(\mathcal{O})$. Donc il existe $z \in \mathcal{O}$ tel que $u(x) = u(z)$. Mais $z \neq x$, et on déduit comme plus haut $x = z$. Il en est de même pour y , et on a $x = y$.

Lemme 3 : Soient M et M_1 deux A -monels, de milieux respectifs

\mathcal{O} et \mathcal{O}_1 . Soit $u : M \rightarrow M_1$ un homomorphisme bijectif. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) u est un isomorphisme (soit $\mathcal{O}_1 \subset u(\mathcal{O})$, voir II, § 2 d).
 (2) \bar{u}^1 est un homomorphisme.
 (3) u vérifie $[m, M]$.
 (4) $\bar{u}^1(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}$.

Il reste à montrer l'équivalence de (1) et (2), ce qui est facile.

Dans le cas des moduloïdes, ces conditions sont trivialement vérifiées, de même que celles de la définition suivante.

Définition 2 : Soient M et M_1 deux A -monels, de milieux respectifs

\mathcal{O} et \mathcal{O}_1 . Un homomorphisme injectif $u : M \rightarrow M_1$ est dit un monomorphisme s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- (1) La restriction $v : M \rightarrow u(M)$ de u est un isomorphisme.
 (2) $u(M) \cap \mathcal{O}_1 \subset u(\mathcal{O})$.
 (3) u vérifie $[m, M]$.
 (4) $\bar{u}^1(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}$.

Si (1) est vérifiée, $u(M) \cap \mathcal{O}_1$ est le milieu du sous-monel $u(M)$, et v vérifie $[m, M]$, donc u aussi, car $v(M) \cap [u(M) \cap \mathcal{O}_1] \subset v(M \cap \mathcal{O})$ s'écrit $u(M) \cap \mathcal{O}_1 \subset u(\mathcal{O})$. Inversement, si u vérifie $[m, M]$, $u(M)$ est un sous-monel. On a enfin $\bar{v}^1(\mathcal{O}_1 \cap u(M)) = \bar{u}^1(\mathcal{O}_1 \cap u(M)) = \bar{u}^1(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}$, et v est un isomorphisme. Le reste est connu.

Lemme 4 : Un homomorphisme $u : M \rightarrow M_1$, de noyau nul et vérifiant $[m, M]$, est un monomorphisme.

En effet, il est injectif (lemme 2).

Théorème 2 : 1 - Soient M et M_1 deux A -monels, P un sous-monel de M et φ la surjection $M \rightarrow M/P$. Si $u : M \rightarrow M_1$ est un quasi-morphisme tel que $P \subset \text{Ker } u$, il existe un quasi-morphisme $\bar{u} : M/P \rightarrow M_1$ tel que $u = \bar{u} \circ \varphi$. Si u est un homomorphisme, \bar{u} aussi.

2 - Si, de plus, le quasi-morphisme u vérifie $[m, L]$ pour un sous-monel L contenant P , alors \bar{u} vérifie $[m, L']$ où L' est le sous-monel $\varphi(L)$. Si, de plus, u vérifie $[m, L]$ pour tout sous-monel L contenant P , \bar{u} vérifie $[m]$.

Soient x et y dans une même classe modulo P . Il existe $z \in M$ tel que $x, y \in z + P$ (II, § 2 c, définition IV de la congruence). On a : $x \not\equiv z, x - z \in P, y \not\equiv z, y - z \in P$. On en déduit $u(x) - u(z) = u(x - z) \in u(P) = (0)$, donc $u(x) = u(z)$; et on a de même $u(y) = u(z)$. Donc u est constant sur toute classe modulo P . D'autre part, supposons que $u(L) \cap \mathcal{O}_1 \subset u(L \cap \mathcal{O})$. De $L' = \varphi(L)$ (qui est sous-monel, voir remarque 4 et théorème 1) on déduit :

$\bar{u}(L') \cap \mathcal{O}_1 = u(L) \cap \mathcal{O}_1 \subset u(L \cap \mathcal{O}) \subset u(L) \cap u(\mathcal{O}) \subset u(L) \cap \mathcal{O}_1 = \bar{u}(L') \cap \mathcal{O}_1$.
Donc \bar{u} vérifie $[m, L']$. Le reste de la démonstration est trivial.

Théorème 3 : Soit $u : M \rightarrow M_1$ un homomorphisme de A -monels, vérifiant $[m, M]$. $u(M)$ et $M/\text{Ker } u$ sont des A -monels isomorphes.

Avec les notations du théorème 2, posons $P = \text{Ker } u$. On sait que \bar{u} est un homomorphisme vérifiant $[m, M/\text{Ker } u]$. Son image $\text{Im } \bar{u} = u(M)$ est un sous-monel de M_1 (théorème 1, 3°). Enfin le noyau de \bar{u} est nul par construction, et (lemme 4) \bar{u} est injectif. Donc \bar{u} se restreint (définition 2) en un isomorphisme de $M/\text{Ker } u$ sur $u(M)$.

Corollaire : Soit $u : M \rightarrow M_1$ un homomorphisme surjectif de A -monels, tel que $u(\mathcal{O}) \supset \mathcal{O}_1$. Alors M_1 et $M/\text{Ker } u$ sont isomorphes.

Théorème 4 : Soient M un A -monel, K un sous-monel et la surjection canonique $\varphi : M \rightarrow M/K$. Soit \mathfrak{L} l'ensemble des sous-monels L de M , contenant K , et \mathfrak{L}' celui des sous-monels L' de M/K . (1) L'extension de φ aux ensembles de parties induit une bijection de \mathfrak{L} sur \mathfrak{L}' . (2) Les A -monels M/L et $(M/K)/(L/K)$ sont isomorphes.

Pour tout sous-monel L considéré, φ vérifie $[m, L]$ (remarque 4), d'où la bijection grâce au théorème 1. D'autre part, posons $M' = M/K$, $L' = L/K$ et $v = \varphi' \circ \varphi$, φ' étant la surjection canonique $M' \rightarrow M'/L'$. φ et φ' étant

des quasi-morphismes surjectifs, v aussi. Par construction des quotients, $\mathcal{G}' = \varphi(\mathcal{G})$ est le milieu de M' , et $\mathcal{G}'' = \varphi'(\mathcal{G}') = \varphi' \circ \varphi(\mathcal{G})$ est celui de M'/L_1 . En particulier, si $v(x) = \varphi' \circ \varphi(x)$ (avec $x \in M$) n'est pas dans \mathcal{G}'' , il en résulte $\varphi(x) \notin \mathcal{G}'$. Donc, les conditions $v(x) \notin \mathcal{G}''$, $v(y) \in \mathcal{G}''$, $v(x) \neq v(y)$ entraînent $\varphi(x) \notin \mathcal{G}'$, $\varphi(y) \in \mathcal{G}'$, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, d'où $x \neq y$. Donc, v est un homomorphisme surjectif vérifiant $[m, M]$. Son noyau est $(\varphi' \circ \varphi)^{-1}(0) = \bar{\varphi}^{-1}(L_1) = L$, ce qui montre l'isomorphisme annoncé.

Corollaire : Soit $u : M \rightarrow M_1$ un homomorphisme de A -monels, surjectif et tel que $u(\mathcal{G}) \supset \mathcal{G}_1$. Soient \mathcal{L} l'ensemble des sous-monels L de M , contenant $K = \text{Ker } u$, et \mathcal{L}_1 l'ensemble des sous-monels L_1 de M_1 .
(1) L'extension de u aux ensembles de parties induit une bijection de \mathcal{L} sur \mathcal{L}_1 . (2) Si $u(L) = L_1$ (donc $L = \bar{u}^{-1}(L_1)$), L_1 et L/K sont isomorphes, et M/L et M_1/L_1 sont isomorphes.

En effet, par le théorème 3, M_1 et M/K sont isomorphes.

Théorème 5 : Soient K et L deux sous-monels d'un A -monel M , de milieu \mathcal{G} . Si K (resp. L) est comparable à \mathcal{G} , les A -monels $K + L/K$ et $L/K \cap L$ sont isomorphes.

On peut se borner au cas où $M = K + L$: si K (resp. L) est comparable à \mathcal{G} , il l'est aussi à $\mathcal{G} \cap (K + L)$. Considérons les applications canoniques $i : L \rightarrow K + L$ et $\varphi : K + L \rightarrow K + L/K$, et posons $u = \varphi \circ i$. φ étant un homomorphisme, u aussi, car il est obtenu par restriction de φ à L . Puisque K (ou L) est comparable à \mathcal{G} , tout $x \in K + L$ s'écrit (II, 2 b, démonstration du th. 1) $x = k + l$ (avec $k \in K$, $l \in L$, $k \neq 1$), et l'on a $\varphi(x) = \varphi(k + l) = \varphi(1) = u(1)$; donc u est surjectif. Notons $\Omega = \mathcal{G} \cap L$ et \mathcal{G}' les milieux respectifs de L et $K + L/K$. Considérons les divers cas.
Si $L \supset \mathcal{G}$, on a $u(\Omega) = u(\mathcal{G}) = \varphi(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$. Si $L \subset \mathcal{G}$, on a $\Omega = L$ et $K + L/K = u(L) = \varphi(L) \subset \varphi(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$; donc $u(\Omega) = \mathcal{G}'$. Si $K \supset \mathcal{G}$, on a $\mathcal{G}' = (0)$,

donc $u(\Omega) \supset \mathcal{G}'$. Si $K \subset \mathcal{G}$, tout $z \in \mathcal{G}$ s'écrit $z = k + l$, avec $k \in K$ et $l \in L \cap \mathcal{G}$. On a donc : $\mathcal{G}' = \varphi(\mathcal{G}) = \varphi(K + (\mathcal{G} \cap L)) = \varphi(\mathcal{G} \cap L) = u(\mathcal{G} \cap L) = u(\Omega)$.
Donc u vérifie les hypothèses du corollaire du théorème 3 et $K + L/K$ est isomorphe à $L/K_{\text{Ker } u}$. Le noyau de u est :

$$\text{Ker } u = \{1 \in L ; \varphi(1) = 0\} = \{1 \in L ; 1 \in K\} = K \cap L.$$

Exemple contraire 2 : Dans l'exemple contraire 1 ci-dessus, avec les notations du théorème 5, u est surjectif. Par contre, $(0) = u(\Omega) \neq \mathcal{G}' = K + L/K$; enfin $L/L \cap K$ qui est isomorphe à L , n'est pas isomorphe à $K + L/K$.

Exemple contraire 3 : Dans l'exemple contraire au théorème 1, chap. II, § 2 b, l'homomorphisme composé $u : F \rightarrow F + G \rightarrow F + G/G$ n'est pas

surjectif. En effet, la classe modulo G de $(a + b, a + b) \in \bigcirc \cap (F + G)$ diffère de toute image $u(x)$, $x \in F$.

Définition 3 : Soient A un anel, M un A -monel, et P une partie non vide de M . On appelle annulateur de P l'ensemble

$$\text{Ann}(P) = \{0\} : P = \{a \in A ; \forall x \in P, ax = 0\}.$$

Il est clair que cet annulateur est un idéal.

Lemme 5 : Soient M un A -monel, et \mathfrak{J} un idéal de A . Pour que M soit un A/\mathfrak{J} monel, il faut et il suffit que l'annulateur de M contienne \mathfrak{J} .

Si $\text{Ann}(M) \supset \mathfrak{J}$, pour tout $\alpha \in A/\mathfrak{J}$ et tout $x \in M$, prenons $a \in \alpha$ et posons $\alpha x = a x$. Cette définition est indépendante du choix de a dans α : Si $a' \in \alpha$, il existe $b \in \alpha$ tel que $a, a' \in b + \mathfrak{J}$. De $a \not\equiv b$ et $a - b \in \mathfrak{J} \subset \text{Ann}(M)$, on déduit $a x - b x = (a - b)x = 0$; on a de même $a'x = b x$, d'où $ax = a'x$. Les autres vérifications sont immédiates.

Dans les résultats suivants concernant les anels, les vérifications sont identiques à celles des théorèmes homologues sur les monels, sauf pour les propriétés liées à la multiplication. Mais la démonstration de ces dernières est immédiate. On notera A et A_1 deux anels de milieux respectifs Ω et Ω_1 , dans ce qui suit, sauf à la remarque 5 bis.

Théorème 1 bis : Soit $u : A \rightarrow A_1$ un quasi-morphisme (d'anels).

1 - Pour tout idéal (resp. sous-anel) \mathfrak{J}_1 de A_1 , $\bar{u}^1(\mathfrak{J}_1)$ est un idéal (resp. sous-anel) de A . En particulier, le noyau $\text{Ker } u = \bar{u}^1(0)$ de u est un idéal.

2 - Si B et X sont deux parties de A , on a $u(BX) \subset u(B)u(X)$. On a l'égalité si u est un homomorphisme vérifiant $\bar{u}^1(\Omega_1) \subset \Omega$.

3 - Soit B un sous-anel de A . Si u est un homomorphisme vérifiant $[m, B]$, $u(B)$ est un sous-anel de A_1 . Si, de plus, u est surjectif, et si B est un idéal de A , $u(B)$ est un idéal de A_1 .

4 - Si u est un homomorphisme surjectif vérifiant $[m, A]$, pour tout idéal \mathfrak{J} contenant $\text{Ker } u$, $u(\mathfrak{J})$ est un idéal.

Remarque 5 bis : L'image d'un anneau par un homomorphisme d'anneaux est un anneau. L'image d'un idéal par un homomorphisme surjectif d'anneaux est un idéal.

Lemme 2 bis : Soit $u : A \rightarrow A_1$ un quasi-morphisme.

(1) Si u est injectif, on a $\text{Ker } u = (0)$. (2) Si u est un homomorphisme vérifiant $[m, A]$, et si $\text{Ker } u = (0)$, u est injectif.

Lemme 3 bis : Soit $u : A \rightarrow A_1$ un homomorphisme bijectif.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) u est un isomorphisme (soit $\Omega_1 \subset u(\Omega)$).

(2) \bar{u}^1 est un homomorphisme.

(3) u vérifie $[m, A]$.

(4) $\bar{u}^{-1}(\Omega_1) \subset \Omega$.

Définition 2 bis : Un homomorphisme injectif $u : A \rightarrow A_1$ est dit un monomorphisme, s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(1) La restriction $v : A \rightarrow u(A)$ de u est un isomorphisme.

(2) $u(A) \cap \Omega_1 \subset u(\Omega)$.

(3) u vérifie $[m, A]$.

(4) $\bar{u}^{-1}(\Omega_1) \subset \Omega$.

Lemme 4 bis : Un homomorphisme de noyau nul et vérifiant $[m, A]$ est un monomorphisme.

Théorème 2 bis : Soient \mathfrak{J} un idéal de A , et φ la surjection $A \rightarrow A/\mathfrak{J}$. Si $u : A \rightarrow A_1$ est un quasi-morphisme (resp. homomorphisme) tel que $\mathfrak{J} \subset \text{Ker } u$, il existe un quasi-morphisme (resp. homomorphisme) $\bar{u} : A/\mathfrak{J} \rightarrow A_1$ tel que $u = \bar{u} \circ \varphi$.

2 - Si de plus u vérifie $[m, \alpha]$ pour un idéal α contenant \mathfrak{J} , alors \bar{u} vérifie $[m, \alpha]$ où α' est l'idéal $\varphi(\alpha)$. Si de plus u vérifie $[m, \alpha]$ pour tout idéal α contenant \mathfrak{J} , \bar{u} vérifie $[m]$.

Théorème 3 bis : Soit $u : A \rightarrow A_1$ un homomorphisme vérifiant $[m, A]$. Alors, $u(A)$ et $A/\text{Ker } u$ sont des anels isomorphes.

Corollaire : Soit $u : A \rightarrow A_1$ un homomorphisme surjectif tel que $\Omega_1 \subset u(\Omega)$. Alors, A_1 et $A/\text{Ker } u$ sont isomorphes.

Théorème 4 bis : Soient \mathfrak{J} un idéal de A , et φ la surjection $A \rightarrow A/\mathfrak{J}$. Soient \mathcal{L} l'ensemble des idéaux α de A , contenant \mathfrak{J} , et \mathcal{L}' celui des idéaux de A/\mathfrak{J} . (1) L'extension de φ aux ensembles de parties induit une bijection de \mathcal{L} sur \mathcal{L}' . (2) Les anels A/α et $(A/\mathfrak{J})/\varphi(\alpha)$ sont isomorphes.

Corollaire : Soit $u : A \rightarrow A_1$ un homomorphisme surjectif tel que $\Omega_1 \subset u(\Omega)$. Soient \mathcal{L} l'ensemble des idéaux α de A , contenant $K = \text{Ker } u$, et \mathcal{L}_1 l'ensemble des idéaux α_1 de A_1 . (1) L'extension de u aux ensembles de parties induit une bijection de \mathcal{L} sur \mathcal{L}_1 . (2) Si $u(\alpha) = \alpha_1$ (donc $\bar{u}^{-1}(\alpha_1) = \alpha$), α_1 et α/K sont isomorphes, et A/α et A_1/α_1 sont isomorphes.

Théorème 5 bis : Soient a et b deux idéaux de A . Si a (resp. b) est comparable à Ω , les anels $a + b/a$ et $b/a \cap b$ sont isomorphes.

Application : Soient A un anel de milieu Ω , \mathfrak{J} un idéal de A , et B le plus petit anel agglutiné, intermédiaire entre A et \bar{A} , et dont le milieu \mathcal{O} contienne \mathfrak{J} . Il est clair que B est obtenu à partir de A par l'agrandissement à $\mathcal{O} = \Omega + \bar{\mathfrak{J}}$ du milieu Ω de A (et bien sûr l'agrandissement corrélatif des

groupes d'additivité). Alors, les anels A/\mathfrak{J} et B/\mathfrak{J} sont isomorphes, ce qui équivaut à dire que les anneaux $\overline{A/\mathfrak{J}}$ et $\overline{B/\mathfrak{J}}$ sont isomorphes comme anneaux quasi-gradués. En effet, soit $u : A \rightarrow B/\mathfrak{J}$ la restriction à la partie A de B de la surjection $\varphi : B \rightarrow B/\mathfrak{J}$; u est donc un homomorphisme d'anels. Tout $\beta \in B/\mathfrak{J}$ s'écrit $\beta = b + \mathfrak{J}$, où $b \in B$, soit $b = a + \eta$ (avec $a \in A$, $\eta \in \mathfrak{J}$, d'après la définition de B); on a donc $\beta = a + \mathfrak{J}$ et u est surjectif. Le noyau de u est $\text{Ker } u = \{a \in A; a \in \mathfrak{J}\} = \mathfrak{J}$. Enfin, tout élément du milieu de B/\mathfrak{J} est de la forme $\omega + \mathfrak{J}$ avec $\omega \in \Omega$, donc est élément de $u(\Omega)$. Le corollaire du théorème 3 bin montre que A/\mathfrak{J} et B/\mathfrak{J} sont isomorphes.

De même, soit \overline{M} un module quasi-gradué sur un anneau quasi-gradué \overline{A} , et soient M et A les monel et anel associés. Soit \overline{L} un sous-module homogène de \overline{M} , et L le sous-monel des éléments homogènes de \overline{L} . Alors, les \overline{A} -modules quasi-gradués généralisés $\overline{M/L}$ et $\overline{M}/\overline{L}$ sont isomorphes.

§ 2 - OPERATIONS SUR LES IDEAUX.

Les démonstrations de a, b, c, sont voisines de celles de [6] pages 147, 177, 219 respectivement.

a - Formules :-

Soient R un anel et a et b deux idéaux de R . Le produit ab de ces idéaux est l'idéal engendré par l'ensemble des produits ab (avec $a \in a$, $b \in b$), et leur somme $a + b$ est l'idéal engendré par $a \cup b$ (II, § 2 b). On appelle radical de a et l'on note \sqrt{a} , l'ensemble des $x \in R$ tels qu'une puissance de x soit dans a . Le radical de a est un idéal. On a les résultats suivants, où a , b , b' sont des idéaux de R , et où $\{a_i\}_{i \in I}$ désigne une famille

quelconque d'idéaux de R :

$$(1) \quad a(b + b') = ab + ab'$$

$$(2) \quad a \cap b \supset ab$$

$$(3) \quad \lambda(ab) \supset (\lambda a)b \quad (\text{avec } \lambda \in \overline{R}, \lambda a \text{ désignant l'idéal engendré par l'ensemble des produits } \lambda a, \text{ où } a \in a \text{ agglutine } \lambda)$$

$$(4) \quad \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

$$(5) \quad \sqrt{a + b} = \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$(6) \quad \sqrt{\bigcap_{i \in I} a_i} \subset \bigcap_{i \in I} \sqrt{a_i}. \text{ Il y a égalité lorsque } I \text{ est fini.}$$

$$(7) \quad \sqrt{a \cap b} = \sqrt{ab}$$

$$(8) \text{ Lorsque } b \subset a, \text{ on a : } \sqrt{a/b} = \sqrt{a}/b$$

$$(9) \text{ Lorsque } I \text{ est fini, on a : } \left(\bigcap_{i \in I} a_i \right) : b = \bigcap_{i \in I} (a_i : b)$$

$$(10) (a : b) : b' = a : bb'$$

$$(11) \text{ Pour } n \text{ entier } \geq 1, \text{ on a : } ((a + b)/a)^n = (a + b^n)/a$$

(12) Rappelons la loi modulaire (Voir II, § 2 b)

Montrons par exemple la relation (1). L'idéal $a(b + b')$ est engendré par l'ensemble des termes :

$$a \left[\sum_{i=1}^n (b_i + b'_i) \right] \quad \text{où } a \in a, \text{ les } b_i \in b, \text{ les } b'_i \in b', b_i \neq b'_i$$

pour tout i , les parenthèses ont un total dans le milieu Ω de R , sauf une au plus (II, § 2 b). Les axiomes de distributivité montrent que le produit par a

est $\sum_{i=1}^n (a b_i + a b'_i)$ avec les conditions analogues d'additivité. Ceci

montre $a(b + b') \subset ab + ab'$. Inversement, $ab + ab'$ est engendré par $ab \cup ab'$, qui est contenu dans le premier membre.

Soient R et S deux anels de milieux respectifs Ω et Ω' , a et b deux idéaux de R , et $f : R \rightarrow S$ un quasi-morphisme de noyau K . (On sait que $f(a)$ n'est pas forcément un idéal). Outre le théorème 1 bis (III, § 1), on a les résultats suivants :

$$(13) \quad f(a + b) \subset f(a) + f(b)$$

$$(14) \quad f(a \cap b) \subset f(a) \cap f(b).$$

Il y a égalité dans cette dernière formule si $K \subset a$, et si f est un homomorphisme vérifiant $f(a \cap b) \supset \Omega' \cap f(a) \cap f(b)$.

Les formules précédentes sont vraies dans le cas où f est un quasi-morphisme ou homomorphisme de A -monels, R et S désignant alors des A -monels, et a et b des sous-monels de R .

$$(15) \quad f(a : b) \subset f(a) : f(b) = \{X \in S ; \forall Y \in f(b), XY \in f(a)\}$$

$$(16) \quad f(\sqrt{a}) \subset \sqrt{f(a)}.$$

Il y a égalité dans ces deux dernières formules si f est un homomorphisme surjectif qui vérifie $\bar{f}^1(\Omega') \subset a$ (resp. $f(\Omega) = \Omega'$)

Montrons, par exemple, ce dernier résultat concernant (15).

Si $X \in f(a) : f(b)$, par surjectivité de f , X s'écrit $f(x)$ avec $x \in R$; et pour tout $b \in b$, il existe $a \in a$ tel que $Xf(b) = f(xb) = f(a)$. Ou bien $f(xb) \in \Omega'$ et la condition $\bar{f}^1(\Omega') \subset a$ implique $xb \in a$. Ou bien $f(xb) \notin \Omega$, et xb et a sont addibles car f est un homomorphisme. Il en résulte $0 = f(xb) - f(a) = f(xb - a)$, d'où $xb - a \in \bar{f}^1(\Omega') \subset a$, et enfin $xb \in a$. On a donc $X = f(x) \in f(a : b)$.

b - Idéaux comaximaux :

Des idéaux a_1, \dots, a_n d'un anel unitaire R seront dits deux à deux comaximaux s'ils sont distincts de R et si $i \neq j$ implique $a_i + a_j = R$. Lorsque $n = 2$, on dit simplement idéaux comaximaux. On déduit

des formules (a) :

Lemme : Soient b, a_1, \dots, a_n des idéaux d'un anel unitaire R .

- 1°) Les a_i sont deux à deux comaximaux si et seulement si leurs radicaux le sont.
- 2°) Si b est comaximal avec chaque a_i , il l'est avec leur intersection et avec leur produit.
- 3°) Si les a_i sont deux à deux comaximaux, on a :

$$\bigcap_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n a_i$$

c - Idéaux étendus et contractés :

Soient R et S deux anels unitaires, et $f : R \rightarrow S$ un quasi-morphisme d'anel s unitaires. On notera a, b des idéaux de R , et $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ des idéaux de S .

L'idéal $\mathfrak{A}^c = \bar{f}^{-1}(\mathfrak{A})$ est dit contraction de \mathfrak{A} . L'idéal $a^e = S f(a)$ engendré par $f(a)$ dans S est dit extension de a .

Il est clair que $R^e = S$, $S^c = R$, $(0)^e = (0)$ et que $(0)^c$ est le noyau de f . On montre facilement les formules suivantes :

- (1) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ implique $\mathfrak{A}^c \subset \mathfrak{B}^c$
 $a \subset b$ implique $a^e \subset b^e$
- (2) $\mathfrak{A}^{ce} \subset \mathfrak{A}$ et $a^{ec} \supset a$

En particulier, lorsque f est l'injection canonique $R \rightarrow \bar{R}$, on a $a^{ec} = a$, car $a^e = \bar{a}$ et $\bar{a} \cap R = a$; d'autre part, la relation $\mathfrak{A}^{ce} = \mathfrak{A}$ signifie que l'idéal \mathfrak{A} de \bar{R} est homogène.

- (3) $\mathfrak{A}^{cec} = \mathfrak{A}^c$ et $a^{ece} = a^e$
- (4) $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^c \supset \mathfrak{A}^c + \mathfrak{B}^c$
 $(a + b)^e = a^e + b^e$
- (5) $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})^c = \mathfrak{A}^c \cap \mathfrak{B}^c$
 $(a \cap b)^e \subset a^e \cap b^e$
- (6) $(\mathfrak{A} \mathfrak{B})^c \supset \mathfrak{A}^c \mathfrak{B}^c$
 $(ab)^e = a^e b^e$
- (7) $(\mathfrak{A} : \mathfrak{B})^c \subset \mathfrak{A}^c : \mathfrak{B}^c$
 $(a : b)^e \subset a^e : b^e$
- (8) $(\sqrt{\mathfrak{A}})^c = \sqrt{\mathfrak{A}^c}$ et $(\sqrt{a})^e \subset \sqrt{a^e}$

Par exemple, vérifions pour (6) l'inclusion $a^e b^e \subset (ab)^e$.

L'idéal $a^e b^e$ est par définition engendré par les produits YZ où

$Y \in a^e = S f(a)$ et $Z = b^e = S f(b)$. Donc Y et Z s'écrivent

$$Y = \sum_i \left[\sum_j s_{ij} f(a_{ij}) \right] \text{ et } Z = \sum_k \left[\sum_l t_{kl} f(b_{kl}) \right] \text{ avec les } s_{ij} \text{ et } t_{kl} \in S,$$

les $a_{ij} \in a$, les $b_{kl} \in b$, et avec les conditions habituelles (II, § 2 b) :

les termes intérieurs à un crochet sont mutuellement additifs ; pour Y (et de même pour Z), les crochets sauf un au plus ont un total dans le milieu.

Dans le produit :

$$\begin{aligned} YZ &= \sum_{i,k} \left[\sum_{j,l} s_{ij} t_{kl} f(a_{ij}) f(b_{kl}) \right] \\ &= \sum_{i,k} \left[\sum_{j,l} s_{ij} t_{kl} f(a_{ij} b_{kl}) \right] \end{aligned}$$

les axiomes de distributivité des anels conservent ces conditions. Il en résulte $YZ \in (ab)^e$, d'où le résultat annoncé.

Soit (E) (resp. (C)) l'ensemble des idéaux étendus (resp. contractés). $\alpha \rightarrow \alpha^e$ et $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^c$ sont des bijections réciproques entre (E) et (C). (E) est fermé pour l'addition et la multiplication des idéaux. (C) est fermé pour l'intersection, la division et le passage aux radicaux. Ces dernières propriétés résultent immédiatement des formules précédentes, sauf la fermeture de (C) pour la division, dont la démonstration est identique à celle, connue, pour les anneaux : plus précisément, si $a, b \in (C)$, on montre que $a : b = (a^e : b^e)^c$.

Soient trois anels unitaires R, S, T , et deux quasi-morphismes unitaires $f : R \rightarrow S$ et $g : S \rightarrow T$. Il y a associativité des extensions et des contractions : l'extension par g de l'extension par f est l'extension par $g \circ f$; on a le résultat analogue pour les contractions. Le résultat est évident pour les contractions, et se montre sans difficulté pour les extensions. Par suite, si un diagramme de quasi-morphismes unitaires est commutatif, le diagramme associé des extensions (resp. des contractions) est commutatif.

§ 3 - IDEAUX PREMIERS, PRIMAIRES, MAXIMAUX.

Définition 1. Un idéal p d'un anel A sera dit :

- (1) premier si et seulement si pour tous $a, b \in A$, les relations $ab \in p$, $a \notin p$ impliquent $b \in p$.

(2) strictement premier si et seulement si pour tout $b \in A$ et pour tout

$\alpha = \sum_i a_i \in \bar{A}^b$, les relations $\alpha b \in \mathfrak{p}$ et $a_i \notin \mathfrak{p}$ pour tout i , impliquent $b \in \mathfrak{p}$.

(3) largement premier si et seulement si pour tout $b \in A$ et pour tout

$\alpha = \sum_i a_i \in \bar{A}^b$, les relations $\alpha b \in \mathfrak{p}$ et $a_i \notin \mathfrak{p}$ pour tout i , impliquent $b \in \mathfrak{p}$.

(3) implique (2), qui implique (1). (Les conditions (2) et (3) se confondent pour un anneau). Noter que ces conditions signifient respectivement :

(1) que l'anneau A/\mathfrak{p} est sans diviseur de zéro ; (2) que de plus, A/\mathfrak{p} est sans pseudo-diviseur de zéro ; (3) que de plus, A/\mathfrak{p} est sans pseudo-diviseur large de zéro. En particulier, lorsque A est unitaire, (1) signifie que A/\mathfrak{p} est un quasi-domaine, et (3) qu'il est un domaine.

Noter que si un idéal homogène $\bar{\mathfrak{p}}$ de \bar{A} est premier dans \bar{A} , \mathfrak{p} est premier dans A des trois manières. Inversement, \mathfrak{p} peut être premier dans A , sans que $\bar{\mathfrak{p}}$ le soit dans \bar{A} .

Théorème 1. Soit A un anneau.

(1) Un idéal \mathfrak{p} est premier si et seulement si, quels que soient les idéaux \mathfrak{a} et \mathfrak{b} tels que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$, \mathfrak{p} contient \mathfrak{a} ou \mathfrak{b} .

