MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MIGUEL FERRERO
ARTIBANO MICALI

Sur les n-applications

Mémoires de la S. M. F., tome 59 (1979), p. 33-53
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__59__33_0>

Col. sur les Formes Quadratiques (1977, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 59, 1979, p. 33-53

SUR LES n-APPLICATIONS

par

Miguel FERRERO(*) et Artibano MICALI

Dans cet article, tout anneau est commutatif à élément unité, tout module est unitaire et tout morphisme d'anneaux envoie l'élément unité sur l'élément unité.

1. Définitions et exemples

Soient A un anneau, M et N deux A-modules, $f : M \to N$ une application et $n \geq 1$ un nombre entier. On dira que f est une n-application si les conditions suivantes sont vérifiées (cf. [3]) : (n-A_1) pour tout a dans A et tout x dans M, $f(a\,x) = a^n f(x)$; (n-A_2) si M^n désigne la somme directe de n copies de M, l'application $\varphi : M^n \to N$ définie par $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} (-1)^{n-p} f(x_{i_1}+\dots+x_{i_p})$ pour $x_1,\dots,x_n$ parcourant M, est multilinéaire.

On remarquera que φ est nécessairement symétrique. On dira que φ est l'application n-linéaire symétrique associée à f.

Il est clair qu'une 2-application est une application quadratique et qu'une 1-application est une application linéaire. Si $f : M \to A$ est une n-application, on dira que f est une n-forme et que $\varphi : M^n \to A$ est de la forme n-linéaire symétrique associée à f.

Etant donnée une n-application f, l'application n-linéaire symétrique associée à f est univoquement déterminée par f. Par contre, deux n-applications différentes peuvent fournir la même application n-linéaire symétrique associée (cf. exemple 7.3).

Lemme 1.1. Si $\varphi : M^n \to N$ *est une application n-linéaire, on a,* $\sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} (-1)^{n-p} \varphi(x_{1i_1}+\dots+x_{1i_p},\dots,x_{ni_1}+\dots+x_{ni_p}) = \sum_{\sigma\in \underline{S}_n} \varphi(x_{1\sigma(1)},\dots,x_{n\sigma(n)})$, *quels que soient les éléments* $x_{ij}\in M$ $(i,j=1,\dots,n)$. *En particulier, si* $x_i \in M$ $(i=1,\dots,n)$, *on a*
$$\sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} (-1)^{n-p} \varphi(x_{i_1}+\dots+x_{i_p},\dots,x_{i_1}+\dots+x_{i_p}) = \sum_{\sigma\in \underline{S}_n} \varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}).$$

(*) Travail réalisé avec l'aide partielle du CNP_q, Processo n° 22221131/77, BRESIL
Lors de la réalisation de la première partie de cet article, il a séjourné à l'Université de Campinas (UNICAMP). Son séjour a été pris en charge par la FINEP.

En effet, $\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} (-1)^{n-p}\, \varphi(x_{1i_1}+\ldots+x_{1i_p},\ldots,x_{ni_1}+\ldots+x_{ni_p}) =$
$= \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} (-1)^{n-p} \sum_{j_i\in\{i_1,\ldots,i_p\}} \varphi(x_{1j_1},\ldots,x_{nj_n})$ et on peut voir que si $\{j_1,\ldots,j_n\} \subsetneq \{1,\ldots,n\}$ le terme $\varphi(x_{1j_1},\ldots,x_{nj_n})$ figure dans la somme ci-dessus 0 fois, d'où le résultat énoncé. Notons ici que $\underline{S}_n$ désigne le groupe symétrique.

Corollaire 1.2. Si $n!$ est inversible dans A et $\varphi : M^n \to N$ est une application n-linéaire symétrique, il existe une unique n-application $f : M \to N$ telle que φ est son application n-linéaire symétrique associée.

En effet, il suffit de définir f par $f(x) = \frac{1}{n!}\varphi(x,\ldots,x)$ pour tout x dans M. L'unicité de f résulte de la remarque 1.4 et pour ce faire, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.3. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $n! = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} p^n$.

En effet, considérons la série formelle $e^t = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m \in \mathbb{Q}[[t]]$. Le coefficient de t^n dans $(1-e^t)^n = \sum_{p=o}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} e^{pt} = \sum_{p=o}^{n} (-1)^p \sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{m!}(pt)^m =$
$= \sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{p=o}^{n} (-1)^p \binom{m}{p} p^m\right) t^m$ est $\frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} p^n$. D'autre part, le coefficient de t^n dans $(1-e^t)^n = (-1)^n t^n \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} t^{m-1}\right)^n$ est $(-1)^n$, d'où le résultat énoncé.

Remarque 1.4. Soit $f : M \to N$ une n-application et $\varphi : M^n \to N$ l'application n-linéaire symétrique associée à f. Pour tout $x \in M$ on a, $\varphi(x,x,\ldots,x) =$
$= \left(\sum_{p=1}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} p^n\right) f(x) = n!\, f(x)$.

Alors, si f et f' sont deux n-applications de M dans N, si φ et φ' sont les applications associées à f et f' respectivement et si $\varphi=\varphi'$ on a, $n!f(x) = n!f'(x)$ pour tout $x \in M$. Donc, si l'homothétie définie par $n!$ dans N est injective, $f = f'$.

Proposition 1.5. Soient $f : M \to N$ une n-application, $\varphi : M^n \to N$ l'application n-linéaire symétrique associée à f et $\psi : M^{n+1} \to N$ l'application définie par $\psi(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n+1} (-1)^{n+1-p} f(x_{i_1}+\ldots+x_{i_p})$. Alors $\psi = 0$.

En effet, il suffit de remarquer que pour tout élément $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ dans M^{n+1}, on a, $\psi(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}, x_n+x_{n+1}) - \varphi(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) -$
$- \varphi(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n+1}) = 0$.

Exemple 1.6. Si M est un A-module, l'application $f : M \to M^{\otimes n}$ définie par $f(x) = x^{\otimes n}$ est une n-application. En effet, si $\varphi : M^n \to M^{\otimes n}$ est l'application définie par $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} (-1)^{n-p} (x_{i_1}+\ldots+x_{i_p})^{\otimes n}$, d'après le lemme 1.1 on a $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma\in \underline{S}_n} x_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\sigma(n)}$ et il est clair maintenant que φ est n-linéaire. De même, l'application $s_n : M \to S_n(M)$ définie par $s_n(x) = x^{\vee n}$ est une n-application et son application n-linéaire symétrique associée est l'application $\varphi_n : M^n \to S_n(M)$ donnée par $\varphi_n(x_1,\ldots,x_n) = n!\ x_1 \vee\ldots\vee x_n$, où l'on note $S_n(M)$ la n-ième puissance symétrique de M et par $\vee$ le produit symétrique.

Exemple 1.7. Soit $F(X_1,\ldots,X_m) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m} y_{i_1,\ldots,i_n} X_{i_1}\ldots X_{i_n}$ un polynôme homogène de degré n en les indéterminées $X_1,\ldots,X_m$ et à coefficients dans un A-module N. Si $\{e_1,\ldots,e_m\}$ est une base d'un A-module libre M, l'application $f : M \to N$ définie par $f(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i) = F(a_1,\ldots,a_m)$ est une n-application et son application associée est, d'après le lemme 1.1., la suivante. Si $x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_j$ $(i=1,\ldots,n)$, alors $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} (-1)^{n-p} \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} (a_{i_1 j_1}+\ldots+a_{i_p j_1})$ $\ldots(a_{i_1 j_n}+\ldots+a_{i_p j_n})\, y_{j_1,\ldots,j_p} = \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\underline{S}_n} a_{i_1 j_1}\ldots a_{i_n j_n}$ $y_{j_1,\ldots,j_n}$, donc φ est une application n-linéaire. En particulier, l'application déterminant, $\text{dét} : M_n(A) \to A$, $x \mapsto \text{dét}(x)$ est une n-application et son application n-linéaire symétrique associée est l'application $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma\in\underline{S}_n} \text{dét}(x_{\sigma(1)},\ldots$ $\ldots,x_{\sigma(n)})$, où $x_1,\ldots,x_n$ sont des éléments de $M_n(A)$ et $(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ désigne la matrice dont la i-ième colonne est la i-ième colonne de la matrice $x_{\sigma(i)}$.

Réciproquement, si A est un anneau dans lequel $n!$ est inversible et si $f : M \to N$ est une n-application où M est un A-module libre de base $\{e_1,\ldots$ $\ldots,e_m\}$, alors il existe des éléments $y_{i_1,\ldots,i_n}$ dans N, pour $i_1,\ldots,i_n \in \{1,\ldots,m\}$ tels que $f(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m} a_{i_1}\ldots a_{i_n} y_{i_1,\ldots,i_n}$. En effet, si $\varphi : M^n \to N$ est l'application n-linéaire symétrique associée à f, pour tout $x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$ dans M on a $f(x) = \frac{1}{n!}\varphi(x,\ldots,x) = \frac{1}{n!}\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m} a_{i_1}\ldots a_{i_n}\varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})$ et il suffit de prendre $y_{i_1,\ldots,i_n} = \frac{1}{n!}\varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})$.

