MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

# Formes quadratiques sur les anneaux semi-locaux réguliers

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 59 (1979), p. 13-31
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__59__13_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Col. sur les Formes Quadratiques (1977, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 59, 1979, p.13-31

# FORMES QUADRATIQUES SUR LES ANNEAUX SEMI-LOCAUX REGULIERS

par

Jean-Louis COLLIOT-THELENE

Résumé. Soit $A$ un anneau semi-local intègre, avec 2 inversible dans $A$, et soit $K$ son corps des fractions. Soit $Q$ une forme quadratique sur $A$, non dégénérée, isotrope sur $K$ : pour $A$ régulier, l'est-elle aussi sur $A$ ? On donne une liste de questions semblables, liées au passage de $A$ à $K$, on précise les relations entre ces questions et l'état des connaissances sur ce sujet : travaux de Craven, Knebusch, Rosenberg, Ware. On montre que la question initiale a une réponse affirmative si le rang de $Q$ est au plus 4, en supposant seulement $A$ d'anneaux strictement locaux factoriels.

## §0. Notations, rappels et plan.

Dans tout cet article, on désigne par $A$ un anneau commutatif unitaire intègre où 2 est inversible, et on note $K$ son corps des fractions. On note $A^*$ le groupe des éléments inversibles de $A$.

On utilise la terminologie usuelle pour les espaces quadratiques sur $A$, pour laquelle le lecteur pourra consulter le rapport de M. Knebusch [13]. Voici quelques rappels concernant le cas A semi-local, qui, à quelques remarques près, seul nous intéressera. On appelle espace quadratique sur $A$, ou $A$-espace, la donnée d'un couple $(E,Q)$, où $E$ est un $A$-module libre de rang fini, et $Q$ est une $A$-forme quadratique sur $E$, non dégénérée, c'est-à-dire telle que la forme bilinéaire symétrique $B$ associée à $Q$ par la formule :

$$(x,y \in E) \qquad 2B(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$$

induise un isomorphisme de $E$ avec son dual. Etant donné $E$ un $A$-espace et $A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, on note $E_B$ le $B$-espace $(E \otimes_A B, Q \otimes_A B)$. On note $E \cong F$ l'isomorphisme de deux $A$-espaces (isomorphisme de $A$-modules respectant les formes quadratiques). On note $E \perp F$ la somme orthogonale de deux $A$-espaces, et $E \otimes F$ leur produit tensoriel (sur $A$). Etant donné $(a_1,\dots,a_n) \in (A^*)^n$, on note $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ l'espace défini par $E = A^n$ et $Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$. L'anneau $A$ étant semi-local et 2 inversible, tout $A$-espace est isomorphe à un tel espace (diagonalisation). Un espace $E$ (par abus de langage) est dit sous-espace d'un espace $F$ s'il existe un espace $G$ tel que $E \perp G \cong F$. On note $H$ les plan hyperbolique $\langle 1,-1\rangle$. Un espace $E$ est dit isotrope si $H$ est un sous-espace de $E$, ce qui équivaut à l'existence de $x \in E$ primitif (i.e. $Ax$ est un facteur

direct, comme A-module, de E) avec $Q(x) = 0$. Etant donné $(E,Q)$ un espace, et $n$ un entier, on note $nE$ la somme orthogonale de $n$ exemplaires de $(E,Q)$ si $n$ est positif, et de $(-n)$ exemplaires de $(E,-Q)$ si $n$ est négatif. Un espace isomorphe à $nH$ ($n$ entier) est dit hyperbolique. Deux espaces $E$ et $F$ sont dits semblables, et l'on note $E \sim F$, s'il existe des espaces hyperboliques $nH$ et $mH$ tels que $E \perp nH \cong F \perp mH$. Les classes de similitude de A-espaces forment (via la somme orthogonale et le produit tensoriel) un anneau, l'anneau de Witt $W(A)$. On a le :

<u>Théorème de simplification</u> (Roy, Knebusch [14, p. 256]). Soient $E,F,G$ des A-espaces. Si l'on a : $E \perp G \cong F \perp G$, alors $E \cong F$. En particulier, deux espaces de même rang dont les classes dans $W(A)$ sont égales sont isomorphes.

Etant donné $E$ un A-espace, on note $\underline{O}(E)$, resp. $\underline{SO}(E)$, le A-schéma en groupes dont les points à valeurs dans une A-algèbre $B$ sont les éléments du groupe orthogonal $O(E_B)$, resp. du groupe spécial orthogonal $SO(E_B)$ (éléments de $O(E_B)$ de déterminant constant et égal à 1).

On note $\mu_{2/A}$ le A-schéma en groupes des racines carrées de l'unité, qui d'après l'hypothèse $2 \in A^*$ est le A-schéma en groupes constant défini par $\mu_{2/A}(X) = (\pm 1)$ pour un A-schéma connexe $X$.

Rappelons enfin qu'un anneau (commutatif unitaire) $B$ est dit <u>régulier</u> s'il est noethérien et si ses localisés en tous les idéaux premiers sont des anneaux locaux réguliers.

<u>Plan</u>. Au §1, on donne une liste d'assertions concernant le passage de $A$ à $K$, et, dans le cas $A$ semi-local normal, on indique le lien entre ces assertions. Au §2, on pose la question : ces assertions sont-elles vraies pour $A$ semi-local régulier ? On fait une revue des travaux consacrés à cette question. Au §3, on remarque que le théorème de Craven-Rosenberg-Ware (cf. §2) admet pour corollaire immédiat une version locale du 17ème problème de Hilbert, telle que demandée par Swan [21]. Au §4, qui seul est peut-être original, on démontre le résultat annoncé dans le résumé.

Des remarques de R. Baeza, D. Ferrand et J.J. Sansuc m'ont permis d'améliorer la rédaction de ce texte.

## §1. <u>Le passage de l'anneau à son corps des fractions : problèmes et lien entre ces problèmes</u>.

1.1. Voici une liste d'assertions (où l'on peut, pour fixer les idées, supposer $A$ semi-local) ; dans les énoncés bis, on se donne un idéal maximal $\underline{m}$ de $A$, on

note $k = A/\underline{m}$ le corps résiduel en $\underline{m}$, et on note $a \longmapsto \tilde{a}$ l'application $A \to A/\underline{m}$. On note $n \geq 1$ un entier naturel.

($\underline{A}$) Soit $E$ un A-espace. Supposons $E_K$ isotrope. Alors $E$ est isotrope.

($\underline{A}_n$) Même énoncé, en supposant de plus $E$ de rang $\leq (n+1)$.

($\underline{A}$ bis) Sous les hypothèses de ($\underline{A}$), $E_k$ est isotrope.

($\underline{B}$) Soit $(E,Q)$ un A-espace, et soit $a \in A^*$. Si $a$ est représenté par $Q_K$ sur $K$ (i.e. si $\langle a\rangle_K$ est un sous-espace de $E_K$), alors $a$ est représenté par $Q$ sur $A$ (i.e. $\langle a\rangle$ est un sous-espace de $E$).

($\underline{B}_n$) Même énoncé, en supposant de plus $E$ de rang $\leq n$.

($\underline{B}$ bis) Sous les hypothèses de ($\underline{B}$), $\tilde{a}$ est représenté par $Q_k$ sur $k$.

($\underline{C}$) Soient $E$ et $F$ des A-espaces. Supposons $F_K$ sous-espace de $E_K$. Alors $F$ est un sous-espace de $E$.

($\underline{C}_n$) Même énoncé, en supposant $E$ de rang $\leq n$.

($\underline{C}$ bis) Sous les hypothèses de ($\underline{C}$), $F_k$ est un sous-espace de $E_k$.

($\underline{D}$) Soient $E$ et $F$ des A-espaces. Supposons $F_K \cong E_K$. Alors $F \cong E$.

($\underline{D}_n$) Même énoncé, en supposant $E$ (donc $F$) de rang $\leq n$.

($\underline{D}$ bis) Sous les hypothèses de ($\underline{D}$), $F_k \cong E_k$.