(2) En particulier, si \mathfrak{p} premier contient \mathfrak{a}^n (avec $n \geq 1$), il contient \mathfrak{a} .

(3) Si l'idéal $\mathfrak{J} \neq A$ n'est pas premier, il existe deux idéaux \mathfrak{a} et \mathfrak{b} contenant strictement \mathfrak{J} , et tels que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{J}$.

La démonstration résulte immédiatement des définitions (voir [6], p. 150).

Définition 2. Un idéal \mathfrak{q} d'un anneau A sera dit :

(1) primaire si et seulement si pour tous $a, b \in A$, les relations $ab \in \mathfrak{q}$, $a \notin \mathfrak{q}$ impliquent l'existence de $n \geq 1$ tel que $b^n \in \mathfrak{q}$.

(2) strictement primaire si et seulement si pour tout $b \in A$ et pour tout

$\alpha = \sum_i a_i \in \bar{A}^b$, les relations $\alpha b \in \mathfrak{q}$ et $a_i \notin \mathfrak{q}$ pour tout i , impliquent l'existence de $n \geq 1$ tel que $b^n \in \mathfrak{q}$.

(3) largement primaire si et seulement si pour tout $b \in A$ et pour tout

$\alpha = \sum_i a_i \in \bar{A}^b$, les relations $\alpha b \in \mathfrak{q}$ et $a_i \notin \mathfrak{q}$ pour tout i , impliquent l'existence de $n \geq 1$ tel que $b^n \in \mathfrak{q}$.

Noter que (1) signifie que, dans A/\mathfrak{q} , tout diviseur de 0 est nilpotent, (2) que de plus tout pseudo-diviseur de 0 est nilpotent, etc...

Théorème 2. Soit A un anneau.

1° Si \mathfrak{q} est un idéal primaire (resp. strictement primaire, resp. largement primaire), son radical $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ est premier (resp. strictement premier, resp. largement premier). On dit alors que \mathfrak{q} est primaire pour \mathfrak{p} , ou est \mathfrak{p} -primaire.

2° Soit q un idéal p -primaire. Les relations $ab \in q$ et $a \notin q$ impliquent $b \in p$.

3° Soient q un idéal p -primaire, et deux idéaux a et b . Les relations $a \subset q$ et $a \not\subset q$ impliquent $b \subset p$.

Supposons q primaire, $ab \in \sqrt{q} = p$ et $a \notin p$. On a donc, pour un entier $n \geq 1$, $a^n b^n \in q$ et $a^n \notin q$. Alors il existe $m \geq 1$ tel que $(b^n)^m \in q$, soit $b \in p$.

Lorsque q est strictement primaire, $p = \sqrt{q}$ est premier. Pour tout $b \in A$, et tout $\alpha = \sum_i a_i \in \bar{A}$ tels que les a_i soient hors de p et deux à deux non addibles, et que αb soit dans p , il existe $n \geq 1$ pour lequel $(\alpha b)^n \in q$. La propriété fondamentale des anels montre que b^n agglutine (simplement) la somme formelle α^n . Les termes de cette somme formelle sont hors de p , puisque p est premier, car ce sont des produits des éléments $a_i \notin p$. Alors, q étant strictement primaire, il existe $m \geq 1$ tel que $(b^n)^m \in q$, soit $b \in p$. Le cas largement primaire se traite de même, grâce aux axiomes D des anels.

L'assertion (2) est triviale, et implique (3) en l'appliquant à un élément a de $a \dots q$.

Définition 3. Un idéal m d'un anel A sera dit maximal si et seulement s'il est maximal dans l'ensemble des idéaux distincts de A .

Cela signifie que A/m possède seulement deux idéaux distincts (0) et A/m . (III, § 1, théorème 4 bis)

Théorème 3. Soit R un anel, de graduation Δ associative, dont les seuls idéaux sont (0) et R , et tel que $R^2 \neq (0)$. Alors, R ou est un corps, ou est égal à son milieu, lequel a une structure sous-jacente de corps.

Lemme 1. Dans un anel R dont les seuls idéaux sont (0) et R , et tel que $R^2 \neq (0)$, pour tout $x \in R$, $x \neq 0$, on a $Rx = R$.

On rappelle que Rx est l'idéal $\{\gamma x ; \gamma \in \Lambda^x\}$ des multiples de x . Cet idéal est ici (0) ou R . L'ensemble $X = \{x \in R ; Rx = (0)\} = (0) : R$ est un idéal. L'hypothèse $R^2 \neq (0)$ montre que X est différent de R , et comme (0) et R sont les seuls idéaux, on a $X = (0)$. Donc, pour tout $x \in R$, $x \neq 0$, l'idéal Rx est différent de (0), donc égal à R .

Lemme 2. Soit D un monoïde commutatif (loi notée multiplicativement) et possédant un élément absorbant, noté 0. On suppose que $D^* = D \setminus \{0\}$ est non vide. S'il existe un système S de générateurs de D tel que Ss contienne S pour tout $s \in S$, $s \neq 0$, alors D^* est un groupe.

Prenons $a \in S$, $a \neq 0$; puisque $Sa \supset S$, il existe $e \in S$ tel que $ea = a$. Tout $d \in D^*$ est multiple d'un élément non nul s de S , soit $d = d's$ (avec $d' \in D$). Puisque $Sa \supset S$, il existe $t \in S$ tel que $ta = s$, donc que $d'ta = d's = d$. On en déduit $d = d'tae = d'ta = d$. Donc e est unité dans D .

Pour tout s non nul dans S , l'hypothèse $Ss \supset S$ montre qu'il existe

$s' \in S$ tel que $s's = e$, donc que s est inversible dans S . Alors, tout élément d de D^* , étant un produit d'éléments non nuls de S , est lui-même inversible.

Lemme 3. Un anel R (commutatif), tel que $R^* = R \cup \{0\}$ soit un groupe multiplicatif, ou est un corps, ou est égal à son milieu, lequel a une structure sous-jacente de corps.

Si le milieu Ω de R est différent de $\{0\}$, soit x non nul dans Ω ; il est inversible et on a $1 = xx'$, avec $x' \in R$. Grâce à l'axiome D_5 des anels, ces conditions impliquent $1 \in \Omega$, donc aussi $R = \Omega$, et par suite R est un corps.

Montrons le théorème. Notons D le sous-monoïde de Δ engendré par l'ensemble $\omega(R) = \omega(R \cup \{0\}) \cup \{0\}$ des grades des éléments de R . Le lemme 1 montre que $Rx = R$ pour tout $x \in R^* = R \cup \{0\}$. Cette condition montre que, pour tout α non nul de $\omega(R)$, on a : $\omega(R) \alpha \supset \omega(R)$. Le lemme 2 montre alors que D^* (D est une graduation associative de R) est un groupe. L'anel R est donc régulier. Il en résulte que la condition (relative à l'anel R) $Rx = R$ pour tout $x \in R^*$, implique, dans le monoïde R , $Rx = R$ pour tout $x \in R^*$. (dans le monoïde, Rx signifie $\{r x ; r \in R\}$) Le lemme 2 montre que R^* est un groupe, et le lemme 3 achève la démonstration.

Théorème 4. Soient A un anel de graduation associative Δ , et m un idéal tel que $A^2 \not\subset m$. Pour que m soit maximal, il faut et il suffit que A/m soit un corps, ou soit égal à son milieu et aie une structure sous-jacente de corps.

Si A/m est un corps, il n'est pas de carré nul, et le théorème 4 bis (III, § 1) montre que m est idéal maximal de A .

Inversement, les hypothèses montrent que l'anel $R = A/m$ est tel que $R^2 \neq (0)$, a pour seuls idéaux (0) et R (III, § 1, théorème 4 bis) et admet la graduation associative Δ (voir II, § 2 d). L'anel R vérifie donc les conditions du théorème 3, et est un corps.

Au lieu de Δ associative, il suffit de supposer que A/m admette une graduation associative. Donc en particulier, il suffit que la partie stable Δ' de Δ engendrée par $S = \{0\} \cup \omega(A \cup (0 + m))$ soit un monoïde.

La dernière démonstration peut se faire directement : m étant maximal, m contient l'idéal $Ax + m = A^x x + m$ si et seulement si $Ax \subset m$; on a dans le cas contraire $Ax + m = A$. L'idéal $m : A = \{x \in A ; Ax \subset m\}$ contient m et en est différent, sinon on aurait $A^2 \subset m$. Donc on a $m : A = A$, et $Ax + m = A$ pour tout $x \in A \cup m$. De ceci, et de $A^2 \not\subset m$, on déduit $A = A^2$ et, pour tout $x \in A \cup m$, on déduit $A = (Ax + m)^2 \subset Ax^2 + m$, soit $A = Ax^2 + m$. Prenons $a \in A \cup m$; puisque $A = A a^2 + m$, il existe $\beta \in A^{a^2}$ tel que $a \equiv a^2 \beta (m)$, donc aussi $a \equiv [a(a^2 \beta)] \beta (m)$. Comme Δ est associative, a^2 agglutine β^2 (II, § 3, conséquence du corollaire 1) et on obtient $a \equiv a e (m)$ en posant $e = a^2 \beta^2 \in A$.

Ensuite, de $Aa + m = A$, pour tout y de A on déduit l'existence de $\gamma \in \Lambda^a$ tel que $y \equiv a\gamma \pmod{m}$, donc que $e y \equiv e a\gamma = a\gamma = y$, et e est unité modulo m . Enfin, pour tout $x \notin m$, $A = Ax + m$ montre l'existence de $\delta \in \Lambda^x$ tel que $e \equiv x\delta \pmod{m}$, donc tel que $e = e^2 \equiv (x\delta)^2$. Puisque Δ est associative, x agglutine δ^2 . En posant $x' = x\delta^2 \in A$, on obtient $e \equiv x x' \pmod{m}$, et x est inversible modulo m . La démonstration s'achève par celle du lemme 3.

Corollaire : Soient A un anel de graduation associative Δ , et m un idéal maximal tel que $A^2 \not\subset m$. Alors, m est largement premier.

Remarque 1. Dans un anel unitaire, tout idéal propre a est contenu dans un idéal maximal. En effet, l'ensemble des idéaux propres contenant a , ordonné par inclusion, est inductif et contient un élément maximal (lemme de Zorn).

Remarque 2. Dans un anel, l'intersection de tous les idéaux premiers est l'ensemble $\sqrt{(0)}$ des éléments nilpotents. En effet, tout idéal premier contient $\sqrt{(0)}$. Inversement, si u n'est pas nilpotent, l'ensemble E des idéaux propres qui ne contiennent aucune puissance de u est inductif et contient (0) . Soit p un élément maximal de E (lemme de Zorn). Pour tous $x, y \notin p$, il existe $m, n \geq 1$ tels que $u^m \in p + (x)$ et $u^n \in p + (y)$, donc tels que $u^{m+n} \in p + (xy)$. Puisque $u^{m+n} \notin p$, on a $xy \notin p$; p est premier et ne contient pas u .

Théorème 5. Soient p et q deux idéaux d'un anel A . p est premier et q est p -primaire si et seulement si :

- (1) $q \subset p$
- (2) pour tout $b \in p$, il existe $m \geq 1$ tel que $b^m \in q$
- (3) pour tous $a, b \in A$, les relations $ab \in q$ et $a \notin q$ impliquent $b \in p$.

La démonstration est celle connue pour les anneaux (voir [6], p. 153). Noter que la relation (3) équivaut à (3') : pour tous $a, b \in A$, les relations $ab \in q$ et $b \notin p$ impliquent $a \in q$.

Corollaire 1. Soient p et q deux idéaux d'un anel unitaire A . Supposons que :

- (1) $q \subset p$.
- (2) pour tout $b \in p$, il existe $m \geq 1$ tel que $b^m \in q$.
- (3) p est maximal.

Alors, p est premier et q est p -primaire.

Si on a $ab \in p$ et $b \notin p$, puisque p est maximal, on en déduit $A = p + (b)$; donc on peut écrire $1 = \sum_i (p_i + \gamma_i b)$ somme finie où, pour tout i ,

$p_i \in p$, $\gamma_i \in \bar{A}^b$ (en fait, on devrait écrire $\gamma_i \in \Lambda^b$, mais on se ramène aisément au cas où les $\gamma_i \in \bar{A}^b$), $p_i \neq \gamma_i b$, et où les parenthèses ont un total dans le milieu Ω , sauf une au plus. Pour tout i , soit $n_i \geq 1$ tel que

$p_i^{n_i} \in q$, et soit $n = \sum_i n_i$. Alors $1 = r^n = \left[\sum_i (p_i + \gamma_i b) \right]^n$. En développant, on obtient (axiomes D et propriété fondamentale des anels) une somme de termes, additifs et tous situés dans Ω sauf un au plus, chacun de la forme $t_j = \prod_i (p_i + \gamma_i b)^{m_i}$ où $\sum_i m_i = n$, et où l'un des exposants $m_{i_0} \geq n_{i_0}$. Un tel terme, développé à son tour, contiendra un multiple $q_j \in q$ de $p_{i_0}^{m_{i_0}}$, et un élément de l'idéal (b) (axiomes D et propriété fondamentale). On a donc $1 = \sum_j t_j = \sum_j (q_j + \delta_j b)$, avec $q_j \in q$, $\delta_j \in \Lambda^b$, et avec les conditions d'additivité habituelles. On en déduit $a = \sum_j (a q_j + \delta_j ab)$, donc $a \in q$.

Corollaire 2. Dans un anel unitaire, tout idéal maximal m est premier, et ses puissances sont m -primaires.

En effet, $q = m^k$ vérifie les conditions du corollaire 1.

Théorème 6. Soient p et q des idéaux d'un anel A .

- 1° Une intersection finie d'idéaux p -primaires (resp. strictement p -primaires) est p -primaire (resp. strictement p -primaire)
- 2° Si p est maximal, une somme et un produit finis d'idéaux p -primaires sont p -primaires
- 3° Soit a un idéal non contenu dans q . Si q est p -primaire, $q : a$ est p -primaire.

Soient q_1, \dots, q_n des idéaux p -primaires d'un anel A et $Q = \bigcap q_i$. On applique le théorème 5. Si $ab \in Q$ et si $a \notin Q$, il existe i_0 tel que $a \in q_{i_0}$; alors $ab \in q_{i_0}$ entraîne $b \in p$. Si, de plus, les q_i sont strictement primaires, soient $b \in A$ et $\alpha = \sum_j a_j \in A^b$ tels que $\alpha b \in Q$ et $a_j \notin Q$ pour tout j . Il existe donc i_1 tel que $a_j \notin q_{i_1}$. Posons $\alpha = \alpha' + \alpha''$, où la somme formelle α' (resp. α'') est formée des termes $a_j \notin q_{i_1}$ (resp. $a_j \in q_{i_1}$), et est agglutinée par b . Alors, on a : $\alpha' b = \alpha b - \alpha'' b \in q_{i_1}$; comme α' contient au moins a_{i_1} , et comme q_{i_1} est strictement p -primaire, b est dans p .

(2) résulte du corollaire 1 du théorème 5. Pour (3), appliquons le théorème 5. On a $(q : a) \subset q$ et $a \not\subset q$, donc (théorème 2) on a $q : a \subset p$. On sait que $q : a$ contient q . Puis, si $cb \in q : a$ et si $c \notin q : a$, il en résulte l'existence de $a \in a$ tel que $ca \notin q$; alors, $cba \in q$ montre que $b \in p$. Donc $q : a$ est p -primaire.

Théorème 7. Soient R et S deux anels de milieux respectifs Ω et Ω_1 , et $f : R \rightarrow S$ un homomorphisme surjectif tel que $f(\Omega) = \Omega_1$. Pour tout idéal a de R , contenant $\text{Ker } f$ (resp. pour tout idéal u de S), les idéaux a et $f(a)$

(resp. $\bar{f}^1(\mathfrak{U})$ et \mathfrak{U}) sont ensemble maximaux, ou premiers, ou strictement premiers, ou largement premiers, ou primaires, ou strictement primaires, ou largement primaires. Si l'idéal \mathfrak{q} contient $\text{Ker } f$ et est \mathfrak{p} -primaire, alors $f(\mathfrak{q})$ est $f(\mathfrak{p})$ -primaire.

En effet, chacune des propriétés envisagées pour ces idéaux \mathfrak{a} et $f(\mathfrak{a})$ équivaut à une propriété des anels R/\mathfrak{a} et $S/f(\mathfrak{a})$. Or, ces anels sont isomorphes (III, § 1, corollaire du théorème 4 bis). La dernière assertion résulte de (III, § 2 a, formules (16)).

Théorème 8. Soient R et S deux anels, et $f : R \rightarrow S$ un quasi-morphisme. Si, dans S , Q est un idéal \mathfrak{P} -primaire, alors \mathfrak{P}^C est premier, et Q^C est \mathfrak{P}^C -primaire.

La démonstration est triviale, mais elle ne s'étend pas au cas strictement primaire. Cependant, si Q est idéal homogène de \bar{R} (c'est-à-dire $Q = (\overline{Q \cap R})$), lorsque Q est strictement (resp. largement) primaire, il en est de même de $Q \cap R$.

Remarque 3. Si un idéal \mathfrak{U} de S est intersection $\mathfrak{U} = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ d'idéaux primaires Q_i , il en est de même (III, § 2c, formule (8)) de son contracté : $\mathfrak{U}^C = \bigcap_{i=1}^n Q_i^C$. Au contraire, l'extension ne conserve pas forcément premier et primaire.

§ 4 - ANELS DE FRACTIONS.

a - Définitions :

Monofdes de fractions. Soit R un monofde donné (noté multiplicativement), commutatif, et pouvant éventuellement contenir un élément absorbant (ou annulateur), noté 0 , et un élément neutre, noté 1 s'il est distinct de 0 . Soit M une partie multiplicative de M , c'est-à-dire non vide, multiplicativement stable, et ne contenant pas 0 . Dans le monofde produit $C = R \times M$ (multiplication par composantes), pour tous (a, s) et $(a', s') \in C$, on pose $(a, s) H (a', s')$ si et seulement s'il existe $t \in M$ tel que $t s' a = t s a'$. Il est clair que H est une relation d'équivalence sur C , et est compatible avec la multiplication. On notera $R_M = C/H$ le quotient, qui est donc un monofde commutatif, et on notera $\frac{a}{s}$ la classe d'un couple (a, s) . R_M est appelé le monofde des fractions de R relatif à M . Il possède l'élément unité $\frac{s}{s}$ (avec $s \in M$). Pour tout $m \in M$, et pour tout $\frac{a}{s} \in R_M$, on a : $\frac{ma}{ms} = \frac{a}{s}$. Enfin, si $0 \in R$, R_M admet l'annulateur $0 = \frac{0}{t}$ (avec $t \in M$) ; $\frac{a}{s} = 0$ signifie qu'il existe $m \in M$ tel que $ma = 0$. (Dans le cas singulier où $0 \in M$, la construction est encore valable, mais conduit à un monofde réduit à un seul élément).

Si l'on ne suppose plus que la multiplication est associative dans R ,

mais seulement que les éléments de M associent dans R (voir II, § 3 d, lemme 4), et si l'on conserve les autres hypothèses, cela suffit pour permettre la même construction avec les mêmes démonstrations. En effet, tout produit d'éléments de R où deux facteurs au plus ne sont pas dans M , vérifie les conditions d'associativité ; et seuls de tels produits interviennent dans les démonstrations. On obtient alors un ensemble R_M de fractions avec une multiplication commutative, pas forcément associative, possédant un annulateur et un élément neutre.

Anels de fractions. Soient R un anel de milieu Ω et M une partie multiplicative de R (avec $0 \notin M$). Organisons le monoïde R_M en un anel (les axiomes A_{1234} des anels sont déjà vérifiés) de la manière suivante :

$\frac{a}{s}$ et $\frac{b}{t}$ sont dits addibles dans R_M si et seulement s'il existe $m \in M$ tel que $mta \not\equiv msb$; la somme est alors $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{mta}{mts} + \frac{msb}{mst} = \frac{mta + msb}{mst}$ qui est bien (car $mst \in M$) dans R_M . L'addibilité est indépendante des représentants choisis pour $\frac{a}{s}$ et $\frac{b}{t}$ (s'il en est ainsi, l'indépendance pour la somme est immédiate) : supposons $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, soit $us'a = usa'$ (avec $u \in M$). De $mta \not\equiv msb$ on déduit $mtusa' = mtus'a \not\equiv msus'b$, puis $mus.ta' \not\equiv mus.s'b$; donc $\frac{a'}{s'}$ et $\frac{b}{t}$ sont addibles, car $mus \in M$. Les axiomes B_{12} des anels sont vérifiés. Le milieu \bigcirc sera l'ensemble des éléments $\frac{a}{s} \in R_M$ tels qu'il existe $m \in M$ vérifiant $ma \in \Omega$. En effet, pour tout $\frac{b}{t} \in R_M$, $mta \in \Omega$ implique $mta \not\equiv msb$ (Axiome B_3). Si $\frac{a}{s} \not\equiv \frac{b}{t} \not\equiv \frac{c}{u}$ et si $\frac{b}{t} \notin \bigcirc$, c'est-à-dire $xb \notin \Omega$ pour tout $x \in M$, les relations $mta \not\equiv msb$ et $nub \not\equiv ntc$ (avec $m, n \in M$) impliquent $mtnua \not\equiv (msnu)b \not\equiv msntc$. Puisque $msnub \notin \Omega$, on a $(mnt)ua \not\equiv (mnt)sc$, donc $\frac{a}{s} \not\equiv \frac{c}{u}$ (Axiome B_4). Donc R_M est la réunion de domaines d'addibilité qui ont deux à deux \bigcirc seulement en commun. On vérifie immédiatement que chaque domaine est un groupe additif abélien dont $0 = \frac{0}{s}$ est le zéro commun. L'associativité résulte de celle de R grâce au :

Lemme 1 (d'addition) : Soient n fractions de R_M deux à deux addibles. On peut les réduire au même dénominateur de manière que les nouveaux numérateurs soient addibles.

Pour $n = 2$, c'est la définition. Soient $(n + 1)$ fractions, soient $\frac{a_1}{m}, \dots, \frac{a_n}{m}$ les n premières supposées déjà réduites (avec les $a_i \in R$ deux à deux addibles), et soit $\frac{b}{s}$ la dernière. Pour tout i , $\frac{a_i}{m} \not\equiv \frac{b}{s}$ implique l'existence de $t_i \in M$ tel que $t_i s a_i \not\equiv t_i m b$. Posons $t = t_1 t_2 \dots t_n$. Pour tout i , on a $t s a_i \not\equiv t m b$. Alors $t m s \in M$ est le dénominateur commun cherché.

Soient $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}, \frac{c}{u}$ telles qu'il existe $m \in M$ vérifiant $mta \neq msb$. On en déduit $m(ut)ca \neq m(us)cb$, donc $\frac{ca}{us}$ et $\frac{cb}{ut}$ sont addibles (Axiome D_1). La distributivité du produit par rapport à la somme est alors aisée à vérifier. Enfin, si $\frac{b}{t} \in R_M$ et $\frac{a}{s} \in \bigcirc$, il existe $m \in M$ tel que $ma \in \Omega$; on en déduit $m(ba) = b(ma) \in \Omega$, donc $\frac{ba}{ts} \in \bigcirc$ (Axiome D_5). R_M est donc un anel commutatif et unitaire, appelé anel des fractions de R relatif à la partie multiplicative M .

Remarque 1 : Si R est un anénéfde, R_M est un anénéfde. (C'est évident par définition du zéro et du milieu \bigcirc de R_M).

Fixons un $s \in M$ (par exemple $s = 1$ si $1 \in M$) et considérons l'application $h : R \rightarrow R_M$ définie par $h(a) = \frac{sa}{s}$. Cette définition est indépendante du choix de s . On voit facilement que h est un quasi-morphisme d'anel. En particulier, $a \in \Omega$ entraîne $sa \in \Omega$, donc $h(a) \in \bigcirc$; $a \neq b$ entraîne $s^2a \neq s^2b$, donc $h(a) \neq h(b)$. Lorsque R est unitaire, h est un quasi-morphisme d'anel unitaires. Lorsque R n'a pas d'élément unité, R_M a encore un élément unité, mais h n'est pas unitaire. Pour tout $m \in M$, $h(m) = \frac{sm}{s}$ admet $\frac{s}{sm}$ pour inverse. Tout élément de R_M s'écrit $\frac{a}{m} = \frac{sa}{s} \frac{s}{sm} = h(a) h(m)^{-1} = \frac{h(a)}{h(m)}$.

Lemme 2. Pour tous $a, b \in R$, la relation $h(a) \neq h(b)$ équivaut à l'existence de $m \in M$ tel que $ma \neq mb$. En particulier, $h(a) = h(b)$ équivaut à l'existence de $m \in M$ tel que $h(ma - mb) = 0$, donc de $t \in M$ tel que $ta = tb$.

Ce lemme est évident. Rassemblons ces divers résultats (l'unicité sera montrée plus loin) :

Théorème 1. Soient R un anel, et M une partie multiplicative de R (non vide et ne contenant pas 0). Il existe un anel unitaire R_M et un quasi-morphisme (unitaire si R l'est) $h : R \rightarrow R_M$ tel que :

- (1) $\text{Ker } h = \{a \in R ; \exists m \in M, ma = 0\}$
- (2) Pour tout $m \in M$, $h(m)$ est inversible
- (3) Tout élément de R_M est de la forme $\frac{h(a)}{h(m)}$, avec $a \in R, m \in M$
- (4) $R^h = R_M$.

Il y a unicité de R_M à un isomorphisme près.

Théorème 2. Soient R un anel et M une partie multiplicative de R (non vide et ne contenant pas 0). Soient R_M l'anel et h le quasi-morphisme du théorème 1. Quels que soient l'anel unitaire S et le quasi-morphisme (unitaire si R l'est) $g : R \rightarrow S$ tels que les éléments de $g(M)$ soient inversibles, il existe un quasi-morphisme unitaire unique $u : R_M \rightarrow S$ tel que $g = u \circ h$.

Pour tout $a \in R$, on doit poser $u(h(a)) = g(a)$. Pour tout $x = \frac{a}{s} \in R_M$, on a $h(a) = h(s)x$, donc on doit avoir $g(a) = u(h(s)x) = g(s) u(x)$, soit enfin

$u(x) = \frac{g(a)}{g(s)}$. Si R est unitaire, $g = u \circ h$ nécessite

$g(1) = u \circ h(1) = u\left(\frac{s}{s}\right) = \frac{g(s)}{g(s)} = 1$. Ceci montre l'existence et l'unicité de l'application u .

Si $\frac{a}{s} \not\equiv \frac{b}{t}$, c'est-à-dire s'il existe $m \in M$ tel que $mta \not\equiv msb$, on a $g(mt) g(a) \not\equiv g(ms) g(b)$. Puisque $g(mst)$ est inversible, donc régulier, $u\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{g(a)}{g(s)}$ et $u\left(\frac{b}{t}\right) = \frac{g(b)}{g(t)}$ sont addibles. La vérification des trois autres conditions pour que u soit un quasi-morphisme unitaire est alors immédiate. Enfin, $g = u \circ h$ montre que $\text{Ker } g$ contient $\text{Ker } h$ et que \bar{R}^g est un agglutiné de \bar{R}^M .

Soient S un anel de milieu \mathcal{O}' et $g : R \rightarrow S$ un quasi-morphisme vérifiant les mêmes conditions que R_M et h dans le théorème 1. Soit u le quasi-morphisme associé à g par le théorème 2. Par la condition (4) (th. 1), deux éléments a, b de R sont addibles par M si et seulement s'ils sont addibles par h (resp. g); donc $h(a) \not\equiv h(b)$ équivaut à $g(a) \not\equiv g(b)$. Puisque les éléments inversibles d'un anel sont réguliers, $\frac{a}{s} \not\equiv \frac{b}{t}$ équivaut à $\frac{g(a)}{g(s)} \not\equiv \frac{g(b)}{g(t)}$. La même condition implique que $h(a) \in \mathcal{O}$ équivaut à $g(a) \in \mathcal{O}'$, donc que $\frac{a}{s} \in \mathcal{O}$ équivaut à $\frac{g(a)}{g(s)} \in \mathcal{O}'$. Donc u est un homomorphisme, vérifiant $u(\mathcal{O}) = \mathcal{O}'$. La condition (2) sur S et g montre que u est surjectif. Soit $\frac{a}{s} \in R_M$ tel que $0 = u\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{g(a)}{g(s)}$; cela entraîne $g(a) = 0$; la condition (1) pour g montre l'existence de $m \in M$ vérifiant $ma = 0$, et on a $\frac{a}{s} = 0$. Les anels unitaires R_M et S sont donc isomorphes (III, § 1, lemme 3 bis), ce qui finit de démontrer le théorème 1.

Remarque 2. Dans les conditions du théorème 1, si M' est une partie multiplicative contenant M , et si tout $m' \in M'$ est produit d'un élément de M par un élément inversible de R , on a $R_{M'} = R_M$. Le remplacement de M par M' respecte en effet les quatre conditions.

Lemme 3. Si R est un anel fort, R_M est fort.

Pour tout $x \in R$ tel que $\frac{x}{m} \notin \mathcal{O}$, soit $i = i(x)$ l'indice de quasi-régularité de x . Supposons que, pour $n \geq i$ et pour $\frac{a}{s}$ et $\frac{b}{t} \in R_M$, $\frac{a}{s} \left(\frac{x}{m}\right)^n$ et $\frac{b}{t} \left(\frac{x}{m}\right)^n$ soient addibles et n 'appartiennent pas à \mathcal{O} . Il existe $u \in M$ tel que $utm^i ax^n$ et $usm^i bx^n$ sont addibles et n 'appartiennent pas à Ω . La quasi-régularité de x montre que $(m^{n-i}u) tm^i ax^i \not\equiv (m^{n-i}u) sm^i bx^i$, donc que $\frac{x}{m} \left(\frac{x}{m}\right)^i \not\equiv \frac{b}{t} \left(\frac{x}{m}\right)^i$. Le lemme suivant est évident.

Lemme 4. On a : $(\bar{R})_M = \overline{(R_M)}$.

Notons les quasi-morphismes $h : R \rightarrow R_M$ et $\bar{h} : \bar{R} \rightarrow (\bar{R})_M$. Une somme formelle $\alpha \in \bar{R}$. R est dans le noyau de \bar{h} si et seulement si elle est annulée par au moins un élément $m \in M$, qui est un diviseur ou un pseudo-diviseur de zéro. Ainsi, la localisation détruira bien des sommes formelles. D'autre part, $\text{Ker } \bar{h}$

contient $\overline{\text{Ker } h}$, et en est différente en général.

Une graduation de R_M dans le cas associatif.

Lemme 5. Soit un anel R de graduation Δ , et M une partie multiplicative de R (avec $0 \notin M$). Si les éléments de $\omega(M)$ associent dans Δ , $\Delta_{\omega(M)}$ est une graduation de R_M . Si Δ est associative, $\Delta_{\omega(M)}$ est une graduation associative de R_M .