Nous verrons, par la suite d'autres exemples de n-applications notamment lors des questions concernant la représentabilité des n-applications (cf. n°2).

Remarque 1.8. Il est clair que l'on peut construire la catégorie des n-applications, c'est à dire, la catégorie dont les objets sont les quadruplets (A,M,f,N), où A est un anneau, M et N sont deux A-modules, $n \geq 1$ est un nombre entier fixé et $f : M \to N$ est une n-application. Un morphisme de n-applications est un triplet $(\alpha,g,h) : (A,M,f,N) \to (A',M',f',N')$ où $\alpha : A \to A'$ est un morphisme de Ann, $(\alpha,g) : (A,M) \to (A',M')$ et $(\alpha,h) : (A,N) \to (A',N')$ deux morphismes de Mod, le tout faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad g \quad} & M' \\ f\downarrow & & \downarrow f' \\ N & \xrightarrow{\quad h \quad} & N' \end{array}$$

2. Représentabilité des n-applications

Soient A un anneau, M un A-module, $n \geq 1$ un nombre entier, $(e_x)_{x\in M}$ la base canonique du A-module libre $A^{(M)}$ et considérons le sous-A-module $R_n(M)$ de $A^{(M)} \times M^{\otimes n}$ engendré par les éléments de la forme $(e_{ax} - a^n e_x, 0)$ et $\left(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} (-1)^{n-p} e_{x_{i_1}+\ldots+x_{i_p}}, -x_1 \otimes\ldots\otimes x_n\right)$ où a parcourt A et $x, x_1,\ldots,x_n$ parcourent M. Notons $\Gamma_n(M) = A^{(M)} \times M^{\otimes n}/ R_n(M)$ le A-module quotient et $\gamma_n : M \to \Gamma_n(M)$ l'application composée évidente, i.e., la composée de l'application $M \to A^{(M)}\times M^{\otimes n}$, $x \mapsto (e_x, 0)$ et de la surjection canonique $A^{(M)} \times M^{\otimes n} \to \Gamma_n(M)$.

Lemme 2.1. Pour tout A-module M, $\gamma_n : M \to \Gamma_n(M)$ est une n-application.

Il est clair que pour tout $a \in A$ et tout $x \in M$, $\gamma_n(ax) = a^n\gamma_n(x)$. De plus, si $\psi_n : M^n \to \Gamma_n(M)$ désigne l'application définie par $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto$ $\mapsto \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} (-1)^{n-p} \gamma_n(x_{i_1}+\ldots+x_{i_p})$, alors $\psi_n(x_1,\ldots,x_n) = \overline{(0,x_1 \otimes\ldots\otimes x_n)}$, où la barre veut dire classe module $R_n(M)$. Donc ψ_n est n-linéaire et par suite, γ_n est une n-application. On dira que γ_n est la n-application canonique.

Lemme 2.2. Pour tout A-module M, la famille $\{\gamma_n(x)\}_{x\in M}$ engendre $\Gamma_n(M)$ en tant que A-module.

En effet, $\Gamma_n(M)$ est engendré, en tant que A-module par les éléments $\overline{(e_x, x_1 \otimes\ldots\otimes x_n)}$ où $x,x_1,\ldots,x_n$ parcourent M. Il s'ensuit que $\overline{(e_x,x_1 \otimes\ldots\otimes x_n)} =$ $= \gamma_n(x) + \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} (-1)^{n-p} \gamma_n(x_{i_1}+\ldots+x_{i_p})$.

<u>Lemme 2.3.</u> <u>Pour toute n-application</u> $f : M \to N$, <u>il existe une et une seule application A-linéaire</u> $\bar{f} : \Gamma_n(M) \to M$ <u>rendant commutatif le diagramme</u> :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_n"'] & N \\ \Gamma_n(M) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

En effet, si $\varphi : M^n \to N$ est l'application n-linéaire symétrique associée à f, il existe une unique application A-linéaire $h : M^{\otimes n} \to N$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & N \\ M^{\otimes n} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est canonique. D'autre part, considérons l'application A-linéaire $g : A^{(M)} \to N$ définie par $e_x \mapsto f(x)$. Il existe alors une unique application A-linéaire $F : A^{(M)} \times M^{\otimes n} \to N$ donnée par $F(e_x, x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = g(e_x) + h(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = f(x) + \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Comme $F(R_n(M)) = 0$, F passe au quotient, i.e., F définit une application A-linéaire $\bar{f} : \Gamma_n(M) \to N$ vérifiant $\bar{f} \circ \gamma_n = f$. Le lemme 2.2. assure l'unicité de $\bar{f}$.

<u>Remarque 2.4.</u> La démonstration du lemme ci-dessus nous suggère une autre construction de $\Gamma_n(M)$. En effet, comme $\varphi : M^n \to N$ est symétrique, on peut l'étendre à une unique application A-linéaire $h : S_n(M) \to N$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & N \\ S_n(M) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est canonique. Il suffira alors de considérer le sous-A-module $R'_n(M)$ de $A^{(M)} \times S_n(M)$ engendré par les éléments de la forme $(e_{ax} - a^n e_x, 0)$ et $\left(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} (-1)^{n-p} e_{x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}} ; -x_1 \vee \ldots \vee x_n\right)$ où a parcourt A et $x, x_1, \ldots, x_n$ parcourent M. Il est clair que $\Gamma_n(M) \simeq A^{(M)} \times S_n(M)/R'_n(M)$, isomorphisme de A-modules.

<u>Proposition 2.5</u>. <u>Pour toute application</u> A-<u>linéaire</u> $g : M \to M'$, <u>il existe une unique application</u> A-<u>linéaire notée</u> $\Gamma_n(g) : \Gamma_n(M) \to \Gamma_n(M')$ <u>rendant commutatif le diagramme</u>

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & M' \\ {\scriptstyle \gamma_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma'_n} \\ \Gamma_n(M) & \xrightarrow{\Gamma_n(g)} & \Gamma_n(M') \end{array}$$

<u>où les flèches verticales sont les</u> n-<u>applications canoniques</u>. <u>De plus</u>, <u>si</u> $g' : M' \to M''$ <u>est une autre application</u> A-<u>linéaire, on a</u> $\Gamma_n(g' o g) = \Gamma_n(g') o \Gamma_n(g)$ <u>et pour tout</u> A-<u>module</u> M, $\Gamma_n(id_M) = id_{\Gamma_n(M)}$, <u>où</u> $id_M : M \to M$ <u>est l'application identité de</u> M.

Cette proposition est une conséquence immédiate du lemme 2.3.

Une conséquence triviale de la proposition 2.5. c'est que si $g : M \overset{\sim}{\to} M'$ est un isomorphisme de A-modules, il en est de même de $\Gamma_n(g) : \Gamma_n(M) \overset{\sim}{\to} \Gamma_n(M')$. D'autre part, c'est une vérification triviale que si $g : M \to M'$ est une application A-linéaire surjective, alors $\Gamma_n(g) : \Gamma_n(M) \to \Gamma_n(M')$ est aussi surjective. Mais, en général, si $g : M \hookrightarrow M'$ est injective, ceci n'entraîne pas l'injectivité de $\Gamma_n(g) : \Gamma_n(M) \to \Gamma_n(M')$.

<u>Exemple 2.6.</u> Soient K un corps commutatif, $A = K[x,y]$ l'algèbre affine de la courbe algébrique $x^3 = y^2$ et $\mathfrak{p} = (x,y)A$ l'idéal de l'origine. On sait (cf. [4], exemple 3.5.1) que l'injection canonique $\mathfrak{p} \hookrightarrow A$ se prolonge en une application A-linéaire $S_2(\mathfrak{p}) \to S_2(A)$ qui n'est pas injective. Si maintenant K est un corps de caractéristique $\neq 2$, on a $\Gamma_2(\mathfrak{p}) \simeq S_2(\mathfrak{p})$ et $\Gamma_2(A) \simeq S_2(A)$, isomorphismes de A-modules (cf. corollaire 5.6.), donc l'application A-linéaire $\Gamma_2(\mathfrak{p}) \to \Gamma_2(A)$ déduite de l'injection canonique $\mathfrak{p} \hookrightarrow A$ n'est pas injective.

<u>Proposition 2.7</u>. <u>Pour tout</u> A-<u>module</u> M, <u>l'application</u> $\gamma_1 : M \overset{\sim}{\to} \Gamma_1(M)$ <u>est un isomorphisme de</u> A-<u>modules</u>.