($\underline{E}$) Soit $E$ un A-espace. Le noyau de l'application d'ensembles pointés de cohomologie étale :

$$H^1(A,\underline{SO}(E)) \to H^1(K,\underline{SO}(E_K))$$

est trivial.

($\underline{F}$) Même énoncé que ($\underline{D}$), en se limitant à $E$ hyperbolique.

($\underline{F}_n$) Même énoncé que ($\underline{D}$), en se limitant à $E = mH$, avec $m \leq n$.

($\underline{G}$) L'homomorphisme naturel $W(A) \longrightarrow W(K)$ est injectif.

($\underline{G}$ bis) Le noyau de $W(A) \longrightarrow W(K)$ est inclus dans le noyau de $W(A) \longrightarrow W(k)$.

($\underline{H}$) Le noyau de $W(A) \longrightarrow W(K)$ est formé d'éléments nilpotents, de torsion 2-primaire.

($\underline{I}$) Soit $a \in A^*$ un élément qui est somme de carrés dans $K$. C'est une somme de carrés dans $A$.

Ces assertions ont une ressemblance formelle avec les différentes variantes du principe de Hasse pour les formes quadratiques. On ne s'étonnera donc pas que la démonstration de 1.2.b ci-après soit en partie inspirée du lien entre ces différentes variantes (e.g. [19], VI,§5).

1.2. <u>Proposition</u>. <u>Supposons</u> $A$ <u>semi-local normal</u>. <u>Les assertions ci-dessus sont reliées par les implications suivantes</u> :

a) $(\underline{X}) \Rightarrow (\underline{X}\text{ bis})$ .

b) $(\underline{A}) \Leftrightarrow (\underline{B}) \Leftrightarrow (\underline{C}) \Rightarrow (\underline{D}) \Leftrightarrow (\underline{E}) \Leftrightarrow (\underline{F}) \Leftrightarrow (\underline{G})$ .

c) $[(\underline{G}\text{ bis})$ pour tout $A_{\underline{p}}$, $\underline{p} \in \operatorname{Spec} A] \Rightarrow (\underline{H}) \Rightarrow (\underline{I})$ .

<u>Préliminaire</u>. Le point a) est clair. Pour c), cf. 2.3.4. pour la première implication et 3.1 pour la seconde. En ce qui concerne b), notons que les énoncés $(\underline{X}_1)$ sont satisfaits, car $A$ étant normal, l'application naturelle $A^*/A^{*2} \longrightarrow K^*/K^{*2}$ est injective. Cette remarque sera utilisée tacitement dans la démonstration des implications suivantes, qui précisent l'énoncé 1.2.b :

$(\underline{A}_n) \Leftrightarrow (\underline{B}_n) \Leftrightarrow (\underline{C}_n) \Rightarrow (\underline{D}_n) \Leftrightarrow (\underline{F}_n)$

$(\underline{D}) \Leftrightarrow (\underline{E})$

$(\underline{F}) \Rightarrow (\underline{G}) \Rightarrow (\underline{D})$ .

<u>Démonstration</u>.

$(\underline{B}_n) \Rightarrow (\underline{A}_n)$. C'est immédiat par diagonalisation.

$(\underline{A}_n) \Rightarrow (\underline{B}_n)$. Soit $(E,Q) = \langle a_1,\dots,a_m\rangle$ $(a_i \in A^*)$ un A-espace de rang $m$ avec $2 \leq m \leq n$ et soit $a \in A^*$ représenté par $Q_K$. La forme quadratique $Q'$ non dégénérée $\langle a_1,\dots,a_m,-a\rangle$ étant isotrope sur $K$, l'hypothèse implique l'existence d'un vecteur primitif $w = (x_1,\dots,x_m,x_{m+1}) \in A^{m+1}$ isotrope dans l'espace quadratique $(A^{m+1},Q')$ :

$$Q'(w) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^2 - a x_{m+1}^2 = 0 .$$

Notons $\underline{m}_j$ $(j=1,\dots,k)$ les idéaux maximaux de A. Pour $x_{m+1} \notin \underline{m}_j$ , posons :

$$v_j = (x_1,\dots,x_m,0).$$

Pour $x_{m+1} \in \underline{m}_j$, choisissons $\alpha(j)$ entier avec $1 \leq \alpha(j) \leq m$ tel que $x_{\alpha(j)} \notin \underline{m}_j$, ce qui est possible puisque $w$ est primitif, et définissons :

$$v_j = (x_1,\dots,x_{\alpha(j)-1},-x_{\alpha(j)},x_{\alpha(j)+1},\dots,x_m,1)$$

Par le théorème du reste chinois, on peut trouver $v \in A^{m+1}$ tel que, pour tout j, $v$ soit congru à $v_j$ modulo $\underline{m}_j$. On vérifie alors facilement que $v$ est strictement anisotrope (i.e. $Q'(v) \in A^*$) et que la symétrie orthogonale définie par $v$ (transformant le vecteur $z$ en $z - \frac{2B'(z,v)}{Q'(v)}v$) transforme le vecteur $w$ en un vecteur isotrope de $(A^{m+1},Q')$ dont la $(m+1)$-ième composante est dans $A^*$, ce qui permet de conclure. Remarquons qu'on dispose de résultats bien plus précis de "transversalité" : voir [3], Satz 2.5.

$(\underline{B}_n) \Rightarrow (\underline{C}_n)$. Soit $F = \langle a_1,\dots,a_m\rangle$, $E$ de rang $p$, avec $1 \leq m \leq p \leq n$, et $G$ un K-espace tel que $F_K \perp G \cong E_K$ . On fait la démonstration par récurrence sur $m$ : le cas $m = 1$ résulte de $(\underline{B}_n)$ ; supposons donc $m \geq 2$ ; l'espace $\langle a_m\rangle_K$ est un sous-espace de $E_K$ , et donc, par $(\underline{B}_n)$, $\langle a_m\rangle$ est un sous-espace de $E$, i.e. il

existe un A-espace $L$ tel que $\langle a_m\rangle \perp L \cong E$, ce qui, vu l'hypothèse, et en simplifiant sur $K$ (ce qui est loisible d'après Witt), implique :

$$\langle a_1,\dots,a_{m-1}\rangle_K \perp G \cong L_K .$$

L'hypothèse de récurrence implique donc qu'il existe un A-espace $J$ tel que $\langle a_1,\dots,a_{m-1}\rangle \perp J \cong L$. Ajoutant $\langle a_m\rangle$ à chacun des deux membres de cet isomorphisme, on obtient le résultat $F \perp J \cong E$.

$(\underline{C}_n) \Rightarrow (\underline{B}_n)$. $(\underline{B}_n)$ est en effet un cas particulier de $(\underline{C}_n)$.

$(\underline{C}_n) \Rightarrow (\underline{D}_n)$. Même argument.

$(\underline{D}_n) \Rightarrow (\underline{F}_n)$. Soit $m$ un entier avec $2 \leq m \leq n$, et soit $F$ un A-espace tel que $F_K \cong (mH)_K$. On peut écrire (diagonalisation) $F = F_1 \perp F_2$, avec $F_1$ et $F_2$ des A-espaces de rang $m$. On a :

$$(F_1)_K \perp (mH)_K \cong (F_1)_K \perp (F_2)_K \perp (-F_2)_K \cong (mH)_K \perp (-F_2)_K$$

donc, par simplification sur $K$, $(F_1)_K \cong (-F_2)_K$, donc par $(\underline{D}_n)$, $F_1 \cong (-F_2)$ et donc $F = F_1 \perp F_2 \cong mH$.

$(\underline{F}_n) \Rightarrow (\underline{D}_n)$. Soient $E$ et $F$ deux A-espaces de rang $m$ (avec $2 \leq m \leq n$) tels que $E_K \cong F_K$. Alors $(E \perp (-F))_K = E_K \perp (-F_K) \cong (mH)_K$, donc par $(\underline{F}_n)$, $E \perp (-F) \cong mH$, donc, par addition de $F$, $E \perp mH \cong F \perp mH$, d'où, par le théorème de simplification sur $A$, $E \cong F$.