Notons $A = R_M$ et $\Delta' = \Delta_{\omega(M)}$. Soient Ω et \bigcirc les milieux respectifs de R et A . Ecartons le cas où M rencontre Ω , donc où R_M est égal à son milieu, et est gradué trivialement par $\{0\} = \Delta'$. Lorsque $M \cap \Omega$ est vide, on a $0 \notin \omega(M)$. Le grade de $\frac{a}{s} \in A$ sera par définition $\omega'(\frac{a}{s}) = \frac{\omega(a)}{\omega(s)} \in \Delta'$, qui est indépendant du représentant choisi : en effet, les relations $ts'a = tsa' \notin \Omega$, (avec $t \in M$) impliquent $\omega(t)\omega(s')\omega(a) = \omega(ts'a) = \omega(tsa') = \omega(t)\omega(s)\omega(a')$. Alors, à tout $\frac{\alpha}{\sigma} \in \Delta'$, on fait correspondre l'ensemble $A_{\frac{\alpha}{\sigma}}$ formé de \bigcirc et (s'il y a lieu) des fractions $\frac{a}{s} \notin \bigcirc$ de grade $\frac{\alpha}{\sigma}$. Quels que soient les grades $\frac{\alpha}{\sigma}, \frac{\beta}{\tau} \in \Delta'$ tels que $A_{\frac{\alpha}{\sigma}} A_{\frac{\beta}{\tau}} \not\subset \bigcirc$, prenons deux fractions $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \notin \bigcirc$, de grades respectifs $\frac{\alpha}{\sigma}$ et $\frac{\beta}{\tau}$, et vérifiant $\frac{ab}{st} \notin \bigcirc$. De $ab \notin \bigcirc$ et $st \notin \bigcirc$, on déduit $\omega'(\frac{ab}{st}) = \frac{\omega(ab)}{\omega(st)} = \frac{\omega(a)\omega(b)}{\omega(s)\omega(t)} = \omega'(\frac{a}{s})\omega'(\frac{b}{t})$. Donc Δ' est bien une graduation de A . (I, § 3 et II, § 2a).

b - L'extension par $h : R \rightarrow R_M$

Lemme 6. Soient R un anel de milieu Ω , M une partie multiplicative de R (avec $0 \notin M$) et α un idéal de R .

- (1) Si α^e est l'extension de α à R_M , tout élément de α^e peut s'écrire $\frac{a}{m}$, avec $a \in \alpha$ et $m \in M$.
- (2) $\frac{b}{t} \in \alpha^e$ (avec $b \in R$, $t \in M$) équivaut à l'existence de $m \in M$ tel que $mb \in \alpha$.
- (3) En particulier, Ω^e est le milieu de R_M .

Tout $x \in \alpha^e = R_M f(\alpha)$ s'écrit (II, § 2 b) :

$$x = \sum_j \left[\sum_i \frac{b_i^j}{t_i^j} \cdot \frac{s a_i^j}{s} \right] \text{ où les } a_i^j \in \alpha, \text{ où le même } a_i^j \text{ peut intervenir plusieurs}$$

fois, où pour tout j fixé, les fractions contenues dans le crochet d'indice j sont addibles deux à deux, et où les crochets ont un total dans le milieu \bigcirc , sauf un au plus. Le lemme 1 permet de remplacer chaque crochet par une

fraction $\frac{c_j}{u_j}$, où chaque c_j est dans α , comme combinaison linéaire simple des a_i^j .

Le lemme 1 permet de remplacer $\sum_j \frac{c_j}{u_j}$ par $x = \frac{a}{m}$, où a est dans α , comme

combinaison linéaire simple des $c_j \in \mathfrak{a}$.

Si une fraction $\frac{b}{t}$ (avec $b \in R$, $t \in M$) est dans \mathfrak{a}^e , ce qui précède montre qu'elle est égale à une fraction $\frac{a}{s}$, avec $a \in \mathfrak{a}$. Donc, il existe $u \in M$ tel que $(us)b = uta \in \mathfrak{a}$.

Définition. Soient R un anel, M une partie multiplicative de R (avec $0 \notin M$) et \mathfrak{a} un idéal de R . On appelle fermeture divisible de \mathfrak{a} dans R relativement à M , l'ensemble $\mathfrak{a}_d = \{x \in R ; \exists m \in M \text{ tel que } mx \in \mathfrak{a}\}$. Lorsque $\mathfrak{a}_d = \mathfrak{a}$, on dit que M est premier à \mathfrak{a} .

On voit d'abord que

$$\mathfrak{a}_d = \bigcup_{m \in M} (\mathfrak{a} : \{m\}) = \bigcup_{m \in M} (\mathfrak{a} : (m)).$$

Propriétés. (1) Pour que $\mathfrak{a}_d = R$, il faut et il suffit que \mathfrak{a} rencontre M . Soit $s \in M$; si $R = \mathfrak{a}_d$, il existe $m \in M$ tel que $ms \in \mathfrak{a}$. Inversement, $t \in M$ implique $\mathfrak{a} : (t) = R$.

(2) Si h est le quasi-morphisme $R \rightarrow R_M$, on a $\mathfrak{a}_d = \mathfrak{a}^{ec}$.

En effet, $x \in \mathfrak{a}_d$ signifie qu'il existe $m \in M$ et $a \in \mathfrak{a}$ tels que $mx = a$; on a donc $h(x) = \frac{a}{m} \in \mathfrak{a}^e$. Inversement, si $h(x) \in \mathfrak{a}^e$, le lemme 6 entraîne l'existence de $a \in \mathfrak{a}$ et de $m \in M$ tels que $h(x) = \frac{a}{m} = \frac{h(a)}{h(m)}$, et (lemme 2) il existe $t \in M$ vérifiant $(tm)x = ta \in \mathfrak{a}$. Donc x est dans \mathfrak{a}_d .

(3) En particulier, \mathfrak{a}_d est un idéal et contient $\text{Ker } h$.

(4) Pour que M soit premier à \mathfrak{a} , il faut et il suffit que $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$, ou que $\mathfrak{a} : (m) = \mathfrak{a}$ pour tout $m \in M$. Alors, le lemme 6 montre que $\frac{b}{t} \in \mathfrak{a}^e$ si et seulement si $b \in \mathfrak{a}$.

Théorème 3. Soient R un anel, M une partie multiplicative de R (avec $0 \notin M$), \mathfrak{a} un idéal de R , et $h : R \rightarrow R_M$.

(a) $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}_d$ est l'ensemble des $x \in R$ tels que $mx \in \mathfrak{a}$ pour un $m \in M$.

\mathfrak{a}^e est distinct de R_M si et seulement si $M \cap \mathfrak{a}$ est vide.

(b) \mathfrak{a} est un idéal contracté et vérifie $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}$ si et seulement si M est premier à \mathfrak{a} . Alors, $\frac{b}{t} \in \mathfrak{a}^e$ (avec $b \in R$, $t \in M$) équivaut à $b \in \mathfrak{a}$.

(c) Tout idéal \mathfrak{J} de R_M est étendu, et on a $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^{ce}$.

(d) L'application $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e$ est une bijection de l'ensemble (C) des idéaux contractés sur l'ensemble des idéaux de R_M , et conserve l'intersection, la division et la prise de radical des idéaux.

(a) et (b) étant connus (Propriétés 2, 1, 4), montrons (c). Pour tout $\frac{x}{m} \in \mathfrak{J}$, on a $\frac{mx}{m} \in \mathfrak{J}$, donc $x \in \mathfrak{J}^c$. Il en résulte $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}^{ce}$; l'inclusion inverse est connue (III, § 2c). Enfin, (d) résulte de (c) et des considérations de (III, § 2c).

Nous savons (III, § 3, théorème 8) que la contraction d'un idéal \mathfrak{P} -primaire est \mathfrak{P}^c -primaire.

Théorème 4. Soient R un anel, M une partie multiplicative, et q un idéal p -primaire disjoint de M .

(a) p est disjoint de M , p et q sont des idéaux contractés et contiennent le noyau de h .

(b) q^e est primaire pour p^e .

Puisque M et q sont disjoints, toute puissance d'un $x \in M$ est dans M , et ne peut être dans q ; cela entraîne $x \notin p$. Par suite, M est premier à p , donc à q , et ces idéaux p et q sont contractés (th. 3, b). La définition de p premier (resp. q -primaire) implique, grâce à la dernière assertion (b) du théorème 3, que p^e est premier (resp. q^e est primaire). Par définition du radical, la même assertion montre que $p^e = \sqrt{q^e}$.

Corollaire 1. L'application $p \mapsto p^e$ est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers contractés (c'est-à-dire disjoints de M) de R sur l'ensemble des idéaux premiers de R_M .

Cela résulte des théorèmes 4 et 3 (c), de (III, § 2) et de (III, § 3, théorème 8).

Corollaire 2. Pour un idéal premier contracté p donné, l'application $q \mapsto q^e$ est une bijection de l'ensemble des idéaux p -primaires de R sur l'ensemble des idéaux p^e -primaires de R_M . Cette bijection conserve la division et l'intersection de deux idéaux.

La première assertion résulte du théorème 4. La deuxième vient de ce que, si q et q' sont p -primaires, leur intersection et leur quotient le sont aussi (sauf dans le cas trivial $q' \subset q$, cas où les quotients sont R et R_M).

Remarque 3. (Transitivité) Soient M et M' deux parties multiplicatives d'un anel R , telles que $M \subset M'$ et $0 \notin M'$, et h (resp. h') le quasi-morphisme $R \rightarrow R_M$ (resp. $R \rightarrow R_{M'}$). Alors les anels $(R_M)_{h(M')}$ et $R_{M'}$ sont canoniquement isomorphes.

Il existe (th. 2) un quasi-morphisme unique $u : R_M \rightarrow R_{M'}$, tel que $h' = u \circ h$. Utilisons le théorème 1. On montre aisément (voir [6] p. 226) que $h(M')$ est une partie multiplicative de R_M , que le noyau de u est l'ensemble des éléments de R_M annihilés par au moins un élément de $h(M')$, que les éléments de $u(R(M')) = h'(M')$ sont inversibles dans $R_{M'}$, et que tout élément de $R_{M'}$ s'écrit $\frac{h'(a)}{h'(m')} = \frac{u(h(a))}{u(h(m'))}$ (avec $a \in R$, $m' \in M'$). Il reste à montrer que $(R_M)^u = (R_M)^{h(M')}$. Il suffit pour cela d'étudier sur les éléments de R_M la condition d'additivité (resp. d'appartenance au milieu) dans ces deux agglutinés simples de R_M .

Soient a_1 et b_1 dans R_M , qui s'écrivent $a_1 = \frac{h(a)}{h(s)}$ et $b_1 = \frac{h(b)}{h(t)}$

(avec $a, b \in R$ et $s, t \in M$). La condition $u(a_1) \neq u(b_1)$ équivaut (car $h' = u \circ h$) à $\frac{h'(a)}{h'(s)} = \frac{h'(b)}{h'(t)}$, donc à l'existence de $m' \in M'$ tel que $m'ta \neq m'sb$. Cela implique $h(m')h(t)h(a) \neq h(m')h(s)h(b)$, donc $h(m')a_1 \neq h(m')b_1$. Inversement, $h(m')a_1 \neq h(m')b_1$ implique $h(m'ta) \neq h(m'sb)$, donc implique (lemme 2) l'existence de $m \in M$ tel que $(mm')ta \neq (mm')sb$. Enfin, on applique h' et on divise dans R_M par l'inversible $h(mm'ts)$ pour obtenir $\frac{h'(a)}{h'(s)} = \frac{h'(b)}{h'(t)}$.

Les conditions successives suivantes sont équivalentes :

$a_1 = \frac{h(a)}{h(s)}$ est dans le milieu de $(R_M)^u$; $u(a_1) = \frac{h'(a)}{h'(s)}$ est dans le milieu de $R_{M'}$; il existe $m' \in M'$ tel que $m'x$ soit dans le milieu de R ; il existe $n' \in M'$ tel que $h(n'a) = h(n')h(a)$ soit dans le milieu de R_M ; $h(a)$ est dans le milieu de $(R_M)^{h(M')}$; $a_1 = \frac{h(a)}{h(m)}$ est dans le milieu de $(R_M)^{h(M')}$.

Donc $h(M') \subset R_M$ et u vérifient les conditions du théorème 1, et si on note g le quasi-morphisme canonique $R_M \rightarrow (R_M)_{h(M')}$, il existe un isomorphisme unique $f : (R_M)_{h(M')} \rightarrow R_M$, tel que $u = f \circ g$, donc (car u est unique) tel que $h' = f \circ g \circ h$.

Alors, la transitivité des extensions (III, § 2c) montre que f induit, entre les ensembles d'idéaux de $(R_M)_{h(M')}$ et de R_M , une bijection telle que, pour tout idéal a de R , on ait $f((a^e)_{h(M')}) = a^e$ (en notant e, e' et \bar{e} les extensions respectives par h, h' et g).

Remarque 4. (Permutabilité des passages au quotient et à un anel de fractions) Soient R un anel, M une partie multiplicative de R (avec $0 \notin M$), et a un idéal disjoint de M . Soit a^e l'extension de a par $h : R \rightarrow R_M$. Alors, les anels R_{M/a^e} et $(R/a)_{(M+a)/a}$ sont canoniquement isomorphes.

La démonstration est construite comme pour la remarque 3. Notons f et f' respectivement les homomorphismes $R \rightarrow R/a$ et $R_M \rightarrow R_{M/a^e}$. On montre aisément

(voir [6] p. 226) qu'il existe un quasi-morphisme unique $u : R/a \rightarrow R_{M/a^e}$ vérifiant $u \circ f = f' \circ h$, que $f(M) = (M+a)/a$ est une partie multiplicative de R/a ne contenant pas zéro, que le noyau de u est l'ensemble des $a_1 = f(a) \in R/a$ annihilés par au moins un élément m_1 de $f(M)$, que tout élément de $u(f(M))$ est inversible dans R_{M/a^e} , et que tout élément de R_{M/a^e} peut s'écrire $\frac{u(a_1)}{u(m_1)}$, avec $a_1 \in R/a$ et $m_1 \in f(M)$. Pour appliquer le théorème 1 à $f(M) \subset R/a$ et u , montrons aussi que $(R/a)^u = (R/a)^{f(M)}$.

Soient Ω, \mathcal{O} et \mathcal{O}_1 les milieux respectifs de R, R_M et R_{M/a^e} . On a $\mathcal{O}_1 = \{x + a^e ; x \in \mathcal{O}\} = (\mathcal{O} + a^e)_{/a^e}$. Mais le lemme 6 et la formule 4 de (III, § 2c) montrent $\mathcal{O} + a^e = \Omega^e + a^e = (\Omega + a)^e$, d'où $\mathcal{O}_1 = (\Omega + a)^e_{/a^e}$. Soit $a_1 \in R/a$ tel que $u(a_1) \in \mathcal{O}_1$, et prenons un $a \in R$ tel que $a_1 = f(a)$.

La condition $u(a_1) = f' \circ h(a) \in \mathcal{O}_1$ équivaut à $h(a) \in (\Omega + \alpha)^e$, donc équivaut à l'existence de $m \in M$ tel que $ma \in \Omega + \alpha$, donc enfin à l'existence de $f(m) \in f(M)$ tel que $f(m)f(a) \in (\Omega + \alpha)/\alpha$. Puisque $(\Omega + \alpha)/\alpha$ est le milieu de R/α , a_1 est dans le milieu de $(R/\alpha)^{f(M)}$.

Soient $a_1, b_1 \in R/\alpha$ et $a, b \in R$ tels que $a_1 = f(a)$ et $b_1 = f(b)$. Supposons $u(a_1) = f' \circ h(a)$ et $u(b_1) = f' \circ h(b)$ addibles et non situés dans \mathcal{O}_1 . Ceci équivaut (f' est un homomorphisme) à $h(a)$ et $h(b)$ addibles et non situés dans $(\Omega + \alpha)^e$. Donc ceci signifie qu'il existe $m \in M$ tel que $ma \not\equiv mb$, et qu'on a :

sa, $sb \notin \Omega + \alpha$ pour tout $s \in M$. f étant un homomorphisme, et $(\Omega + \alpha)/\alpha$ étant le milieu de R/α , ces conditions équivalent enfin aux suivantes : il existe $f(m) \in f(M)$ tel que $f(m)a_1 \not\equiv f(m)b_1$ et, pour tout $f(s) \in f(M)$, $f(s)a_1$ et $f(s)b_1$ ne sont pas dans le milieu de R/α .

Donc $f(M) \subset R/\alpha$ et u vérifient les conditions du théorème 1, et si l'on note h' le quasi-morphisme canonique $R/\alpha \longrightarrow (R/\alpha)^{f(M)}$, il existe un isomorphisme unique $v : (R/\alpha)^{f(M)} \longrightarrow R_M/\alpha^e$ tel que $u = v \circ h'$, donc (unicité de u) tel que $f' \circ h = v \circ h' \circ f$.

c - Exemples :

Donnons quelques exemples de parties multiplicatives dans un anel R :

(1) M est le complément dans R d'un idéal premier \mathfrak{p} . Alors R_M est noté $R_{\mathfrak{p}}$.
 (2) M est le complément dans R de la réunion $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{p}_i$ d'une famille quelconque d'idéaux premiers.

(3) M est l'ensemble des puissances de s , où s est un élément non nilpotent de R .

(4) M est l'ensemble des éléments d'un sous-anel de R , non contenus dans un idéal premier de R .

(5) Etudions le cas où M est le complément d'une réunion finie $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ d'idéaux premiers vérifiant les conditions : (a) pour tout $i = 1, \dots, n$ on a $\mathfrak{p}_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$;

(b) pour tout $i = 1, \dots, n$, si un idéal premier π est tel que

$\mathfrak{p}_i \subset \pi \subset \bigcup_{j=1}^n \mathfrak{p}_j$, on a $\mathfrak{p}_i = \pi$.

Si la famille finie $\{\mathfrak{p}_i\}_{i=1, \dots, n}$ donnée ne vérifie pas ces conditions,

on peut se ramener (avec le même M) à une famille qui les vérifie. En effet, considérons la famille F des suites $S = \{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ de n idéaux premiers tels

que pour tout $i = 1, \dots, n$, on ait $\mathfrak{p}_i \subset \pi_i \subset \bigcup_{j=1}^n \mathfrak{p}_j$. Ordonnons-la en posant

$S \leq S' = \{\pi'_1, \dots, \pi'_n\}$ si et seulement si $\pi_i \leq \pi'_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Il est

clair que l'idéal réunion d'une chaîne croissante d'idéaux premiers contenant

\mathfrak{p}_i et contenus dans $\bigcup_{j=1}^n \mathfrak{p}_j$ est premier et vérifie les mêmes inclusions. Par suite,

la famille F est inductive et (lemme de Zorn) possède un élément maximal $\{p_1^e, \dots, p_n^e\}$. Les idéaux p_i^e vérifient la condition (b). Enfin, pour avoir la condition (a), on supprime parmi eux les p_i^e superflus, et ceux qui restent vérifient encore la condition (b).

Lemme 7. Si p_1, \dots, p_n sont des idéaux premiers de R vérifiant les conditions (a) et (b) ci-dessus, et si M est le complément de $\bigcup_{i=1}^n p_i$, la famille des idéaux p_1^e, \dots, p_n^e est celle de tous les idéaux maximaux de R_M .

Tout idéal p_i^e est propre. Comme R_M est unitaire, p_i^e est contenu dans un idéal maximal \mathfrak{J} de R_M , et \mathfrak{J} est premier (III, § 3, remarque 1 et corollaire 2 du théorème 5). Donc, l'idéal \mathfrak{J}^c est premier (III, § 3, théorème 8) et vérifie $p_i \subset \mathfrak{J}^c \subset \bigcup_{j=1}^n p_j$. Par la condition (b), p_i est l'idéal contracté \mathfrak{J}^c et on a enfin $p_i^e = \mathfrak{J}^c = \mathfrak{J}$. Donc, chaque p_i^e est maximal, et p_1^e, \dots, p_n^e vérifient les conditions (a) et (b) (III, § 4, théorème 3).

Soit un idéal maximal m de R_M (donc $m \subset \bigcup_{i=1}^n p_i^e$), mais distinct de tout p_i^e . Pour tout i , m et p_i^e étant maximaux et non comparables, sont comaximaux.

Donc m et $\bigcap_{i=1}^n p_i^e$ sont comaximaux (III, § 2b). Alors, $R = m + \bigcap_{i=1}^n p_i^e$ serait contenu dans $\bigcup_{i=1}^n p_i^e$, ce qui est une contradiction.

Voici un exemple où la condition (b) n'est pas vérifiée. Soient l'anneau \mathbb{Z} des entiers, et l'anneau $\bar{A} = \mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}a$, où e est unité de \bar{A} , et où $a^2 = a$. Dans l'anneau $A = \mathbb{Z}e \cup \mathbb{Z}a$, les idéaux $p_1 = \mathbb{Z}e$ et $p_2 = 2\mathbb{Z}e \cup 2\mathbb{Z}a$ sont premiers, non comparables, et leur réunion est un idéal premier.

§ 5 - IDEAUX LARGES.

a - Définitions.

Soient A un anel de milieu Ω et de graduation fixée Δ , \mathfrak{J} un idéal et B un sous-anel de A , tous deux contenant Ω .

\mathfrak{J} (resp. B) est dit large en grade $\alpha \in \Delta$, s'il contient tous les éléments de A ayant ce grade, c'est-à-dire s'il contient A_α , ou encore si $A_\alpha = \mathfrak{J}_\alpha$ (resp. B_α) (la notation \mathfrak{J}_α signifie $\mathfrak{J} \cap A_\alpha$). Noter que \mathfrak{J} est large sur tout grade nul (α est dit nul lorsque $A_\alpha = \Omega$, et il est dit vide si de plus $\alpha \neq 0$; voir I, § 3).

\mathfrak{J} (resp. B) est dit faiblement large si, pour tout $\alpha \in \Delta$, \mathfrak{J}_α (resp. B_α) est égal à Ω ou à A_α , c'est-à-dire si \mathfrak{J} (resp. B) est large en grade α , pour tout $\alpha \in \omega(\mathfrak{J})$ (resp. $\omega(B)$).

Le sous-anneau B est dit large, s'il est faiblement large et si, pour tous grades α et β non vides, B large en grades α et β implique B large en grade $\alpha\beta$.

L'idéal J est dit large, s'il est faiblement large et si, pour tout grade α non vide, J large en grade α implique J large en grade $\delta\alpha$, quel que soit $\delta \in \Delta$.

Lemme 1. (a) Soient F et α deux idéaux de A. Si F est faiblement large, on a $F + \alpha = F \cup (\alpha + \Omega)$.

(b) Si L et L' sont des idéaux faiblement larges (resp. larges) de A, il en est de même de $L + L' = L \cup L'$.

(a) est trivial, car F contient Ω , et (b) en résulte aussitôt.

Remarque 1. La notion d'idéal large dépend de la graduation donnée Δ , et en cas de confusion possible, on dira Δ -large. Un idéal Δ -large peut n'être pas large pour une autre graduation Δ' . Cependant, si une graduation Δ' prolonge (II, § 4) une graduation Δ , tout idéal Δ' -large est Δ -large. Montrons-le :

Pour un anneau A, soit Δ_0 sa graduation propre, soit (Δ, θ) une graduation donnée, et soit $(\Delta', \theta' = \varphi \circ \theta)$ une graduation prolongeant Δ (voir II, § 4), donnée par $\varphi : \Delta \rightarrow \Delta'$. Notons $B = \varphi^{-1}(\Delta_0^*)$ et $B' = \varphi^{-1}(B)$. Les applications θ , φ et θ' sont des bijections entre Δ_0^* , B et B' ; pour tous $\alpha', \beta' \in \Delta'$, la relation $\varphi(\alpha')\varphi(\beta') \neq 0$ implique $\varphi(\alpha')\varphi(\beta') = \varphi(\alpha'\beta')$ (voir II, § 4). Soit L un idéal Δ' -large. Pour tout $\alpha \in \omega(L)$, $\alpha \neq 0$ (donc $\alpha \in B$), et pour tout $\delta \in \Delta^*$, posons $\alpha' = \varphi^{-1}(\alpha)$ et $\delta' = \varphi^{-1}(\delta)$ (on sait que φ est injective sur $\varphi^{-1}(\Delta^*)$) ; on a $A_\alpha = A_{\alpha'} \subset L$. Ou bien $\delta\alpha \notin B$, et $A_{\delta\alpha} = \Omega \subset L$.

Ou bien $\delta\alpha \in B$, et $\delta\alpha \neq 0$ implique $\delta\alpha = \varphi(\delta')\varphi(\alpha') = \varphi(\delta'\alpha')$. Donc on a $A_{\delta\alpha} = A_{\delta'\alpha'}$. Puisque L est Δ' -large et contient $A_{\alpha'} = A_\alpha$, il contient $A_{\delta'\alpha'}$.

Remarque 2. En particulier, tout idéal Δ -large est aussi Δ_0 -large, si Δ_0 est la graduation propre. On voit donc que les seuls idéaux d'un anneau A qui pourront être larges sont ceux qui le sont déjà pour la graduation propre.

Remarque 3. Lorsque la graduation Δ est associative, il existe une bijection évidente entre l'ensemble des idéaux Δ -larges de A, et l'ensemble des Δ -idéaux de Δ . Dans le cas d'une graduation non-associative, la situation se complique un peu ; nous nous bornerons, grâce à la remarque 2, à étudier le cas de la graduation propre :

Remarque 4. La graduation propre Δ_0 possède une loi multiplicative partout définie, pas forcément associative. Une partie non vide Λ de Δ_0 est dite un idéal si et seulement si $\Delta_0 \Lambda = \{\delta\alpha ; \delta \in \Delta_0, \alpha \in \Lambda\} \subset \Lambda$. Pour tout idéal Λ , il est donc clair que $A_\Lambda = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ est un idéal Δ_0 -large de A.

Inversement, si L est idéal Δ_0 -large de A, posons $\Lambda = \omega(L) = \{\omega(a) ; a \in L\}$.

Pour tout $\alpha \in \Delta$, $\alpha \neq 0$, et pour tout $\delta \in \Delta_0$ tels que $\delta \alpha \neq 0$, on a $A_{\delta \alpha} \neq \Omega$ puisque Δ_0 est la graduation propre ; mais L est large en grade $\delta \alpha$ car il est large en grade $\alpha \neq 0$. On a donc $L \supset A_{\delta \alpha} \neq \Omega$, d'où $\delta \alpha \in \Lambda$; et Λ est un idéal de Δ_0 . Il existe donc une bijection évidente entre l'ensemble des idéaux de Δ_0 et l'ensemble des idéaux larges de A .

Lemme 2. Soient l'anel A de graduation Δ , a et L deux idéaux de A , et l'anel A/a canoniquement gradué par Δ (II, § 2d). Si L est Δ -large (resp. faiblement large), alors $(L + a)/a$ est Δ -large (resp. faiblement large) dans A/a . En particulier, si Ω est le milieu de A , pour qu'un idéal L contenant Ω soit Δ -large (resp. faiblement large) dans A , il faut et il suffit que L/Ω soit Δ -large (resp. faiblement large) dans l'anneéide A/Ω .

Par contre, si l'idéal H contient a et si H/a est large dans A/a , H n'est pas forcément large dans A . (par exemple a/a est large lorsque $a \supset \Omega$)

Notons A' l'anel A/a , $\Omega' = (\Omega + a)/a$ son milieu, $L' = (L + a)/a$ et $\omega'(X)$ le grade d'un élément X de A/a . Pour tout grade $\alpha \in \Delta$, on a $A'_\alpha = (A_\alpha + a)/a$, et la condition $A'_\alpha \neq \Omega'$ équivaut à $A_\alpha + a \neq \Omega + a$, c'est-à-dire à $A_\alpha \cdot (\Omega + a) \neq \emptyset$. Il est clair que si L est large en grade α , L' l'est aussi. De plus, pour tout $\alpha \in \omega'(L')$, $\alpha \neq 0$, il existe $a' \in L'$ tel que $\omega'(a') = \alpha$; donc a' est la classe modulo a d'un élément a de L , $a \notin \Omega + a$, tel que $\omega'(a') = \omega(a) = \alpha$, et L est donc large en grade α . Par suite, pour tout $\delta \in \Delta$, L est large en grade $\delta \alpha$, donc L' l'est aussi.

Pour toute partie P de A , contenant Ω , on appelle noyau large de P , et on note P_L , le plus grand idéal large de A , contenu dans P . Le lemme 1 montre l'existence du noyau large, comme réunion des idéaux larges contenus dans P . De même, on appelle noyau faiblement large de P , et on note P_F , le plus grand idéal faiblement large contenu dans P . On a $\Omega \subset P_L \subset P_F \subset P$.

Pour toute partie P de A , on appelle enveloppe large (resp. faiblement large) de P , et on note $El(P)$ (resp. $Fl(P)$), le plus petit idéal large (resp. faiblement large) contenant P .

Soit \mathfrak{J} un idéal de A , contenant Ω . Si le noyau large (resp. faiblement large) de \mathfrak{J} est Ω , on dit que \mathfrak{J} est un idéal étroit (resp. strictement étroit). \mathfrak{J} est strictement étroit si et seulement si pour tout grade non vide $\alpha \in \Delta^*$, il existe $a \in A_\alpha$ tel que $a \notin \mathfrak{J}$. L'idéal \mathfrak{J} est étroit si et seulement si pour tout grade non vide $\alpha \in \Delta^*$, il existe un élément $b \in A$, $b \notin \mathfrak{J}$, dont le grade $\omega(b) = \beta$ est α ou un multiple de α .

Lemme 3. Soient l'anel A de graduation Δ et de milieu Ω , deux idéaux a et b de A tels que $b \supset a \supset \Omega$, et l'anneéide A/a canoniquement gradué par Δ . Si a est le noyau large de b , alors b/a est étroit. Inversement, si a est large et si b/a est étroit, alors a est le noyau large de b .

Prenons les notations du lemme 2 et désignons par x', y', \dots

les classes modulo α de x, y, \dots . Supposons que α soit le noyau large b_L de b . Pour tout $\alpha \in \omega'(b/\alpha)$, $\alpha \neq 0$, soit $X \in b/\alpha$; $X \neq 0$; il existe $x \in b$, $x \notin \alpha$, tel que $X = x'$. Puisque $\alpha = b_L$, il existe un élément $y \in A$, $y \notin b$, dont le grade est α ou un multiple de α . Alors, y' est de même grade et n'appartient pas à b/α . Donc b/α est étroit.

Inversement, remarquons d'abord que l'hypothèse α large n'est pas superflue, car b/b est étroit quel que soit b . Supposons donc α large et b/α étroit. Pour tout $x \in b \setminus \alpha$, posons $\alpha = \omega(x) = \omega'(x')$. Puisque b/α est étroit, il existe un grade β , qui est α ou un multiple de α , et il existe $Y \in A'_\beta = (A/\alpha)_\beta$ tels que $Y \notin b/\alpha$. Soit alors $y \in A_\beta$ tel que $Y = y'$; la condition $y' \in b/\alpha$ implique $y \notin b$. Donc α est le noyau large de b .

b - Anels de fractions :

Dans ce paragraphe b , on désigne par R un anel de milieu Ω et de graduation Δ , M une partie multiplicative telle que $0 \notin M$, \bigcup le milieu de R_M , et on considère l'extension et la contraction par le quasi-morphisme $h : R \rightarrow R_M$. Dans la suite, l'hypothèse éventuelle que $\omega(M)$ associe dans Δ signifie que tout élément de $\omega(M)$ associe dans Δ (II, § 3d, lemme 4).