Il est évident que γ_1 est surjective. D'autre part, l'application $id_M : M \to M$ se prolonge en une unique application A-linéaire $g : \Gamma_1(M) \to M$ telle que $g \circ \gamma_1 = id_M$. Ceci entraîne que γ_1 est injective.

<u>Proposition 2.8.</u> <u>Pour tout entier</u> $n \geq 1$, <u>il existe un isomorphisme de</u> A-<u>modules</u> $\Gamma_n(A) \simeq A$.

En effet, l'application $f : A \to A$ définie par $a \mapsto a^n$ est une n-application, donc il existe une unique application A-linéaire $g : \Gamma_n(A) \to A$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_n"'] & A \\ \Gamma_n(A) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Or, $\Gamma_n(A)$ est engendré, en tant que A-module, par les éléments $\gamma_n(a)$ avec a parcourant A. Comme $\gamma_n(a) = a^n\gamma_n(1)$, alors $\Gamma_n(A)$ est le A-module monogène engendré par $\gamma_n(1)$. L'équation $g(\gamma_n(1)) = f(1) = 1$ nous dit que g est surjective. Mais il est évident que g est aussi injective, c'est donc un isomorphisme de A-modules.

Remarque 2.9. Pour tout A-module M, on peut définir $\Gamma_o(M) = A$. Dans ce cas, $\gamma_o : M \to \Gamma_o(M)$ est donné par $\gamma_o(x) = 1$ pour tout $x \in M$. Il est évident que le lemme 2.3 est vérifié si $n = 0$ et f est une application constante.

3. Formes et applications non dégénérées

Tout d'abord, nous rappelons ici une notion bien connue de forme non singulière ou non dégénérée (cf. [1]). Soient A un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et $f(X_1,\dots,X_m)$ une forme cubique, i.e., un polynôme homogène de degré 3 en les indéterminées $X_1,\dots,X_m$ et à coefficients dans A. Nous dirons que $f(X_1,\dots,X_m)$ est non singulière ou non dégénérée si la variété projective définie par f n'a pas de points singuliers ou encore, ce qui est équivalent, si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial X_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial X_m}$ n'ont en commun aucun zéro non trivial. Par la suite, nous essaierons d'étendre cette notion au cas qui nous intéresse.

Etant donnée une n-application $f : M \to N$ dont l'application n-linéaire symétrique associée est φ, pour tout entier r vérifiant $1 \leq r \leq n-1$, désignons par $B(M^{n-r},N)$ le A-module des applications (n-r)-linéaires de M^{n-r} dans N. L'application $g_r : M \to B(M^{n-r},N)$ définie par $g_r(x)(x_1,\dots,x_{n-r}) = \varphi(x_1,\dots,x_{n-r},x,\dots,x)$ est une r-application. En effet, si $\psi_r : M^r \to B(M^{n-r},N)$ est l'application définie par $\psi_r(y_1,\dots,y_r) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq r} (-1)^{r-p}\, g_r(y_{i_1}+\dots+y_{i_p})$, alors quelles que soient les suites d'éléments de M, $y_1,\dots,y_r$ et $x_1,\dots,x_{n-r}$, le lemme 1.1. nous dit que $\psi_r(y_1,\dots,y_r)(x_1,\dots,x_{n-r}) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq r} (-1)^{r-p}\, \varphi(x_1,\dots,x_{n-r}, y_{i_1}+\dots+y_{i_p},\dots$ $\dots, y_{i_1}+\dots+y_{i_p}) = \sum_{(k_1,\dots,k_r)\in \mathfrak{S}_r} \varphi(x_1,\dots,x_{n-r},y_{k_1},\dots,y_{k_r}) = r!\,\varphi(x_1,\dots,x_{n-r},y_1,\dots$ $\dots,y_r)$. Ceci nous montre que ψ_r est r-linéaire, donc que g_r est une r-application.

On dira que f est <u>non dégénérée</u> si l'application $g_{n-1} : M \to Hom_A(M,N)$ vérifie la condition $g_{n-1}(x) = 0$ avec $x \in M$ entraîne $x = 0$, i.e., g_{n-1} ne représente pas zéro.

<u>Proposition 3.1</u>. <u>Soit</u> $f : M \to N$ <u>une</u> n-<u>application</u>. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> : (i) f <u>est non dégénérée</u> ; (ii) <u>pour tout entier</u> r <u>vérifiant</u> $1 \leq r \leq n-1$, g_r <u>vérifie la condition</u> "$g_r(x) = 0$ <u>avec</u> $x \in M$ <u>entraîne</u> $x = 0$".

En effet, supposons (i) vérifiée et soit $x \in M$ tel que $g_r(x) = 0$. Pour toute suite $x_1,\dots,x_{n-r}$ d'éléments de M on a $0 = g_r(x)(x_1,\dots,x_{n-r}) = \varphi(x_1,\dots$ $\dots, x_{n-r}, x,\dots,x)$ et si l'on prend $x_2 = \dots = x_{n-r} = x$ on peut écrire $\varphi(x_1, x,\dots$ $\dots,x) = 0$ pour tout $x_1 \in M$. Donc $x = 0$. La réciproque est triviale.

<u>Corollaire 3.2</u>. <u>S'il existe un</u> A-<u>module</u> N <u>et une</u> n-<u>application non dégénérée</u> $f : M \to N$, <u>alors la</u> (n-1)-<u>application</u> $\gamma_{n-1} : M \to \Gamma_{n-1}(M)$ <u>ne représente pas zéro</u>.

En effet, considérons la (n-1)-application $g_{n-1} : M \to Hom_A(M,N)$ définie par f. D'après la propriété universelle du couple $(\Gamma_{n-1}(M), \gamma_{n-1})$, il existe une unique application A-linéaire $g : \Gamma_{n-1}(M) \to Hom_A(M,N)$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & Hom_A(M,N) \\ \Gamma_{n-1}(M) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Si $x \in M$ et $\gamma_{n-1}(x) = 0$, alors $g_{n-1}(x) = 0$, d'où $x = 0$, car f est non dégénérée.

<u>Lemme 3.3</u>. <u>Soient</u> $f : M \to N$ <u>une</u> n-<u>application</u>, φ <u>l'application</u> n-<u>linéaire symétrique associée à</u> f <u>et</u> $h : N \to P$ <u>une application</u> A-<u>linéaire</u>. <u>Alors</u> : (i) <u>si</u> $h \circ f$ <u>est non dégénérée</u>, <u>il en est de même de</u> f ; (ii) <u>si</u> f <u>est non dégénérée et</u> h <u>est injective</u>, $h \circ f$ <u>est non dégénérée</u>.

Il suffit de remarquer que si $\psi : M^n \to P$ est l'application n-linéaire symétrique associée à $h \circ f$, alors $\psi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (-1)^{n-p} h(f(x_{i_1} + \dots$ $\dots + x_{i_p})) = h(\varphi(x_1,\dots,x_n))$, pour toute suite $x_1,\dots,x_n$ d'éléments de M.

<u>Corollaire 3.4</u>. <u>Pour un</u> A-<u>module</u> M <u>donné</u>, <u>il existe un</u> A-<u>module</u> N <u>et une</u> n-<u>application non dégénérée</u> $f : M \to N$ <u>si et seulement si</u>, <u>la</u> n-<u>application canonique</u> $\gamma_n : M \to \Gamma_n(M)$ <u>est non dégénérée</u>.

Soit $f : M \to N$ une n-application non dégénérée. Il existe une unique application A-linéaire $\bar{f} : \Gamma_n(M) \to N$ telle que $\bar{f} \circ \gamma_n = f$ et le lemme 3.3. nous dit que γ_n est non dégénérée. La réciproque est évidente.

Corollaire 3.5. Soient $f : M \to N$ une n-application et $\bar{f} : \Gamma_n(M) \to N$ l'application A-linéaire induite par f. Si γ_n est non dégénérée et $\bar{f}$ est injective, alors f est non dégénérée.

En effet, il suffit d'appliquer le lemme 3.3.

Proposition 3.6. Soient A un anneau sans éléments nilpotents et dans lequel n! n'est pas diviseur de zéro et M un A-module libre de type fini. Alors la p-application $\gamma_p : M \to \Gamma_p(M)$ est non dégénérée pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n$.

Il suffit de considérer le cas où $p = n$. Soit $\{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de M sur A et considérons la n-forme $f : M \to A$ définie par $f(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i^n$ (cf. exemple 1.7.). Si $\varphi : M^n \to A$ est la forme n-linéaire symétrique associée à f et si $x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_j$ $(i=1,\ldots,n)$ sont des vecteurs de M, alors $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in S_n} a_{k_1 j} \cdots a_{k_n j} = n! \sum_{j=1}^{m} a_{1j} \cdots a_{nj}$. Donc, si $x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{m} b_i e_i$ sont deux vecteurs de M, on a $\varphi(x,\ldots x,y) = n! \sum_{i=1}^{m} a_i^{n-1} b_i$ et si $\varphi(x,\ldots,x,y) = 0$ pour tout $y \in M$, alors $a_i^{n-1} = 0$ $(i=1,\ldots,m)$, d'où $a_i = 0$ $(i=1,\ldots$ $\ldots,m)$ ou encore $x = 0$. Le corollaire 3.4. achève la démonstration.