$(\underline{D}) \Leftrightarrow (\underline{E})$. Fixons $E$ un A-espace de rang au moins 2. La "suite exacte" de A-schémas en groupes lisses définie par le déterminant :

$$1 \to \underline{SO}(E) \to \underline{O}(E) \to \mu_{2/A} \to 1$$

et la suite exacte analogue au-dessus de $K$ donnent le diagramme commutatif de suites exactes d'ensembles pointés (ensembles de cohomologie étale, cf. [11]) :

$$\begin{tikzcd}
O(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mu_2(A) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(A,\underline{SO}(E)) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & H^1(A,\underline{O}(E)) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & H^1(A,\mu_{2/A}) \arrow[d] \\
O(K) \arrow[r] & \mu_2(K) \arrow[r] & H^1(K,\underline{SO}(E_K)) \arrow[r] & H^1(K,\underline{O}(E_K)) \arrow[r] & H^1(K,\mu_{2/K})
\end{tikzcd}$$

On a $(\pm 1) = \mu_2(A) = \mu_2(K)$, et les deux flèches horizontales de gauche sont surjectives, le déterminant d'une symétrie orthogonale définie par un vecteur strictement anisotrope étant $(-1)$. Par ailleurs, la suite de Kummer montre que la dernière flèche verticale s'identifie à la flèche naturelle $A^*/A^{*2} \longrightarrow K^*/K^{*2}$ qui est injective car $A$ est normal. On voit alors que le noyau de $i$ est trivial si et seulement si celui de $j$ l'est. Comme ce dernier noyau s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-espaces $F$ (de rang celui de $E$) tels que $F_K \cong E_K$, on a fini.

($\underline{F}$) $\Rightarrow$ ($\underline{G}$). Si $E$ est un A-espace tel que $E_K$ ait une classe triviale dans $W(K)$, le théorème de simplification sur $K$ montre qu'il existe $n$ tel que $E_K \cong (nH)_K$, donc, par ($\underline{F}$), $E \cong nH$ et $E \sim 0$. (On a utilisé le fait que tout élément de $W(A)$ peut être représenté par un espace).

($\underline{G}$) $\Rightarrow$ ($\underline{D}$). Si $E$ et $F$ sont deux A-espaces tels que $E_K \cong F_K$, ils ont même rang, même classe dans $W(A)$ via ($\underline{G}$). Le théorème de simplification sur $A$ montre qu'ils sont isomorphes.

## §2. Les assertions du §1 sont-elles vraies pour $A$ semi-local régulier ?

### 2.1. Historique de cette question : une question de Grothendieck.

Sous la forme ($\underline{G}$), la question est bien connue des spécialistes (e.g. [15] 2.4.b) ). Sous la forme ($\underline{D}$), qui d'après le paragraphe précédent lui est équivalente, la question est un cas particulier de la question suivante :

($\underline{K}$) Supposons $A$ semi-local régulier. Soit $G$ un A-schéma en groupes réductifs ([10],XIX 2.7). L'application naturelle d'ensembles pointés :

$$H^1(A,G) \longrightarrow H^1(K,G_K)$$

a-t-elle un noyau trivial ? (En d'autres termes : un torseur sur $A$ sous $G$ qui admet une section "rationnelle" admet-il une section sur $A$, i.e. est-il trivial?).

Dans le cas où de plus $A$ est local et $G$ un A-schéma en groupes quelconques, cette question a été posée par Grothendieck ([2], exp. 5 n° 5 Remarque 3) qui demande même si l'application ci-dessus est injective. Voir également une remarque de Serre ([2], exp. 1 n° 5.5, Remarque). En fait il n'est pas difficile de donner un exemple d'un A-schéma en groupes affines tel que l'application ci-dessus ait un noyau non trivial : un tel exemple est donné dans [8] ; dans cet exemple, $A$ est un anneau de valuation discrète, la fibre générique de $G$ est connexe et la fibre spéciale non connexe. On peut d'ailleurs noter que dans [12], 1.11.a, où est reposée la question, Grothendieck se limite au cas où $G$ est un A-schéma en groupes semi-simples ([10], loc. cit.), ce qui est par exemple le cas de $G = \underline{SO}(E)$ pour $E$ un A-espace quadratique.

On sait répondre à la question ($\underline{K}$) dans quelques cas : dans [12],1.11.a Grothendieck montre, à partir de l'injection du groupe de Brauer cohomologique de $A$ dans celui de $K$ que la réponse est affirmative pour $G = \underline{PGL}_{n/A}$. Plus généralement, étant donné $D$ une algèbre d'Azumaya sur $A$, semi-local, on peut montrer que l'ensemble $H^1(A,\underline{GL}(D))$ est trivial (on pose ici $\underline{GL}(D) = \underline{GL}_1(D)$, $\underline{PGL}(D) = \underline{PGL}_1(D)$, $\underline{SL}(D) = \underline{SL}_1(D)$). Ceci permet, en utilisant la méthode de [12], d'obtenir une réponse affirmative à la question ($\underline{K}$) pour $G = \underline{PGL}(D)$, et de voir

que pour $G = \underline{SL}(D)$, la question ($\underline{K}$) est équivalente à la question : si un élément de $A^*$ est, dans $K^*$, la norme réduite d'un élément de $(D \otimes_A K)^*$, est-il la norme réduite d'un élément de $D^*$ ?

Par ailleurs, dans [8], Sansuc et l'auteur montrent que la réponse à ($\underline{K}$) est oui pour $G$ un A-tore, et plus généralement pour un A-groupe de type multiplicatif de type fini ([10], VIII-X).

2.2. Liste des résultats connus.

Les assertions du §1 sont vraies au moins dans les cas suivants ( ($\underline{X}$) varie de ($\underline{A}$) à ($\underline{I}$)) :

a) ($\underline{X}$), donc ($\underline{X}$ bis), pour $A$ anneau de valuation : voir 2.3.1.

b) ($\underline{X}$ bis) pour $A$ anneau régulier : voir 2.3.2.

c) ($\underline{H}$) pour $A$ semi-local régulier : voir 2.3.4.

d) ($\underline{I}$) pour $A$ semi-local régulier : voir §3.

e) ($\underline{X}_3$) pour $A$ semi-local régulier : voir §4.

2.3.1. Soit $A$ un anneau de valuation (Bourbaki, Alg. Comm.Chap. VI, §1). D'après 1.2.b., pour établir ($\underline{X}$), il suffit d'établir ($\underline{A}$). Soit $E = \langle a_1,\dots,a_n\rangle$. S'il existe un n-uplet $(x_1,\dots,x_n) \in K^n$, non trivial, tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = 0$, comme $A$ est un anneau de valuation, on peut trouver $y \in K^*$ tel que tous les $(yx_i)$ soient dans $A$ et l'un au moins dans $A^*$, ce qui établit ($\underline{A}$). Ce résultat, et ses conséquences, sont bien connus : dans [15], §2, Knebusch obtient de plus des résultats dans le cas où 2 n'est pas supposé inversible.

2.3.2. Pour démontrer ($\underline{X}$ bis) pour $A$ régulier, il suffit, par localisation, de le démontrer pour $A$ local régulier, ce qu'on suppose maintenant, en gardant les notations du début de 1.1. Les énoncés ($\underline{A}$ bis), ($\underline{B}$ bis), ($\underline{D}$ bis) sont des cas particuliers de ($\underline{C}$ bis), qui a été démontré par Knebusch ([15],2.3). Quant à ($\underline{G}$ bis), qu'on déduit immédiatement, via le théorème de simplification, de ($\underline{D}$ bis), il est explicité dans [6],2.1. Tous ces résultats reposent sur 2.3.1 et sur un principe simple, qu'on trouvera également utilisé dans [7], 2.1 :

Principe. Pour démontrer un énoncé du type ($\underline{X}$ bis) pour $A$ local régulier, il suffit de le démontrer dans le cas où $A$ est un anneau de valuation discrète, par exemple de connaître ($\underline{X}$) pour tout tel $A$.