Lemme 4. Si l'idéal F de R est faiblement large, alors F^e l'est aussi. Si $\omega(M)$ associe dans Δ , et si l'idéal L de R est Δ -large, alors L^e est $\Delta_{\omega(M)}$ -large.

Pour la démonstration, on peut supposer que $F \cap M = \emptyset$, sinon $F^e = R_M$, et supposer que R est un anneau, grâce au lemme 2.

Soit un élément non nul de F^e , qui peut s'écrire $\frac{a}{s}$ avec $a \in F$, $s \in M$ (III, § 4a, lemme 6). Soit $\frac{b}{t}$ une fraction non nulle de R_M , addible à $\frac{a}{s}$. Réduisons-les (III, § 4a, lemme 1) au même dénominateur $\frac{mta}{mts} \neq \frac{msb}{mst}$ de manière que mta et msb soient addibles. Puisque a est dans F et que $\frac{a}{s}$ est non nul, mta est élément non nul de F ; alors F faiblement large implique $msb \in F$, et enfin $\frac{b}{t} = \frac{msb}{mst} \in F^e$. Donc F^e est faiblement large.

D'abord, L^e est faiblement large. On notera $\omega'(x)$ le grade d'un élément x de R_M . Pour tout grade $\xi \in \omega'(L^e)$, $\xi \neq 0$, prenons un élément de L^e ayant ce grade, soit $\frac{a}{s}$ vérifiant les conditions $a \in L$, $a \neq 0$, $s \in M$ et $\xi = \frac{\alpha}{\sigma}$ (où l'on pose $\alpha = \omega(a)$, $\sigma = \omega(s)$). Pour tout grade $\frac{\alpha \beta}{\sigma \tau}$ non nul (c'est-à-dire dont le groupe d'addibilité diffère de (0) ; I, § 3) multiple de $\frac{\alpha}{\sigma}$, quel que soit l'élément (non nul) $\frac{c}{r}$ de R_M , de grade $\omega'(\frac{c}{r}) = \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\alpha \beta}{\sigma \tau}$ (en posant $\omega(c) = \gamma$ et $\omega(r) = \rho$), il existe $\mu \in \omega(M)$ tel que $\mu \sigma \tau \gamma = \mu \rho \alpha \beta$. Noter que tout produit d'éléments de Δ , où deux facteurs au plus ne sont pas dans $\omega(M)$, est associatif, puisque $\omega(M)$ associe dans Δ . Prenons $m \in M$ de grade

$\omega(m) = \mu$. Alors, $\frac{c}{r} \neq 0$ implique $m \text{ stc} \neq 0$, donc aussi $\omega(m \text{ stc}) = \mu \sigma \tau \gamma = (\mu \rho \beta) \alpha$. Puisque L large contient a , il est large en grade $\alpha = \omega(a)$, donc en grade $(\mu \rho \beta) \alpha$; donc on a $m \text{ stc} \in L$, d'où $\frac{c}{r} = \frac{m \text{ stc}}{m \text{ st r}} \in L^e$. Ceci montre que L^e est $\Delta_{\omega(M)}$ -large.

Au contraire, la contraction d'un idéal faiblement large dans R_M , n'est pas forcément faiblement large dans R . On remarque d'abord que $\bigcirc = \Omega^e$ et que $\bigcirc^c = \Omega^{ec} = \Omega_d$ (III, § 4b, lemme 6, propriété 2). Ensuite, on a :

Lemme 5. Lorsque $\omega(M)$ associe dans Δ , soit un idéal large L' de R_M . On a $L'^c = \Omega^{ec} \cup E$, où E est l'enveloppe large de $\bar{h}^1(L'.. \bigcirc)$.

On peut se ramener au cas d'un anneau grâce au lemme 2 et à (III, § 4b, remarque 4); mais la preuve directe est aussi simple : pour tout $a \in \bar{h}^1(L'.. \bigcirc)$, comme $h(a) \notin \bigcirc$ et $a \notin \Omega$, les grades $\omega(a) = \alpha$ et $\omega'(h(a)) = \frac{\sigma \alpha}{\sigma}$ (où l'on pose $\sigma = \omega(s) \in \omega(M)$) sont non nuls. Pour $\mu = \alpha$ ou pour tout multiple $\mu = \delta \alpha$ (avec $\delta \in \Delta$) non vide dans R , et pour tout élément $b \in R_{\mu}.. \Omega$ tel que $b \notin \Omega^{ec}$, on a $\omega'(h(b)) = \omega'\left(\frac{sb}{s}\right) = \frac{\sigma \mu}{\sigma} = \frac{\sigma \delta}{\sigma} \frac{\sigma \alpha}{\sigma}$ ou $\frac{\sigma \alpha}{\sigma}$. Puisque L' est large en grade $\frac{\sigma \alpha}{\sigma}$, il l'est en grade $\frac{\sigma \mu}{\sigma}$ et l'on a $h(b) \in L'$, soit $b \in L'^c$. Par suite, L'^c contient l'enveloppe large de a , donc enfin celle de $\bar{h}^1(L'.. \bigcirc)$.

Lemme 6. Si L est idéal Δ -large de l'anel R , et si $\omega(M)$ associe dans Δ , l'idéal $L^{ec} = L_d$ est réunion de $\Omega^{ec} = \bar{h}^1(\bigcirc)$ et d'un idéal large.

L^e étant large dans R_M (lemme 4), le lemme 5 montre le résultat.

Lemme 7. Supposons que $\omega(M)$ associe dans Δ . Pour tout idéal α contenant Ω et tel que M soit premier à α , le noyau large de α^e est l'extension du noyau large de α .

α contient a_L , donc α^e contient l'idéal $(a_L)^e$, qui est large (lemme 4). Tout $x \in \alpha^e$, $x \notin (a_L)^e$, s'écrit $x = \frac{a}{s}$ (III, § 4b, lemme 6) avec $a \in \alpha..a_L$ vérifiant la condition : pour tout $m \in M$, $ma \notin a_L$. Puisque a_L est le noyau large de α , il existe $b \in R.. \alpha$, dont le grade $\beta = \omega(b)$ est ou $\alpha = \omega(a)$ ou un multiple $\delta \alpha$. Puisque M est premier à α , la fraction $\frac{b}{s}$ n'est pas dans α^e (III, § 4b, théorème 3), et son grade $\omega'\left(\frac{b}{s}\right) = \frac{\beta}{\sigma}$ est égal à $\frac{\alpha}{\sigma}$ ou $\frac{\delta \alpha}{\sigma}$, c'est-à-dire à un multiple du grade de x . Donc, x n'est pas dans le noyau large de α^e , et ce noyau large est $(a_L)^e$.

Lemme 8. Supposons que $\omega(M)$ associe dans Δ , et que p soit un idéal premier disjoint de M . Pour tout idéal p -primaire q (et pour p en particulier), on a : $(q^e)_L = (q_L)^e$. En particulier, si q est étroit, son extension aussi.

En effet, M est premier à q .

Chapitre IV PROPRIETES NOETHERIENNES GENERALES

Dans la suite, anels et annéfdes sont supposés commutatifs, ainsi que leurs graduations éventuelles.

§ 1 - ANELS ET MONELS NOETHERIENS.

Proposition et définition. Soit A un anel unitaire. Un A-monel unitaire M sera dit noethérien si et seulement s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- 1 - Toute suite croissante de sous-monels de M est stationnaire.
- 2 - Toute famille non vide de sous-monels de M possède un élément maximal pour l'inclusion.
- 3 - Tout sous-monel de M est de type fini.

L'anel A sera dit noethérien s'il l'est comme monel sur lui-même.

La démonstration classique relative aux modules sur un anneau s'applique aux monels, sans changement. Remarquer que ces définitions comprennent le cas particulier d'un annéfde A, et d'un A-moduloïde M. D'autre part, les propriétés de noethériannité et de régularité sont étrangères : par exemple, un anneau non noethérien est un annéfde régulier.

Théorème 1 : Dans un anel noethérien, tout idéal contient une puissance de son radical, et tout idéal contient un produit d'idéaux premiers. En particulier, (0) est un produit d'idéaux premiers.

Soit $\{x_1, \dots, x_r\}$ un système de générateurs de \sqrt{a} . Il existe un entier s tel que $x_i^s \in a$, pour tout $i = 1, \dots, r$. Soit $m = r(s - 1) + 1$. L'ensemble des éléments $y_j = \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha_i}$ où $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = m$ est un système de générateurs de $(\sqrt{a})^m$. Dans tout y_j , l'un au moins des exposants, soit α_k , est au moins égal à s. Donc $x_k^s \in a$, et on a $y_j \in a$ et $(\sqrt{a})^m \subset a$.

Soit F la famille des idéaux de A qui ne contiennent aucun produit d'idéaux premiers. Si F est non vide, elle possède un élément maximal \mathfrak{J} , puisque A est noethérien. Mais \mathfrak{J} n'est pas premier, et il existe deux idéaux a et b, distincts de \mathfrak{J} , contenant \mathfrak{J} et tels que $a \cdot b \subset \mathfrak{J}$. Puisque \mathfrak{J} est maximal dans F, a (resp. b) contient un produit d'idéaux premiers. Il en est de même de a b, donc de \mathfrak{J} , d'où une contradiction.

Corollaire : Soit A un anel noethérien, et soit q un idéal p -primaire. Il existe un entier $m \geq 1$ tel que $p^m \subset q$; le plus petit entier m vérifiant cette relation est dit l'exposant de q . Si les idéaux a et b vérifient les conditions $a \cdot b \subset q$ et $a \not\subset q$, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $b^m \subset q$.

q étant p -primaire, on a $b \subset p$ d'où $b^m \subset p^m \subset q$, si m est l'exposant de q .

Théorème 2 : Si l'image d'un anel (resp. monel) noethérien par un quasi-morphisme est un anel (resp. monel), cette image est noethérienne.

Soit $u : A \rightarrow A_1$ un quasi-morphisme. On suppose que $u(A)$ est sous-anel de A_1 . Soit $\{\mathfrak{I}_n\}$ une suite croissante d'idéaux de $u(A)$. $\{\bar{u}^{-1}(\mathfrak{I}_n)\}$ est une suite croissante d'idéaux de A , donc elle est stationnaire. Comme $u \circ \bar{u}^{-1}(\mathfrak{I}_n) = \mathfrak{I}_n$, la suite $\{\mathfrak{I}_n\}$ est stationnaire. On le montre de même pour les monels. On en déduit :

Corollaire : L'image d'un anneau (resp. moduloïde) noethérien par un homomorphisme est un anneau (resp. moduloïde) noethérien.

Lemme 1 : Soient M un monel sur un anel A , et f un quasi-morphisme de source M . Si le A -monel agglutiné \bar{M}^f est noethérien, alors M est noethérien.

Soient \mathcal{O} le milieu de M , P et Q deux sous-monels de M ; notons P' et Q' les sous-monels engendrés dans \bar{M}^f par P et Q respectivement. Supposons que $P' = Q'$, ce qui entraîne $Q \subset P'$. Tout élément $q \in Q$ est donc une somme finie d'éléments de P , non addibles dans M , mais addibles dans \bar{M}^f et dans \bar{M} : $q = p_1 + \dots + p_s$. Mais $q \in M$, et \bar{M} étant somme quasi-directe des groupes d'addibilité de M , les p_i doivent appartenir à \mathcal{O} , sauf un au plus. Par suite on a $s = 1$, $q = p_1$, $p_1 \in P$, et par conséquent $Q \subset P$; on a $P \subset Q$ par symétrie. Donc $P' = Q'$ implique $P = Q$. Soit $\{P_n\}$ une suite croissante de sous-monels de M . La suite associée $\{P'_n\}$ de sous-monels de \bar{M}^f est croissante, donc stationnaire puisque \bar{M}^f est noethérien. Ce qui précède montre que $\{P_n\}$ est stationnaire.

Théorème 3 : De deux A -monels (resp. anels) agglutinés comparables d'un même A -monel (resp. anel), si le plus agglutiné est noethérien, le moins agglutiné aussi est noethérien.

Deux agglutinés P et Q d'un même A -monel M sont dits comparables s'ils le sont comme parties de \bar{M} , c'est-à-dire (si par exemple $P \subset Q$) si deux éléments addibles quelconques de P sont éléments addibles de Q . On passe alors de P à Q par au plus deux agglutinations simples (II, § 3). On en déduit le résultat par le lemme 1. Lorsqu'un agglutiné B d'un anel A

est lui-même un anel, les notions de sous-A-monel et d'idéal de B se confondent. Ceci montre le théorème dans le cas des anels agglutinés de A.

Par contre, même si $u : A \rightarrow A_1$ (resp. $M \rightarrow M_1$) est un homomorphisme, l'image de u peut n'être pas un sous-anel de A_1 (resp. un sous-monel de M_1). De plus, l'addiblisé $[Im\ u]$ de $Im\ u$ dans A_1 (resp. M_1), qui est le sous-anel (resp. le sous-monel) engendré par $Im\ u$, peut n'être pas noethérien (voir plus loin l'exemple contraire 3). En particulier, montrons qu'un anel A peut être noethérien, sans que l'anneau associé \bar{A} le soit.

Exemple contraire 1 : Soit Q le corps des fractions monômiales sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes, par rapport à une infinité d'indéterminées $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Deux fractions sont addibles si elles sont semblables, ou si l'une est nulle. Q est noethérien, mais l'anneau \bar{Q} associé n'est pas noethérien. Considérons en effet la suite croissante d'idéaux de \bar{Q} définie par : $a_0 = (0)$ et $a_{n+1} = a_n + \bar{Q}(y_{2n} + y_{2n+1})$. Soit le \mathbb{C} -homomorphisme d'anneaux $\varphi : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par : pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\varphi(a) = a$; pour tout $i < n$, $\varphi(y_{2i+1}) = -1$; pour tout $i \leq n$, $\varphi(y_{2i}) = \varphi(y_{2n+1}) = 1$. Alors on a $\varphi(a_n) = (0)$, mais $\varphi(a_{n+1}) = \mathbb{C}$; ceci montre que la suite des idéaux a_n est strictement croissante, et que \bar{Q} n'est pas noethérien. D'autre part, considérons \bar{Q} comme un anel égal à son milieu ; l'injection $j : Q \rightarrow \bar{Q}$ est un homomorphisme d'anel, et le sous-anel engendré par $j(Q)$ est \bar{Q} , non noethérien.

Théorème 4 : Soient M un A-monel, et N un sous-monel de M. Pour que M soit noethérien, il faut et il suffit que N et M/N soient noethériens.

Si M est noethérien, N l'est aussi ; le théorème 2 montre que M/N est noethérien. Inversement, supposons N et M/N noethériens. Soit \bigcup le milieu de M. Soit $\{P_n\}$ une suite croissante de sous-monels de M. Posons $P'_n = P_n + \bigcup$ et $P''_n = P_n \cap \bigcup$. Alors, $\{P'_n\}$ et $\{P''_n\}$ sont des suites croissantes de sous-monels de M. $\{P'_n \cap N\}$ et $\{P'_n + N/N\}$ sont des suites croissantes de sous-monels de N et de M/N respectivement. Ces deux dernières suites sont donc stationnaires à partir d'un entier q. Pour $n \geq q$, on a $P'_n \cap N = P'_q \cap N$ et $P'_n + N/N = P'_q + N/N$, d'où aussi $P'_n + N = P'_q + N$ (III, § 1, th. 4, bijection entre sous-monels). Le corollaire de la loi modulaire (II, § 2 b) appliqué à P'_n, P'_q, N montre que $P'_n = P'_q$. On montre de même que $P''_n = P''_q$. Le même corollaire appliqué à P_n, P_q, \bigcup implique alors $P_n = P_q$, et la suite $\{P_n\}$ est stationnaire.

Corollaire 1 : Soit $u : M \rightarrow M_1$ un homomorphisme de A-monels, vérifiant $[m, M]$. Si l'image et le noyau de u sont noethériens, M est noethérien.

En effet, l'image de u est un sous-monel, et $u(M)$ et $M/\text{Ker } u$ sont isomorphes (III, § 1, th. 3).

Corollaire 2 : Soit $u : M \rightarrow M_1$ un homomorphisme de moduloïdes.

Si l'image et le noyau de u sont noethériens, M est noethérien.

Théorème 5 : Soit M un A -monel de milieu \mathcal{O} . Soient M_1, \dots, M_s

des sous-monels tels que $M = M_1 + \dots + M_s$. (1) Pour que M soit noethérien, il faut et il suffit que M_1, \dots, M_s et \mathcal{O} soient noethériens.

(2) Si chaque M_i est noethérien, et si tous les M_i , sauf un au plus, sont contenus dans \mathcal{O} , M est noethérien.

La condition (1) est évidemment nécessaire. D'autre part, si $M = N + P$, avec N et P noethériens, et si N est comparable à \mathcal{O} , nous savons (III, § 1, th. 5) que $N + P/P$ est isomorphe à $N/N \cap P$, donc est noethérien (th. 4). Dans le cas (1) ou le cas (2), la démonstration s'achève par récurrence sur s . On a la conséquence immédiate :

Corollaire : Un A -monel, somme de sous-monels noethériens dont un contient le milieu, est noethérien.

Exemple contraire 2 : Montrons que la condition " \mathcal{O} noethérien" du théorème 5 n'est pas superflue. Soit A l'anneau des monômes

$n y_1^{i_1} \dots y_j^{i_j} P$, avec n et les $i_k \in \mathbb{Z}$, les $j_k \in \mathbb{N}$, à une infinité

d'indéterminées. A est noethérien, ses seuls idéaux étant les idéaux

monogènes (n) . Mais nous savons que \bar{A} n'est pas noethérien. Un support de la graduation propre Δ_0 de A est formé de 0 et des monômes de coefficient 1.

Construisons un A -monel P de graduation $\Gamma = \Delta' \cup \Delta''$, avec Δ' et Δ'' isomorphes à Δ_0 , et $\Delta' \cap \Delta'' = \{0\}$. Notons α' (resp. α'') l'homologue de $\alpha \in \Delta_0$ dans Δ' (resp. Δ'').

Pour tout $\delta \in \Delta_0$, et pour tout α' (resp. α'') $\in \Gamma$, on pose alors pour produit $\delta \alpha' = (\delta \alpha)'$ (resp. $\delta \alpha'' = (\delta \alpha)''$).

Pour tout $\gamma \in \Gamma^* = \Gamma \setminus \{0\}$, on pose $P_\gamma = \bar{A} \times \bar{A}$. Le A -monel P aura pour milieu $\mathcal{O} = \bar{A}(1,1)$ contenu dans chaque P_γ , et sera égal à $\bigcup_{\gamma \in \Gamma^*} P_\gamma$, avec le produit défini

comme suit. Soient $\gamma \in \Gamma^*$, $(u,v) \in P_\gamma$ et $n \alpha \in A$; le produit de $n \alpha$ et de (u,v) est le couple $(n \alpha u, n \alpha v) \in P_{\alpha \gamma}$. Soit K le sous-monel engendré par les deux éléments $(3,0) \in P_1$, et $(2,0) \in P_{1''}$. K est donc ainsi formé :

pour $\alpha' \in \Gamma$, on a $K_{\alpha'} = (3 \mathbb{Z} \alpha, 0)$ et pour $\alpha'' \in \Gamma$, on a $K_{\alpha''} = (2 \mathbb{Z} \alpha, 0)$ (là interviennent les lois produit sur Γ et sur P). K est noethérien,

car tout sous-monel est engendré par deux éléments au plus : $(3m, 0) \in P_1$,

et $(2p, 0) \in P_{1''}$ avec $m, p \in \mathbb{Z}$. Soit de même L le sous-monel noethérien de P engendré par les deux éléments $(0,3) \in P_1$, et $(0,2) \in P_{1''}$. \mathcal{O} et K (resp. L)

ont en commun le seul élément $(0,0)$. L'élément $(1,1)$ qui engendre le milieu de P est une combinaison linéaire des générateurs donnés pour K et L :

$(1,1) = (3,3) - (2,2) = [(3,0) + (0,3)] - [(2,0) + (0,2)]$. On a donc

$\mathcal{O} \subset K + L$, et \mathcal{O} est un sous-A-monel non noethérien de $K + L$. Donc, la somme de deux sous-monels noethériens peut n'être pas noethérienne.

Exemple contraire 3 : Prenons A , Δ , Γ , P , K et L comme dans l'exemple précédent. Soient K' et L' des A-monels (qui sont des moduloïdes) respectivement isomorphes à K et L . Soit $M' = K' \cup L'$ le A-monel dont le milieu est réduit à $(0,0)$. Soit enfin $u : M' \rightarrow P$ l'homomorphisme ainsi défini : sa restriction à K' (resp. L') est le monomorphisme canonique $K' \rightarrow K \rightarrow P$ (resp. $L' \rightarrow L \rightarrow P$). Alors, l'image de u est $K \cup L$, et l'agglutiné (dans P) de l'image de u est $K + L$. On a donc un homomorphisme de A-monels dont la source M' est noethérienne, dont l'image n'est pas un sous-monel et dont l'agglutiné de l'image n'est pas noethérien.

Théorème 6 : Soit A un anel unitaire. Pour que tout A-monel de type fini soit noethérien, il faut et il suffit que \bar{A} soit un anneau noethérien.

Soit M un A-monel, et soient \bar{A} et \bar{M} les anneau et module associés ; les notions de sous-A-monel et de sous- \bar{A} -module sont confondues pour \bar{M} . D'une part, \bar{A} est A-monel engendré par 1 ; il est donc nécessaire que \bar{A} soit noethérien. Inversement, si \bar{A} est un anneau noethérien, et si M est un A-monel de type fini, \bar{M} est de type fini comme A-monel, donc comme \bar{A} -module. On sait alors que \bar{M} est noethérien comme \bar{A} -module, donc comme A-monel. Le théorème 3 montre que M est un A-monel noethérien.

Théorème 4 bis : Soient A un anel, et \mathfrak{J} un idéal de A .

- (1) Si A est un anel noethérien, A/\mathfrak{J} est un anel noethérien.
- (2) Si \mathfrak{J} et A/\mathfrak{J} sont des anels noethériens, A est un anel noethérien.

La démonstration est analogue à celle du théorème 4, et on en déduit de même :

Corollaire 1 bis : Soit $u : A \rightarrow A_1$ un homomorphisme d'anel vérifiant $[m, A]$. Si les anels $u(A)$ et $\text{Ker } u$ sont noethériens, A est noethérien.

Corollaire 2 bis : Soit $u : A \rightarrow A_1$ un homomorphisme d'annéfdes. Si les annéfdes $u(A)$ et $\text{Ker } u$ sont noethériens, A est noethérien.

On appellera module (resp. anneau) quasi-gradué noethérien, un module (resp. anneau) dont les sous-modules (resp. idéaux) homogènes vérifient la condition maximale (nous dirons plus brièvement qu'il est homogènement noethérien). Si un module est noethérien, pour toute graduation, il est homogènement noethérien. Plus généralement, si un module (resp. anneau) est homogènement noethérien pour une graduation donnée, il l'est encore pour une graduation plus fine (c'est-à-dire restreignant l'ensemble des éléments homogènes). Par contre, un module quasi-gradué noethérien peut très bien n'être pas noethérien comme module.

Dans un anneau quasi-gradué noethérien, tout idéal homogène contient une puissance de son radical homogène. Tout idéal homogène contient un produit d'idéaux premiers homogènes. En particulier, (0) est un produit d'idéaux premiers homogènes.

Soit un homomorphisme quasi-homogène d'un anneau quasi-gradué homogènement noethérien dans un autre anneau quasi-gradué. Si l'image de la partie homogène est additivement fermée dans la partie homogène du but, cette image est un anneau quasi-gradué homogènement noethérien.

Une somme de sous-modules homogènement noethériens est homogènement noethérienne dans les cas suivants :

- (1) l'un au moins des sous-modules contient le sous-module \bigcirc de grade nul ;
- (2) tous les sous-modules, sauf un au plus, sont contenus dans \bigcirc .

Mais la somme de deux sous-modules homogènement noethériens peut ne pas l'être, donc aussi n'être pas un module noethérien.

Soient \bar{M} un \bar{A} -module quasi-gradué, et \bar{N} un sous-module homogène de \bar{M} . Pour que \bar{M} soit homogènement noethérien, il faut et il suffit que \bar{N} et \bar{M}/\bar{N} le soient (outre le théorème 4, voir III, § 1, application).

Indications sur les monels artiniens. Un monel M sur un anel unitaire A sera dit artinien si et seulement s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes : (1) toute suite décroissante de sous-monels de M est stationnaire ; (2) toute famille non vide de sous-monels de M possède un élément minimal pour l'inclusion. Un anel est dit artinien s'il l'est comme monel sur lui-même.

Les théorèmes 2, 3, 4, 4 bis, 5 et leurs corollaires sont encore vrais dans le cas artinien (les démonstrations sont analogues).

Si A est un anel artinien, l'anneau \bar{A} peut n'être pas artinien, et un A -monel homogène peut n'être pas artinien. En effet, dans l'exemple contraire 1, on a la suite strictement décroissante d'idéaux (resp. de sous- Q -monels) de \bar{Q} définie par $b_n = ((y_1 + y_2)^n)$.

§ 2 - LE THEOREME DE HILBERT.

Rappelons que M. Krasner a déjà étudié [4] de manière très complète les anneaux de polynômes à p variables sur un corps q sans torsion, (c'est-à-dire dont $\Delta^* = \Delta \cdot \{0\}$ est un groupe sans torsion, Δ étant la graduation propre de q). Indiquons d'abord un résultat immédiat, mais important.

Théorème 1 : Pour que tout anel de polynômes à une variable sur un anel A soit noethérien, il faut et il suffit que l'anneau \bar{A} soit noethérien.

La condition est suffisante, car $\bar{A}[x]$ est alors noethérien, et est l'anneau agglutiné de tout anel $A_\xi[x]$ de polynômes à une variable sur A . Cette condition est nécessaire pour le cas particulier $\xi = 0$.

Soient A un anel de milieu Ω , et de graduation donnée Δ , un grade donné $\xi \in \Delta$, et enfin $A_\xi[X]$ l'anel des polynômes à une variable, de pente ξ , et \mathcal{O} le milieu de cet anel. Pour un idéal quelconque α de $A_\xi[X]$, on note $\alpha' = \alpha + \mathcal{O}$ et $\alpha'' = \alpha \cap \mathcal{O}$. On note $L_i(\alpha)$ (resp. $M_i(\alpha)$) la partie de $\bar{A}^{\xi,i}$ formée des coefficients dominants des polynômes de degré $i \geq 0$ de l'idéal α' (resp. α''). Nous avons les inclusions ensemblistes $L_i(\alpha) \subset L_{i+1}(\alpha)$ et $M_i(\alpha) \subset M_{i+1}(\alpha)$, car si $f \in \alpha$ ou \mathcal{O} , $Xf \in \alpha$ ou \mathcal{O} . $L_i(\alpha)$ et $M_i(\alpha)$ sont des sous- A -monels de $\bar{A}^{\xi,i}$: pour tout $a \in A$, $f \in \alpha$ (resp. \mathcal{O}) implique $af \in \alpha$ (resp. \mathcal{O}). Soient α et $\beta \in L_i(\alpha)$; donc il existe des ξ -polynômes f et $g \in \alpha'$ tels que $f = \alpha X^i + \dots$ et $g = \beta X^i + \dots$. Si α et β n'appartiennent pas au milieu de $\bar{A}^{\xi,i}$, f et g sont addibles, donc $f - g \in \alpha'$ et $\alpha - \beta$ est dans $L_i(\alpha)$. Si par exemple β est dans le milieu de $\bar{A}^{\xi,i}$, alors $\beta X^i \in \mathcal{O}$, on a donc $f - \beta X^i \in \mathcal{O}$, d'où encore $\alpha - \beta$ est dans $L_i(\alpha)$. Donc $L_i(\alpha)$ est un sous- A -monel de $\bar{A}^{\xi,i}$. La démonstration analogue pour $M_i(\alpha)$ est plus simple, car deux polynômes de α'' sont toujours addibles.

Si de plus ξ associe, $\bar{A}^{\xi,i}$ est un anel, et $L_i(\alpha)$ et $M_i(\alpha)$ sont des idéaux de cet anel.

Lemme 1 : Soient α et β deux idéaux de $A_\xi[X]$ vérifiant les conditions suivantes : $\alpha \subset \beta$; pour tout entier $i \geq 0$, on a $L_i(\alpha) = L_i(\beta)$ et $M_i(\alpha) = M_i(\beta)$. Alors, α et β sont égaux.

Soit $g = \beta X^i + \dots$ un polynôme de $\beta \subset \beta' = \beta + \mathcal{O}$. Si βX^i appartient à \mathcal{O} , donc à α' , on prend $f_i = \beta X^i$. Sinon, puisque $L_i(\alpha) = L_i(\beta)$, il existe un polynôme $f_i \in \alpha'$ de la forme $\beta X^i + \dots$; g et f_i sont addibles, car ils le sont à $\beta X^i \notin \mathcal{O}$. Dans les deux cas, comme $\alpha' \subset \beta'$, $g - f_i$ appartient à β' et son degré est $\leq i - 1$. Par récurrence sur j , on obtient ainsi une suite $\{f_{i-j}\}$ ($j = 1, 2, \dots$), où $f_{i-j} \in \alpha'$ est nul ou de degré $i - j$, où g et les f_{i-j} sont addibles entre eux, suite telle que $g - f_i - \dots - f_{i-j}$ soit un élément de β' nul ou de degré $\leq i - j - 1$. Pour $j = i$, la différence sera nulle, d'où $g \in \alpha' = \alpha + \mathcal{O}$. Par suite, il existe $f \in \alpha$ et $\varphi \in \mathcal{O}$ tels que $g = f + \varphi$, d'où $\varphi = g - f \in \alpha + \beta \subset \beta$, et $\varphi \in \beta''$. Soit $\varphi = \gamma X^i + \dots$; puisque $M_i(\alpha) = M_i(\beta)$, il existe un élément $h_i \in \alpha'' = \alpha \cap \mathcal{O}$ de la forme $h_i = X^i + \dots$. Dans \mathcal{O} tout est addible, et $\varphi - h_i$ est un élément de β'' nul ou de degré $\leq i - 1$. Par récurrence sur j , on obtient une suite $\{h_{i-j}\}$ ($j = 1, 2, \dots$) où $h_{i-j} \in \alpha''$ est nul ou de degré $i - j$, où $\varphi - h_i - \dots - h_{i-j} \in \beta''$ est nul ou de degré $\leq i - j - 1$. Pour $j = i$, la différence est nulle et $\varphi \in \alpha'' \subset \alpha$. Finalement, g est dans α , et $\alpha = \beta$.

