

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

BERNARD HELFFER

## **Hypoellipticité microlocale : présentation historique**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 51-52 (1977), p. 5-12

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1977\\_\\_51-52\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__51-52__5_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

HYPOELLIPTICITE MICROLOCALE : PRESENTATION HISTORIQUE

par Bernard HELFFER  
 (Ecole Polytechnique)

On considère ici l'hypoellipticité d'opérateurs pseudodifférentiels (o.p.d.) proprement supportés définis dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . On dira qu'un o.p.d. est régulier si son symbole complet  $p$ , admet un développement asymptotique de la forme :  $p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}(x, \xi)$ , où les  $p_{m-j}(x, \xi)$  sont des symboles homogènes en  $\xi$  de degré  $m-j$  ;  $m$  est l'ordre de l'opérateur et  $p_m$  son symbole principal.

L'opérateur  $P$  de symbole  $p$  est défini pour  $u$  dans  $\mathcal{E}'(\Omega)$  par :

$$Pu = \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \quad \text{où} \quad d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi .$$

Rappelons qu'un opérateur  $P$  différentiel (ou pseudodifférentiel) est hypoelliptique s'il a la propriété suivante :

$$(He) \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \omega \subset \Omega, \quad Pu \in C^\infty(\omega) \implies u \in C^\infty(\omega) .$$

On aura besoin de la notion plus précise suivante pour  $k \in \mathbb{R}^+$ .

(He)<sub>k</sub> On dira qu'un opérateur différentiel (ou pseudodifférentiel) d'ordre  $m$  défini sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est hypoelliptique avec perte de  $k$  dérivées si :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \omega \subset \Omega, \quad Pu \in H_{loc}^s(\omega) \implies u \in H_{loc}^{s+m-k}(\omega) .$$

Un opérateur elliptique vérifie (He)<sub>0</sub>. Il a été démontré dans [12] qu'on ne pouvait espérer mieux que (He)<sub>1/2</sub> si  $p_m$  s'annulait en un point  $(x_0, \xi_0)$  de  $T^*\Omega \setminus \emptyset$  (le fibré cotangent privé de la section nulle).

Les opérateurs pseudodifférentiels réguliers vérifiant (He)<sub>1/2</sub> sont caractérisés par la condition suivante :

$(H8) \quad \frac{1}{i} \{p_m, \bar{p}_m\} < 0 \quad \text{lorsque} \quad p_m = 0$
--

où pour deux fonctions sur  $T^*\Omega$   $f$  et  $g$  :

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \right] .$$

Il est facile de voir qu'aucun opérateur différentiel ne vérifie cette propriété.

Les opérateurs dont le symbole principal vérifie (H0) sont de type principal, c'est-à-dire que si  $\Sigma$  désigne l'ensemble caractéristique :

$$\Sigma \stackrel{\text{d'éf}}{=} \{ (x, \xi) \in T^*\Omega \setminus 0 ; p_m(x, \xi) = 0 \} ,$$

le gradient en  $(x, \xi)$  de  $p_m$  ne s'annule pas sur  $\Sigma$ .

De plus,  $\Sigma$  est une sous-variété symplectique  $C^\infty$  de  $T^*\Omega \setminus 0$ , c'est-à-dire que

la 2-forme  $\omega = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$  restreinte à  $\Sigma$  est non dégénérée.

Nirenberg-Trèves [14], Egorov [5] ont poursuivi l'étude des opérateurs du type principal. Nous ne retiendrons que quelques points de leurs résultats.

a) Si un tel opérateur ne vérifie pas  $(He)_{k/k+1}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), on ne peut espérer mieux que  $(He)_{k+1/k+2}$ .

b)  $(He)_{k/k+1}$  est équivalent à la vérification d'une condition sur le symbole principal  $(N.T.E)_{x, \xi}$  en tout point  $(x, \xi)$  de  $\Sigma$ .

c) On peut donner des CNS pour avoir  $(He)_1$ .

Insistons sur le fait que ces conditions ne portent que sur le symbole principal  $p_m$  de l'opérateur.

La suite logique de l'étude des opérateurs du type principal est l'étude de l'hypoellipticité pour des opérateurs à caractéristiques doubles, c'est-à-dire ceux qui vérifient :

$$p_m(x, \xi) = 0 \implies (\text{grad}_{(x, \xi)} p_m)(x, \xi) = 0 .$$

On ne peut alors espérer mieux que  $(He)_1$ . Cette étude de  $(He)_1$  a été menée à bien dans les articles suivants [15], [2], [3], [6], [4], [13], [1]. Avant de rappeler les principaux résultats, introduisons la classe  $OPL^{m,k}(\Omega, \Sigma)$  des opérateurs pseudodifférentiels réguliers d'ordre  $m$  dont le symbole est dans  $L^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ . Un symbole est dans  $L^{m,k}(\Omega, \Sigma)$  s'il s'annule à l'ordre  $k$  sur un cône lisse  $\Sigma$  de  $T^*\Omega \setminus 0$  au sens suivant :