Ceci repose sur la remarque suivante : si $A$ est un anneau local régulier de dimension $d \geq 2$, et $t$ un paramètre régulier de $A$, définissant l'idéal premier $\underline{p}$ de hauteur 1, l'anneau de valuation discrète $A_{\underline{p}}$ a pour corps des fractions $K$ et pour corps résiduel le corps des fractions de l'anneau local

régulier $B = A/\underline{p}$, dont le corps résiduel est encore $k$, mais dont la dimension est $(d-1)$. Notons de plus, l'hypothèse et la conclusion de ($\underline{X}$ bis) n'étant pas modifiées par complétion, que l'on peut même se limiter au cas $A$ anneau de valuation discrète complet.

2.3.3. Comme le note Knebusch [15], les énoncés du type ($\underline{C}$ bis) sont des généralisations du principe de substitution de Cassels-Pfister (e.g. [19], IX, 1.5). Ce principe vaut donc pour tout point rationnel <u>lisse</u> d'une variété algébrique sur un corps $k$ de caractéristique différente de 2 (pour des précisions en caractéristique 2, cf. [15]) ; dans le cas d'un point rationnel normal non lisse, on obtient facilement des contre-exemples (e.g. [6] 3.2 et [7] 2.1.3), ce qui montre que l'hypothèse de régularité dans la question du titre de ce paragraphe est fondamentale. A ce sujet, il convient de remarquer que l'anneau $A$ localisé à l'origine de l'anneau $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n](x_1^2+\ldots+x_n^2)$ avec $n \geq 5$, qui est l'exemple de Craven-Rosenberg-Ware [6], est non seulement factoriel mais encore géométriquement localement factoriel (cf. définition ci-après) - ceci résulte de la "conjecture de Samuel" démontrée dans [22], XI, 3.14.

<u>Définition</u>. On dit qu'un anneau noethérien $B$ est géométriquement localement factoriel si pour tout idéal premier $\underline{p}$ de $B$ le hensélisé strict de $B_{\underline{p}}$ est factoriel, ce qui équivaut à dire que tout anneau $C$ étale sur $B$ est localement factoriel.

Un anneau régulier est géométriquement localement factoriel (Auslander-Buchsbaum), la réciproque n'étant pas vraie, comme le montre l'exemple ci-dessus.

L'hypothèse $A$ semi-local géométriquement localement factoriel est suffisante pour assurer une réponse affirmative à la question ($\underline{K}$) si $G = \underline{PGL}_{n/A}$ (car dans [12], il est démontré que pour $A$ géométriquement localement factoriel, le groupe de Brauer de $A$ s'injecte dans celui de $K$), si $G$ est un $A$-tore ([ 8 ]), si $G = \underline{SO}(E)$ où $E$ est un espace quadratique de rang au plus 3 : on verra de façon générale dans le §4 que pour $A$ comme ci-dessus, on a ($\underline{X}_3$). Mais l'exemple de Craven-Rosenberg-Ware montre que cette hypothèse n'est pas en général suffisante. Avec l'anneau en question (avec $n = 5$) dans $K$ on a $-1 = \sum_{i=1}^{4}(x_i/x_5)^2$, et $(-1)$ ne peut être une somme de 4 carrés, ni même une somme de carrés dans $A$, sinon il le serait dans $\mathbb{R}$. Ceci donne un contre-exemple à ($\underline{B}_4$) et ($\underline{I}$), ainsi qu'à la question sur les normes réduites posée à la fin de 2.1.. Par ailleurs, de l'égalité ci-dessus, on tire facilement (utiliser la multiplicativité de la norme réduite d'une algèbre de quaternions) que les $A$-espaces $\langle 1,1,1,1\rangle$ et $\langle -1,-1,-1,-1\rangle$ sont isomorphes sur $K$, et ils ne sont pas isomorphes sur $A$ comme on le voit par passa-

ge au corps résiduel $\mathbb{R}$. Ceci fournit un contre-exemple à $(\underline{D}_4)$. Les contre-exemples à $(\underline{A}_4),(\underline{C}_4),(\underline{E}),(\underline{F}_4),(\underline{G}),(\underline{H}),(\underline{K})$, aux énoncés $(\underline{X}$ bis) se déduisent des précédents. Ceci ôte en particulier tout espoir de ramener par des manipulations du type de celles du §4 ces énoncés pour A local régulier à l'énoncé (K) pour les A-tores, ou à l'injection du groupe de Brauer de A dans celui de K.

2.3.4. L'énoncé $(\underline{H})$ pour A semi-local régulier a été démontré par Craven-Rosenberg-Ware ([6],th.2.4). La démonstration de loc.cit., où le théorème est énoncé seulement dans le cas local, s'étend au cas semi-local : on conjugue ($\underline{G}$ bis) pour A régulier (cf. 2.3.2) et l'implication [($\underline{G}$ bis) pour tout $A_{\underline{p}}, \underline{p} \in \operatorname{Spec} A \Rightarrow (H)$], pour A semi-local (connexe), implication qui repose sur le théorème de factorisation de Kanzaki-Kitamura, généralisé par Knebusch au cas semi-local (cf.[13],V,§1), et sur la connaissance des idéaux premiers de W(A) ([16],cf.[13],II,§5). Les assertions sur la torsion résultent de [16],cf.[13],II,§6.

En utilisant un théorème de A. Dress, on voit alors ([6],2.8) que pour A un anneau régulier quelconque, le noyau de $W(A) \to W(K)$ est formé d'éléments nilpotents (mais pas a priori de torsion).

§3. Une version locale du 17ème problème de Hilbert; globalisation.

3.1. Proposition. Supposons A semi-local régulier. Si un élément $a \in A^*$ est une somme de carrés dans K, c'est une somme de carrés dans A.

Il s'agit de l'énoncé $(\underline{I})$ pour A semi-local régulier. Cet énoncé résulte du théorème de Craven-Rosenberg-Ware et de l'implication $(\underline{H}) \Rightarrow (\underline{I})$ pour A semi-local, annoncée en 1.2.c.

Démonstration de cette implication. Comme a est une somme de carrés dans K, c'est une somme de $2^n$ carrés dans K, pour n entier convenable. La forme de Pfister $\langle 1,1\rangle^{\otimes n} \otimes \langle 1,-a\rangle$ est une forme non dégénérée sur A. En la tensorisant par K sur A, on obtient une forme de Pfister sur K, isotrope, donc hyperbolique (cf.[19],X,1.6). Ainsi l'élément de W(A) que la forme initiale définit a une image nulle dans W(K). D'après $(\underline{H})$, il existe un entier naturel N (en fait une puissance de 2) tel que :

$$N\langle 1,1\rangle^{\otimes n} \sim \langle a\rangle \otimes [N\langle 1,1\rangle^{\otimes n}]$$

Comme les deux espaces quadratiques ci-dessus ont même rang, le théorème de simplification montre qu'ils sont isomorphes. Comme a est représenté par la forme de droite sur A, il est aussi représenté par la forme de gauche, i.e. c'est une somme de carrés dans A.

Autre démonstration. D'après [17],2.11, l'hypothèse $(\underline{H})$ implique que toute signa-

ture sur $W(A)$ est induite par une signature sur $W(K)$, i.e. par un ordre sur le corps $K$. Comme $a$ est une somme de carrés dans $K$, ceci implique que pour toute signature $\sigma$ sur $W(A)$, $\sigma(a) = 1$. D'après [17],4.8, ou [13],II,§7,Th.4, ceci implique que $a$ est une somme de carrés dans $A$.