Corollaire 3.7. Soient A un anneau sans éléments nilpotents et dans lequel n! n'est pas diviseur de zéro et M un A-module libre de type fini. Alors la p-application $\gamma_p : M \to \Gamma_p(M)$ ne représente pas zéro pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$..

Pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$, γ_{p+1} est non dégénérée. Il suffit maintenant d'appliquer le corollaire 3.2.

Exemple 3.8. Pour tout $\mathbb{Z}$-module libre de type fini M, l'application canonique $\gamma_n : M \to \Gamma_n(M)$ est non dégénérée et ne représente pas zéro.

4. Points singuliers et formes non dégénérées

Soit $F(X_1,\ldots,X_m) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m} c_{i_1,\ldots,i_n} X_{i_1} \ldots X_{i_n}$ un polynôme homogène de degré n en les indéterminées $X_1,\ldots,X_m$ et à coefficients dans l'anneau A. La dérivée partielle de F par rapport à X_i s'écrit $\frac{\partial F}{\partial X_i} = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m} c_{i_1,\ldots}$ $_{\ldots,i_n}(\delta_{i_1 i} X_{i_2} \ldots X_{i_n} + \ldots + X_{i_1} \ldots X_{i_{n-1}} \delta_{i_n i})$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker) et par un changement d'indices, on a $\frac{\partial F}{\partial X_i} = \sum_{i_2,\ldots,i_n=1}^{m} (c_{i,i_2,\ldots,i_n} + c_{i_2,i,i_3,\ldots}$ $_{\ldots,i_n} + \ldots + c_{i_2,i_3,\ldots,i_n,i}) X_{i_2} \ldots X_{i_n}$.

On dira que un point $x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$ du A-module libre A^m de base $\{e_1,\dots,e_m\}$ est un <u>point singulier géométrique</u> de la n-forme f définie par F si $\frac{\partial F}{\partial X_i}(a_1,\dots,a_m) = 0$ $(i=1,\dots,m)$. Par la suite, nous donnerons une caractérisation algébrique des points singuliers géométriques.

En effet, si $x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_j$ $(i=1,\dots,n)$ sont n éléments de A^m et si φ est la forme n-linéaire symétrique associée à f on a (cf. exemple 1.7.),

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m} c_{i_1,\dots,i_n} \sum_{(k_2,\dots,k_n)\in S_{n-1}} (a_{ni_1} a_{k_2 i_2}\cdots a_{k_n i_n} + a_{k_2 i_1} a_{ni_2}\cdots a_{k_n i_n} + \dots + a_{k_2 i}\cdots a_{k_n i_{n-1}} a_{ni_n}).$$

Si maintenant $x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{m} b_i e_i$ sont deux éléments de A^m, on a

$$\varphi(x,\dots,x,y) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m} c_{i_1,\dots,i_n} \sum_{(k_2,\dots,k_n)\in S_{n-1}} (b_{i_1} a_{i_2}\dots a_{i_n} + a_{i_1} b_{i_2}\dots a_{i_n} + \dots + a_{i_1}\dots a_{i_{n-1}} b_{i_n}) = (n-1)! \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m} c_{i_1,\dots,i_n}(b_{i_1} a_{i_2}\dots a_{i_n} + \dots + a_{i_1}\dots a_{i_{n-1}} b_{i_n}) = (n-1)! \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(a_1,\dots,a_m).$$

D'autre part, étant donnée une n-application $g : M \to N$ dont l'application n-linéaire symétrique associée est ψ, on dira que un point x de M est un <u>point singulier</u> de g si $\psi(x,\dots,x,y) = 0$ pour tout $y \in M$.

La formule $\varphi(x,\dots x,y) = (n-1)! \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(a_1,\dots,a_m)$ nous fournit le résultat suivant :

<u>Proposition 4.1</u>. <u>Si $x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$ est un point singulier géométrique de f défini par F sur A^m, alors x est un point singulier de f. Réciproquement, si x est un point singulier de la n-forme f et si $(n-1)!$ n'est pas diviseur de zéro dans A alors x est un point singulier géométrique de f.</u>

<u>Corollaire 4.2</u>. <u>Soit $f : A^m \to A$ une n-forme définie par un polynôme homogène de degré n. Si $(n-1)!$ est inversible dans A alors f est non dégénérée si et seulement si f n'a pas des points singuliers géométriques non triviaux.</u>

<u>Remarque 4.3</u>. On peut vérifier, en utilisant ce critère, qu'une forme quadratique est non dégénérée si et seulement si son descriminant est inversible dans A.

5. <u>Formes et algèbres symétriques</u>

Soient A un anneau, M un A-module, $n \geq 1$ un nombre entier et $s_n : M \to S_n(M)$ la n-application définie dans l'exemple 1.6, i.e., $s_n(x) = x^{\vee n}$ pour tout $x \in M$. On sait déjà que si $\varphi_n : M^n \to S_n(M)$ est l'application n-linéaire symétrique associée à s_n on a, $\varphi_n(x_1,\dots,x_n) = n!\, x_1 \vee\dots\vee x_n$. Désignons par

$h : \Gamma_n(M) \to S_n(M)$ l'unique application A-linéaire telle que $h \circ \gamma_n = s_n$, où $\gamma_n : M \to \Gamma_n(M)$ est la n-application canonique. De même, si $\psi_n : M^n \to \Gamma_n(M)$ est l'application n-linéaire symétrique associée à γ_n, il existe une unique application A-linéaire $g : S_n(M) \to \Gamma_n(M)$ que vérifie $g(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = \psi_n(x_1,\ldots,x_n)$. Pour tout $x \in M$ on a $(g \circ h)\,(\gamma_n(x)) = g(x^{\vee n}) = n!\ \gamma_n(x)$. Donc $g\circ h = n!\,\mathrm{id}_{\Gamma_n(M)}$.

D'autre part, quels que soient $x_1,\ldots,x_n$ dans M, on a, $h \circ g\ (x_1 \vee \ldots \vee x_n) = h(\psi_n(x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} (-1)^{n-p}\, h \circ \gamma_n(x_{i_1}+\ldots+x_{i_p}) = \sum_{1\leq i<\ldots<i_p\leq n} (-1)^{n-p}\, s_n(x_{i_1}+\ldots+x_{i_p}) = \varphi_n(x_1,\ldots,x_n) = n!\ x_1 \vee\ldots\vee x_n$. Donc, $hog = n!\ \mathrm{id}_{S_n(M)}$.

Lemme 5.1. *Si l'homothétie définie par $n!$ dans M est surjective, alors les homothéties définies par $n!$ dans $S_p(M)$ et $\Gamma_p(M)$ sont surjectives pour tout entier p tel que $1\leq p\leq n$. Dans ce cas, g et h sont surjectives et $\{x^{\vee p}\}_{x\in M}$ est un système de générateurs de $S_p(M)$.*

Il suffit de considérer le cas où $p=n$. Si $n!$ désigne l'homothétie définie par $n!$ dans M, on sait que $S_n(n!) : S_n(M) \to S_n(M)$ est surjective. Or, $S_n(n!)$ est l'homothétie définie par $(n!)^n$, donc $(n!)^n.S_n(M) = S_n(M)$. Comme $S_n(M) \supset n!\ S_n(M) \supset\ldots\supset (n!)^n\ S_n(M)$ on a $n!\ S_n(M) = S_n(M)$. Le même raisonnement s'applique à $\Gamma_n(M)$. Les formules $g \circ h = n!\ \mathrm{id}_{\Gamma_n(M)}$ et $h \circ g = n!\ \mathrm{id}_{S_n(M)}$ entraînent que g et h sont surjectives. Finalement, comme h est surjective, $\{\gamma_n(x)\}_{x\in M}$ engendre $\Gamma_n(M)$ en tant que A-module et $h(\gamma_n(x)) = x^{\vee n}$, alors $\{x^{\vee n}\}_{x\in M}$ est un système de générateurs du A-module $S_n(M)$.

Lemme 5.2. *Soient A un anneau et M un A-module. Supposons que M soit projectif de type fini ou que A soit intègre et M plat. Si l'homothétie définie par $n!$ dans M est injective, alors l'homothétie définie par $n!$ dans $S_p(M)$ est injective pour tout entier $p \geq 1$.*

Soit u dans $S_p(M)$ tel que $n!\ u = 0$. Comme $S_p(n!)(u) = (n!)^p u=0$ et $S_p(n!)$ est injective (cf. [2], Corollaire 3.12), alors $u = 0$.