Montrons qu'un anel de polynômes sur un anel noethérien fort n'est pas forcément noethérien. Dans l'exemple suivant, tous les produits sont

commutatifs, et on note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{C} le corps des nombres complexes. On considère les indéterminées x et $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et le monoïde Δ formé de l'anneau 0, et des monômes (1 compris) par rapport à x, y_i et y_i^{-1} ($i \in \mathbb{N}$) avec les relations $x^s = x^{s+1}$ (s entier ≥ 1) et, pour un entier d donné, $1 \leq d \leq s$, quels que soient $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $i \in \mathbb{N}$, $y_i^\alpha x^d = x^d$. Soit A l'anneau construit sur Δ et sur \mathbb{C} (voir chap. I, § 2, exemple 3° et prendre $R_\alpha = \mathbb{C}$). Le corps Q des fractions monômiales par rapport aux y_i est un sous-anneau unitaire de A . A est un anneau noethérien fort (ses seuls idéaux sont (0) et les (x^j)), de graduation Δ . Posons $\xi = w(x)$. L'anneau de polynômes $A_\xi[X] = R$ est un anneau fort (clair), mais n'est pas noethérien. Considérons la suite d'idéaux définis par $J_0 = (0)$ et $J_{n+1} = J_n + R \cdot (y_{2n} + y_{2n+1})X^d$. Soit P_n la partie de J_n formée des polynômes de degré total d par rapport à x et X ; x n'y figure pas, puisque X^d est en facteur dans tout élément de J_n . Donc P_n s'obtient en multipliant par X^d l'ensemble a_n déterminé par $a_0 = (0)$ et $a_{n+1} = a_n + \bar{Q} \cdot (y_{2n} + y_{2n+1})$. La suite $\{a_n\}$ est une suite strictement croissante d'idéaux de \bar{Q} (voir § 1, exemple contraire 1). Donc la suite $\{J_n\}$ est strictement croissante et $A_\xi[X]$ n'est pas noethérien.

Théorème 2 (de Hilbert) : Soient A un anneau de graduation Δ , et $\xi \in \Delta$. Supposons qu'il existe un entier $r \geq 1$ tel que pour tout $i \geq r$, on ait $\bar{A}^{\xi, i} = \bar{A}^{\xi, r}$. Si le A -monneau $\bar{A}^{\xi, r}$ est noethérien, l'anneau de polynômes $A_\xi[X]$ est noethérien.

Faisons deux remarques. D'abord, lorsqu'une puissance de ξ n'est pas un produit associatif, ou lorsque ξ est nilpotent, l'hypothèse signifie que \bar{A} est noethérien. Ensuite si, outre les hypothèses du théorème, ξ associe

dans Δ (II, § 3, lemme 4), pour tout $i \geq 1$, $\bar{A}^{\xi, i} = \bar{A}^{\xi, 1}$ est un anneau, et l'hypothèse noethérienne porte en fait sur l'anneau $\bar{A}^{\xi, r}$ (pour ce dernier, les notions d'idéal et de sous- A -monneau sont confondues.).

Remarque que les hypothèses impliquent A noethérien.

Soit $\{a_j\}_{j=0,1,\dots}$ une suite croissante d'idéaux de $A_\xi[X]$. La suite double $L_i(a_j)$ croît avec i (resp. j) lorsque j (resp. i) est fixé, et il en est de même de la suite double $M_i(a_j)$. ξ étant quasi-régulier pour r , quels que soient $i \geq r$ et $j \geq 0$, $L_i(a_j)$ est un sous- A -monneau de $\bar{A}^{\xi, r}$. Ce dernier étant noethérien, la famille $\{L_i(a_j)\}_{i \geq r, j \geq 0}$ possède un élément maximal, soit $L_p(a_q)$ (avec $p \geq r$). Alors, pour tout $i \geq p$, on a pour tout $j \geq q$, $L_p(a_q) = L_i(a_q) = L_i(a_j)$. D'autre part, pour tout $i < p$, on sait que $\bar{A}^{\xi, i}$ est noethérien, puisque $\bar{A}^{\xi, r}$,

qui est un agglutiné, est noethérien. Donc, quel que soit $i < p$, il existe $j_0(i)$ tel que la suite $\{L_i(a_j)\}_{j=0,1,\dots}$ soit stationnaire pour $j \geq j_0(i)$.

Posons $l = \sup [p, \{j_0(i)\}_{i < p}]$. Alors $j \geq l$ implique $L_i(a_j) = L_i(a_1)$ pour tout i . Ce qui précède s'applique sans changement à $M_i(a_j)$, et il existe un entier $m \geq r$ tel que, pour tout $i, j \geq m$ implique $M_i(a_j) = M_i(a_m)$. Posons $k = \sup (l, m)$. Alors, quel que soit $j \geq k$, les idéaux a_k et a_j vérifient les conditions du lemme, donc sont égaux. La suite des idéaux a_j est donc stationnaire.

Définition 1 : Soient Δ une graduation, et $\xi \in \Delta$. Si les puissances de ξ sont associatives, ξ sera dit quasi-régulier (dans Δ) s'il existe un indice $r = r(\xi) \geq 1$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $\alpha, \beta \in \Delta$, la relation $\alpha \xi^n = \beta \xi^n$ implique $\alpha \xi^r = \beta \xi^r$. Une graduation Δ sera dite forte si tout $\xi \in \Delta$, dont les puissances sont associatives, est quasi-régulier.

Définition 2 : Soient Δ une graduation, et $\xi \in \Delta$. ξ sera dit stationnaire (dans Δ) s'il existe un indice $r = r(\xi) \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq 1$: (1°) quel que soit le produit non associatif $\omega_1 \dots \omega_s \xi \dots \xi$ (les $\omega_j \in \Delta$; n facteurs ξ), le produit $\omega_1 \dots \omega_s \xi \dots \xi$ (r facteurs ξ) est aussi non associatif ; (2°) si les puissances de ξ sont associatives, ξ est quasi-régulier pour r . La graduation Δ sera dite très forte si tout $\xi \in \Delta$ est stationnaire.

Corollaire 1 : Soient A un anel de graduation Δ , et $\xi \in \Delta$.

Si ξ est stationnaire pour l'indice r , et si $\overline{A}^{\xi, r}$ est noethérien, $A_\xi[X]$ est noethérien.

Soit un entier $e \geq r$. Si, pour toute factorisation de $a \in A.. \Omega$,

$a = \prod_{j=1}^q f_j$, le produit $\omega(f_1) \dots \omega(f_q) \xi \dots \xi$, avec e facteurs ξ , est

associatif, on a $\omega'_e(a) = \omega(a)\xi^e$ (Δ -grade ω' vu en II, § 3 d), et il en est de même du produit avec r facteurs ξ . Si $a, b \in A.. \Omega$ vérifient ces conditions pour l'indice e , avec $\omega(a)\xi^e = \omega(b)\xi^e$, puisque ξ est quasi-régulier, on a $\omega(a)\xi^r = \omega(b)\xi^r$. Si, pour une factorisation de $a \in A.. \Omega$,

$a = \prod_{j=1}^q f_j$, le produit $\omega(f_1) \dots \omega(f_q) \xi \dots \xi$, avec e facteurs ξ , n'est pas associatif (donc $\omega'_e(a) = 0$), il en est de même, puisque ξ est stationnaire, du produit avec r facteurs, et l'on a $\omega'_r(a) = 0$. Notons le cas particulier suivant :

Corollaire 2 : Soient A un anel de graduation Δ , et $\xi \in \Delta$.

Si ξ associe dans Δ , s'il est quasi-régulier pour r , et si $\overline{A}^{\xi, r}$ est noethérien, alors $A_\xi[X]$ est noethérien.

Lemme 2 : Soient A un anel de graduation Δ , $\xi \in \Delta$ et $b \in A$.

Si ξ et $\omega(b)$ associent dans Δ , et si ξ divise $\omega(b)$, chacun des anels suivants est un agglutiné du précédent :

$$\bar{A}^{\xi, e}, \bar{A}^{\omega(b), e}, \bar{A}^{b^e}, \Lambda^{b^e}.$$

Pour ces quatre agglutinés de A, les notations sont définies en II, § 3. Posons $\beta = \omega(b)$ et $\beta = \xi \eta$. Comme ξ et β associent, les Δ -grades de $a \in A$ dans $\bar{A}^{\xi, e}$ et dans $\bar{A}^{\beta, e}$ sont respectivement $\omega'(a) = \omega(a)\xi^e$ et $\omega''(a) = \omega(a)\beta^e$. Supposons que l'on ait $\beta^e = (\xi^n \beta^{e-n})\lambda$, avec $\lambda \in \Delta$, pour un entier n , $0 \leq n < e$. On utilise successivement l'associativité par β , ξ , ξ , ξ , β , ξ pour écrire : $\beta^e = \{[\xi^n(\xi \eta)] \beta^{e-n-1}\}\lambda = [(\xi^{n+1}\eta) \beta^{e-n-1}]\lambda = [\xi^{n+1}(\beta^{e-n-1}\eta)]\lambda = \xi^{n+1}[(\beta^{e-n-1}\eta)\lambda] = \xi^{n+1}[\beta^{e-n-1}(\eta\lambda)] = (\xi^{n+1} \beta^{e-n-1})(\eta\lambda)$. Ceci montre par récurrence l'existence de $\mu \in \Delta$ tel que $\beta^e = \xi^e \mu$. Puisque ξ associe, on en déduit : $\omega''(a) = \omega(a)(\xi^e \mu) = (\omega(a) \xi^e) \mu = \omega'(a) \mu$. Par suite, tout agglutiné par ξ, e l'est aussi par β, e , et d'autre part le milieu de $\bar{A}^{\beta, e}$ contient celui de $\bar{A}^{\xi, e}$. Finalement, $\bar{A}^{\omega(b), e}$ est un agglutiné de $\bar{A}^{\xi, e}$.

Soit Ω le milieu de A. Si $b^e \in \Omega$, on a $\bar{A}^{b^e} = \bar{A}$. Supposons maintenant $b^e \notin \Omega$, ce qui entraîne $\omega(b^e) = \beta^e$. Soit alors $\alpha = \sum_i a_i \in \bar{A}^{\beta, e}$.

Les $\omega(a_i b^e)$ non nuls ont pour valeur $\omega(a_i)\beta^e$, donc sont égaux puisque $\alpha \in \bar{A}^{\beta, e}$. Si de plus α est dans le milieu de $\bar{A}^{\beta, e}$, il est donc dans le milieu de \bar{A}^{b^e} . Donc \bar{A}^{b^e} est un agglutiné de $\bar{A}^{\beta, e}$. La troisième relation d'agglutination est connue.

Lemme 3 : Soient A un anel de milieu Ω , $b \in A$ et i un entier ≥ 1 .

Notons k_i le noyau de l'homomorphisme $u_i : \Lambda^{b^i} \rightarrow A$ de A-monels défini par $\alpha \mapsto \alpha b^i$. Si k_1 est un A-monel (ou un \bar{A} -module) noethérien, il en est de même de k_i pour tout i .

Pour chaque i , par définition de Λ^{b^i} , u_i est un homomorphisme de A-monels, et k_i est contenu dans le milieu $\bigcup_i \Lambda^{b^i}$. Donc k_i est son propre agglutiné dans l'anneau \bar{A} , et le A-monel k_i peut être considéré comme un \bar{A} -module (donc comme un idéal de \bar{A}) ; pour k_i , les notions de sous-A-monel et de sous \bar{A} -module sont confondues. Montrons le lemme par récurrence sur i . Notons φ l'homothétie de \bar{A} , de rapport b^i , qui est un homomorphisme de \bar{A} -modules. Pour $\alpha \in \bar{A}$ les conditions suivantes sont équivalentes : $\alpha \in k_{i+1}$, $\alpha b^{i+1} = 0$, $\alpha b^i \in k_1$. Donc φ se restreint en un homomorphisme $\psi : k_{i+1} \rightarrow k_1$.

de \bar{A} -modules. Son noyau est $\ker \psi = \{\alpha \in k_{i+1} ; \alpha b^i = 0\} = \{\alpha \in k_{i+1} ; \alpha \in k_i\} = k_i$.

Si k_1 et k_i sont des \bar{A} -modules noethériens, il en est donc de même du noyau et de l'image de ψ , et l'on sait alors que k_{i+1} est un \bar{A} -module noethérien.

D'autre part, l'hypothèse que k_1 soit un anneau noethérien est suffisante pour le lemme.

Théorème 3 : Soient A un anel de graduation Δ , $\xi \in \Delta$ et $b \in A$.

Soit k_1 le noyau de l'homomorphisme $u_1 : \Lambda^b \rightarrow A$ défini par $u_1(\alpha) = \alpha b$.

On suppose que ξ et $\omega(b)$ associent dans Δ , que ξ divise $\omega(b)$, et que ξ est quasi-régulier pour l'indice r . Si les A -monels A et k_1 sont noethériens, l'anel de polynômes $A_\xi[X]$ est noethérien.

L'homomorphisme $u_r : \Lambda^{b^r} \rightarrow A$ défini par $u_r(\alpha) = \alpha b^r$, vérifie $[m, \Lambda^{b^r}]$ par construction de l'agglutiné large Λ^{b^r} . Son noyau $\text{Ker } u_r$ est noethérien puisque k_1 l'est, d'après le lemme 3. Par suite, Λ^{b^r} est un A -monel noethérien (IV, § 1, corollaire 1 du théorème 4), puisque A est noethérien. Mais (lemme 2), Λ^{b^r} est un agglutiné de $\bar{A}^{\xi, r}$; il en résulte (IV, § 1, th. 3) que $\bar{A}^{\xi, r}$ est noethérien. Donc, grâce au théorème 2, l'anel de polynômes est noethérien.

Soit A un anel de graduation Δ et de milieu Ω . On rappelle (III, § 2 d) que deux éléments $\gamma, \delta \in \Delta$ sont dits agglutinés par $\alpha \in \Delta$ si $\alpha \gamma = \alpha \delta$. Pour tout $a \in A$, posons $N(a) = \{x \in A ; ax \in \Omega\} = \Omega : \{a\}$. Si h est l'homothétie de A , de rapport a , $N(a) = h^{-1}(\Omega)$ est donc un sous- A -monel de A , donc un idéal.

Lemme 4 : Soient A un anel de graduation Δ , et $a, b \in A$.

Si $\alpha = \omega(a)$ et $\beta = \omega(b)$ produisent une même agglutination dans Δ , et si $N(a) = N(b)$, les agglutinés \bar{A}^a et \bar{A}^b sont égaux.

$N(a) = N(b)$ signifie que pour tout $x \in A$, $ax \in \Omega$ équivaut à $bx \in \Omega$. Lorsque $\omega(ax) \neq 0$ (ce qui équivaut donc à $\omega(bx) \neq 0$), comme α et β agglutinent de même dans Δ , on a :

$\omega(ax) = \omega(a) \omega(x) = \alpha \omega(x) = \beta \omega(x) = \omega(b) \omega(x) = \omega(bx)$. Soit alors

$\xi = \sum_i x_i \in \bar{A}^a$. Les $\omega(ax_i) \neq 0$ ont donc une même valeur γ . Ce qui précède montre que $\omega(ax_i) = 0$ implique $\omega(bx_i) = 0$, et que $\omega(ax_i) = \gamma$ implique $\omega(bx_i) = \gamma$. Donc les $\omega(bx_i) \neq 0$ ont une même valeur, par suite $\xi \in \bar{A}^b$, et le milieu de \bar{A}^a est contenu dans celui de \bar{A}^b . Donc \bar{A}^b est un agglutiné de \bar{A}^a . Par symétrie, ces deux agglutinés sont égaux.

Théorème 4 : Dans un anel noethérien A dont une graduation est forte, pour tout $a \in A$, la suite des agglutinés \bar{a}^n ($n = 1, 2, \dots$) est stationnaire, et A est un anel fort.

Soient A l'anel noethérien, Ω son milieu, et Δ sa graduation forte. Soit $a \in A$. S'il existe une puissance $m(a) \geq 1$ de a , qui soit dans Ω (on dira, dans ce cas, que a est nilpotent par rapport au milieu Ω de A), pour tout $n \geq m(a)$, a^n appartient à Ω , donc agglutine complètement A en \bar{a} . La suite des agglutinés \bar{a}^n , $n = 1, 2, 3, \dots$ est donc stationnaire à partir de $m(a)$. Donc a est quasi-régulier.

Si a n'est pas nilpotent par rapport à Ω , pour tout entier $n \geq 1$, a^n n'est pas dans Ω , donc $\omega(a^n) \neq 0$, et le produit de n facteurs $\alpha = \omega(a)$ est associatif. Puisque Δ est forte, il existe un entier $r(\alpha)$ tel que, pour tout $n \geq r(\alpha)$, α^n produise la même agglutination que $\alpha^{r(\alpha)}$ dans Δ . D'autre part, puisque A est noethérien, la suite d'idéaux $N(a^n)$, $n = 1, 2, \dots$ est stationnaire à partir d'un entier $s(a)$. Posons $t(a) = \sup(r(a), s(a))$. Pour tout $n \geq t(a)$, α^n et $\alpha^{t(a)}$ produisent la même agglutination dans Δ , et $N(a^n) = N(a^{t(a)})$. Le lemme 4 montre que les agglutinés $\bar{a}^{t(a)}$ et \bar{a}^n sont égaux. Donc a est quasi-régulier.

Théorème 5 : Soient A un anneau noethérien de graduation Δ , $\gamma \in \Delta$ et c_1, \dots, c_s des éléments non nuls de grade γ . Pour chaque $i = 1, \dots, s$, soit $\varphi_i : \bar{A}^\gamma \rightarrow A$ l'homomorphisme de A -monels défini par $\varphi_i(\alpha) = \alpha c_i$. Si $\bigcap_{i=1}^s \ker \varphi_i$ est un A -monel noethérien, alors \bar{A}^γ est un A -monel noethérien.

D'abord, il est clair que Λ^{c_i} est un agglutiné de \bar{A}^γ . Soit $u_i : \Lambda^{c_i} \rightarrow A$ l'homomorphisme de A -monels défini par $u_i(\alpha) = \alpha c_i$. φ_i est la restriction de u_i à \bar{A}^γ , donc est un homomorphisme. De plus φ_i vérifie $[m, \bar{A}^\gamma]$ trivialement, puisque A est un anneau. Donc, l'image de φ_i est un idéal de A , donc un A -module noethérien.

Notons R la partie du produit cartésien A^s formée des s -uples (a_1, \dots, a_s) où les a_i sont deux à deux addibles. Deux éléments (a_1, \dots, a_s) et (b_1, \dots, b_s) de R seront addibles si et seulement si les a_i et b_i sont deux à deux addibles ; alors, leur somme se fait par composantes. De même, le produit par $\lambda \in A$ d'un élément de R se fait par composantes. Ainsi, R est un A -module, comme on peut le voir aisément.

Pour tout $\alpha = \sum_{j=1}^n a_j$, les $a_j c_i \neq 0$ sont tous addibles entre

eux, par définition de \bar{A}^{γ} . Considérons donc l'application $\varphi : \bar{A}^{\gamma} \rightarrow R$ définie par $\varphi(\alpha) = (\alpha c_1, \dots, \alpha c_s)$. φ est un homomorphisme de A-monels vérifiant $[m, \bar{A}^{\gamma}]$, puisqu'il en est de même de chaque composante φ_i . D'après le corollaire 1 du théorème 4 (IV, § 1), comme R est noethérien, pour que \bar{A}^{γ} soit noethérien, il suffit que le noyau de φ le soit. Or, ce noyau est

$$\text{Ker } \varphi = \{\alpha \in \bar{A}^{\gamma} ; \forall i, \alpha c_i = 0\} = \bigcap_{i=1}^s \text{ker } \varphi_i.$$

Application : Soient A un anneau noethérien de graduation Δ , et $\xi, \beta \in \Delta$. Supposons que ξ divise β , que ξ et β associent dans Δ , et que ξ soit quasi-régulier pour r.

1°/ L'idéal engendré par le groupe d'additivité A_{γ} (avec $\gamma = \beta^r$) possède un système fini $\{c_1, \dots, c_s\}$ de générateurs pris dans A_{γ} . Si de plus (avec les notations du théorème 5), le A-monel $\bigcap_i \text{ker } \varphi_i$ est noethérien, l'anel $A_{\xi}[X]$ est noethérien.

2°/ L'idéal (β) de A engendré par le groupe d'additivité A_{β} possède un système fini $\{b_1, \dots, b_t\}$ de générateurs pris dans A_{β} . Les produits c_i non nuls de r facteurs b_j sont en nombre fini, et sont éléments de A_{γ} (avec $\gamma = \beta^r$). Si de plus (avec les notations du théorème 5), $\bigcap_i \text{ker } \varphi_i$ est un A-monel noethérien, l'anel $A_{\xi}[X]$ est noethérien.

§ 3 - MONOIDES NOETHERIENS.

a) Notion de monoïde noethérien. Charpente d'un monoïde :

Soit D un monoïde (ou demi-groupe) commutatif. On appellera D-idéal (ou idéal) de D toute partie non vide H de D, stable par multiplication par les éléments de D, c'est-à-dire, telle que $DH \subset H$. Une partie S de D est un système de D-générateurs de H si H est le plus petit idéal contenant S, c'est-à-dire, si $H = DS \cup S$ (resp. DS si D possède un élément unité). Lorsque $S = \{a\}$, on notera (a) le D-idéal.

On dit que le monoïde D est noethérien si et seulement si tout D-idéal de D est de type fini, c'est-à-dire possède un système fini de D-générateurs. Ceci équivaut évidemment à la condition de chaîne croissante pour les D-idéaux. Par exemple, si la graduation propre d'un anel noethérien est un monoïde, celui-ci est noethérien. Il est clair que la propriété noethérienne d'un monoïde se conserve par un morphisme et dans un produit direct. Bien entendu, pour un D-idéal (qui est aussi un sous-monoïde), on distinguera système de générateurs (comme monoïde) et système de D-générateurs (comme idéal).

Deux éléments a et b d'un monoïde D seront dits associés au sens

large si et seulement si les D-idéaux (a) et (b) sont égaux. Cela signifie que chacun des éléments a et b divise l'autre, ou lui est égal. L'association large est, évidemment, une relation d'équivalence sur D compatible avec le produit dans D. Le monoïde quotient sera appelé la charpente de D. On

appellera charpente (ou holoïde) tout monoïde où deux éléments associés au sens large sont égaux. Il est évident qu'un monoïde est noethérien si et seulement si sa charpente l'est. Pour un D-idéal H, appelons système minimal T de D-générateurs de H tout système (s'il en existe) de D-générateurs tels qu'aucun d'eux n'en divise un autre.

Lemme 1. Soit H un idéal d'une charpente D. Si H possède un système minimal T de D-générateurs, tout autre système de D-générateurs de H contient T. En particulier, si H est de type fini, il possède un plus petit système de D-générateurs.

Soit S un autre système de D-générateurs de H. Quel que soit $x \in T$, il existe $s_x \in S$ tel que $(s_x) \supset (x)$, et il existe $y \in T$ tel que $(y) \supset (s_x)$. D étant une charpente, et T étant minimal, on a $y = x = s_x$, d'où $T \subset S$. Enfin, si H admet un système fini de D-générateurs, on en extrait aisément un système minimal.

La relation d'association large est distincte de l'association au sens strict habituel (où a est produit de b par un élément inversible). On le voit en considérant le monoïde des monômes en x, y, z dans l'exemple suivant.

Soient k un corps, et A l'anneau noethérien des polynômes sur k, à trois variables x, y, z liées par la relation $x-xyz = 0$. Les idéaux (x) et (xz) de l'anneau A sont égaux. Mais nous verrons que x et xz sont diviseurs propres l'un de l'autre, et que x n'est pas un produit d'irréductibles. Supposons que x et xz soient associés stricts dans A, c'est-à-dire qu'il existe $f(x,y,z)$, élément inversible de A, tel que $x = xz f$. Soit $g(x, y, z)$ un inverse de f. On a donc $xz = xg$, d'où l'on déduit $g = z + (1-yz) q_0(x,y,z)$, soit encore $g = z + (1-yz) q(y, z)$ car, multipliés par $(1-yz)$ les termes en x de q_0 disparaissent. De $x = xz f = xz y$, on déduit $z f = z y + (1-y z) p_0(x, y, z)$. Donc z est en facteur dans p_0 , et l'on a $f = y + (1-y z) p_1(x, y, z)$, donc de même que plus haut : $f = y + (1-y z) p(y, z)$. Donc f et g appartiendraient au sous-anneau $k[y, z]$, dont les seuls inversibles sont les scalaires. On a une contradiction. Donc x et xz ne sont pas associés stricts. D'autre part, tout élément p(x, y, z) de A s'écrit $p = q(y, z) + x r(x, y, z)$, avec unicité pour le polynôme q, puisque x est en facteur dans $x = xyz$. Si x était un produit d'irréductibles,

soit $x = \prod_{i=1}^n p_i$ avec $n \geq 1$, et, pour tout i , p_i irréductible et égal à

$q_i(y, z) + x r_i(x, y, z)$. On en déduit $x = \prod_{i=1}^n q_i(y, z) + x R(x, y, z)$.

L'unicité précédente montre que $\prod_{i=1}^n q_i = 0$, d'où, puisque $k[y, z]$ est intègre,

l'existence de i_0 tel que $q_{i_0} = 0$. Donc, l'irréductible p_{i_0} serait divisible par x . Mais x n'est pas irréductible, car on sait que x et xz sont diviseurs propres l'un de l'autre. D'autre part, x n'est pas inversible, comme diviseur de zéro. Alors, que x soit associé à p_{i_0} ou en soit un diviseur propre, p_{i_0} ne peut pas être irréductible, ce qui est une contradiction. Dans l'anneau noethérien A , x n'est pas produit d'irréductibles.

b) Le graphe d'une charpente noethérienne :

Pour un élément x d'une charpente D , les puissances $\{x^n\}_{n \geq 1}$ sont, ou toutes égales à partir d'un exposant e , appelé indice stationnaire de x , ou toutes différentes (on pose alors $e = \infty$). En effet, si par exemple $x^i = x^j$ avec $1 \leq i < j$, on en déduit (D étant une charpente), $x^i = x^{i+1}$, et enfin $x^i = x^n$ pour tout $n \geq i$.

Lemme 2 (des unités) : Soient D une charpente noethérienne, et x et a_0 deux éléments de D . Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) x est unité de a_0 ; (b) il existe une suite $\{a_n\}_{n \geq 0}$ d'éléments de D tels que, quel que soit n , $a_n = x a_{n+1}$. Au contraire, si x n'est pas unité de a_0 , il existe $j \geq 0$ et $b \in D$ tels que $a_0 = x^j b$ et que x ne divise pas b .

Si (a) est vérifiée, on pose $a_n = a_0$, pour tout n . Inversement, comme D est noethérienne, la suite croissante d'idéaux (a_n) est stationnaire à partir d'un entier s . Quel que soit $n \geq s$, $a_n = a_s$. On a alors $a_0 = x^{s+1} a_{s+1} = x x^s a_s = x a_0$. La deuxième assertion est évidente. Si x et a_0 vérifient les propriétés équivalentes du lemme, on dira que x divise a_0 indéfiniment. Cela implique la propriété : (c) toute puissance de x divise a_0 . Si l'indice stationnaire de x est fini, (a) et (c) sont équivalentes. Il n'en est pas forcément ainsi lorsqu'il est infini.

Dans l'étude qui va suivre, on suppose dans la charpente noethérienne D l'existence d'un élément unité, ce qui ne modifie en rien les résultats et leur généralité, mais allège parfois la rédaction. Dans le cas contraire, l'essentiel est de se souvenir que l'expression a divise b signifie (a) \supset (b) (donc soit $b = ca$, $c \in D$; soit $a = b$).

On va définir, pour tout élément α de l'ensemble Ω des ordinaux inférieurs strictement à un certain ordinal λ , un ensemble R_α de facteurs résiduels ou résidus d'indice α . On notera D_α le D-idéal engendré par R_α , et, D étant noethérien, $X_\alpha \subset R_\alpha$ le plus petit système, fini, de D-générateurs de D_α . On notera M_α le sous-monoïde de D engendré par $U_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta$, c'est-à-dire

l'ensemble des produits finis de puissances non toutes nulles d'éléments de U_α . $X = \bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ sera un système de générateurs du monoïde D . On pose

d'abord $R_1 = D_1 = D$, donc $X_1 = \{1\}$, puis $R_2 = D_2 = D \cdot \{1\}$.

Définition des suites de factorisation et des résidus. Pour un ordinal $\sigma \in \Omega$, supposons connus :

(1°) Pour tout $d \in D$, au moins une σ -suite de factorisation de d , c'est-à-dire que pour chaque $\alpha < \sigma$ (et $\alpha \geq 2$) est connu un couple $C_\alpha = \{m_\alpha, E_\alpha\}$

dans lequel $m_\alpha \in D$, et E_α ou est vide, ou contient un seul élément

$d_\alpha \in D$; d_α est appelé un résidu d'indice α de d . On prend $C_\alpha(1) = (1, \emptyset)$

et, si $d \neq 1$, $C_2(d) = (1, d)$.

(2°) Pour tout $\alpha < \sigma$, l'ensemble R_α des résidus, et aussi l'idéal D_α , le système X_α , et le monoïde M_α .

Nous supposons de plus que ces éléments connus vérifient les conditions suivantes :

(a) Quel que soit $\alpha < \sigma$, R_α est l'ensemble des résidus d_α , pour tous les $d \in D$, et pour toutes les σ -suites de factorisation de d .

Quel que soit $d \in D$, quelle que soit la σ -suite de factorisation de d , et quel que soit l'ordinal $\alpha < \sigma$:

(b) $m_\alpha \in M_\alpha$; si $E_\alpha = \emptyset$, $d = m_\alpha$; sinon, $d_\alpha \notin M_\alpha$ et on a $d = m_\alpha d_\alpha$ (donc on a $D = M_\alpha \cup D_\alpha$).

(c) Si α est de première espèce et si $E_{\alpha-1}$ n'est pas vide :

ou bien $d_{\alpha-1} \in M_\alpha$, et on a $C_\alpha = \{m_{\alpha-1} d_{\alpha-1}, \emptyset\}$.

(d) ou bien $d_{\alpha-1} \notin M_\alpha$, et on a $d_{\alpha-1} = p_{\alpha-1} d_\alpha$, $m_\alpha = m_{\alpha-1} p_{\alpha-1}$; $p_{\alpha-1}$ égale 1 ou appartient au monoïde engendré par $X_{\alpha-1}$; d_α est étranger à certains éléments de $X_{\alpha-1}$ (notamment ceux qui figurent dans $p_{\alpha-1}$) et admet les autres (un au moins) pour unités.

(e) Si α est de seconde espèce, il existe $\beta < \alpha$ tel que $C_\beta = C_\alpha$.

(f) S'il existe $\beta < \alpha$ tel que $E_\beta = \emptyset$, on a $C_\beta = C_\alpha$.

On dit que la σ -suite est achevée s'il existe $\varphi < \sigma$ tel que $E_\varphi = \emptyset$, et qu'elle s'achève en φ , si φ est le plus petit ordinal vérifiant cette condition. Noter que φ est de première espèce.