3.1.1. Remarque. Si l'on suppose seulement $A$ régulier, non nécessairement semi-local le théorème 2.8 de [6] montre encore qu'il existe $N$ et $n$ comme ci-dessus tels que :

$$N\langle 1,1\rangle^{\otimes n} \sim \langle a\rangle \otimes [N\langle 1, 1\rangle^{\otimes n}] \qquad (*)$$

(similitude au sens de [13],I,i.e. isomorphie à addition près d'un espace métabolique). En effet, la classe de $\langle 1,1\rangle^{\otimes n} \otimes \langle 1,-a\rangle$ est nilpotente et appartient au sous-anneau de $W(A)$ engendré par $A^*/A^{*2}$, sous-anneau qui est un anneau de Witt abstrait ([16],cf.[13],App.3) ; cette classe est donc de torsion 2-primaire (loc. cit.). Malheureusement, on est alors loin de pouvoir conclure à l'isomorphisme des deux espaces de (*) !

3.2. Corollaire. Soit $X$ une $\mathbb{R}$-variété algébrique (c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-schéma de type fini) intègre. Soit $f$ un élément non nul du corps des fractions de $X$. Supposons qu'il existe un ouvert de Zariski non vide $U$ de $X$ tel que $f \in \Gamma(U,\underline{O}_U)$ et, pour tout $P \in U(\mathbb{R})$, $f(P) \geq 0$. Alors, en tout point $P$ lisse de $X(\mathbb{R})$ où $f$ est définie et $f(P) \neq 0$, $f$ est une somme de carrés dans l'anneau local de $X$ en $P$.

Démonstration. D'après E. Artin ([1],Satz 11), l'hypothèse implique que $f$ est une somme de carrés dans le corps des fractions de $X$. Pour $P$ comme dans l'énoncé, $f$ est un élément inversible de l'anneau local $\underline{O}_{X,P}$, et, comme cet anneau local est régulier (car $P$ est lisse), il résulte alors de 3.1 que $f$ est une somme de carrés dans $\underline{O}_{X,P}$.

3.3. Remarques.

3.3.1. Dans le corollaire ci-dessus, l'hypothèse de lissité en $P$ est fondamentale, comme le montrent les contre-exemples mentionnés en 2.3.3. Par ailleurs, Choi et Lam ont annoncé un résultat ([5],th.4.3) montrant que l'hypothèse $f(P) \neq 0$ est également nécessaire.

3.3.2. Soit $V$ l'intersection de l'ouvert de lissité de $X$ et de l'ouvert où $f$ est inversible. De l'hypothèse de 3.2 résulte même que pour tout ensemble fini de points (schématiques) inclus dans un ouvert affine de $V$, on peut écrire $f$ comme une somme de carrés de fonctions rationnelles appartenant aux anneaux locaux de tous ces points. Notons qu'en pratique (cf. les exemples donnés à la suite de Motzkin dans [5]), trouver explicitement une telle écriture est loin d'être facile.

3.3.3. Dans le cas particulier où $X$ est l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$, le corollaire 3.2 est l'une des versions locales du 17ème problème de Hilbert proposées par Swan ([21],§10). Choi-Lam, Prestel et Knebusch ont établi ce cas particulier avec les méthodes de [20] ; ils obtiennent en fait un résultat global (cf. [5],§5, Problem E, et discussion). Ce résultat global vaut lui-même dans un cadre plus large : les deux énoncés qui suivent sont issus d'une discussion avec A. Prestel (juin 1978).

3.4.1. Proposition. Soit $X$ une $\mathbb{R}$-variété algébrique intègre, affine et lisse, d'anneau $A$. Soit $f$ dans $A$, et supposons qu'il existe un ouvert de Zariski non vide $U$ de $X$ tel que, pour tout $P \in U(\mathbb{R})$, on ait $f(P) \geq 0$. Il existe alors $g \in A$ tel que :

(i) $\forall P \in X(\mathbb{R})$ , $g(P) = 0 \Rightarrow f(P) = 0$

(ii) $g^2 f$ est une somme de carrés dans $A$.

Démonstration. Le Satz 11 d'Artin montre que cet énoncé résulte lui-même du suivant:

3.4.2. Proposition. Soit $A$ un anneau noethérien régulier intègre, avec $2 \in A^*$, de corps des fractions $K$, et soit $f$ un élément de $A$ qui est une somme de carrés dans $K$. Il existe alors un entier $r \geq 0$, et des éléments $a_i$ $(i = 1,\dots,n)$ et $b_j$ $(j = 1,\dots,m)$ dans $A$ tels que :

$$(\sum_i a_i^2)\, f = f^{2r} + \sum_j b_j^2$$

Si $f$ est inversible, on peut prendre $r = 0$.

Démonstration. Par passage à l'anneau régulier $A_f$ ($f$ est rendu inversible) on voit qu'il suffit de démontrer l'assertion concernant le cas $f$ inversible. Notons $QS(A)$ l'ensemble des sommes de carrés dans $A$. Si $f$ ne s'écrit pas sous la forme $(1 + \Sigma a_i^2)/(\Sigma b_j^2)$ avec $a_i, b_j$ dans $A$, on a $(-1) \notin P_o = QS(A) - fQS(A)$ (ensemble des éléments $a - fb$ avec $a,b$ dans $QS(A)$). D'après Prestel ([20], Lemme 1.4), le cône "pré-positif" $P_o$ de $A$ admet une extension $P$ satisfaisant $P \cup (-P) = A$ et $P \cap (-P) = \underline{p}$ idéal premier propre de $A$. Par image réciproque sur $A$, on peut à partir de $P$ définir une structure d'ordre total (notée $<$) sur l'anneau intègre $A/\underline{p}$, puis sur le corps des fractions $\kappa(\underline{p})$ de ce dernier (pour $a \in A$, $a \notin \underline{p}$, la classe $\bar{a}$ de $a$ dans $A/\underline{p}$ satisfait $\bar{a} > 0$ si et seulement si $a \in P$). De $(-f) \in P_o \subset P$, on tire, $f$ étant inversible, $\bar{f} < 0$. Par ailleurs $f$ est une unité de l'anneau local régulier $A_{\underline{p}}$ qui est une somme de carrés dans le corps des fractions $K$ de $A_{\underline{p}}$ ; comme ($\underline{B}$ bis) vaut pour $A_{\underline{p}}$ (cf. 2.2. et 2.3.2), $\bar{f}$ est une somme de carrés dans le corps résiduel $\kappa(\underline{p})$ : contradiction.

3.4.3. Remarque. La proposition 3.4.2 redonne la proposition 3.1 , dans le cas où, pour chaque idéal maximal $\underline{m}$ de l'anneau semi-local régulier $A$, le corps $A/\underline{m}$ est ordonnable ; il ne semble pas que, par cette méthode, on puisse obtenir plus : on n'obtient pas en particulier l'énoncé fort indiqué en 3.3.2. Par contre,

on peut obtenir 3.4.2 à partir de 3.1, c'est à dire partiellement globaliser ce dernier résultat. On utilise la remarque simple suivante, que je tiens de J.M. Bony:

3.4.4. Lemme. Soit $A$ un anneau commutatif, $f \in A$. Les ensembles :

$$\underline{a}(f) = \{a \in A \mid \exists n,m \in \mathbb{N},\ \exists x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m \in A : (a^2+x_1^2+\dots+x_n^2)f = y_1^2+\dots+y_m^2\}$$

$$\underline{b}(f) = \{b \in A \mid \exists n,m \in \mathbb{N},\ \exists x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m \in A : (x_1^2+\dots+x_n^2)f = b^2+y_1^2+\dots+y_m^2\}$$

sont des idéaux de $A$.

Démonstration. On utilise :

$$2x^2+2y^2 = (x+y)^2 + (x-y)^2 .$$

3.4.5. Autre démonstration de 3.4.2. Comme ci-dessus, on se réduit au cas $f \in A^*$, et $r=0$. Comme $f$ est une somme de carrés dans $K$, il résulte de 3.1 que pour tout idéal premier $\underline{p}$ de $A$, il existe $a \notin \underline{p}$ et $z_1,\dots,z_n \in A$ tels que :

$$a^2 f = z_1^2+\dots+z_n^2 .$$

Ainsi, l'un des $z_i$ n'est pas dans $\underline{p}$, et, avec les notations du lemme ci-dessus, on a :

$$\underline{a}(f) \not\subset \underline{p} \quad \text{et} \quad \underline{b}(f) \not\subset \underline{p} .$$

Il résulte donc du lemme que l'on a $\underline{a}(f) = A$ et $\underline{b}(f) = A$, et en particulier des égalités :

$$(1 + \sum_i a_i^2)f = \sum_j b_j^2$$

et

$$(\sum_i c_i^2)f = 1 + \sum_j d_j^2$$

pour $a_i,b_j,c_i,d_j$ dans $A$, convenables.