Lemme 5.3. *Supposons qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que l'homothétie définie par $n!$ dans $S_p(M)$ (respectivement $\Gamma_p(M)$) soit injective et que l'application $s_p : M \to S_p(M)$ (resp. $\gamma_p : M \to \Gamma_p(M)$) ne représente pas zéro. Alors l'homothétie définie par $n!$ dans M est injective.*

Ceci résulte tout simplement de la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ n!\ } & M \\ {\scriptstyle s_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_p} \\ S_p(M) & \xrightarrow{\ S_p(n!)\ } & S_p(M) \end{array}$$

Le même raisonnement vaut pour $\Gamma_p(M)$.

Lemme 5.4. Si l'homothétie définie par $n!$ dans M est bijective, alors les homothéties définies par $n!$ dans $S_p(M)$ et $\Gamma_p(M)$ sont bijectives pour tout entier $p \geq 1$.

Proposition 5.5. Soient A un anneau, M un A-module et $n \geq 1$ un nombre entier. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) $n!$ définit une homothétie injective dans $S_n(M)$ et une homothétie surjective dans $\Gamma_n(M)$; (ii) g et h sont des isomorphismes ; (iii) $n!$ définit une homothétie surjective dans $S_n(M)$ et une homothétie injective dans $\Gamma_n(M)$; (iv) $n!$ définit une homothétie bijective dans $S_n(M)$ et dans $\Gamma_n(M)$.

Les conditions (i) entraînent que g est un isomorphisme et par g, les propriétés de (i) se transforment en celles de (iii). De même, les conditions de (iii) entraînent que h est un isomorphisme et par h les propriétés de (iii) se transforment en celles de (i). Le reste est trivial.

Corollaire 5.6. Si $n!$ définit une homothétie bijective dans M, alors g et h sont des isomorphismes.

En effet, d'après le lemme 5.4., $n!$ définit des homothéties bijectives dans $S_n(M)$ et $\Gamma_n(M)$ et le corollaire s'ensuit.

Proposition 5.7. Si l'homothétie définie par $n!$ dans $\Gamma_n(M)$ est injective, alors γ_n est non dégénérée si, et seulement si, s_n est non dégénérée.

Comme $h \circ \gamma_n = s_n$, si s_n est non dégénérée il en est de même de γ_n. Réciproquement, comme h est injective, alors γ_n non dégénérée entraîne que s_n est non dégénérée (cf. lemme 3.3.).

Par la suite, on fera un certain nombre de remarques concernant les n-applications et ses connexions avec l'algèbre symétrique.

Remarques 5.8. On note que $s_n : M \to \Gamma_n(M)$ est non dégénérée si et seulement si la condition $n!\, x^{\vee(n-1)} \vee y = 0$ pour tout y dans M entraîne $x = 0$.

5.9. Si l'homothétie définie par $n!$ dans $S_n(M)$ est injective, alors s_n est non dégénérée si et seulement si la condition $x^{\vee(n-1)} \vee y = 0$ pour tout $y \in M$, entraîne $x = 0$.

5.10. Si s_n est non dégénérée la condition $x^{\vee(n-1)} = 0$ avec $x \in M$ entraîne $x = 0$.

Proposition 5.11. Soient A un anneau réduit, i.e., sans éléments nilpotents et M un A-module qui peut être plongé dans un A-module L de type fini. Alors, tout

<u>élément</u> x <u>de</u> M <u>qui est nilpotent dans</u> $S(M)$ <u>est nul</u>.

Il est clair que $S(L)$ n'a pas d'éléments nilpotents sauf les triviaux, car $S(L)$ est un anneau de polynômes. D'autre part si A est réduit, $A[X]$ l'est aussi.

Soit $x \in M$ tel que $x^{\vee n} = 0$ et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "s'_n"'] & L \arrow[d, "s_n"] \\ S_n(M) \arrow[r, "S_n(j)"] & S_n(M) \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont canoniques. On a $0 = S_n(j)\ (x^{\vee n}) = s_n(j(x)) = (j(x))^{\vee n}$, d'où $j(x) = 0$ et, par suite $x = 0$, où $j : M \hookrightarrow L$ est l'injection canonique.

<u>Remarque 5.12</u>. La proposition 5.11. nous dit que si A est un anneau réduit et M est un A-module qui peut être plongé dans un A-module libre de type fini, pour tout $n \geq 1$, la n-application $s_n : M \to S_n(M)$ ne représente pas zéro. De plus, si pour tout entier $n \geq 1$ l'homothétie définie par $n!$ dans $S_n(M)$ est injective, alors pour tout entier $n \geq 1$, s_n est non dégénérée. En effet, si $n!\ x^{\vee(n-1)} \vee y = 0$ pour tout $y \in M$, on a $x^{\vee n} = 0$ et, par suite, $x = 0$.

6. <u>n-Applications et lois polynômes</u>

Etant donnés un nombre entier $n \geq 1$ et deux A-modules M et N, nous désignerons par $P_n(M,N)$ l'ensemble des lois polynômes homogènes de degré n de M dans N (cf. [7]) et par $F_n(M,N)$ l'ensemble des n-applications de M dans N ; $P_n(M,N)$ et $F_n(M,N)$ sont des A-modules de manière évidente.

<u>Proposition 6.1.</u> <u>Il existe un morphisme de A-modules</u> $\Gamma_N : P_n(M,N) \to F_n(M,N)$ <u>défini par</u> $f \mapsto f_A$.

Il suffira de montrer que $f_A : M \to N$ est une n-application. La relation $f_A(a\,x) = a^n\, f_A(x)$, pour tout $a \in A$ et pour tout $x \in M$ est évidente. Considérons l'application $\varphi : M^n \to N$ associée à f_A, i.e., $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (-1)^{n-p} f_A(x_{i_1}+\dots+x_{i_p})$ pour $x_1,\dots,x_n$ parcourant M. On sait (cf. [7], théorème 1.1.) que pour toute A-algèbre commutative $A \to B$, pour toute famille finie $x_1,\dots,x_m$ d'éléments de M et pour toute famille finie $b_1,\dots,b_m$ d'éléments de B, il existe des éléments $y_{k_1,\dots,k_m}$ de N tels que $f_B\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \otimes b_i\right) = \sum_{k_1+\dots+k_m=n} y_{k_1,\dots,k_m} \otimes b_1^{k_1} \dots b_m^{k_m}$. En particulier, si l'on prend $B = A[T_1,\dots,T_n]$, l'anneau de polynômes en les indéterminées $T_1,\dots,T_n$ et à coefficients dans A, alors $\quad f_B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes T_i\right) = \sum_{k_1+\dots+k_n=n} y_{k_1,\dots,k_n} \otimes T_1^{k_1}\dots T_n^{k_n}$

pour toute suite finie $x_1,\dots,x_n$ d'éléments de M. En particularisant les valeurs des $T_i (i=1,\dots,n)$, c'est à dire, $T_{i_1} \mapsto 1,\dots,T_{i_p} \mapsto 1$, et $T_j \mapsto 0$ pour $j \notin \{1,\dots$ $\dots,i_p\}$, on obtient $f_A(x_{i_1}+\dots+x_{i_p}) = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=n \\ k_j=0 \text{ si } j\notin\{i_1,\dots,i_p\}}} y_{k_1,\dots,k_n}$, ou encore

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} (-1)^{n-p} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=n \\ k_j = 0 \text{ si } j\notin\{i_1,\dots,i_p\}}} y_{k_1,\dots,k_n}.$$

Comme dans le lemme 1.1., on voit que $y_{k_1,\dots,k_n}$ figure dans cette somme 0 fois si $(k_1,\dots,k_n) \neq (1,\dots,1)$. Donc $\varphi(x_1,\dots,x_n) = y_{1,\dots,1}$ et la démonstration est achevée.

Notons $\Gamma_n^*(M)$ le sous-A-module des éléments homogènes de degré n de l'algèbre des puissances divisées de M et $\gamma_n^* : M \to \Gamma_n^*(M)$ la loi polynôme canonique. Il existe alors une unique application A-linéaire $h : \Gamma_n(M) \to \Gamma_n^*(M)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "(\gamma_n^*)_A"] \arrow[d, "\gamma_n"'] & \Gamma_n^*(M) \\ \Gamma_n(M) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

où $(\gamma_n^*)_A(x) = x^{[n]}$ pour tout $x \in M$.

Notons encore $\mathrm{Hom}_n(M,N)$ l'image de Γ_N, $\bar{\Gamma}_n(M)$ le sous-A-module de $\Gamma_n^*(M)$ engendré par les éléments de la forme $\{x^{[n]}\}_{x\in M}$ et $\tilde{\Gamma}_n(M) = \Gamma_n^*(M)/\bar{\Gamma}_n(M)$. Le théorème suivant caractérise le cas où toute n-application $f : M \to N$ peut être étendue à une loi polynôme homogène de degré n.