Alors, montrons pour tout $d \in D$ qu'une σ -suite de factorisation de d se prolonge en une $(\sigma+1)$ -suite, c'est-à-dire qu'il existe un couple C_σ convenable, et montrons l'existence d'un ensemble R_σ de résidus d'indice σ . S'il existe $\beta < \sigma$ tel que E_β soit vide, on pose $C_\sigma = C_\beta$. Etudions le cas contraire.

Lorsque σ est de première espèce, notons $X_{\sigma-1} = \{x_{\sigma-1,i}\}_{i \in I}$ ou plus simplement $\{x_i\}_{i \in I}$, le plus petit système (fini) de D -générateurs de $D_{\sigma-1}$. Soit $I^\circ = \{i \in I ; x_i \text{ divise } d_{\sigma-1}\}$. Comme $d_{\sigma-1} \in D_{\sigma-1}$, I° n'est pas vide. Procédons par disjonction des cas :

- (1) Si $d_{\sigma-1} \in M_\sigma$, on prend $C_\sigma = \{m_{\sigma-1} d_{\sigma-1}, \emptyset\}$.
- (2) Si $d_{\sigma-1} \notin M_\sigma$ et si, quel que soit $i \in I^\circ$, x_i est unité de $d_{\sigma-1}$, on pose $C_\sigma = C_{\sigma-1}$.
- (3) Si $d_{\sigma-1} \notin M_\sigma$ et s'il existe $i_1 \in I^\circ$ tel que x_{i_1} ne soit pas unité de $d_{\sigma-1}$: le lemme des unités montre l'existence de $j_1 \geq 1$ et de $b_1 \in D$ tels que $d_{\sigma-1} = x_{i_1}^{j_1} b_1$ et que x_{i_1} ne divise pas b_1 . Alors, $d_{\sigma-1} \notin M_\sigma$ implique $b_1 \notin M_\sigma$ (qui contient $M_{\sigma-1}$), donc $b_1 \in D_{\sigma-1}$. Donc $I^1 = \{i \in I ; x_i \text{ divise } b_1\} = \{i \in I^\circ ; x_i \text{ divise } b_1\}$ est non vide.

On poursuit l'étude avec b_1 et I^1 comme avec $d_{\sigma-1}$ et I° . Finalement on obtient une partie non vide (car $d_{\sigma-1} \notin M_\sigma$) I^n de I , un élément $b_n \notin M_\sigma$ et une factorisation $d_{\sigma-1} = p_{\sigma-1} b_n$ avec

$$p_{\sigma-1} = \prod_{k=1}^n x_{i_k}^{j_k} \text{ où les } i_k \notin I^n, \text{ où les } x_{i_k} \text{ pour } i_k \notin I^n \text{ ne divisent pas } b_n,$$

et où les x_{i_k} pour $i_k \in I^n$ sont unités pour b_n . On pose alors $d_\sigma = b_n$, et $m_\sigma = m_{\sigma-1} p_{\sigma-1}$. On a donc $d_\sigma \notin M_\sigma$ et $m_\sigma \in M_\sigma$. Noter que d_σ peut dépendre du choix des indices i_1, \dots .

Lorsque σ est de seconde espèce, la chaîne d'idéaux $\{(d_\alpha)\}_{\alpha < \sigma}$ est croissante, donc stationnaire car D est noethérien. Donc il existe un ordinal $\beta < \sigma$ tel que $\beta \leq \alpha < \sigma$ implique $d_\beta = d_\alpha$. On pose alors $C_\sigma = C_\beta$. Puisque $M_\sigma = \bigcup_{\alpha < \sigma} M_\alpha$, on a $m_\sigma \in M_\sigma$, et $d_\beta \notin M_\alpha$ pour $\beta \leq \alpha < \sigma$ implique $d_\beta \notin M_\sigma$. Il est clair que la $(\sigma+1)$ -suite déterminée pour d vérifie les conditions annoncées.

Par définition, R_σ est l'ensemble des résidus d_σ ainsi définis pour tous les $d \in D$, et pour toutes les $(\sigma+1)$ -suites de factorisation de d . Il est clair que la famille des monoïdes M_α , ordonnée par inclusion, est

strictement croissante. Donc, il existe un ordinal λ tel que $M_\lambda = D$. Donc, toute λ -suite d'un $d \in D$ est achevée et donne une factorisation m_λ de d (pas forcément unique), par les éléments de $X = \bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$. Le fait qu'il puisse

exister des λ -suites, ou des factorisations autres que celles envisagées dans l'étude précédente, n'interviendra pas dans les démonstrations ultérieures. Appelons X_α la couche d'indice α .

Propriété d'absorption dans les couches X_α . Soit $d \in X_\sigma$, et considérons une $(\sigma+1)$ -suite de factorisation de d . Certainement E_σ est non vide, sinon $d \in M_\sigma$ et ne serait pas un résidu d'indice σ . Donc $d = m_\sigma d_\sigma$, où d_σ est un résidu d'indice σ de d . Puisque $d_\sigma \in R_\sigma$, il existe $x \in X_\sigma$ tel que x divise d_σ , qui divise d . X_σ étant le plus petit système de D -générateurs de D_σ , on a $x = d_\sigma = d$, et $d = m_\sigma d$. Si m_σ est différent de 1, soit X_α la première couche dont des éléments figurent dans m_σ , et soit z le premier élément de cette couche mis en facteur dans la $(\sigma+1)$ -suite par le procédé (3) de factorisation. Mais $d = m_\sigma d$ implique $d = zd$; donc (lemme 2) z est unité pour d , ce qui contredit (3). Donc on a $m_\sigma = 1$.

Remarque : Les éléments d'une couche X_α quelconque sont des résidus d'indice α , pour tout $\alpha \leq \sigma$.

Lemme 3 (d'absorption) : Quelles que soient les couches X_α et X_β ,
 $\alpha < \beta$, tout élément x_β de X_β absorbe certains éléments, et un au moins, de X_α , et n'est divisé par aucun des autres.

En particulier, entre éléments de X , x divise y signifie que y absorbe x , que x est unité de y .

On constate maintenant que les couches X_α et les idéaux D_α peuvent être déterminés de façon plus simple. On pose $Y_1 = D$. Puis, si $\alpha \geq 2$ est de première espèce, soit Y_α l'ensemble des éléments de $Y_{\alpha-1}$ qui admettent certains éléments (un au moins) de $X_{\alpha-1}$ comme unités, et qui ne sont pas multiples des autres. Si α est de seconde espèce, on pose $Y_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} Y_\beta$. Il est clair que $Y_\alpha \subset R_\alpha$ et le lemme 3 montre que $X_\alpha \subset Y_\alpha$. Donc Y_α engendre le D -idéale D_α et détermine la couche X_α . La définition des couches est donc indépendante de celle des suites de factorisation. Il en résulte que l'ensemble X de générateurs de la charpente D , la partition de X en un ensemble bien ordonné de couches finies X_α , et les conditions d'absorption (lemme 3) sont uniquement déterminés par D . La donnée de X , de sa partition $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ et des conditions d'absorption sera appelée

le graphe X de la charpente noethérienne D . Et si M est le monoïde commutatif,

libre au sens de Ljapin ([5], chap. IX), engendré par X et les relations d'absorption, D est un monoïde quotient de M .

On appelle partie transverse d'un monoïde D toute partie non vide T de D dont aucun élément n'est multiple d'un autre (c'est-à-dire, $\forall a$ et $b \in T$, $a \neq b$, les idéaux (a) et (b) ne sont pas comparables). Par exemple, une couche X_α est une partie transverse. Une partie d'une partie transverse est transverse.

Lemme 4 : Le graphe d'une charpente noethérienne ne contient pas de partie transverse infinie.

Si $T = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une partie transverse infinie d'un monoïde M , la suite de M -idéaux $H_n = \bigcup_{i \leq n} (x_i)$ est strictement croissante, donc M n'est pas noethérien. En particulier, si D est une charpente noethérienne, toute partie transverse de D , donc de son graphe X , est finie.

c) Le théorème fondamental :

Théorème : Une charpente (commutative) D est noethérienne si et seulement si elle est image homomorphe d'une charpente M vérifiant les conditions suivantes : Il existe un système X de générateurs du monoïde commutatif M , et une partition de X en un ensemble bien ordonné de couches finies non vides X_α , ensemble indexé par les ordinaux strictement inférieurs à un certain ordinal λ . Toute couche X_α est une partie transverse. Quels que soient les ordinaux α et β tels que $\alpha < \beta < \lambda$, quel que soit $y \in X_\beta$, il existe une partie non vide $X_\alpha(y) \subset X_\alpha$ telle que $x \in X_\alpha(y)$ équivaut à $xy = y$. Ces relations, et celles de commutativité, sont les seules existant entre les éléments de X . Enfin, toute partie transverse de X est finie.

Un ensemble X vérifiant les conditions du théorème, sauf peut-être la dernière (finitude des parties transverses), sera appelé un graphe de générateurs. On dira que le graphe est noethérien s'il n'a pas de partie transverse infinie. Le théorème s'énonce alors plus brièvement : Une charpente D est noethérienne si et seulement si elle est une image homomorphe du monoïde "libre" engendré par un graphe noethérien.

Nous avons vu que la condition est nécessaire. Il reste à montrer qu'elle est suffisante. Soit donc X un graphe de générateurs, et M le monoïde "libre" qu'il engendre. Supposons que M possède une partie transverse infinie P , et montrons qu'il en est de même pour X . D'abord, voyons deux lemmes préliminaires.

Si $m \in M$, il est un produit de puissances d'un nombre fini de générateurs appartenant à X , qui forment une partie transverse. En effet, si

l'un x de ces générateurs en divise un autre y , x est unité pour y , et peut être omis dans le produit. Nous dirons qu'une telle décomposition de m est réduite (ou irréductible). Une décomposition réduite est unique. Sinon, deux décompositions réduites distinctes de m donneraient une relation supplémentaire entre éléments de X , autre que celles imposées (voir théorème) à un graphe.

Lemme 5 : (1) Si un générateur $x \in X$ divise un élément m de M , il divise (c'est-à-dire est unité pour, ou est égal à) un facteur de la décomposition réduite de m .
 (2) Soient $m \in M$, $\{x_1, \dots, x_s\}$ une partie transverse de X , et n_1, \dots, n_s des entiers ≥ 1 . Si, pour tout $i = 1, \dots, s$, $x_i^{n_i}$ divise m , alors $\prod_{i=1}^s x_i^{n_i}$ divise m .

Si $m = x^e p$, avec $e \geq 1$, de la décomposition réduite de $p = \prod_{j=1}^r z_j^{e_j}$, déduisons comme ci-dessus celle de m ; si donc x n'est pas unité d'un z_j , x figure dans la décomposition réduite de m , avec un exposant $\geq e$.

Si x_i est unité pour un facteur de la décomposition réduite de m , il l'est pour m , et l'on a $m = x_i^{n_i} m$. Dans le cas contraire, x_i figure dans la décomposition réduite de m , avec un exposant $\geq n_i$, d'où le résultat.

Remarquons que si $x \in X$ est tel que x^{n+1} ne divise pas m , x n'est pas unité de m ; si donc $m = x^n p$, p est unique.

Lemme 6 : Soit P une partie transverse infinie de M .

(1) Quel que soit p dans P , sa décomposition réduite contient au moins un générateur $y \in X$, avec l'exposant $e \geq 1$, tel qu'il existe une partie infinie $U(y^e)$ de P dont y^e ne divise aucun élément. Lorsqu'un générateur $y \in X$ vérifie cette condition pour au moins un élément p de P , il est dit facteur régulier de P .

(2) Si y est un facteur régulier de P , il existe un entier k , $0 \leq k \leq e - 1$, et une partie V de M dont y ne divise aucun élément, tels que $y^k V$ soit une partie infinie de P (donc V est infinie transverse) et que tout facteur z régulier pour V soit régulier pour P .

(3) P possède une infinité de facteurs réguliers.

Soit $p = \prod_{j=1}^s y_j^{e_j}$ la décomposition réduite de p , avec les $y_j \in X$.

Pour chaque j , notons F_j l'ensemble des éléments de P que $y_j^{e_j}$ ne divise pas.

Si tous les F_j étaient finis, leur réunion F le serait aussi, et $P..F$ serait non vide. Donc, pour un $h \in P..F$, tout $y_j^{e_j}$ diviserait h , et p diviserait h (lemme 5) ; P ne serait pas transverse.

Si y est régulier pour P , d'exposant e , pour tout entier i , $0 \leq i \leq e-1$, notons U_i la partie de $U(y^e)$ formée des éléments divisibles par y^i , mais non par y^{i+1} . Comme $U(y^e)$ est la réunion des U_i , l'un de ces ensembles, soit U_k , est infini. Lorsque $k = 0$, $V = U_0$ convient évidemment. Lorsque $k \geq 1$, pour chaque $u \in U_k$, y^{k+1} ne divise pas u , donc y n'est pas unité de u . Par suite, la décomposition réduite de u s'écrit $u = y^k v$, où $v \in M$ est unique et écrit sous forme réduite, où y ne divise pas v , où tout générateur g figurant dans v ne divise pas y (en particulier $\{y, g\}$ est transverse). On prend pour V l'ensemble de ces éléments v ainsi définis, pour u parcourant U_k . On a $U_k = y^k V$, et V est infini transverse. Toujours pour $k \geq 1$, soit z un facteur régulier pour V , avec l'exposant $a \geq 1$ dans $v_0 \in V$. $\{y, z\}$ étant transverse, z^n divise un $v \in V$ si et seulement si $y^k z^n$ divise $y^k v$. Donc, z est facteur de $u_0 = y^k v_0$ avec l'exposant a ; et si z^a ne divise pas un $v \in V$, il ne divise pas $y^k v \in U_k$. Donc z est facteur régulier pour P .

Notons y_1 un facteur régulier de P , et V_1 la partie infinie transverse associée à y_1 par l'assertion (2) du lemme. Supposons connus n facteurs réguliers distincts y_1, \dots, y_n de P , et un ensemble infini transverse V_n dont y_i ne divise aucun élément, quel que soit $i = 1, \dots, n$, et dont tout facteur régulier soit régulier pour P . Prenons alors un facteur y_{n+1} régulier pour V_n , et soit V_{n+1} l'ensemble infini transverse qui lui est associé par (2) : On sait qu'il existe un entier k tel que $y_{n+1}^k V_{n+1}$ soit une partie infinie de V_n , que pour tout $i \leq n$, y_i est distinct de y_{n+1} , que y_{n+1} ne divise aucun élément de V_{n+1} , et que tout facteur régulier pour V_{n+1} l'est pour V_n , donc pour P . On a montré l'existence d'un ensemble infini $Y = \bigcup_{n \geq 1} \{y_n\}$ de facteurs réguliers de P .

Achevons la démonstration du théorème. Dans la construction précédente de Y , posons $Y_n = \{y_1, \dots, y_n\}$, $V_0 = P$, et pour tout $n \geq 0$, notons F_n l'ensemble des facteurs réguliers pour V_n . Nous savons que, pour tout $n \geq 0$, F_n est infini et F_n contient F_{n+1} . Les couches X_α sont bien ordonnées, et, pour tout $n \geq 0$, il existe un plus petit ordinal α_{n+1} tel que $F_n \cap X_{\alpha_{n+1}}$ soit non vide ; prenons y_{n+1} dans $F_n \cap X_{\alpha_{n+1}}$. Alors, quel que soit $x \in F_{n+1} \subset F_n$, on a $\alpha_{n+1} \leq \alpha(x)$, si $\alpha(x)$ désigne l'ordinal de la couche de x . En particulier, si Y_n est transverse, pour tout $i \leq n$ on a

$\alpha_i \leq \alpha_{n+1}$, donc y_{n+1} ne divise pas y_i (c'est-à-dire n'en est pas unité).

D'autre part, pour tout $i \leq n$, y_i ne divise aucun élément de V_i (lemme 6), donc de F_i , donc ne divise pas y_{n+1} . Cela entraîne que Y_{n+1} aussi est transverse. Donc, pour tout $n \geq 1$, Y_n est transverse. La réunion $Y = \bigcup_{n \geq 1} Y_n$

est donc une partie infinie transverse du graphe.

On connaît donc la structure de toute charpente noethérienne.

Pour passer d'une charpente C à un monoïde noethérien D admettant C pour charpente, il faut opérer une sorte de "dilatation" de la charpente. Pour tout $t \in C$, on se donne un ensemble D_t , ces ensembles étant deux à deux disjoints ; on note D leur réunion. Puis, pour tout couple $(t, t') \in C^2$ on se donne une application

$\varphi_{t,t'} : D_t \times D_{t'} \rightarrow D_{tt'}$, vérifiant d'abord les conditions suivantes (commutativité et associativité) : Quels que soient t, t' et t'' dans C , quels que soient a dans D_t , a' dans $D_{t'}$, et a'' dans $D_{t''}$,

$$\text{on a : } \varphi_{t,t'} \cdot (a, a') = \varphi_{t',t} \cdot (a', a)$$

$$\varphi_{tt',t''} \cdot [\varphi_{t,t'} \cdot (a, a'), a''] = \varphi_{t,t',t''} \cdot [a, \varphi_{t',t''} \cdot (a', a'')]$$

Ensuite, pour tout $t \in C$, notons $E_t = \{t' \in C ; tt' = t\}$ et

$$U_t = \bigcup_{t' \in E_t} D_{t'}. \text{ On a } E_t^2 \subset E_t \text{ d'où } U_t^2 \subset U_t \text{ et, (par définition de } E_t), \text{ quel}$$

que soit $d \in E_t$, $d U_t \subset D_t$. Soient d et d' dans D_t vérifiant $d' = du$; si $u \in D_\theta$, on doit avoir $t \theta = t$, donc $u \in U_t$. Donc, pour que les éléments de tout D_t soient associés entre eux au sens large, il faut et il suffit que :

(A1) quels que soient $t \in C$ et $d \in D_t$, on ait $d U_t = D_t$.

Cette dernière condition peut s'exprimer autrement. Supposons maintenant que pour tout $t \in C$ un élément au moins $x = x(t) \in D_t$ vérifie $x U_t = D_t$. La relation $xu = xu'$ définit sur U_t une relation d'équivalence pour laquelle \bar{u} désignera la classe de u , et \bar{U}_t l'ensemble quotient. La condition (A1) s'écrit alors : pour tout $t \in C$, pour tout $u \in U_t$, on a $xu U_t = x U_t$, ce qui équivaut à $\bar{u} \bar{U}_t = \bar{U}_t$, donc au fait que \bar{U}_t soit un groupe. Finalement, la condition (A1) d'association large peut être formulée ainsi : quel que soit $t \in C$, il existe $x \in D_t$ vérifiant les conditions $x U_t = D_t$, et \bar{U}_t est un groupe. Bien entendu, ces conditions, que l'on peut expliciter, sont imposées aux fonctions $\varphi_{t,t'}$.

d) Exemples d'annéides noethériens pas forts :

Dans les exemples qui suivent, nous allons montrer qu'un annéide noethérien peut être ni fort, ni strict, et qu'il peut être strict, mais pas fort (Chap. II, § 1). L'annéide construit A aura ses domaines d'addibilité

isomorphes au groupe additif du corps à deux éléments, et sera déterminé par la donnée de sa graduation propre D (commutative) (voir chap. I, § 2, exemple 3°). On pourra prendre D pour support de A . On se donne le graphe noethérien suivant : $X = \bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, avec $X_1 = \{1 = e_1\}$, $X_2 = \{e_2, x\}$ et pour

$2 < \alpha < \lambda$, $X_\alpha = \{e_\alpha\}$, en supposant que x n'est unité pour aucun élément du graphe (donc, pour $\alpha < \beta < \lambda$, on a $e_\alpha e_\beta = e_\beta$, et aussi $1x = x$).

1°) On suppose infini le cardinal de λ . On considère le monoïde "libre" du graphe X , et soit D son quotient par les relations suivantes : Tout élément e_α est idempotent. Une suite $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ strictement croissante

d'ordinaux $< \lambda$ est donnée, et quel que soit $i \geq 1$, quels que soient α et $\beta < \lambda_i$, on a $x^i e_\alpha = x^i e_\beta$. En fait, seules les puissances de x agglutinent. On voit que, lorsque l'exposant i augmente, x^i agglutine à 1 un ensemble de générateurs e_α de plus en plus important. Donc x n'est pas quasi-régulier strict, ni quasi-régulier, et l'anneau noethérien A n'est ni strict, ni fort.

2°) On suppose toujours infini le cardinal de λ . On suppose donnée une suite $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ strictement croissante d'ordinaux $< \lambda$, tout intervalle

$[\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ étant partagé en i intervalles par une suite

$\lambda_i^0 = \lambda_i < \lambda_i^1 < \dots < \lambda_i^{i-1} < \lambda_i^i = \lambda_{i+1}$. On considère le monoïde "libre" du graphe X , et soit D son quotient par les relations suivantes : Tout élément e_α est idempotent. Quels que soient les entiers $n \geq 1$ et $i \geq 1$, quels que soient α et $\beta \in [\lambda_i, \lambda_i^n[$ (ou $[\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ si $n > i$), on a $x^n e_\alpha = x^n e_\beta$.

x^{n+1} agglutine strictement plus que x^n , donc x n'est pas quasi-régulier, et A n'est pas fort. Cependant, A est strict. Seuls les x^n (et leurs multiples) agglutinent, et il suffit de montrer que x est quasi-régulier strict. Montrons d'abord cela relativement à l'ensemble X des générateurs. Soit $e_\alpha \in X$ un générateur tel que α appartienne à un intervalle $[\lambda_i, \lambda_{i+1}[$. Par définition, seuls pourront être agglutinés à e_α les générateurs e_β pour lesquels $\beta \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}[$, et ils seront tous agglutinés

par $x^i e_\alpha$. En posant $i(x, e_\alpha) = i_\alpha$, on voit que x est quasi-régulier strict relativement à X . Enfin, un élément a quelconque est un produit fini d'idempotents e_α , et éventuellement d'une puissance de x : $a = x^m \prod_{\alpha \in I} e_\alpha$.

Soit J la partie de I correspondant aux e_α susceptibles d'agglutination (c'est-à-dire aux α appartenant à un intervalle $[\lambda_i, \lambda_{i+1}[$), et posons :

$i(x, a) = \sup [0, \sup_{\alpha \in J} (i_{\alpha} - m)]$. Alors, x est quasi-régulier strict pour $i(x, a)$.

3°) Donnons-nous un monoïde commutatif quelconque D dont tout élément est périodique, c'est-à-dire que pour tout $d \in D$, il existe des entiers $n(d)$ et $p(d) \geq 1$ tels que $d^{n(d)} + p(d) = d^{n(d)}$. Alors, tout anneau A de graduation D est fort, bien qu'il puisse n'être pas noethérien.

Chapitre V

ANNEIDES NOETHERIENS FORTS

On suppose toujours commutatifs les anneides considérés, ainsi que leurs graduations éventuelles.

§ 1 - DECOMPOSITION PRIMAIRE.

Dans ce paragraphe, nous énonçons pour les anneides, sous certaines conditions, des propriétés connues (et que l'on retrouve comme cas particuliers) pour les anneaux. Plusieurs démonstrations seront omises car elles sont identiques à celles, classiques, du cas des anneaux ; on pourra se reporter à [6], chap. IV, § 4,5,6. Nous noterons c.c.c. la condition de chaîne croissante, c'est-à-dire la condition que toute chaîne strictement croissante d'idéaux est finie.

Définition 1. Un idéal qui est intersection finie d'idéaux qui le contiennent strictement est dit réductible. Sinon, il est dit irréductible.

Un idéal \mathfrak{J} sera réductible si et seulement s'il existe deux idéaux \mathfrak{a} et \mathfrak{b} le contenant strictement, et tels que $\mathfrak{J} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. En effet, on peut toujours remplacer l'intersection finie par une intersection de deux idéaux contenant \mathfrak{J} strictement.

Soit \mathfrak{p} un idéal premier. Si on a $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, \mathfrak{p} contient $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, donc contient \mathfrak{a} ou \mathfrak{b} (III, § 3, th. 1). Donc tout idéal premier est irréductible.

Lemme 1. Si un anneide vérifie la c.c.c., tout idéal est intersection finie d'idéaux irréductibles.

Soit F la famille des idéaux de l'anneide qui ne sont pas intersection finie d'idéaux irréductibles. Si F est non vide, la c.c.c. montre que F possède un élément maximal \mathfrak{J} . Cet idéal est donc réductible, et il existe des idéaux \mathfrak{a} et \mathfrak{b} contenant \mathfrak{J} strictement et tels que $\mathfrak{J} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Puisque \mathfrak{J} est maximal dans F , \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont intersections finies d'idéaux irréductibles, donc \mathfrak{J} aussi, ce qui est contradictoire.

Lemme 2. Dans un anneide fort vérifiant la c.c.c., tout idéal irréductible est primaire.

Soit \mathfrak{q} un idéal irréductible. Supposons-le non primaire. Il existe \mathfrak{b} et $\mathfrak{c} \in A \setminus \mathfrak{q}$ tels que $\mathfrak{bc} \in \mathfrak{q}$ et qu'aucune puissance de \mathfrak{b} n'appartienne à \mathfrak{q} . La suite des idéaux $\mathfrak{q} : \{\mathfrak{b}^n\} = \{z \in A ; z\mathfrak{b}^n \in \mathfrak{q}\}$ est croissante ; la c.c.c. montre qu'elle est stationnaire à partir d'un entier s . D'autre part, A étant fort, \mathfrak{b} est quasi-régulier pour l'indice r . Prenons alors $n = r + s$. Les idéaux $\mathfrak{a} = \mathfrak{q} + (\mathfrak{c})$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{q} + A\mathfrak{b}^n$ contiennent \mathfrak{q} strictement. Inversement, pour tout

x non nul dans $a \cap b$, il existe $u, v \in q, m \in \mathbb{Z}, \xi \in \bar{A}^{b^n}$ et $\eta \in \bar{A}^c$ tels que $x = u + \xi b^n = v + \eta c + m c$. Puisque $x \neq 0$, tous les termes sont additifs à x (I, § 1) donc entre eux. On obtient $bx = bv + \eta bc + m bc$, donc $b x \in q$ et aussi $\xi b^{n+1} = (\xi b^n) b = (x - u) b \in q$. Par quasi-régularité de b , ξ est agglutiné par b^r et on pose $d = \xi b^r \in A$. De $d b^{s+1} = \xi b^{n+1} \in q$ et de $q : \{b^{s+1}\} = q : \{b^s\}$ on déduit $\xi b^n = d b^s \in q$ et enfin $x \in q$. On aurait $q = a \cap b$ et q serait réductible.

Définition 2. Lorsqu'un idéal a d'un anneau A peut s'écrire

$a = \bigcap_{i=1}^n q_i$, où $n \geq 1$ et où les q_i sont des idéaux primaires, on dit que a possède une représentation ou décomposition primaire. Cette décomposition est dite réduite si aucun q_i ne contient l'intersection des autres, et si les q_i ont des idéaux premiers associés distincts. On peut toujours réduire une décomposition donnée (utiliser III, § 3, th. 6).

Les lemmes 1 et 2 montrent ceci :

Théorème 1. Dans un anneau fort vérifiant la c.c.c., tout idéal admet une décomposition primaire réduite.

Remarque 1. En particulier, cette décomposition primaire existe dans un anneau vérifiant la c.c.c.. Elle existe aussi dans un anneau A dont l'anneau \bar{A} vérifie la c.c.c. : en effet, soit a un idéal de A , et \bar{a} l'idéal de \bar{A} agglutiné de a . Nous savons qu'une décomposition primaire se contracte (III, § 3, théorème 8 et remarque 3). D'une décomposition réduite de \bar{a} dans \bar{A} , on déduit par intersection avec A , une décomposition primaire de a , pas forcément réduite.

Théorème 2. Dans un anneau A dont l'anneau \bar{A} vérifie la c.c.c., tout idéal admet une décomposition primaire réduite.

La décomposition primaire existe donc dans les anneaux qui sont noethériens forts, ou dont l'anneau est noethérien.

Théorème 3. Dans un anneau, soit a un idéal admettant une représentation primaire réduite $a = \bigcap_i q_i$. Pour que a soit son propre radical, il faut et il suffit que q_i soit premier pour tout i .

Pour la démonstration, voir [6] p. 210.

Remarque 2. Si un idéal premier p contient une intersection finie $\bigcap_i q_i$ d'idéaux, il contient l'un des q_i . Cela résulte de (III, § 3, th. 1). Si, de plus, les q_i sont primaires, p contient le radical de l'un des q_i .

Remarque 3. Si un idéal premier est une intersection finie d'idéaux premiers, il est égal à l'un d'eux.

Cette décomposition primaire réduite d'un idéal a n'est pas forcément réduite ([6], p. 210). Mais pour les idéaux premiers associés aux idéaux primaires de la décomposition, on a les théorèmes d'unicité suivants.

Théorème 4. Dans un anneau A , soit un idéal α admettant une représentation primaire réduite $\alpha = \bigcap_i q_i$ et notons $p_i = \sqrt{q_i}$. Pour qu'un idéal premier p soit l'un des p_i , il faut et il suffit qu'il existe $c \in A$, $c \notin \alpha$, tel que $\alpha : (c)$ soit primaire pour p . Les idéaux premiers p_i sont donc uniquement déterminés par α . Ils sont appelés idéaux premiers de α , ou associés à α .

La démonstration est classique (voir [6] p. 211).

Dans la famille des idéaux premiers de α , tout élément minimal est dit idéal premier isolé de α ; un idéal premier de α non isolé est dit immergé. Dans une décomposition réduite de α , un idéal primaire (ou composante primaire) de α est dit isolé (resp. immergé) si son idéal premier l'est.

Théorème 5. Dans un anneau A , soit α un idéal admettant une représentation réduite $\alpha = \bigcap_i q_i$ et posons $p_i = \sqrt{q_i}$. Un idéal premier p contient α si et seulement s'il contient l'un des p_i . Les idéaux premiers isolés de α sont les éléments minimaux de la famille des idéaux premiers contenant α .

Ceci résulte de la remarque 2.

Théorème 6. Dans un anneau A , soit α un idéal admettant une représentation réduite $\alpha = \bigcap_i q_i$ et posons $p_i = \sqrt{q_i}$. L'ensemble q_i' des éléments x de A tels que $\alpha : (x) \not\subset p_i$ est un idéal contenu dans q_i . Si q_i est composante isolée de α , il est égal à q_i' . Les composantes primaires isolées de A sont donc uniquement déterminées par α .

La démonstration est similaire à celle de [6], p. 212.

Remarque 4. Si q_i est une composante primaire isolée d'un idéal α , et si q contient α et est un idéal p_i -primaire, q contient q_i (voir [6] p. 212).

Théorème 7. Soit A un anneau noethérien fort (resp. dont l'anneau \bar{A} est noethérien) dont tout idéal premier propre est maximal. Alors, tout idéal α de A admet une unique décomposition primaire réduite. α est, de manière unique, un produit fini d'idéaux primaires dont les idéaux premiers sont distincts.

Dans un tel anneau, il n'y a pas de composante immergée. En effet, lorsque (0) est premier, il ne peut être idéal associé que de lui-même. La première assertion vient des théorèmes 1 et 2. La dernière utilise (III, § 2b) et se montre comme dans [6] p. 213.