3.4.6. Esquissons une troisième démonstration, assez proche, et inspirée de [13], p. 190. Du résultat local, on tire l'existence d'éléments $f_i \in A$ $(i=1,\dots,r)$ tels que chaque $f_i^2 f$ soit une somme de carrés dans $A$, et que l'on ait $\sum_i f_i = 1$. On montre alors qu'il existe une égalité :

$$(1 + \Sigma a_i^2)f = \Sigma b_j^2$$

en utilisant l'identité suivante, qui généralise celle utilisée pour établir 3.4.4:

$$2^{r-1}(f_1^2+\dots+f_r^2) = \sum_\epsilon (f_1 + \epsilon_2 f_2 + \dots + \epsilon_r f_r)^2$$

(où $\epsilon = (\epsilon_2,\dots,\epsilon_r)$ prend toutes les valeurs dans $(\pm 1)^{r-1}$. On conclut en raisonnant sur $f^{-1}$ au lieu de $f$.

## § 4. Formes quadratiques de petit rang.

4.1. Proposition. Supposons $A$ semi-local géométriquement localement factoriel (cf. 2.3.3). On a alors les énoncés : $(A_3)$, $(B_3)$, $(C_3)$, $(D_3)$, $(E_3)$, $(F_3)$ du §1.

Préliminaire. Comme $A$ est normal, les énoncés $(X_1)$ sont satisfaits. D'autre part, les implications établies en 1.2 montrent qu'il suffit, pour avoir les énoncés ci-dessus, de connaître $(B)$ pour tout espace $E$ de rang 2, et $(A)$ pour tout espace $E$ de rang 4.

4.2. Démonstration de $(B)$ pour $E$ de rang 2.
Par diagonalisation et division par une unité, on se ramène à l'énoncé :

4.2.1. Proposition. Soit $A$ comme en 4.1, et soient $a$ et $b$ dans $A^*$ tels qu'il existe $x$ et $y$ dans $K$ avec $a=x^2-by^2$. Alors on peut trouver une telle égalité avec $x$ et $y$ dans $A$.

Si $b$ est un carré dans $K$, donc dans $A$, c'est clair. En général, posons $B = A[T]/(T^2-b)$, et $L = K \otimes_A B$. La $A$-algèbre finie étale $B$ est munie, via l'automorphisme induit par $T \mapsto (-T)$, d'une structure de $A$-algèbre galoisienne de groupe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'énoncé est un cas particulier de :

4.2.2. Proposition. Soit $A$ comme en 4.1, soit $G$ un groupe fini, et soit $B$ une $A$-algèbre galoisienne de groupe $G$. Notons $L = K \otimes_A B$ l'anneau total de fractions de $B$, et $N_{B/A}$ (resp. $N_{L/K}$) la norme de $B$ sur $A$ (resp. de $L$ sur $K$). Si $a \in A^*$ appartient à $N_{L/K}(L^*)$, il appartient à $N_{B/A}(B^*)$.

Note. La suite(*) ci-dessous est en fait scindée (comme suite de $G$-modules)! Ceci permet, entre autres, de donner une autre démonstration de 4.3.2 : cf. [8].

Démonstration de la proposition. Comme $A$ est semi-local noethérien et $B$ fini sur $A$, l'anneau $B$ est semi-local, donc de groupe de Picard nul. Notant $\mathrm{Div}\, B$ le groupe des diviseurs de Cartier de $B$, on a donc la suite exacte de $G$-modules :

$$1 \to B^* \to L^* \to \mathrm{Div}B \to 1 \qquad (*),$$

où la flèche $L^* \to \mathrm{Div}B$ associe à un élément de $L^*$ son diviseur. L'hypothèse sur $A$ implique, puisque $B$ est étale sur $A$, que les diviseurs de Cartier sur $B$ s'identifient aux diviseurs de Weil, i.e. au groupe libre sur les idéaux premiers de hauteur 1. Comme $G$-module, ce groupe est une somme directe de $G$-modules du type $Z[G/H]$, avec $H$ sous-groupe (variable) de $G$ : pour le voir, il suffit de regrouper les orbites de $G$ dans l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de $B$. Or on sait (lemme de Shapiro, cf. [4], chap. 4, prop. 6) que le groupe de cohomologie de Tate $\hat{H}^{-1}(G, Z[G/H])$ est nul, et ceci vaut encore pour une somme directe quelconque de tels $G$-modules. Ainsi, $\hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Div}B) = 0$. La suite exacte de cohomologie modifiée

définie par (*) donne donc l'injection $\hat{H}^0(G,B^*) \hookrightarrow \hat{H}^0(G,L^*)$, c'est à dire $A^*/N_{B/A}(B^*) \hookrightarrow K^*/N_{L/K}(L^*)$, c.q.f.d.

4.2.3. Remarque.

Supposons pour simplifier B intègre. Dans le cas où G est cyclique, pour établir la proposition, il suffit, la cohomologie d'un groupe cyclique étant de période 2, de montrer que $H^2(G,B^*)$ s'injecte dans $H^2(G,L^*)$, ce qui résulte alors du lemme de Shapiro au niveau $H^1$ : le groupe $H^1(G,\mathrm{Div}B)$ est nul. On pourrait aussi déduire cette injection de l'injection du groupe de Brauer cohomologique de A dans celui de K, mais ces deux arguments sont très proches : voir [12], §1. Cependant, le passage de $H^1$ à $\hat{H}^{-1}$ dans la démonstration de 4.2.1 est important : voir [8], où la démonstration de Grothendieck, [12], §1, est reprise et où on obtient l'énoncé (K) pour A comme dans 4.1 et G un A-tore : on obtient comme corollaire que la proposition 4.2.2 vaut encore sous la simple hypothèse que B/A est fini étale (non nécessairement galoisien).

4.3. Démonstration de (A) pour un espace E de rang 4.

L'idée de la démonstration est de reproduire la méthode purement algébrique utilisée dans [4], Exercice 4.4, pour passer du rang 3 au rang 4 dans la démonstration du théorème de Minkowski-Hasse. On a besoin ici du lemme :

4.3.1. Lemme (Hilbert 90). Soit G un groupe fini cyclique de générateur $\tau$. Soit A un anneau semi-local, et soit B une A-algèbre galoisienne de groupe G. Soit $\xi$ un élément de $B^*$ tel que $N_{B/A}(\xi) = 1$. Il existe $u \in B^*$ tel que $\xi = u/\tau(u)$.

Démonstration. Comme A est semi-local, donc de groupe de Picard nul, le théorème de Hilbert 90, sous la forme de Grothendieck, implique que le groupe de cohomologie de Čech $(\check{H}^1(B/A, \mathbb{G}_m)$ est nul, $\mathbb{G}_m$ désignant le groupe multiplicatif. En utilisant l'isomorphisme structural $B \otimes_A B \simeq \prod_{\sigma\in G} B$, on obtient $H^1(G,B^*) = 0$, c'est à dire que tout 1-cocycle $(c_\sigma)_{\sigma\in G}$ à valeurs dans $B^*$ s'écrit $c_\sigma = u/\sigma(u)$, avec $u \in B^*$. Il suffit alors pour établir le lemme de rappeler que, pour $\xi$ comme dans l'énoncé, il existe un 1-cocycle $(c_\sigma)_{\sigma\in G}$ satisfaisant $c_\tau = \xi$, à savoir (n désignant l'ordre de $\tau$) :

$$c_{\tau^i} = \prod_{0\leq r\leq i-1} \tau^r(\xi) \quad (1 \leq i \leq n).$$

(On peut aussi bien invoquer la périodicité de la cohomologie de Tate de G pour obtenir $\hat{H}^{-1}(G,B^*)=0$, égalité équivalente à l'énoncé.)