Théorème 6.2. Soient A un anneau et M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) pour tout A-module N, l'application A-linéaire $\Gamma_N : P_n(M,N) \to F_n(M,N)$ est surjective ; (ii) l'application $\Gamma = \Gamma_{\Gamma_n(M)} :$ $P_n(M, \Gamma_n(M)) \to F_n(M, \Gamma_n(M))$ est surjective ; (iii) γ_n est dans $\mathrm{Im}(\Gamma)$; (iv) il existe une application A-linéaire $h' : \Gamma_n^*(M) \to \Gamma_n(M)$ telle que $h' \circ h = id_{\Gamma_n(M)}$; (v) pour tout A-module N, il existe une application A-linéaire $\Delta_N : F_n(M,N)^n \to P_n(M,N)$ telle que $\Gamma_N \circ \Delta_N = id_{F_n(M,N)}$; (vi) h est injective et le foncteur $\mathrm{Hom}_n(M,-)$ est représentable ; (vii) le foncteur $\mathrm{Hom}_n(M,-)$ est représentable par $\Gamma_n(M)$.

Il est évident que (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (v) $\Rightarrow$ (i). Si $\gamma_n \in \mathrm{Im}(\Gamma)$ alors γ_n s'étend à une loi polynôme homogène de degré n, $g_n : M \to \Gamma_n(M)$, c'est-à-dire, $(g_n)_A = \gamma_n$. Il existe alors une unique application A-linéaire $h' : \Gamma_n^*(M) \to \Gamma_n(M)$ telle que $h' \circ \gamma_n^* = g_n$. Or $h' \circ (\gamma_n^*)_A = (g_n)_A = \gamma_n$ et pour tout $x \in M$ on a, $h' \circ h(\gamma_n(x)) = h'((\gamma_n^*)_A(x)) = \gamma_n(x)$, ou encore, $h' \circ h = = \mathrm{id}_{\Gamma_n(M)}$. Ceci nous montre que (iii) $\Rightarrow$ (iv). Montrons (iv) $\Rightarrow$ (v). Supposons donc qu'il existe une application A-linéaire $h' : \Gamma_n^*(M) \to \Gamma_n(M)$ telle que $h' \circ h = = \mathrm{id}_{\Gamma_n(M)}$. Pour tout A-module N, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(\Gamma_n^*(M),N) & \underset{h'^*}{\overset{h^*}{\rightleftarrows}} & \mathrm{Hom}_A(\Gamma_n(M),N) \to 0 \\
\wr\| & & \wr\| \\
P_n(M,N) & \xrightarrow{\Gamma_N} & F_n(M,N)
\end{array}$$

où les isomorphismes verticaux sont canoniques. Il suffit de définir $\Delta_N : F_n(M,N) \to P_n(M,N)$ de façon évidente, car $h^* \circ h'^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(\Gamma_n(M),N)}$.

Puisque (i), (ii), (iii), (iv) et (v) sont déjà équivalentes, il est clair que ces conditions entraînent (vi).

Si $h : \Gamma_n(M) \to \Gamma_n^*(M)$ est injective on a un isomorphisme $\Gamma_n(M) \tilde{\to} \bar{\Gamma}_n(M)$. De plus, si $\mathrm{Hom}_n(M,-)$ est représentable il l'est par $\bar{\Gamma}_n(M)$ (cf. [6], corollary 4.2) et (vii) s'ensuit.

Finalement, si $\mathrm{Hom}_n(M,-)$ est représentable par $\Gamma_n(M)$, comme il l'est aussi par $\bar{\Gamma}_n(M)$, on a un isomorphisme canonique induit par h, $\Gamma_n(M) \tilde{\to} \bar{\Gamma}_n(M)$. De plus on sait que la suite exacte canonique

$$0 \to \bar{\Gamma}_n(M) \to \Gamma_n^*(M) \to \tilde{\Gamma}_n(M) \to 0$$

est scindée (cf. [6], corollary 4.2.) et ceci permet de vérifier (iv).

<u>Remarque 6.3</u>. Supposons que les conditions équivalentes du théorème 6.2. soient vérifiées. Alors pour toute n-application $f : M \to N$ il existe une loi polynôme homogène de degré n de M dans N, notée g, telle que $g_A = f$. Pour toute A-algèbre commutative $A \to B$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \otimes_A B & \xrightarrow{g_B} & N \otimes_A B \end{array}$$

commute, où les flèches verticales sont canoniques. Pour tout élément $x \otimes b$ de $M \otimes_A B$, on a $g_B(x \otimes b) = g_B(x \otimes 1)b^n = f(x) \otimes b^n$. Il est clair que g_B n'est pas unique ni une n-application.

Corollaire 6.4. Soit A un anneau sur lequel tout A-module est projectif (par exemple un anneau semi-simples avec des conditions artiniennes) et soit M un A-module. L'application A-linéaire canonique $h : \Gamma_n(M) \to \Gamma_n^*(M)$ est injective si et seulement si les conditions équivalentes du théorème 6.2. sont vérifiées.

En effet, d'après les hypothèses faites sur A, si h est injective, la suite exacte de A-modules

$$0 \to \Gamma_n(M) \xrightarrow{h} \Gamma_n^*(M) \to \widetilde{\Gamma}_n(M) \to 0$$

est scindée. Donc, on a la condition (iv) de 6.2. La réciproque est donnée par le théorème 6.2.

Proposition 6.5. L'application A-linéaire canonique $h : \Gamma_n(M) \to \Gamma_n^*(M)$ est surjective si et seulement si pour tout A-module N, l'application $\Gamma_N : P_n(M,N) \to F_n(M,N)$ est injective. Autrement dit, toute loi polynôme est déterminée par sa restriction à A.

Considérons la suite exacte $\Gamma_n(M) \xrightarrow{h} \Gamma_n^*(M) \to 0$. Pour tout A-module N on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & \mathrm{Hom}_A(\Gamma_n^*(M),N) & \xrightarrow{h^*} & \mathrm{Hom}_A(\Gamma_n(M),N) \\ & & \wr\| & & \wr\| \\ & & P_n(M,N) & \xrightarrow{\Gamma_N} & F_n(M,N) \end{array}$$

où les isomorphismes verticaux sont canoniques. Alors Γ_N est injective. Réciproquement, si Γ_N est injective pour tout A-module N, il suffit de prendre $N = \Gamma_n^*(M)/\mathrm{Im}(h)$ et $\pi : \Gamma_n^*(M) \to N$ la projection canonique. Puisque $h^*(\pi) = \pi \circ h = 0$, on a $\pi = 0$, et alors, h est surjective.

Corollaire 6.6. Soient A un anneau intègre de cardinal infini et M un A-module projectif de type fini. Les conditions équivalentes de la proposition 6.5. sont vérifiées si et seulement si $\mathrm{Hom}_n(M,-)$ est représentable, ou encore, si et seulement si rang $(M) \leq 1$ ou $n \leq d(A)$, où $d(A) = \inf\{\mathrm{card}\,(A/I)\ ;\ I$ idéal maximal de $A\}$.

Il suffit d'appliquer le corollaire 7.3. de [6].

Remarque 6.7. Si A est un corps infini, les conditions équivalentes de la proposition 6.5. sont vérifiées pour tout A-espace vectoriel M et pour tout entier $n \geq 1$.

Théorème 6.8. Soient A un anneau et M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) pour tout A-module N, l'application A-linéaire $\Gamma_N : P_n(M,N) \to F_n(M,N)$ est un isomorphisme de A-modules ; (ii) l'application $\Gamma : P_n(M,\Gamma_n(M)) \to F_n(M,\Gamma_n(M))$ est un isomorphisme de A-modules ; (iii) γ_n est dans $\mathrm{Im}(\Gamma)$ et il existe une unique loi polynôme homogène de degré n de M dans $\Gamma_n(M)$ dont la restriction à A coïncide avec γ_n ; (iv) l'application $h : \Gamma_n(M) \to \Gamma_n^*(M)$ est un isomorphisme de A-modules ; (v) $\mathrm{Hom}_n(M,-) = F_n(M,-)$ et h est surjective.

Il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iv) $\Rightarrow$ (i). Supposons (iii) vérifiée.

D'après le théorème 6.2. il existe une application A-linéaire $h' : \Gamma_n^*(M) \to \Gamma_n(M)$ telle que $h' \circ h = \mathrm{id}_{\Gamma_n(M)}$. Comme $h' \circ \gamma_n^* : M \to \Gamma_n(M)$ est une loi polynôme homogène de degré n telle que $(h' \circ \gamma_n^*)_A = \gamma_n$, alors $h' \circ \gamma_n^*$ est l'unique extension de γ_n. De plus, comme n-applications, $h \circ \gamma_n = (\gamma_n^*)_A$ et comme γ_n peut être considérée comme une loi polynôme homogène de degré n, il existe une unique application A-linéaire $f : \Gamma_n^*(M) \to \Gamma_n(M)$ telle que $f \circ \gamma_n = \gamma_n^*$, comme lois polynômes. Il s'ensuit que $f = h$ et par suite, $h \circ \gamma_n = \gamma_n^*$ comme lois polynômes. On a donc $h \circ h' \circ \gamma_n^* = \gamma_n^*$, d'où $h \circ h' = \mathrm{id}_{\Gamma_n^*(M)}$. Ceci nous montre que (iii) $\Rightarrow$ (iv). Comme (i) entraîne que $\mathrm{Hom}_n(M,-) = F_n(M,-)$, il reste seulement à montrer que (v) $\Rightarrow$ (i). Mais ceci résulte de la proposition 6.5.