Remarque 5. (Anneau quotient) Soient a et b deux idéaux d'un anneau A , avec $a \supset b$. Pour a , être premier (resp. primaire) s'exprime par une propriété de A/a (III, § 3). Donc, pour que a soit premier (resp. primaire) il faut et il suffit que a/b le soit (III, § 1, théorème 4 bis d'isomorphisme).

Comme $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$ (III, § 2a, (3)), à une décomposition réduite $a = \bigcap_i q_i$ de a correspond la décomposition réduite $a/b = \bigcap_i (q_i/b)$ de a/b , et inversement ; et p_i/b est l'idéal premier associé à q_i/b . De plus, les composantes isolées (resp. immergées) se correspondent, car leur définition s'appuie sur des inclusions entre les idéaux premiers associés.

Théorème 8. Dans un anneau A , soit a un idéal admettant une décomposition primaire réduite $a = \bigcap_i q_i$. Alors, \sqrt{a} est l'intersection des idéaux premiers isolés de a .

L'intersection étant finie, on a $\sqrt{\bigcap_i q_i} = \bigcap_i \sqrt{q_i} = \bigcap_i p_i$, et on enlève les idéaux premiers immergés.

Corollaire. Soit A un anneau noethérien fort (resp. dont \bar{A} est noethérien). L'ensemble N des éléments nilpotents est l'intersection des idéaux premiers isolés de (0) (c'est-à-dire des idéaux premiers minimaux de A).

C'est clair, car $N = \sqrt{(0)}$. Notons que a est premier si et seulement s'il possède une seule composante isolée.

Théorème 9. Soit A un anneau noethérien fort (resp. dont \bar{A} est noethérien). Soient a et b deux idéaux, $a \neq A$. Alors, $a = a : b$ si et seulement si b n'est contenu dans aucun idéal premier de a .

La démonstration est classique (voir [6] p. 214). On a les conséquences suivantes :

Corollaire 1. Soit A un anneau noethérien fort (resp. dont \bar{A} est noethérien). Pour qu'un idéal b soit contenu dans l'un des idéaux premiers associés à un idéal a , il faut et il suffit que $a \neq a : b$.

Corollaire 2. Soit A un anneau noethérien fort (resp. dont \bar{A} est noethérien). Pour que $x \in A$ appartienne à l'un des idéaux premiers associés à un idéal a , il faut et il suffit qu'il existe $y \notin a$ tel que $xy \in a$.

On applique le corollaire 1 à $b = (x)$.

Corollaire 3. Dans un anneau A noethérien fort (resp. dont \bar{A} est noethérien), l'ensemble D de zéro et des diviseurs de zéro est la réunion des idéaux premiers de (0) .

On applique le corollaire 2 à l'idéal $a = (0)$.

Corollaire 4 : Soient A un anneau dont l'anneau \bar{A} est noethérien, et P l'ensemble formé de zéro et des diviseurs et pseudo-diviseurs de zéro de A . P est l'intersection avec A de la réunion des idéaux premiers de \bar{A} associés à l'idéal (0) de \bar{A} .

Cela résulte du corollaire 3.

Remarque 6. Toutes les définitions et propriétés ne faisant pas intervenir l'hypothèse que A est fort et vérifie la c.c.c., sont vraies dans

les anels (y compris celles où \bar{A} vérifie la c.c.c.).

Définition 3. Pour un anneau A , on appelle zéroïde de A et on note D l'ensemble formé de zéro et des diviseurs de zéro. On appelle pseudo-zéroïde de A , et on note P la réunion de D et de l'ensemble des pseudo-diviseurs de zéro.

D et P sont stables par multiplication par les éléments de A , mais en général ne sont pas des idéaux.

Définition 4. Soit A un anneau de graduation Δ . On appelle idéal zéroïde ou noyau zéroïde de A et on note Z le noyau Δ -large $Z = D_L$ de D . On appelle idéal pseudo-zéroïde ou noyau pseudo-zéroïde de A et on note W le noyau Δ -large $W = P_L$ de P .

Lemme 3. Soient A un anneau de graduation Δ , D et P respectivement son zéroïde et son pseudo-zéroïde. Pour tout $x \in P$, $x \notin D$, tel que $\omega(x)$ associe dans Δ , l'enveloppe large de x est contenue dans P . Si Δ est associative, l'enveloppe large de $P..D$ est contenue dans P_n .

Si x est dans $P..D$, il existe $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \in \bar{A}..A$, tel que $n \geq 2$

(les a_i étant deux à deux non addibles, les $x a_i$ étant tous non nuls et deux à deux addibles), et tel que $x \alpha = 0$. Pour tout multiple $\lambda \omega$ de $\omega = \omega(x)$, et pour tout élément v de $A_{\lambda \omega}$, l'associativité par ω montre que, pour tout

$va_i \neq 0$, on a : $\omega(v a_i) = \omega(v)\omega(a_i) = (\lambda \omega)\omega(a_i) = \lambda[\omega \omega(a_i)] = \lambda \omega(x a_i)$.

De même, pour tout $v \in A_{\omega}$ et pour tout $v a_i \neq 0$, on a :

$\omega(v a_i) = \omega(v)\omega(a_i) = \omega(x)\omega(a_i) = \omega(x a_i)$. Dans les deux cas, v agglutine α et on pose $b = v \alpha \in A$. On a alors $b x = (v \alpha)x = v(\alpha x) = v 0 = 0$. Comme x ne divise pas zéro, $b = v \alpha$ est nul, et v appartient à P . Donc l'idéal large engendré par $\{x\}$ est contenu dans P .

Lemme 4. Soit A un anneau sans diviseur de zéro. Munissons-le d'une graduation associative. L'idéal pseudo-zéroïde W est égal au pseudo-zéroïde P .

Par exemple, prenons la graduation propre. Le lemme 3 montre que P est un idéal large.

§ 2 - INTERSECTION DES PUISSANCES D'UN IDEAL.

Lemme 1. Soient A un anneau noethérien fort (resp. unitaire et dont l'anneau \bar{A} est noethérien), et a et m deux idéaux de A . Alors il existe un entier s et un idéal a' tels que $m a = a \cap a'$ et $a' \supset m^s$.

Soit $\{q_i\}$ (resp. $\{q'_j\}$) l'ensemble des composantes primaires de $m a$ (dont l'idéal premier associé contient m (resp. ne contient pas m)). Posons

$\mathfrak{a}' = \bigcap_i \mathfrak{q}_i'$ et $\mathfrak{a}'' = \bigcap_j \mathfrak{q}_j''$. On a $\mathfrak{m} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}''$, et il existe s tel que $\mathfrak{m}^s \subset \mathfrak{a}'$.

Pour tout j , soit $m_j \in \mathfrak{m}$, $m_j \notin \sqrt{\mathfrak{q}_j''}$; pour tout $x \in \mathfrak{a}$, on a $m_j x \in \mathfrak{m} \mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}_j''$, d'où $x \in \mathfrak{q}_j''$ et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}''$. On a finalement : $\mathfrak{m} \mathfrak{a} = \mathfrak{m} \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'' \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}$.

Lemme 2. Soient \mathfrak{a} et \mathfrak{m} deux idéaux d'un anneau unitaire A .

Si $\mathfrak{a} = \mathfrak{m} \mathfrak{a}$, et si \mathfrak{a} est non nul et de type fini, pour tout $x \in \mathfrak{a}^* = \mathfrak{a} \setminus \{0\}$, on a $x \in \mathfrak{m} \mathfrak{a}$.

Prenons un système fini $\{x_1 = x, x_2, \dots, x_n\}$ de générateurs de \mathfrak{a} . La relation $\mathfrak{a} = \mathfrak{m} \mathfrak{a}$ permet d'exprimer chaque x_i par une combinaison linéaire sur \mathfrak{m} des x_1, \dots, x_n , d'où les n équations :

$$-\mu_1^i x_1 - \dots - (\mu_i^i - 1)x_i - \dots - \mu_j^i x_j - \dots = 0$$

où les $\mu_j^i \in \bar{A}$. Calculant dans \bar{A} , on montre que le déterminant des coefficients, soit $1 - \mu$ avec $\mu \in \bar{A}$, est tel que $(1 - \mu)x_1 = (1 - \mu)x = 0$. Regroupons, dans le développement de $(1 - \mu)x$, les termes additifs dans A ; on obtient

$(1 - \alpha)x + \beta_1 x + \dots + \beta_s x = 0$, où x agglutine dans A chacune des sommes formelles $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_s \in \bar{A}$. Comme \bar{A} est somme directe des groupes d'additivité de A , on a donc $(1 - \alpha)x = 0$, où $\alpha = \sum_k \alpha_k \in \bar{A}$, et où x et les $\alpha_k x$ sont additifs.

Théorème 1. (de Krull) Soient A un anneau unitaire, et \mathfrak{m} un idéal propre de A . Supposons que A soit noethérien fort (resp. que \bar{A} soit noethérien). Pour que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = (0)$, il faut et il suffit que pour tout $x \neq 0$, on ait $x \notin \mathfrak{m} x$.

Soit $x \neq 0$ tel que $x \in \mathfrak{m} x$. Il existe $\alpha = \sum_i a_i$ (les $a_i \in \mathfrak{m}$) tel que les a_i soient non additifs deux à deux, les $a_i x$ et x soient additifs deux à deux, et que $x = \alpha x = \sum_i a_i x$. En remplaçant chaque fois x par la valeur précédente, on en déduit :

$$x = \sum_i a_i \left(\sum_j a_j x \right) = \sum_i a_i \left[\sum_j a_j \left(\sum_k a_k x \right) \right] = \dots, \dots, \dots$$

et il en résulte $x \in \mathfrak{m}^n$ pour tout n . Par suite, on a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n \neq (0)$.

Posons $\mathfrak{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n$. Lorsque $\mathfrak{J} \neq (0)$, le lemme 1 montre qu'il existe un entier s et un idéal \mathfrak{J}' tels que $\mathfrak{m} \mathfrak{J} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}'$ avec $\mathfrak{J}' \supset \mathfrak{m}^s$. On en déduit $\mathfrak{m} \mathfrak{J} \supset \mathfrak{J} \cap \mathfrak{m}^s = \mathfrak{J}$, donc $\mathfrak{J} = \mathfrak{m} \mathfrak{J}$. Pour tout x non nul dans $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{m}$, le lemme 2 montre que $x \in \mathfrak{m} x$.

Remarques sur le théorème de Krull, et corollaires, en supposant que A est un anneau unitaire, noethérien fort (resp. dont l'anneau \bar{A} est noethérien), de graduation fixée Δ . On notera D le zéroïde (formé de 0 et des diviseurs de 0; il est la réunion des idéaux premiers de (0) dans A), P le pseudo-zéroïde (formé de D et des pseudo-diviseurs de 0), Z et W respecti-

vement les idéaux zéroïde et pseudo-zéroïde (noyaux larges de D et P), m un idéal propre de A, m_L son noyau large et enfin \mathfrak{J} l'idéal $\mathfrak{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} m^n$. On suppose que $\omega(1)$ est unité de Δ .

(0) - Cette remarque simple peut parfois alléger les conditions suffisantes des remarques qui suivent. Pour tout entier $s \geq 1$, on a $\omega(m)^s \subset \omega(m)^s$. On en déduit les deux majorations :

$$\omega\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} m^n\right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \omega(m)^n \subset \omega(m)^s.$$

Dans les remarques (3', 4', 5, 5', 7), la famille V des éléments v_{ω} pourra donc être réduite, ou aux $\omega \in \omega(m)^s$ pour un s fixé, ou aux $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \omega(m)^n$. De plus, dans les remarques (2'', 5', 10), l'intersection \mathfrak{J} pourra parfois être serrée de plus près par ses grades.

Enfin, la condition $m \cap Z = (0)$ de la remarque (4') est vérifiée lorsque (s fixé ≥ 1) : $\omega(Z) \cap \omega(m)^s$ est formé de grades nuls.

(1) | Si (0) est le seul idéal contenu dans $m \cap P$, il en résulte $\mathfrak{J} = (0)$.

En effet, si cette intersection $\mathfrak{J} \neq (0)$, tout $x \in \mathfrak{J}$, $x \neq 0$, est diviseur ou pseudo-diviseur de 0.

(1) | Si m n'a pas de pseudo-diviseur propre de zéro, pour que $\mathfrak{J} = (0)$, il faut et il suffit que $1 - m$ n'ait pas de diviseur de zéro.

C'est une conséquence immédiate du théorème.

(2) - Un élément $x \in A$ sera dit 1-régulier si $x \neq 0$ et si pour tout $a \in A$, $0 \neq xa \not\equiv x$ implique $a \not\equiv 1$. Un élément $\xi \in \Delta$ sera dit 1-régulier si $\xi \neq 0$ et si, pour tout $\alpha \in \Delta$, la relation $\xi \alpha = \xi$ implique $\alpha = \omega(1)$. Un élément qui n'est pas 1-régulier est dit 1-irrégulier. Si ξ est 1-régulier, les éléments non nuls de A_{ξ} sont 1-réguliers. Notons Γ l'ensemble des $\xi \in \Delta$ qui sont 1-irréguliers, et notons $G = A_{\Gamma}$ la réunion des groupes d'addibilité associés. Tous les éléments 1-irréguliers de A sont contenus dans G. Lorsque Δ est associative, Γ est un Δ -idéal, et G un idéal large. En effet, soit $\xi \in \Gamma$, $\xi \neq 0$; il existe α non nul différent de $\omega(1)$ tel que $\xi \alpha = \xi$, et pour tout $\lambda \in \Delta$, on a $\lambda \xi = \lambda(\xi \alpha) = (\lambda \xi) \alpha$, d'où $\lambda \xi \in \Gamma$.

Lorsque $1 - m$ est sans diviseur de zéro :

- a) x 1-régulier implique $x \notin \mathfrak{J}$
- b) ξ 1-régulier implique $\mathfrak{J}_{\xi} = \mathfrak{J} \cap A_{\xi} = (0)$
- c) on a $\mathfrak{J} \subset G \cap m$.

En effet, si $x \in \mathfrak{J}$ est 1-régulier (donc $x \neq 0$), il existe $\alpha \in \bar{m}$ tel que $x(1-\alpha) = 0$. Puisque x est 1-régulier, $1-\alpha$ est élément de A, donc $1-\alpha \in 1-m$ divise 0, une contradiction.

De (2) et du théorème de Krull, il résulte :

- (2') Si les éléments de $m^* = m.. \{0\}$ sont 1-réguliers, pour que $\mathfrak{J} = (0)$ il faut et il suffit que $1 - m$ n'ait pas de diviseur de zéro (c'est-à-dire que $m + p_i \neq A$ pour tout idéal premier p_i de (0) dans A).

Il résulte de (2) :

- (2'') Soit K un idéal de A . Si les éléments de $m..K$ sont 1-réguliers (par exemple si ceux de $\omega(m..K)$ le sont), et si $1 - m$ n'a pas de diviseur de zéro, on a $\mathfrak{J} \subset m \cap K$.
- (3) Pour un élément $\omega \in \omega(m^*)$ (avec $m^* = m.. \{0\}$), supposons qu'il existe $v_\omega \in A_\omega^* = A_\omega.. \{0\}$ ne divisant pas zéro. Si $v_\omega - v_\omega m$ et D sont disjoints, on a $\mathfrak{J}_\omega = (0)$.

Sinon, il existe x non nul dans A_ω et $\alpha = \sum_i a_i \in \bar{m}$ tels que $x(1-\alpha) = 0$ (avec $x a_i \neq 0$ pour tout i). Mais $v = v_\omega$ agglutine $1 - \alpha$; posons $b = v(1-\alpha)$. Puisque $b x = v(1-\alpha)x = v 0 = 0$, b est nul ou divise zéro, une contradiction.

- (3') Supposons que, pour tout $\omega \in \omega(m^*)$, il existe un non diviseur de zéro $v_\omega \in A_\omega^*$, et notons V une famille $\{v_\omega\}_{\omega \in \omega(m^*)}$ de tels éléments (dite famille d'agglutinateurs associée à m). Pour que $\mathfrak{J} = (0)$, il faut et il suffit que pour tout $v \in V$, $v - v m$ soit disjoint de D (c'est-à-dire que $v \notin v m + p_i$, pour tout idéal premier p_i de (0)).

Il reste à montrer que la condition est nécessaire. S'il existe $v \in V$ tel que $v - v m$ rencontre D , il existe $\alpha \in \bar{m}$ tel que $1-\alpha \in \bar{A}^v$ et que $b = v(1-\alpha) \in D$. Ou $b = 0$ et on a $v \in v m$. Ou b divise zéro, soit $b d = 0$ et on a $v d \neq 0$ et $vd \in vdm$. Dans les deux cas, \mathfrak{J} contient un élément non nul.

Lorsque de plus $\omega(m)$ est fini, V aussi, et on peut se borner à vérifier la condition $(u - u m) \cap D = \emptyset$ pour le produit u des v_ω , car u ne divise pas zéro et agglutine de même toute somme formelle $1-\alpha$ considérée plus haut. Il en est de même si les v_ω ont un multiple commun non nul et non diviseur de zéro.

- (4) Soit ω un élément fixé de $\omega(m^*)$. Supposons que ω associe dans Δ , et qu'il existe un multiple $\xi = \lambda \omega$ de ω et un non-diviseur de zéro $v_\omega \in A_\xi$ tels que $v_\omega - v_\omega m$ et D soient disjoints. Alors on a $\mathfrak{J}_\omega = (0)$:

Sinon, de même qu'au (3), notons x non nul dans \mathfrak{J}_ω et $\alpha \in \bar{m}$ tels que $x(1-\alpha)$ (avec $x a_i \neq 0$ pour tout i). Pour tout multiple $\xi = \lambda \omega$ de ω et tout non-diviseur de zéro $v_\omega \in A_\xi$, l'associativité par ω montre que : $\xi \omega(a_i) = (\lambda \omega) \omega(a_i) = \lambda [\omega \omega(a_i)] = \lambda \omega(x a_i) = \lambda \omega$, donc que ξ agglutine $1-\alpha$. Alors, v_ω agglutine $1-\alpha$, et $b = v_\omega(1-\alpha)$ est nul ou divise zéro, une contradiction. Un tel élément v_ω est dit agglutinateur (a)-associé à ω .

- (4') Plus généralement, si les éléments de $\omega(m)$ associent dans Δ , et si pour tout $\omega \in \omega(m^*)$, il existe un multiple $\lambda \omega$ et un non-diviseur de zéro $v_\omega \in A_{\lambda \omega}$, notons V une famille de tels agglutinateurs, (a)-associée à m . Pour que $\mathfrak{J} = (0)$, il faut et il suffit que, pour tout $v \in V$, $v-v m$ et D soient disjoints. (Donc que $v \notin v m + p_i$, pour tout idéal premier p_i de (0)).

Cela résulte de (4) et de la démonstration de (3'). Le choix de la famille V est ici plus large qu'en (3'). De plus, si les éléments de $\omega(m^*)$ ont un multiple commun ξ , et s'il existe un non-diviseur de zéro $v \in A_\xi$, on prendra $V = \{v\}$.

Lorsque Δ est associatif, la définition de l'idéal zéroïde Z de A montre que l'existence de V équivaut à la condition $m \cap Z = (0)$, donc :

- (5) Si Δ est associative, et si $m \cap Z = (0)$, soit V une famille d'agglutinateurs (a)-associée à m . Pour que $\mathfrak{J} = (0)$, il faut et il suffit que, pour tout $v \in V$ et pour tout idéal premier p_i de (0) , on ait $v \notin v m + p_i$.
- (5') Soit K un idéal de A . On suppose que Δ est associative, et que $(m..K) \cap Z = \emptyset$. Soit $V = \{v_\omega\}$ une famille d'agglutinateurs, (a)-associée à $m..K$. Si pour tout $v \in V$ et pour tout idéal premier p_i de (0) on a $v \notin v m + p_i$, il en résulte $\mathfrak{J} \subset m \cap K$.

Cela résulte de (4).

- (6) Lorsque Δ est associative, on a : $\mathfrak{J} \subset (D \cup W) \cap m \cap G$.

Cela résulte de (2), et de ce que, si un pseudo-diviseur propre de zéro est dans \mathfrak{J} , son enveloppe large est contenue dans \mathfrak{J} . En effet, soit

$x \in \mathfrak{J}..D$. Il existe $\alpha = \sum_i a_i \in \bar{m}$ (les a_i étant deux à deux non addibles, les $x a_i$ étant tous non nuls et addibles à x) tels que $1-\alpha \notin A$ et $x(1-\alpha) = 0$. Tout multiple $\lambda \omega$ de $\omega = \omega(x)$ agglutine $1-\alpha$, puisque Δ est associative :

$(\lambda \omega)\omega(a_i) = \lambda[\omega \omega(a_i)] = \lambda \omega(x a_i) = \lambda \omega$. Il en résulte que tout c non nul appartenant à $A_{\lambda \omega}$ agglutine aussi $1-\alpha$; on en déduit $b = c(1-\alpha) \in A$ et $b x = 0$. Comme $x \neq 0$ ne divise pas zéro, b est nul. Alors, $c = c \alpha$ montre que c est dans \mathfrak{J} . Donc l'enveloppe large de $\{x\}$ est contenue dans \mathfrak{J} .

Un anneau unitaire est dit quasi-domaine s'il n'a pas de diviseur de zéro ; alors sa graduation peut être choisie associative. Il est dit domaine si, de plus, il n'a pas de pseudo-diviseur de zéro (II, § 1). On en déduit de (5) :

- (7) Soient A un quasi-domaine, Δ une graduation associative de A , et V une famille (a)-associée à m . Pour que $\mathfrak{J} = (0)$, il faut et il suffit que pour tout $v \in V$, on ait $v \notin v m$.

Dans ce cas, $D = (0)$ et V existe. D'autre part, la démonstration de

- (6) montre que, dans un quasi-domaine, \mathfrak{J} est large. On en déduit :
- (7*) Soient A un quasi-domaine, et Δ une graduation associative de A . Alors, \mathfrak{J} est un idéal large contenu dans $W \cap m_L \cap G$.
- (8) Si A est un domaine, on a $\mathfrak{J} = (0)$.
Cela résulte de (1).
- (9) Si Δ est associative et si m est un idéal maximal, tout élément de $\mathfrak{J} \cdot m_L$ est un diviseur de zéro. Si, en particulier, $1-m$ n'a pas de diviseur de 0, on a $\mathfrak{J} \subset m_L$.

Pour tout $x \in \mathfrak{J} \cdot m_L$ il existe $\alpha = \sum_i a_i \in \bar{m}$ tel que $x(1-\alpha) = 0$

(avec les a_i deux à deux non addibles, et les $x a_i$ tous non nuls et addibles à x). Puisque $x \notin m_L$ il existe un multiple $\lambda \omega$ de $\omega = \omega(x)$ et il existe un élément c de $A_{\lambda \omega}$ tel que $c \notin m$. Comme A est unitaire, Δ associative et m maximal, A/m est un corps ; donc c possède un inverse modulo m : il existe $a \in m$ et $c' \notin m$ tels que $c'c = 1 + a$. Le grade de $c'c$ est donc l'unité $\omega(1)$ de Δ , et Δ associatif implique

$$\omega(1) = \omega(c'c) = \omega(c')\omega(c) = \omega(c')(\lambda \omega) = [\omega(c')\lambda] \omega = \lambda' \omega$$

en posant $\lambda' = \omega(c')\lambda$. L'associativité de Δ montre enfin, pour tout i , que $\omega(a_i) = \omega(1) \omega(a_i) = (\lambda' \omega) \omega(a_i) = \lambda' [\omega \omega(a_i)] = \lambda' \omega(x a_i) = \lambda' \omega = \omega(1)$.

Par suite, $1-\alpha$ est un élément de A et x divise zéro.

(10) - L'anneau unitaire A noethérien fort (resp. dont \bar{A} est noethérien) sera dit local si et seulement si il possède un seul idéal maximal m , c'est-à-dire si l'ensemble des éléments de A qui sont ni inversibles, ni pseudo-inversibles est un idéal m . L'hypothèse locale sert peu pour appliquer la remarque (4), sauf si une famille V est formée d'inversibles et pseudo-inversibles, car on peut la remplacer par $\{1\}$; alors $\mathfrak{J} = (0)$ car $1-m$ est sans diviseur de zéro. Si A est local, à graduation associative, on a $\mathfrak{J} \subset W \cap G$.

Cela résulte des remarques (9) et (6), car $1-m$ est sans diviseur de zéro.

Exemple contraire : Soient k un corps, et s un entier ≥ 2 . Soit l'anneau $\bar{R} = k[x, y, z] / (x^s - x)$ des polynômes sur k à trois variables x, y, z liées par la relation $x^s = x$. L'anneau R des monômes de \bar{R} est noethérien fort, et son idéal $(x) = p$ est premier (d'ailleurs strictement). Notons $A = R_p$ l'anneau local des monômes $a x^m y^n z^p$, avec $a \in k, m \in \{0, \dots, s-1\}, n$ et $p \in \mathbb{Z}$. $m = A \times$ est l'unique idéal maximal de A , et les éléments de $A \cdot m$ sont inversibles. Enfin A est noethérien fort.

D'une part, $\bigcap_n m^n = m$, puisque $x = x^s$.

D'autre part, l'idéal \bar{m} de \bar{A} n'est pas maximal, puisque $\bar{m} = \bar{A} \times \neq \bar{m} + \bar{A}(y+z) \neq \bar{A}$.

Enfin, l'idéal pseudo-zéroïde de A est m .

(L'idéal zéroïde, et même l'ensemble D des diviseurs de zéro, sont réduits à (0)).

Théorème 2. Soient A un anneau unitaire noethérien fort (resp. dont l'anneau \bar{A} est noethérien) et m et a deux idéaux propres de A . Notons p_1, \dots, p_s les idéaux premiers de a . On suppose vérifiée l'une des trois hypothèses suivantes :

(1 r) - Les éléments de $m..a$ sont 1-réguliers et on pose $V = \{1\}$.

(n) - Pour tout $\omega \in \omega(m..a)$, il existe $v_\omega \in A_\omega$ tel que $v_\omega \notin \bigcup_i p_i$ et on note $V = \{v_\omega\}_{\omega \in \omega(m..a)}$ une famille de tels éléments, associée à $m..a$.

(a) - Δ est associative, et on a $H \cap m \subset a$, où l'on note H l'idéal contenu dans $\bigcup_i p_i$, et tel que H/a soit l'idéal zéroïde Z' de A/a . Enfin, on note V une famille d'agglutinateurs $v_\omega \notin \bigcup_i p_i$, (a)-associée à $m..a$.

Alors, pour que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a + m^n) = a$, il faut et il suffit que, pour tout $v \in V$ et pour tout $i = 1, \dots, s$, on ait $v \notin vm + p_i$.

Dans le cas (1 r), la condition s'écrit $m + p_i \neq A$ pour tout $i = 1, \dots, s$.

Posons $A' = A/a$, $\mu = (m + a)/a$ et pour tout $a \in A$, notons $a' = \varphi(a)$ sa classe modulo a . La condition $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a + m^n) = a$ équivaut à $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a + m^n)/a = (0)$, donc à $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mu^n = (0)$. (III, § 2a, formule (11))

Dans le cas (1 r), la 1-régularité passe au quotient : tout $x' \in \mu$, $x' \neq 0$, et tout $a' \in A'$ sont classes modulo a respectivement d'un $x \in m..a$ et d'un $a \in A$. Si l'on a $0 \neq x'a' \neq x' \neq 0$, c'est-à-dire $0 \neq \varphi(xa) \neq \varphi(x) \neq 0$, cela implique $xa \neq x$ car φ est un homomorphisme. Mais x étant 1-régulier, on déduit $a \neq 1$, donc aussi $a' \neq 1'$.

Dans le cas (n), l'existence d'un $v_\omega \in A_\omega$ tel que $v_\omega \notin \bigcup_i p_i$ équivaut à l'existence dans l'anneau quotient A' d'un non diviseur de zéro $v'_\omega = \varphi(v_\omega) \in A'_\omega$.

Notons D' le zéroïde et Z' l'idéal zéroïde de l'anneau $A' = A/a$. Nous savons que D' est la réunion des idéaux p_i/a . Dans le cas (a), la condition $H \cap m \subset a$ implique, pour tout $\omega \in \omega(m..a)$, l'existence d'un multiple $\lambda \omega$ et d'un agglutinateur (voir remarques (4) à (5')) $v_\omega \in A_{\lambda \omega}$ tel que $v_\omega \notin \bigcup_i p_i$. Cette condition équivaut à $Z' \cap \mu = (0)$, c'est-à-dire implique, pour tout $\omega \in \omega(\mu^*)$, l'existence d'un agglutinateur $v'_\omega \in A_{\lambda \omega}$. La caractérisation de l'idéal H est moins simple que celle d'un idéal zéroïde. On a : $a \subset H \subset \bigcup_i p_i$. L'idéal H est large sur tout grade où il excède a ; il est le

plus grand idéal vérifiant en outre la condition : pour tout $\delta \in \Delta$ où H excède α , pour tout multiple $\lambda\delta$ de δ , l'idéal H est large sur $\lambda\delta$. On peut dire que H est large dans son excès sur α (on sait que H n'est pas forcément large ; voir III, § 5).

Notons enfin, puisque p_i contient α , que $v \notin vm + p_i$ équivaut à $\varphi(v) = v' \notin v'\mu + (p_i/\alpha)$. Les résultats s'obtiennent alors respectivement par les remarques (2'), (3'), (4').

Cas particuliers - (1) Si α est strictement premier, pour tout idéal propre m , on a $\bigcap_n (\alpha + m^n) = \alpha$. En effet, on applique (8) au domaine A/α .

(2) Si α est premier, (n) est trivialement vérifiée. De plus, bien que (a) ne soit pas forcément vérifiée (associativité de Δ), A/α est un quasi-domaine et possède une graduation associative Δ' . Alors, grâce à la remarque (7), il existe dans A/α une famille d'agglutinateurs (a)-associée à μ , et on peut en déduire dans A une famille V d'agglutinateurs (a)-associée à $m..a$. Ceci étant, la condition $v \notin vm + \alpha$ est nécessaire et suffisante pour que $\bigcap_n (\alpha + m^n) = \alpha$.

(3) Si A est local, si Δ est associative, et si l'idéal maximal m est étroit, pour tout idéal propre α , on a $\bigcap_n (\alpha + m^n) = \alpha$.

m étant étroit, il existe une famille V d'agglutinateurs (a)-associée à m , formée d'inversibles et de pseudo-inversibles, donc remplaçable par $\{1\}$. Pour tout idéal propre α de A , et pour tout idéal premier p_i de α , $p_i \subset m$ implique $1 \notin m + p_i$, d'où le résultat.

Théorème 3. Soit A un anneau unitaire noethérien fort (resp. dont \bar{A} est noethérien), et soient m , K et α trois idéaux propres de A . Notons p_i , $i = 1, 2, \dots, s$ les idéaux premiers de α . On fait l'une des trois hypothèses suivantes :

(1 r) Les éléments de $m..K$ sont 1-réguliers. On pose $V = \{1\}$.

(n) K est faiblement large. Pour tout $\omega \in \omega[m..(K + \alpha)]$, il existe $v_\omega \in A_\omega$ tel que $v_\omega \notin \bigcup_i p_i$. On note V une famille de tels éléments, associée à $m..(K + \alpha)$.