Par ailleurs une réduction simple (diagonalisation et division par une unité) ramène l'énoncé (A) pour un espace de rang 4 à :

4.3.2. Proposition. Soit $A$ comme en 4.1, et soient $a,b,c$ des éléments de $A^*$. Supposons que la $A$-forme quadratique non dégénérée sur $A^4$ :

$$Q(x,y,z,t) = x^2 - by^2 - cz^2 + act^2$$

admette un zéro non trivial dans $K$. Alors, pour $A$ semi-local géométriquement localement factoriel, cette forme admet un zéro $(x,y,z,t) \in A^4$ primitif, i.e. tel que ses coordonnées engendrent $A$.

Démonstration. On peut supposer $b$ non carré dans $K$, sinon $b = \beta^2$, avec $\beta$ dans $A^*$, et $(\beta,1,0,0)$ est un zéro primitif. De même, on peut supposer $a$ non carré dans $K$, sinon $a = \alpha^2$, avec $\alpha$ dans $A^*$, et $(0,0,\alpha,1)$ est un zéro primitif. Enfin on peut supposer $K(\sqrt{a})$ non $K$-isomorphe à $K(\sqrt{b})$, sinon, par la théorie de Kummer, on a $a=b\,\gamma^2$ avec $\gamma$ dans $K^*$, donc dans $A^*$. L'élément $c$ de $A^*$ est alors de la forme $N_{K(\sqrt{b})/K}(\xi)$, pour $\xi$ dans $K(\sqrt{b})^*$, donc, d'après 4.2.1, de la forme $\alpha^2-b\beta^2$, avec $\alpha$ et $\beta$ dans $A$, et on trouve le zéro primitif $(\alpha,\beta,1,0)$. On peut donc supposer qu'on a le diagramme suivant d'extensions galoisiennes de degré 2 de corps, et d'anneaux semi-locaux réguliers intègres :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & K(\sqrt{a},\sqrt{b}) \arrow[dl, dash, "\sigma"'] \arrow[d, dash, "\rho"'] \arrow[dr, dash, "\tau"] & \\
K(\sqrt{a}) \arrow[dr, dash] & K(\sqrt{ab}) \arrow[d, dash] & K(\sqrt{b}) \arrow[dl, dash] \\
 & K &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A[\sqrt{a},\sqrt{b}] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A[\sqrt{a}] \arrow[dr, dash] & A[\sqrt{ab}] \arrow[d, dash] & A[\sqrt{b}] \arrow[dl, dash] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Le groupe de Galois de $K(\sqrt{a},\sqrt{b})$ sur $K$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ : notons $\rho,\sigma,\tau$ les éléments non triviaux de ce groupe laissant fixe respectivement $\sqrt{ab},\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$. Un zéro non trivial de $Q$ dans $K$ donne $(x,y,z,t) \in K^4$ tel que $0 \neq x^2-by^2 = c(z^2-at^2)$, ce qui implique que $c$, dans $K(\sqrt{ab})$, est une norme de l'extension $K(\sqrt{a},\sqrt{b})/K(\sqrt{ab})$.

Comme $c$ est dans $A[\sqrt{ab}]^*$, il résulte de 4.2.1 qu'il existe $z \in A[\sqrt{a},\sqrt{b}]^*$ tel que $c=z\,\rho(z)$. Posons $u = \tau(z)/z \in A[\sqrt{a},\sqrt{b}]^*$. En utilisant le fait que $c \in A^*$ est fixe par $\sigma$, on obtient $\sigma(u) = u$ ; ainsi $u$ est dans $A[\sqrt{a}]^*$ (car, par exemple, $A[\sqrt{a}]$ est la clôture intégrale de $A$ dans $K(\sqrt{a})$). On vérifie $u\rho(u)=1$. Utilisant 4.3.1 on trouve $x \in A[\sqrt{a}]^*$ tel que $u=x/\rho(x)$. Posons $y=xz \in A[\sqrt{a},\sqrt{b}]^*$. On vérifie $\tau(y) = y$, donc $y$ appartient à $A[\sqrt{b}]^*$. De plus, on a l'égalité $y\rho(y) = cx\,\rho(x)$, c'est à dire qu'on trouve $(\alpha,\beta)$ et $(\gamma,\delta)$ dans $A^2$ avec $\alpha^2-b\,\beta^2$ et $\gamma^2-a\,\delta^2$ dans $A^*$, tels que :

$$\alpha^2-b\,\beta^2 = c(\gamma^2-a\,\delta^2)$$

Comme $\alpha^2-b\,\beta^2$ appartient à $A^*$, l'idéal $A\alpha+A\beta$ est égal à $A$, et le zéro $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ de la forme $Q$ est primitif.

4.3.3. Remarques

a) L'énoncé 4.10 de [18] permet de retrouver 4.2.1, mais donne seulement 4.3.2 dans le cas où le produit $ab$ est un carré, cas qui relève de 4.2.1.

b) L'énoncé 4.3.2 peut aussi s'obtenir formellement à partir du résultat de [8] mentionné en 4.2.3 : considérons l'anneau $B$, produit des anneaux $A[X]/(X^2-b)$ et $A[Y]/(Y^2-a)$, qui est une extension finie étale de $A$. Si la forme $Q$ a un zéro non trivial $(x,y,z,t) \in K^4$ satisfaisant $(x^2-by^2)(z^2-at^2)\neq 0$ (si on a l'égalité, le résultat est clair), alors

$$c = (x^2-by^2)(z^2-at^2)^{-1}$$

est un élément de $A^*$ qui est la norme, pour l'extension $B \otimes_A K/K$, d'un élément de $(B \otimes_A K)^*$. Ceci implique (loc. cit.) que c'est une norme, pour l'extension $B/A$, d'un élément de $B^*$, ce qui permet facilement de conclure. On peut vérifier que la démonstration donnée en 4.3.2 ci-dessus est l'interprétation calculatoire de la démonstration "abstraite" de [8].

c) Utilisant la même idée qu'en b), on peut donner une démonstration (un peu sophistiquée) du principe de Hasse pour les formes quadratiques de rang 4 sur un corps de nombres : soit $Q/k$ une telle forme, qu'on peut supposer donnée par $Q(x,y,z,t) = x^2-by^2-c(z^2-at^2)$, avec $abc \neq 0$. Comme la sous-variété de $\mathbb{A}^4_k$ définie par l'équation $Q = 0$ est lisse en dehors de l'origine, l'existence de zéros non triviaux dans tous les complétés de $k$ implique que la $k$-variété lisse $V$ définie dans $\mathbb{A}^4_k$ par les équations :

$$x^2-by^2 = c(z^2-at^2) \neq 0$$

a des points rationnels dans tous les complétés de $k$. Mais $V$ est un espace homogène principal sous le $k$-tore $T \subset \mathbb{A}^4_k$ défini par les équations :

$$(x^2-by^2) = (z^2-at^2) \neq 0$$

Ce tore est $k$-birationnellement isomorphe au produit de $\mathbb{A}^1_k$ et de la quadrique lisse de $\mathbb{P}^3_k$ d'équation homogène $x^2-by^2-(z^2-at^2) = 0$, admettant un $k$-point, donc de corps des fractions transcendant pur sur $k$ : il en est donc de même du corps des fractions de $T$, ce qui, d'après un théorème de Voskresenskiĭ ([23], Théorème 6) implique que tout espace principal homogène sous $T$ qui est trivial sur chaque complété de $k$ est trivial sur $k$.

d) Comme cas particulier de 4.1, notons l'énoncé suivant (comparer avec 3.1) :

Soit $A$ semi-local géométriquement localement factoriel, et soit $n$ un entier naturel avec $n \leq 3$. Si $f \in A^*$ est une somme de $n$ carrés dans $K$, c'est

une somme de n carrés dans A.
Comme déjà indiqué (2.3.3), le contre-exemple de Craven-Rosenberg-Ware montre que cet énoncé ne s'étend pas à $n = 4$. Dans le cas A semi-local régulier, $n = 4$, la question est ouverte ; on pourrait y répondre si l'on savait répondre à la question ($\underline{K}$) pour $G=\underline{SL}(D)$ avec D l'algèbre des quaternions usuels, considérée sur A (cf. 2.1). Enfin, si pour A semi-local régulier, on connaissait seulement ($\underline{F}_{2^m}$), on aurait alors l'énoncé ci-dessus avec $n = 2^m$, par un argument de formes de Pfister analogue à celui donné en 3.1.