Corollaire 6.9. Soient A un anneau intègre de cardinal infini et M un A-module libre de type fini. Les conditions équivalentes du théorème 6.2. sont vérifiées si, et seulement si, les conditions équivalentes du théorème 6.8. le sont.

En effet, d'après le corollaire 6.6., si les conditions équivalentes du théorème 6.2. sont vérifiées, h est surjective, c'est à dire, bijective.

Corollaire 6.10. Soient A un corps de cardinal infini et M un A-espace vectoriel de type fini. Les conditions équivalentes du théorème 6.8. sont vérifiées pour tout entier $n \geq 1$ si et seulement si h est injective.

En effet, on sait que h est, dans ce cas, surjective.

Proposition 6.11. *Soient A un anneau et M un A-module libre de type fini de base $\{e_1,\dots,e_m\}$. Les conditions équivalentes du théorème 6.2. se vérifient pour M si, et seulement si, pour toute n-application $f : M \to N$, il existe un polynôme homogène $F(X_1,\dots,X_m)$ de degré n en les indéterminées $X_1,\dots,X_m$ et à coefficients dans N tel que pour tout élément $\sum_{i=1}^{m} a_i e_i$ de M on ait $f(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i) = F(a_1,\dots,a_m)$. De plus, les conditions équivalentes du théorème 6.8. sont vérifiées si et seulement si pour toute n-application $f : M \to N$ le polynôme F correspondant est unique.*

Supposons les conditions équivalentes du théorème 6.2. vérifiées et soit $f : M \to N$ une n-application. On peut considérer f comme une loi polynôme homogène de degré n de M dans N et pour toute A-algèbre commutative $A \to B$ il existe des éléments $y_{k_1,\dots,k_n}$ dans N tels que pour tout élément $\sum_{i=1}^{m} e_i \otimes b_i$ de $M \otimes_A B$ on ait $f_B(\sum_{i=1}^{m} e_i \otimes b_i) = \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{m} y_{k_1,\dots,k_n} \otimes b_{k_1} \dots b_{k_n}$. Si l'on prend $B = A[X_1,\dots,X_m]$, l'anneau des polynômes en les indéterminées $X_1,\dots,X_m$ et à coefficients dans A, on voit que le polynôme $F(X_1,\dots,X_m) = \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{m} y_{k_1,\dots,k_n} X_{k_1} \dots X_{k_n}$ vérifie les conditions demandées. Réciproquement, soit $f : M \to N$ une n-application et $F(X_1,\dots,X_m) = \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{m} y_{k_1,\dots,k_n} X_{k_1} \dots X_{k_n}$ le polynôme correspondant. Si $A \to B$ est une A-algèbre commutative, l'application $f_B : M \otimes_A B \to N \otimes_A B$ définie par $\sum_{i=1}^{m} e_i \otimes b_i \mapsto \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{m} y_{k_1,\dots,k_n} \otimes b_{k_1} \dots b_{k_n}$ est bien définie, est une loi polynôme homogène de degré n et $f_A = f$.

La deuxième partie de la proposition est évidente (cf. [7]).

Remarque 6.12. La proposition précédente et le fait que, en général, une n-application $f : M \to N$ ne peut pas s'étendre à une loi polynôme entraînent qu'une formule $f(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^n f(x_i) + \sum_{\{i_1,\dots,i_n\}} c_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1} \dots a_{i_n} \varphi(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$ n'est pas, en général, vraie (on sait que ceci est vrai pour $n = 2$).

Proposition 6.13. *Soient A un anneau et M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) pour toute A-algèbre commutative $A \to B$, l'application B-linéaire canonique $h_B : \Gamma_n(M \otimes_A B) \to \Gamma_n^*(M \otimes_A B)$ est un isomorphisme de B-modules ; (ii) les conditions équivalentes du théorème 6.8. sont vérifiées et pour toute A-algèbre commutative $A \to B$, on a un isomorphisme de B-modules $\Gamma_n(M \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} \Gamma_n(M) \otimes_A B$, via l'application $\gamma_n(x \otimes b) \mapsto \gamma_n(x) \otimes b^n$.*

En effet, supposons que la condition (i) soit vérifiée. En particulier $h_A : \Gamma_n(M) \xrightarrow{\sim} \Gamma_n^*(M)$ est un isomorphisme. De plus, pour toute A-algèbre commutative $A \to B$ on a des isomorphismes de B-modules, $\Gamma_n(M \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} \Gamma_n^*(M \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} \Gamma_n^*(M) \otimes_A B \xrightarrow{\sim} \Gamma_n(M) \otimes_A B$, via les applications $\gamma_n(x \otimes b) \mapsto (x \otimes b)^{[n]}$, $(x \otimes b)^{[n]} \mapsto x^{[n]} \otimes b^n$ et $x^{[n]} \otimes b \mapsto \gamma_n(x) \otimes b$, respectivement (cf. [7], théorème III.3). Réciproquement, pour toute A-algèbre commutative $A \to B$, on a des isomorphismes de B-modules $\Gamma_n(M \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} \Gamma_n(M) \otimes_A B \xrightarrow{\sim} \Gamma_n^*(M) \otimes_A B \xrightarrow{\sim} \Gamma_n^*(M \otimes_A B)$, d'après les hypothèses faites dans (ii). Donc, (ii) $\Rightarrow$ (i).

7. Etude de quelques exemples

Dans ce paragraphe nous étudierons quelques exemples qui nous aiderons à mieux comprendre les rapports entre n-applications et lois polynômes de degré n.

Exemple 7.1. Dans le cas où $M = A$, les conditions équivalentes du théorème 6.8. sont vérifiées. On sait déjà que $\Gamma_n(A) \xrightarrow{\sim} A$, $\gamma_n(1) \mapsto 1$ (cf. proposition 2.8.) et $\Gamma_n^*(A) \xrightarrow{\sim} A$, $1^{[n]} \mapsto 1$ (cf. [7], théorème IV.2), d'où l'isomorphisme de A-modules $\Gamma_n(A) \xrightarrow{\sim} \Gamma_n^*(A)$, $\gamma_n(1) \mapsto 1^{[n]}$, et ceci, pour tout entier $n \geq 0$.

Exemple 7.2. Si $n!$ est inversible dans A, pour tout A-module M on a des isomorphismes de A-modules $\Gamma_n(M) \xrightarrow{\sim} S_n(M) \xrightarrow{\sim} \Gamma_n^*(M)$, donnés par $\gamma_n(x) \mapsto x^{\vee n}$ et $x^{\vee n} \mapsto x^{[x]}$, respectivement. Donc, dans ce cas, pour tout A-module M on a les conditions équivalentes du théorème 6.8. En particulier, ceci est vrai pour tout A-module M et tout entier $n \geq 1$, si A contient un sous-corps de caractéristique 0.

Exemple 7.3. Soient $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n.\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ et $f : M \to \mathbb{Z}_2$ une 3-forme. Si $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique du $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel M, alors $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_1+e_2)$ appartiennent à $\mathbb{Z}_2$. Réciproquement, soient $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_1+e_2)$ des éléments arbitraires de $\mathbb{Z}_2$. On peut montrer que f est une 3-forme, parce que l'application $\varphi : M^3 \to \mathbb{Z}_2$ associée est nulle et, par suite, φ est 3-linéaire. En particulier $\mathrm{card}(F_3(M,\mathbb{Z}_2)) = 2^3 = 8$, soit encore $\mathrm{card}\,(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_3(M), \mathbb{Z}_2)) = 8$ et comme $\Gamma_3(M)$ est un $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel, alors $\dim_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_3(M)) = 3$, i.e., $\Gamma_3(M) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