(a) Δ est associatif et K est faiblement large. $Z' = H/\alpha$ étant l'idéal zéroïde de A/α , on a $H \cap m \subset \alpha + K$, et on note V une famille d'éléments $v_\omega \notin \bigcup_i p_i$, (a)-associée à $m..(\alpha + K)$.

Alors, si pour tout $v \in V$, et pour tout $i = 1, \dots, s$, on a $v \notin vm + p_i$, cela implique

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha + m^n) \subset \alpha + (K \cap m).$$

Si K est faiblement large, on a $\alpha + K = \alpha \cup K$. Pour la démonstration, on passe au quotient A/α auquel on applique les remarques (2''), (3) et (5') respectivement. Noter que la condition suffisante, dans le cas (1 r) est que $m + p_i \neq A$ pour tout i .

Corollaire 1. Avec les hypothèses du théorème 3, on a

$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha + m^n) \subset \bigcap_{j=1}^r q_j + (K \cap m)$ où les q_j sont les composantes primaires de α dont le radical p_j vérifie la condition $v \notin vm + p_j$ pour tout $v \in V$.

En effet, $\alpha \subset \bigcap_j q_j$ et on applique à ce dernier idéal le théorème.

Corollaire 2. Soit A un anneau unitaire noethérien fort (resp. dont \bar{A} est noethérien). Si A est local d'idéal maximal m , pour tout idéal α de A , on a $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha + m^n) \subset \alpha + m_L$.

En effet, les éléments de $m \cdot m_L$ sont 1-réguliers, par définition du noyau large m_L de m et parce que A est local. Tout idéal premier, étant contenu dans m , ne peut lui être comaximal ; et le corollaire 1 montre le résultat.

Soient un anneau unitaire A noethérien fort (resp. dont l'anneau \bar{A} est noethérien), et m un idéal de A . Lorsqu'on prend pour voisinages fondamentaux de $x \in A$ la famille $U_n(x)$ des classes de x modulo m^n (attention : $U_n(x) = x + m^n$ seulement si $x = 0$ ou $x \notin m^n$), on vérifie aisément que cela définit une topologie sur A , qui fait de A un anneau topologique (là interviennent les lois quotient dans A/m^n). Lorsque $\bigcap_{n=1}^{\infty} m^n = (0)$, A est un espace topologique séparé ; alors, la condition $\bigcap_n (\alpha + m^n) = \alpha$ du théorème 2 signifie que l'idéal α est fermé pour cette topologie ; si $\{a_i\}_{i \in I}$ est une famille d'idéaux, fermés dans la topologie relative à m , il est clair que leur intersection aussi est un idéal fermé. Noter que tout idéal strictement premier α de A est fermé dans cette topologie (cas particulier (1) du théorème 2). Noter aussi que, dans les conditions du corollaire 2, si m est étroit, c'est-à-dire si $m_L = (0)$, tout idéal de A est fermé dans cette topologie (cas particulier (3) du théorème 2).

Théorème 4. Soient un anneau unitaire A noethérien fort (resp. dont \bar{A} est noethérien), et m un idéal de A . Supposons que les éléments de $m^* = m \cdot \{0\}$ soient 1-réguliers. Pour tout idéal propre α de A , on a $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha + m^n) = \bigcap_j q_j$, où les q_j sont les composantes primaires de α dont le radical p_j vérifie la condition $m + p_j \neq A$.

Soit $b = \bigcap_j q_j$. Par le théorème 2 (1 r), chaque q_j est fermé, donc aussi leur intersection $b = \bigcap_n (b + m^n)$. Soient q_i^1 ($i \in I$) les autres composantes primaires de a . Comme, pour tout i , on a $m + p_1^1 = A$, m est comaximal (voir III, § 2b) avec chaque p_1^1 , donc avec chaque q_i^1 , donc avec leur intersection $b' = \bigcap_i q_i^1$. Enfin, pour tout $n \geq 1$, b' et m^n sont comaximaux. On a donc : $b = A \cdot b = (b' + m^n) \cdot b = b' \cdot b + m^n \cdot b \subset a + m^n$. On en déduit : $b + m^n = a + m^n$, d'où enfin $\bigcap_n (a + m^n) = b$.

§ 3 - ANNEAUX DE FRACTIONS.

Un intégroïde R est un anneau commutatif où tout élément non nul est simplifiable (II, § 1) ; R n'a pas de diviseur de 0, mais peut avoir des pseudo-diviseurs de 0.

Lemme 1. Soient R un intégroïde et M une partie multiplicative de M (avec $0 \notin M$). Le quasi-morphisme $h : R \rightarrow R_M$ est injectif, et R_M est un intégroïde.

En effet, pour tous $a, b \in R$, la relation $h(a) = h(b)$ équivaut à l'existence de $m \in M$ tel que $ma = mb$; on obtient $a = b$ en simplifiant.

Ceci nous permet d'identifier R à la partie $h(R)$ de R_M . Mais $h(R)$ n'est pas forcément stable pour l'addition, car l'additivité des éléments de $h(R)$ est en général plus large que celle des éléments correspondants de R (ce "plongement" est similaire à l'inclusion d'un anneau dans un anneau agglutiné).

Soient $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}$ et $\frac{c}{u} \in R_M$ vérifiant les conditions $\frac{c}{u} \neq 0$ et $\frac{ca}{us} = \frac{cb}{ut}$. Il existe $m \in M$ tel que $mutc = masb$. En simplifiant par c , on obtient $(mu)t a = (mu)s b$, d'où $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$. Donc R_M est un intégroïde.

En particulier, si R est un intégroïde et si $R^* = R \setminus \{0\}$, ce lemme permet de plonger, au sens précédent, tout anneau R_M de fractions dans l'anneau $A = R_{R^*}$. En effet, soit h le quasi-morphisme $: R \rightarrow R_M$. Puisque R_M est un intégroïde, il se plonge dans $(R_M)_{h(R^*)}$. Or, ce dernier est isomorphe à A (III, § 4b, remarque 3).

Théorème 1. Supposons que l'anneau unitaire R soit un intégroïde.

Soit E l'ensemble de ses idéaux maximaux. Pour tout idéal b de R , on a :

$$b = \bigcap_{m \in E} b R_m. \text{ On a en particulier } R = \bigcap_{m \in E} R_m.$$

R_m désigne l'anneau de fractions relatif à m (III, § 4c, exemple (1)). On note $b R_m$ l'extension de b par $R \rightarrow R_m$, et on considère chaque anneau R_m comme plongé, au sens précédent, dans $A = R_{R^*}$.

Lemme 2. R vérifiant les conditions du théorème, soit $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ une fraction non nulle de $R_R^* = A$, telle que s et t soient addibles à A. Alors, a et b sont addibles, et si $s + t \neq 0$, on a $\frac{a}{s} = \frac{a+b}{s+t}$.

R étant un intégral, $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \neq 0$ équivaut à $ta = sb \neq 0$. De $s \neq 1 \neq t$, on déduit $b \neq sb$ et $ta \neq a$. Par transitivité, il en résulte $a \neq b$. La seconde assertion est alors triviale.

L'inclusion $b \subset \bigcap_m b R_m$ est évidente. Considérons un élément x non nul du second membre. Pour tout $m \in E$, la fraction x peut s'écrire $\frac{b_m}{s_m}$ avec $b_m \in b$ et $s_m \notin m$ (III, § 4c, lemme 6). L'idéal \mathfrak{J} engendré par les s_m n'est contenu dans aucun idéal maximal. Donc \mathfrak{J} est égal à A (III, § 3, remarque 1), et 1 est combinaison linéaire des s_m . On a donc :

$1 = \sum_{m \in F} \left[\sum_{i \in I(m)} a_m^i s_m \right]$ où F est une partie finie de E, où les $I(m)$ sont finis, où les $a_m^i \in R$ et où tous les $a_m^i s_m$ sont non nuls et addibles à 1 (on suppose que toute somme partielle extraite est non nulle). Dans A, pour tout $m \in F$ et tout $i \in I(m)$, on obtient $x = \frac{b_m}{s_m} = \frac{a_m^i b_m}{a_m^i s_m}$. Le lemme montre que les $a_m^i b_m$ sont deux à deux addibles, et que l'on obtient

$$x = \frac{\sum_{m,i} a_m^i b_m}{\sum_{m,i} a_m^i s_m} = \sum_{m,i} a_m^i b_m. \text{ Donc } x \text{ est dans } b.$$

Dans la suite, on considérera un anneau R de graduation donnée Δ , une partie multiplicative M (avec $0 \notin M$), l'anneau de fractions R_M et le quasi-morphisme $h : R \rightarrow R_M$. Pour toute partie non vide X de R, on notera X_M (ou X si M est le complément d'un idéal premier p) l'ensemble : $X_M = \left\{ \frac{x}{m} ; x \in X, m \in M \right\}$. Lorsque X est un idéal, on voit (III, § 4b, lemme 6) que $X_M = X^e$. On notera D et D' les zéroïdes, P et P' les pseudo-zéroïdes, Z et Z' les idéaux zéroïdes, W et W' les idéaux pseudo-zéroïdes de R et de R_M respectivement.

Lemme 3. Avec les notations précédentes, pour tout élément $\frac{x}{s}$ non nul de R_M , si $\frac{x}{s}$ est diviseur (resp. pseudo-diviseur) de zéro, il en est de même de x dans R, et x n'est pas dans M.

La dernière assertion est triviale. Si $\frac{x}{s} \in D'$ est non nul (donc $x \notin \text{Ker } h$), il existe $\frac{b}{t} \in D'$, non nul (donc $b \notin \text{Ker } h$), tel que $\frac{xb}{st} = 0$. Il existe $m \in M$ tel que $x(mb) = mxb = 0$. Alors $b \notin \text{Ker } h$ implique $mb \neq 0$, et x divise zéro.

Soit $\frac{x}{s}$ non nul un pseudo-diviseur de zéro. Il existe n fractions (avec $n \geq 2$), que l'on peut supposer avoir le même dénominateur :

$\frac{a_1}{t}, \dots, \frac{a_n}{t}$ et vérifiant les conditions suivantes : ces fractions sont nulles et deux à deux non addibles, les $\frac{x a_i}{st}$ sont tous non nuls et deux à

deux addibles, et l'on a $\sum_{i=1}^n \frac{x a_i}{st} = 0$. Rendons les numérateurs addibles

(III, § 4a, lemme 1) $\sum_{i=1}^n \frac{m x a_i}{m st} = 0$. Il existe $u \in M$ tel que

$u \sum_i m x a_i = \sum_i x(m u a_i) = 0$. Les conditions ci-dessus montrent que $m u a_i \neq 0$ pour tout i , que deux produits $m u a_i$ ne sont pas addibles, que les $x(m u a_i)$ sont tous non nuls et deux à deux addibles. Donc x est un pseudo-diviseur de zéro.

Lemme 4. On a les relations :

- (1) $D' \subset (D..M)_M$ et $P' \subset (P..M)_M$.
- (2) $\bar{h}^1(D') \subset D..M$ et $\bar{h}^1(P') \subset P..M$.
- (3) et, si $\omega(M)$ associe dans Δ , $Z' \subset [(D..M)_L]^e = [(Z..M)_L]^e$
et $W' \subset [(P..M)_L]^e = [(W..M)_L]^e$.

(1) résulte aussitôt du lemme 3.

Pour $x \in R$ et $s, m \in M$, les éléments $\frac{x}{s}$ et $\frac{mx}{s}$ sont ensemble nuls, ou diviseurs de zéro, ou pseudo-diviseurs de zéro. Comme $h(x) = \frac{sx}{s}$, on a en particulier $\bar{h}^1(D') = \{x \in R ; \frac{x}{s} \in D'\}$, et la relation similaire pour P' . Le lemme 3 montre (2).

On a d'abord $W'^c = \bar{h}^1(W') \subset \bar{h}^1(P') \subset P..M$. On sait (III, § 5b, lemme 5) que W'^c est la somme (et la réunion) de $\text{Ker } h$ et d'un idéal large E . Comme E est contenu dans le noyau large $(P..M)_L$, on en déduit : $W' = W'^{ce} = (\text{Ker } h + E)^e = E^e \subset [(P..M)_L]^e$. Remarquons que (1) implique $W' \subset [(P..M)_M]_L$. Tout est similaire pour Z' . Enfin, les égalités dans (3) sont évidentes.

Lemme 5. Soient R un anneau noethérien et M une partie multiplicative, avec $0 \notin M$. L'anneau R_M est noethérien.

Cela résulte de (III, § 4b, th. 3d) et de la c.c.c. dans R . Les lemmes 3 et 4 de (III, § 4a) montrent alors ceci :

Corollaire. Soient R un anneau unitaire, et M une partie multiplicative, avec $0 \notin M$. Si R est noethérien fort, R_M l'est aussi. Si \bar{R} est noethérien, (\bar{R}_M) l'est aussi.

Théorème 2. Soient R un anneau, et M une partie multiplicative ($0 \notin M$). Soit \mathfrak{a} un idéal admettant une représentation primaire réduite $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$. Supposons que, pour $1 \leq i \leq r$ on ait $\mathfrak{q}_i \cap M = \emptyset$, et que pour $r+1 \leq j \leq n$, $\mathfrak{q}_j \cap M \neq \emptyset$. Alors $\mathfrak{a}^e = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{q}_i^e$ est une représentation primaire réduite de \mathfrak{a}^e , et $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}_d$ est l'intersection des composantes primaires de \mathfrak{a} qui ne rencontrent pas M .

La démonstration est identique à celle de [6], p. 225.

Théorème 3. Soit un anneau unitaire R noethérien fort (resp. dont \bar{R} est noethérien), et soit M une partie multiplicative ($0 \notin M$). Les idéaux suivants sont égaux : (1) le noyau du quasi-morphisme $R \rightarrow R_M$. (2) l'intersection N des idéaux primaires de R qui sont disjoints de M . (3) l'intersection N' des composantes primaires de (0) dans R qui sont disjoints de M .

La démonstration est identique à celle de [6], p. 226.

Corollaire. Soit un anneau unitaire R noethérien fort (resp. dont \bar{R} est noethérien), de graduation Δ , et soit M une partie multiplicative de R ($0 \notin M$). Supposons que $\omega(M)$ associe dans Δ . Soient L' un idéal large de R_M , et h le quasi-morphisme $R \rightarrow R_M$. Alors L'^c est la réunion et la somme de l'enveloppe large de $\bar{h}^{-1}(L' \cup \{0\})$ et de $\bigcap \mathfrak{q}_j$, les \mathfrak{q}_j étant les composantes primaires de (0) qui ne rencontrent pas M .

On complète (III, § 5, lemme 5) grâce au théorème précédent.

Fractions relatives à un idéal premier. Soient R un anneau et \mathfrak{p} un idéal premier propre de R . Pour $M = R \setminus \mathfrak{p}$, R_M est dit anneau de fractions relatif à \mathfrak{p} et noté $R_{\mathfrak{p}}$. On considère l'extension par $h : R \rightarrow R_{\mathfrak{p}}$. Rappelons les résultats pour ce cas particulier :

Théorème 4. Soit \mathfrak{p} un idéal premier d'un anneau R . Si \mathfrak{a} est un idéal de R , \mathfrak{p} contient \mathfrak{a} si et seulement si \mathfrak{a}^e est différent de $R_{\mathfrak{p}}$. L'application $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}^e$ est une bijection entre l'ensemble des idéaux premiers (resp. primaires) contenus dans \mathfrak{p} , et celui des idéaux premiers (resp. primaires) de $R_{\mathfrak{p}}$. La condition $\frac{a}{s} \in \mathfrak{p}^e$ équivaut à $a \in \mathfrak{p}$. L'idéal \mathfrak{p}^e est l'ensemble des éléments non inversibles de $R_{\mathfrak{p}}$ et est l'unique idéal maximal. Si l'idéal \mathfrak{a} de R admet une décomposition primaire réduite, \mathfrak{a}^{ec} est l'intersection des composantes primaires de \mathfrak{a} qui sont contenues dans \mathfrak{p} . Si R est unitaire et noethérien fort (resp. et si \bar{R} est noethérien), le noyau de h est l'intersection des composantes primaires de (0) (resp. des idéaux primaires de R) qui sont contenues dans \mathfrak{p} .

Théorème 5. Soient un anneau unitaire R noethérien fort (resp. dont \bar{R} est noethérien) et \mathfrak{p} un idéal premier propre de R . L'intersection H des idéaux \mathfrak{p} -primaires est égale à $\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{p}^e)^n \right]^c$.

Les idéaux $(p^e)^n$ sont p^e -primaires (III, § 3, corollaire 2 du th 5) ; puis, R_p étant noethérien, tout idéal p^e -primaire contient l'un des $(p^e)^n$ (IV, § 1, th. 1). Donc, l'intersection dans R_p des idéaux p^e -primaires est $\bigcap_{n=1}^{\infty} (p^e)^n$. La contraction commute avec une intersection quelconque. Comme il y a bijection entre l'ensemble des idéaux p -primaires et l'ensemble des idéaux p^e -primaires (III, § 3, corollaire 2 du th. 4), on en déduit que l'intersection H des idéaux p -primaires est la contraction de l'intersection des idéaux p^e -primaires.

Corollaire 1. Avec les hypothèses et les notations du théorème 5, supposons que $\omega(R..p)$ associe dans Δ . Alors, H est contenu dans $(p_L)^{ec}$. En particulier, si p est étroit, H est l'intersection $\text{Ker } h$ des composantes primaires de (0) contenues dans p .

Grâce à (V, § 2, corollaire 2 du th. 3), on majore $\bigcap_n (p^e)^n$ par $(p^e)_L = (p_L)^e$ (III, § 5, lemme 8). Si p est étroit, on a donc $\bigcap_n (p^e)^n = (0)$, d'où $H = \text{Ker } h$ par contraction.

Appelons idéal pseudo-zéroïde de p le plus grand idéal large p_W contenu dans $p \cap P$, ou, ce qui est équivalent, dans $p \cap W$. On a $p_W = (p \cap W)_L = p_L \cap W$. Notons W' l'idéal pseudo-zéroïde de R_p ; il est contenu dans p_L^e .

Corollaire 2. Avec les hypothèses et les notations du théorème 5, supposons Δ associative. Alors, H est contenu dans $(p_W)^{ec}$. En particulier, si $p \cap W$ est étroit, H est l'intersection $\text{Ker } h$ des composantes primaires de (0) contenues dans p .

La remarque (10) (V, § 2) entraîne $\bigcap_n (p^e)^n \subset W'$, et le lemme 4 montre que $W' = [(p \cap W)_L]^e = (p_W)^e$, d'où le résultat.

Corollaire 3. Avec les hypothèses et les notations du théorème 5, supposons Δ associative. Soit G l'idéal large 1-irrégulier (V, § 2, remarque(2)). L'intersection des idéaux p -primaires contenant $G \cap p$ est égale à l'intersection des composantes primaires de $G \cap p$ contenues dans p . En particulier, si $G \cap p = (0)$, H est l'intersection des composantes primaires de (0) contenues dans p .

Posons $b = G \cap p$, $S = R/b$ et $\pi = p/b$; ce dernier est évidemment un idéal premier. Les éléments de l'anneau de fractions S_π sont 1-réguliers : ceux de l'idéal maximal $\pi^e = \pi_\pi$ par définition de π , et ceux hors de π^e comme inversibles. Enfin, $1 - \pi^e$ est sans diviseur de zéro. On a donc

$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\pi^e)^n = (0)$, et l'intersection des idéaux π -primaires de S est l'intersection des idéaux primaires de (0) dans S contenus dans π (théorèmes 5 et 4). Enfin

(III, § 4, th. 7) appliqué à l'homomorphisme surjectif $R \rightarrow R/\mathfrak{b} = S$, achève la démonstration.

Théorème 6. Soit un anneau unitaire R noethérien fort (resp. dont \bar{R} est noethérien), et dont la graduation Δ est associative. Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ des idéaux premiers de R dont aucun n'est idéal premier isolé de (0) . Supposons vérifiée l'une des conditions suivantes : (1) pour tout i , l'idéal pseudo-zéroïde de chaque \mathfrak{p}_i est (0) ; (2) l'idéal pseudo-zéroïde W de R est (0) ; (3) chaque \mathfrak{p}_i est étroit ; (4) l'idéal de 1-irrégularité G de R est (0) .

Alors, il existe un idéal dont les idéaux premiers associés sont exactement $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$.

Les corollaires du théorème 5 montrent que, dans chacun des cas (1,2,3,4) envisagés, et pour tout $i = 1, \dots, n$, l'intersection des idéaux \mathfrak{p}_i -primaires de R est l'intersection des idéaux primaires de (0) contenus dans \mathfrak{p}_i .

Procédons par récurrence sur n (pour $n = 1$, prendre \mathfrak{p}_1). Pour $n \geq 2$, on peut supposer que \mathfrak{p}_n est maximal parmi les \mathfrak{p}_i donnés, et que $\mathfrak{b} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathfrak{q}_i$ est une représentation réduite, les \mathfrak{q}_i étant \mathfrak{p}_i -primaires. Si \mathfrak{b} était contenu dans tout idéal \mathfrak{p}_n -primaire, il le serait dans leur intersection, donc en particulier dans une composante primaire isolée \mathfrak{q} de (0) , donc enfin dans $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Par suite (V, § 1, remarque 2), \mathfrak{p} contiendrait l'un des idéaux $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{n-1}$ et lui serait égal, en contradiction avec les hypothèses. Donc il existe un idéal \mathfrak{p}_n -primaire \mathfrak{q}_n ne contenant pas \mathfrak{b} .

Posons $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{q}_n = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$. Si cette décomposition n'était pas réduite, puisque $\mathfrak{q}_n \not\supset \mathfrak{b}$, l'un des autres idéaux primaires, \mathfrak{q}_1 par exemple, contiendrait $\bigcap_{i=2}^n \mathfrak{q}_i$. Mais \mathfrak{q}_1 ne contient pas \mathfrak{q}_n (sinon $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_n$ et \mathfrak{p}_n ne serait pas maximal dans les \mathfrak{p}_i distincts) ; il en résulte que \mathfrak{q}_1 contiendrait $\bigcap_{i=2}^{n-1} \mathfrak{q}_i$, et la décomposition de \mathfrak{b} ne serait pas réduite, une contradiction.

Définition 1. Dans un monoïde Δ , un Δ -idéal H est dit premier si et seulement si pour tous $\alpha, \beta \notin H$ on a $\alpha\beta \notin H$.

Définition 2. Un idéal \mathfrak{J} d'un anneau R est dit quasi-premier si et seulement si pour tous $a, b \notin \mathfrak{J}$, la relation $ab \in \mathfrak{J}$ implique $ab = 0$.

Lemme 6. Soient un anneau R de graduation associative Δ , et ses idéaux zéroïde Z et pseudo-zéroïde W . Alors, $\omega(Z)$ et $\omega(W)$ sont des Δ -idéaux premiers, et les idéaux Z et W sont quasi-premiers.

Soient deux grades $\alpha, \beta \in \Delta \cdot \omega(W)$. Par définition de W , il existe des multiples $\lambda \alpha$ (ou α) et $\mu \beta$ (ou β) respectivement de α et β , et il existe

des éléments $a \in R_{\lambda \alpha}$ et $b \in R_{\mu \beta}$ tels que $a, b \notin P$. On voit aisément que $R..P$ est une partie stable du monoïde R . Cela entraîne $ab \notin P$; comme $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b) = (\lambda \alpha)(\mu \beta) = (\lambda \mu)(\alpha \beta)$, on obtient $\alpha \beta \notin \omega(W)$. Par suite, $\omega(W)$ est premier. Si $c \notin W$, $d \notin W$ et si $cd \neq 0$, on a $\omega(cd) = \omega(c)\omega(d)$. Puisque $\omega(W)$ est premier, on a $\omega(cd) \notin \omega(W)$, donc $cd \notin W$, et l'idéal W est presque premier. La démonstration pour D et Z est similaire.

Lemme 7. Soient R un anneau, L un idéal large quasi-premier, p un idéal premier, et q un idéal p -primaire. Alors $q \cup L = q + L$ est un idéal primaire, et $p \cup L = p + L$ est son idéal premier.

Utilisons (III, §3, th.5). Pour tout $b \in (p \cup L)..L \subset p$, il existe $m \geq 1$ tel que $b^m \in q \subset q \cup L$. Soient a et b tels que $ab \in q \cup L$ et $a \notin q \cup L$. On a ou bien $ab \in q$ et par suite $b \in p$ puisque q est primaire; ou bien $ab \notin q$, donc $ab \in L.. \{0\}$, et enfin L presque premier implique $b \in L$.

Lemme 8. Soient un anneau unitaire R noethérien fort (resp. dont \bar{R} est noethérien), W son idéal zéroïde, et $(0) = \bigcap_{i=1}^n q_i$ une décomposition primaire réduite de (0) , d'idéaux premiers associés p_i ($i = 1, \dots, n$). Alors $W = \bigcap_{i=1}^n (q_i \cup W)$ est une décomposition primaire de W , dont les idéaux premiers sont les $p_i \cup W$.

On a le même résultat en remplaçant W par Z .

En effet, chaque $q_i \cup W$ est un idéal primaire pour $p_i \cup W$, et on a : $\bigcap_i (q_i \cup W) = (\bigcap_i q_i) \cup W = (0) \cup W = W$.

Théorème 7. Soit un anneau unitaire R noethérien fort (resp. dont \bar{R} est noethérien) et dont la graduation Δ est associative. Soient p_1, \dots, p_n des idéaux premiers distincts, contenant l'idéal pseudo-zéroïde W , et dont aucun n'est idéal premier isolé de W . Alors il existe un idéal dont les idéaux premiers associés sont exactement p_1, \dots, p_n .

Que p_i ne soit pas idéal premier isolé de W , équivaut à ce que, pour tout idéal premier isolé π de (0) , p_i ne soit pas contenu dans $W \cup \pi$.

Pour tout idéal premier p_i , l'intersection de ses idéaux p_i -primaires est (corollaire 2 du th.5) contenu dans $(p_i)_W^{ec} = W^{ec}$ (extension par $R \rightarrow R_{p_i}$), qui est égal (th. 4) à l'intersection des composantes primaires de W qui sont contenues dans p_i . Ceci étant, la démonstration est identique à celle du théorème 6, en remplaçant (0) par W .

Remarquons que si α est un idéal quasi-premier d'un anneau R , et si $a \in R/\alpha$ est un diviseur de zéro, tout élément a de la classe α est un diviseur de zéro dans R . En effet, $a \notin \alpha$ et il existe $b \notin \alpha$ tel que $(a + \alpha)(b + \alpha) \subset \alpha$, donc que $ab \in \alpha$. On a donc $ab = 0$, puisque α est quasi-premier.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI - Algèbre. Chap. II (3e éd.) Hermann - Paris 1962.
- [2] N. BOURBAKI - Algèbre Commutative - Chap. III et IV - Hermann - Paris 1961.
- [3] M. KRASNER - Théorie des Corps valués (vol. 1, Exposés 1-4).
- [4] M. KRASNER - Théorie des Corps valués (vol. 2, Exposé 5).
Séminaire, année 1953-54.
Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie - Paris 1956.
- [5] E.S. LJAPIN - Semi groups - American Mathematical Society -
Providence - Rhode Island (1963).
- [6] O. ZARISKI - P. SAMUEL - Commutative Algebra (vol. I).
Van Nostrand Company, Princeton, New-Jersey (1958).
- [7] SAGASTUME BERRA - Sistemas de homogeneidad - Univ. Nac. La Plata.
Publ. Fac. Ci. Fisico Mat., Série Segunda - Rev. 6, n° 5, 1959, pp. 5-17.

INDEX DES NOTATIONS

	Pages		Pages
$E..F = \{x \in E ; x \notin F\}$	7	$\overline{M}^S, \overline{A}^S, \Lambda^S$	55,56
$E^* = E.. \{0\}$	7	$\overline{A}^{\xi, e}, \overline{A}^{\xi, \infty}$	57,60
$A(a), M(x)$	20,21,34,35	$\overline{A}(s,D), \overline{A}(s,D)$	60,61
$X + Y, F + G$	23,42	$[m,L], [m]$	67
A_d, M_c	26	a_d	88
Ω, \odot	38	$El(P), Fl(P)$	94
$\omega(a), \Delta$	25,26,40	P_L, P_F	94
$\overline{A}, \overline{M}$	23,39	D, Z, P, W	124,125
$\overline{M}^f, \overline{M}^a, \overline{A}^f, \overline{A}^x$	47,48,49	G	127
Λ^f, Λ^x	51	\mathfrak{p}_W	138

INDEX TERMINOLOGIQUE

Absorption	114	Grade propre	25
Agglutinateur	128	Grade nul, vide	26
Agglutinateur(a)-associé	128	ξ -grade	63
Agglutiné	35,47	Graduation	26,40
Agglutiné large	36,51	Graduation forte, très forte	105
Agglutiné simple	52	Gradué (anneau —)	23
Anel	37	Graphe	114
Annéïde	20	ξ -hauteur	63
Artinien	24,102	Homomorphisme	32,46
ξ associe dans Δ	59	Idéal	24,40
Associés (éléments —)	109	Idéal étroit	94
Charpente	110	Idéal faiblement large	92
Co-facteurs	35	Idéal large	92,93
Comaximaux	76	Idéal Δ -large	93
Combinaison linéaire	41	Idéal premier	77
Corpoïde	21	Idéal primaire	78
Couche	114	Idéal pseudo-zéroïde	125,138
Domaine	36,52	Idéal zéroïde	125
Enveloppe large	94	Intègre (annéïde —)	36
Factorisation (suite de —)	112	Intégroïde	21
Fermeture divisible	88	1-irrégulier	127
Fort	34,46,105	Isomorphisme	46,69,72
Grade	26	Libre (monoïde —)	115

Local (annéïde —)	130	Prolongement d'une graduation.	61
Large	92,93	Pseudo-diviseur.	35,52
Largement premier	78	Pseudo-inversible.	35,52
Largement primaire.	78	Pseudo-zéroïde.	125, 138
Milieu.	38,39	Quasi-directe (somme —)	39
Modulaire	42	Quasi-domaine.	35,52
Moduloïde	21	Quasi-gradué	40
Monel	38	Quasi-morphisme.	32,46
Monoïde libre	115	Quasi-premier.	139
Monomorphisme	69,73	Quasi-régulier	34,46, 105
Nilpotent par rapport à Ω	108	Régulier	34,46
Noéthérien.	24,97, 109	1-régulier	127
Noyau large	94	Représentation primaire	122
Pente.	62	Résidus	112
ξ -polynôme.	62	Stationnaire	105
Premier à	88	Strict	34,46
Premier.	77	Strictement premier.	78
Premier(largement —)	78	Strictement primaire.	78
Premier (strictement —)	78	Suite de factorisation.	112
Primaire.	78	Transverse	115
Primaire (largement —)	78	Zéroïde	125
Primaire (strictement —)	78		

(Texte reçu le 24 juin 1970)

Marcel CHADEYRAS
 Faculté des Sciences
 34, Avenue Carnot
 63 - CLERMONT-FERRAND