4.4. Autres méthodes.

Comme me l'a signalé Serre, on s'attend à obtenir des résultats du type ($\underline{D}_n$), pour n petit, grâce aux "isomorphismes génériques" de groupes semi-simples (cf. [9], II,9 et IV,8). Je me contenterai ici d'un exemple ; il ne semble pas que par cette méthode on puisse obtenir plus que 4.1.

Autre démonstration de ($\underline{F}_3$) pour A semi-local géométriquement localement factoriel.

Notons $\underline{SO}_{2n}$ le A-schéma en groupes $\underline{SO}(nH)$. Il faut montrer :
Pour $n = 1,2,3$, l'application naturelle $H^1(A,\underline{SO}_{2n}) \to H^1(K,\underline{SO}_{2n})$ a son noyau trivial.
Le cas $n = 1$ est laissé au lecteur. Pour $n \geq 2$, on a la suite exacte de A-schémas en groupes semi-simples déployés :

$$1 \to \mu_{2/A} \to \underline{Spin}_{2n} \to \underline{SO}_{2n} \to 1 \qquad (*)$$

4.4.1. Pour A comme ci-dessus, et $n \geq 2$, la question ($\underline{K}$) pour $\underline{SO}_{2n}$ est équivalente à la question ($\underline{K}$) pour $\underline{Spin}_{2n}$.

En effet, de la suite exacte (*), on tire le diagramme commutatif de suites exactes d'ensembles pointés ([11]) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\underline{SO}_{2n}(A) & \to & A^*/A^{*2} & \to & H^1(A,\underline{Spin}_{2n}) & \to & H^1(A,\underline{SO}_{2n}) & \to & H^2(A,\mu_2) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\underline{SO}_{2n}(K) & \to & K^*/K^{*2} & \to & H^1(K,\underline{Spin}_{2n}) & \to & H^1(K,\underline{SO}_{2n}) & \to & H^2(K,\mu_2)
\end{array}$$

Comme A est semi-local, donc PicA=0, la suite exacte de Kummer et l'injection $\mathrm{Br}A \hookrightarrow \mathrm{Br}K$ montrent que la flèche verticale de droite est injective. Par ailleurs, les flèches horizontales de gauche ne sont autres que la norme spinorielle, laquelle est surjective au niveau K comme au niveau A, comme le montre l'argument de [9], II,8 : l'élément de $\underline{SO}_{2n}(A)$ défini dans la base naturelle par la matrice ($a \in A^*$) :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & & & & \\ 0 & a^{-1} & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & 0 & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

a pour norme spinorielle la classe de $a$ dans $A^*/A^{*2}$. Ceci établit 4.4.1.

4.4.2. <u>Pour</u> $n = 2,3$ <u>et</u> $A$ <u>semi-local</u>, $H^1(A, \underline{Spin}_{2n}) = 0$.

En effet, on a les isomorphismes de A-schémas en groupes :

$$\underline{Spin}_4 \simeq \underline{SL}_2 \times \underline{SL}_2$$

$$\underline{Spin}_6 \simeq \underline{SL}_4$$

L'énoncé résulte alors de l'énoncé analogue pour $\underline{SL}_n$, pour tout $n$. On obtient l'assertion initiale en combinant 4.4.1 et 4.4.2.

## REFERENCES


[1] ARTIN E., Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Hamb. Abh. (1927), s.100-115.

[2] <u>Anneaux de Chow</u>. Séminaire Chevalley, E.N.S. Paris, 1958, distribué par l'Institut Henri Poincaré.

[3] BAEZA R. und KNEBUSCH M., Annullatoren von Pfisterformen über semilokalen Ringen. Math. Z. 140, s.41-62 (1974).

[4] <u>Algebraic Number Theory</u>, edited by J.W.S. CASSELS and A. FRÖLICH, Academic Press, 1967.

[5] CHOI M.D. and LAM T.Y., An old question of Hilbert, in <u>Conference on quadratic forms</u>, 1976, Queen's papers in pure and applied mathematics, n°46 (1977).

[6] CRAVEN T.C., ROSENBERG A., WARE R., The map of the Witt ring of a domain into the Witt ring of its field of fractions. Proc. A.M.S. Vol. 51, n°1, p. 25-30, 1975.

[7] COLLIOT-THELENE J.L., Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques. Bull. Soc. Math. France (1978).

[8] COLLIOT-THELENE J.L. et SANSUC J.J., Propriétés cohomologiques des tores sur un schéma régulier. En préparation.

[9] DIEUDONNE J., <u>La géométrie des groupes classiques</u>, 3ème édition, Ergeb.d. Math.u.ihr.Grenzg.Band 5, Springer-Verlag, 1971.

[10] DEMAZURE M. et GROTHENDIECK A., SGA 3, <u>Schémas en groupes</u>. Lecture Notes in Math. 151,152,153, Springer-Verlag 1970.

[11] GIRAUD J., Cohomologie non abélienne. Grundlehren der Math. Wiss. 179, Springer-Verlag, 1971.

[12] GROTHENDIECK A., Le groupe de Brauer II, Séminaire Bourbaki 297 (1965) publié dans : Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1968.

[13] KNEBUSCH M., Symmetric Bilinear Forms over Algebraic Varieties. In Conference on quadratic forms, 1976, Queen's papers in pure and applied mathematics, n° 46 (1977).

[14] KNEBUSCH M., Isometrien über semilokalen Ringen. Math.Z.108 (1969) 255-268.

[15] KNEBUSCH M., Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem. Acta Arithmetica, XXIV, (1973) 279-299.

[16] KNEBUSCH M., ROSENBERG A., WARE R., Structure of Witt rings and quotients of abelian group rings, Amer. J. Math. 94 (1972) 119-155.

[17] KNEBUSCH M., ROSENBERG A., WARE R., Signatures on semi-local rings, J.Algebra 26 (1973) 208-250.

[18] KNUS M.A., OJANGUREN M., SRIDHARAN R., Quadratic forms and Azumaya algebras. Preprint, ETH Zürich, 1977.

[19] LAM T.Y., The algebraic theory of quadratic forms. Benjamin, 1973.

[20] PRESTEL A., Lectures on formally real fields. I.M.P.A. Rio-de-Janeiro, 1975.

[21] SWAN R.G., Topological Examples of Projective Modules. Trans. Am. Math.Soc. 230 (1977) 201-234.

[22] GROTHENDIECK A., Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. North-Holland, Amsterdam, 1968.

[23] VOSKRESENSKII V.E., Propriétés birationnelles des groupes algébriques linéaires. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. Tom 34 (1970), n°1. Trad. ang.Math. USSR-Izvestija Vol. 4 (1970), n°1.

Note sur le §3. En utilisant la même idée de Prestel, F. LORENZ obtient dans "Quadratische Formen und die Artin-Schreiersche Theorie der formal reellen Körper", Bull. Soc. Math. France, Mémoire 48, 1976, p. 61-73, un résultat plus fort que l'énoncé 3.4.1 : son Zusatz zu Satz 9 permet de traiter le cas de variétés singulières ; par ailleurs les phénomènes liés à l'existence de points réels isolés sont étudiés par G. EFROYMSON dans "Local reality on algebraic varieties", J. of Algebra, t. 29, 1974, p. 133-142.

J.L. COLLIOT-THELENE
81, Avenue du Général Leclerc
75014 PARIS