D'autre part, $\Gamma_3^*(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{p+q=3} \Gamma_p^*(\mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Gamma_q^*(\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ et une base de $\Gamma_3^*(M)$ est formée par $\{e_1^{[3]}, e_1^{[2]} e_2^{[1]}, e_1^{[1]} e_2^{[2]}, e_2^{[3]}\}$. L'application $\mathbb{Z}_2$-linéaire canonique $h : \Gamma_3(M) \to \Gamma_3^*(M)$ n'est pas surjective mais injective car les générateurs $\gamma_3(e_1)$, $\gamma_3(e_2)$, $\gamma_3(e_1+e_2)$ de $\Gamma_3(M)$ vont sur l'ensemble $\mathbb{Z}_2$-linéairement indépendant $e_1^{[3]}$, $e_2^{[3]}$, $(e_1+e_2)^{[3]} = e_1^{[3]} + e_1^{[2]} e_2^{[1]} + e_1^{[1]} e_2^{[2]} + e_2^{[3]}$. En particulier, ceci nous montre que $\{\gamma_3(e_1), \gamma_3(e_2), \gamma_3(e_1+e_2)\}$ est une base du $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel $\Gamma_3(M)$. Comme il s'agit d'espaces vectoriels, il existe une application $\mathbb{Z}_2$-linéaire $h' : \Gamma_3^*(M) \to \Gamma_3(M)$ telle que $h' \circ h = id_{\Gamma_3(M)}$. Les conditions équivalentes du théorème 6.2. sont vérifiées. Donc pour tout $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel N, l'application canonique $\Gamma_N : P_3(M,N) \to F_3(M,N)$ est surjective et toute 3-application $f : M \to N$ admet deux prolongements distincts à des lois polynômes homogènes de degré 3, i.e., toute 3-application f peut être représentée par deux polynômes homogènes de degré 3. De même, soit $n \geq 3$ un nombre entier et $\gamma_n : M \to \Gamma_n(M)$, la n-application canonique. L'ensemble $\{\gamma_n(e_1), \gamma_n(e_2), \gamma_n(e_1+e_2)\}$ est une base du $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel $\Gamma_n(M)$ et les conditions du théorème 6.2. sont vérifiées. Mais, dans ce cas, toute n-application peut être représentée par 2^{n-2} lois polynômes homogènes de degré n.

<u>Exemple 7.4</u>. Soient $M = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$, $\gamma_n : M \to \Gamma_n(M)$ la n-application canonique et $\{e_1, e_2\}$ la base canonique du $\mathbb{Z}_3$-espace vectoriel M. Comme tout élément de M est un multiple de e_1, e_2, e_1+e_2 et $2e_1+e_2$, l'ensemble $\{\gamma_n(e_1), \gamma_n(e_2), \gamma_n(e_1+e_2), \gamma_n(2e_1+e_2)\}$ est un système de générateurs de $\Gamma_n(M)$. En appliquant h à la relation $a_1 \gamma_n(e_1) + a_2 \gamma_n(e_2) + a_3 \gamma_n(e_1+e_2) + a_4 \gamma_n(2e_1+e_2) = 0$, où $a_i \in \mathbb{Z}_3$, on a, pour tout entier $n \geq 3$, $a_i = 0$ $(i = 1,2,3,4)$. Ceci nous dit que cet ensemble est une base de $\Gamma_n(M)$. D'autre part, $\Gamma_n^*(M)$ est un $\mathbb{Z}_3$-espace vectoriel avec base $\{e_1^{[n]}, e_1^{[n-1]} e_2^{[1]}, \ldots, e_1^{[1]} e_2^{[n-1]}, e_2^{[n]}\}$. Donc, pour $n=3$, les conditions du théorème 6.8. sont vérifiées et pour $n \geq 4$ elles ne le sont pas mais les conditions du théorème 6.2. le sont.

<u>Exemple 7.5.</u> Considérons maintenant l'anneau $A = \mathbb{Z}_4$, $M = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$, $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de M et $\gamma_3 : M \to \Gamma_3(M)$ la 3-application canonique. Comme tout élément de M est un multiple de e_1, e_2, e_1+e_2, $2e_1+e_2$, e_1+2e_2 et $3e_1+e_2$, il en résulte que les éléments $\gamma_3(e_1)$, $\gamma_3(e_2)$, $\gamma_3(e_1+e_2)$, $\gamma_3(2e_1+e_2)$, $\gamma_3(e_1+2e_2)$ et $\gamma_3(3e_1+e_2)$ engendrent $\Gamma_3(M)$ en tant que A-module. Notons $\varphi : M^3 \to \Gamma_3(M)$ l'application 3-linéaire symétrique associée à γ_3. Les relations $\varphi(e_1+e_2, e_1, e_1) = \varphi(e_1, e_1, e_1) + \varphi(e_2, e_1, e_1)$ et $\varphi(e_1+2e_2, e_1, e_2) = \varphi(e_1, e_1, e_2) + \varphi(2e_1, e_1, e_2)$ entraînent que $\gamma_3(2e_1+e_2)$ et $\gamma_3(3e_1+e_2)$ sont des combinaisons linéaires de $\gamma_3(e_1)$, $\gamma_3(e_2)$, $\gamma_3(e_1+e_2)$ et $\gamma_3(e_1+2e_2)$ et finalement, ces éléments engendrent $\Gamma_3(M)$. Mais $\varphi(2e_1+e_2, e_1, e_2) = 2\varphi(e_1, e_1, e_2) + \varphi(e_1, e_2, e_2)$, d'où $2\gamma(e_1) + 2\gamma(e_1 + 2e_2) = 0$ et ceci nous dit que les générateurs de $\Gamma_3(M)$ ne sont pas libres. Comme l'application A-linéaire $h : \Gamma_3(M) \to \Gamma_3^*(M)$ vérifie $h(\gamma_3(e_1)) = e_1^{[3]}$,

$h(\gamma_3(e_2)) = e_2^{[3]}$ et $h(\gamma_3(e_1+e_2)) = (e_1+e_2)^{[3]} = e_1^{[3]} + e_1^{[2]} e_2^{[1]} + e_1^{[1]} e_2^{[2]} +$ $+ e_2^{[3]}$, qui sont des éléments libres de $\Gamma_3^*(M)$, alors les vecteurs $\gamma(e_1)$, $\gamma(e_2)$ et $\gamma(e_1+e_2)$ sont aussi A-linéairement indépendants dans $\Gamma_3(M)$. Montrons que $\gamma_3(e_1 +$ $+ 2e_2)$ n'est pas une combinaison linéaire de $\gamma(e_1)$, $\gamma(e_2)$ et $\gamma(e_1+e_2)$. En effet, si l'on pose $\gamma(e_1+2e_2) = a_1\gamma(e_1) + a_2\gamma(e_2) + a_3\gamma(e_1+e_2)$, avec a_i dans $A(i=1,2,3)$, en appliquant h à cette relation on a $a_3 = 2$ et $a_3 = 0$ ce qui est absurde. Donc,

$$4^3 < \text{card } (\Gamma_3(M)) < 4^4.$$

Il est facile de voir que les conditions équivalentes du théorème 6.2. ne sont pas vérifiées. En effet, s'il existait une application A-linéaire $h' : \Gamma_3^*(M) \to \Gamma_3(M)$ telle que $h' \circ h = id_{\Gamma_3(M)}$, $\Gamma_3(M)$ serait projectif sur A et comme A est local, $\Gamma_3(M)$ serait libre et son cardinal serait de la forme 4^p, où p est un entier. Il existe alors un A-module N tel que $\Gamma_N : P_3(M,N) \to F_3(M,N)$ ne soit pas surjective. De plus, $h : \Gamma_3(M) \to \Gamma_3^*(M)$ n'est pas surjective parce que card $(\Gamma_3^*(M)) = 4^4$ donc, Γ_N n'est pas injective. Finalement, l'exemple ci-dessus nous montre que si L est un A-module libre, ceci n'entraîne pas que $\Gamma_n(L)$ soit aussi libre.

<u>Exemple 7.6.</u> Soient $A = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Comme le foncteur $\mathrm{Hom}_3(M,-)$ n'est pas représentable, les conditions équivalentes du théorème 6.2. ne sont pas vérifiées pour $n = 3$ (cf. [6], exemple 4.4.).

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.K. HARRISON, Commutative non associative algebras and cubic forms, J. of Algebra 32 (1974), 518-528.

[2] D. LAZARD, Autour de la platitude, Bull. Soc. Math. France 97 (1969), 81-128.

[3] A. MICALI, Sur les n-formes, Séminaire Dubreil , 26è-ième année 1972-1973, n° 3, 3 pages, 29 Janvier 1973.

[4] A. MICALI y O. VILLAMAYOR, Estructuras Algebraicas IV (Algebra Multilineal), Secretaria general de la O.E.A., Washington D.C., 1976.

[5] A. PRÓSZIŃSKI, Somme functors related to polynomial theory, Fundamenta Math. 98 (1978).

[6] A. PRÓSZIŃSKI, Somme functors related to polynomial theory II,

[7] N. ROBY, Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules, Ann. Ecole Norm. Sup. 80 (1963), 219-348.

Universidade Federal do Rio Grando do Sul
Instituto de Matematica
Sarmento Leite 425
90 000 - PORTO ALEGRE (BRESIL)

Université de Montpellier
Institut de Mathématiques
Place Eugène Bataillon
34060 MONTPELLIER Cedex (FRANCE)