Pour tout compact  $K \subset \subset \Omega$ , il existe une constante  $C_K > 0$  telle que, pour tout  $(x, \xi)$  dans  $K \times \mathbb{R}^n$ , tel que  $|\xi| \geq 1$ , on ait :

$$\frac{|p_{m-j}(x, \xi)|}{|\xi|^{m-j}} \leq C_K (d(x, \xi))^{k-2j}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad 2j \leq k,$$

où  $d(x, \xi) = \inf_{(y, \eta) \in \Sigma} \left( |x - y| + \left| \eta - \frac{\xi}{|\xi|} \right| \right)$  est la distance de  $(x, \xi)$  à  $\Sigma$ . Cette classe a été introduite par [15] puis généralisée dans [3]. On dira que  $p$  dans  $L^{m,k}(\Omega, \Sigma)$  est transversalement elliptique (ou non dégénéré) si son symbole principal  $p_m$  s'annule exactement à l'ordre  $k$  au sens suivant : Pour tout compact  $K \subset \subset \Omega$ , il existe une constante  $C_K > 0$ , telle que, pour tout  $(x, \xi)$  dans  $K \times \mathbb{R}^n$ , tel que  $|\xi| \geq 1$ , on ait :

$$\frac{|p_m(x, \xi)|}{|\xi|^m} \geq C_K (d(x, \xi))^k.$$

A l'opérateur  $P$ , on associe en tout point  $(x, \xi)$  de  $\Sigma$ , l'opérateur suivant :

$$\sigma_{(x, \xi)}^k(P) = \sum_{|\alpha+\beta|+2j=k} \frac{1}{\alpha! \beta!} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\beta p_{m-j}(x, \xi) \cdot y^\alpha D_y^\beta.$$

C'est un opérateur différentiel, à coefficients polynomiaux, de degré total en  $(y, D_y)$  inférieur à  $k$ .

Cet opérateur est invariant au sens suivant :

Soit  $\tau$  une transformation canonique homogène de  $T^*\Omega \setminus 0$  dans  $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ , soit  $\mathfrak{F}$  un opérateur Fourier intégral elliptique associé à  $\tau$ , alors en tout point  $(x, \xi)$  de  $\Sigma$ , il existe un opérateur unitaire  $U$  de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , continu de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et se prolongeant en un opérateur continu de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tel que :

$$\sigma_{\tau(x, \xi)}^k(\mathfrak{F} \cdot P \mathfrak{F}^{-1}) = U \cdot \sigma_{(x, \xi)}^k(P) \cdot U^{-1}.$$

Il est alors clair que les propriétés du type suivant : inversibilité dans  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}'$ , injectivité dans  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}'$  pour l'opérateur  $\sigma_{(x, \xi)}^k(P)$  sont invariantes par transformation canonique, en particulier ne dépendent pas d'un choix de coordonnées.

Dans [4], il a été démontré le théorème suivant :

**Théorème 1** : On suppose que  $P$  est dans  $OPL^{m,k}(\Omega, \Sigma)$  et que  $p_m$  est transversalement elliptique, alors les assertions suivantes sont équivalentes

- i)  $P$  a une paramétrix à gauche dans la classe de Boutet de Monvel  $OPS^{-m, -k}(\Omega, \Sigma)$ , [3].
- ii) En tout point  $(x, \xi)$  de  $\Sigma$ ,  $\sigma_{(x, \xi)}^k(P)$  est injectif dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

iii)  $P$  vérifie  $(He)_{k/2}$ .

La classe  $OPS^{m,k}(\Omega, \Sigma)$  sera généralisée dans notre second article.

### Le cas symplectique

Dans le cas où  $\Sigma$  est symplectique, le théorème a été démontré dans [15], [2], [3]. Dans le cas  $k=2$ , on peut expliciter [cf. 15] les conditions en introduisant les invariants suivants.

Si  $\rho \in \Sigma$ ,  $u \in T_\rho(T^*\Omega)$ ,  $v \in T_\rho(T^*\Omega)$ .

Si  $X$  (resp.  $Y$ ) est un champ de vecteur défini au voisinage de  $\rho$  et égal à  $u$  au point  $\rho$  (resp.  $v$ ), on définit le hessien de  $p_m$  au point  $\rho$  par :

$$(\text{Hess } p_m)_\rho(u, v) = \frac{1}{2} (XY p_m)_\rho.$$

D'autre part, on sait que sur  $\Sigma$ , le symbole sous-principal défini par

$$p'_{m-1}(\rho) = p_{m-1} - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j \partial \bar{x}_j} \text{ est invariant.}$$

Enfin, définissons  $A_\rho$  la matrice fondamentale (ou application hamiltonnienne) par :

$$\omega(u, A_\rho v) = (\text{Hess } p_m)_\rho(u, v)$$

par  $u$  et  $v$  dans  $\tilde{T}_\rho(T^*\Omega)$ , le complexifié de  $T_\rho(T^*\Omega)$ .

On suppose que  $p_m$  prend localement ses valeurs dans un secteur  $\Gamma$  de  $\mathbb{C}$  d'angle inférieur à  $\pi$ ; alors si  $2\nu$  désigne la codimension de  $\Sigma$ ,  $A_\rho$  a  $2\nu$  valeurs propres non nulles de la forme  $\pm i \lambda_j$ ,  $j=1, \dots, \nu$  avec  $\lambda_j \in \Gamma$ . La condition ii) du théorème 1 peut alors s'écrire :

$$\left[ \begin{array}{l} \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) \in \mathbb{N}^\nu, \quad \forall (x, \xi) \in \Sigma \\ (p'_{m-1} + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j + 1)\lambda_j)(x, \xi) \neq 0 \end{array} \right.$$

Dans le cas où la codimension de  $\Sigma$  est 2 ( $\nu=1$ ), il est nécessaire d'introduire un nouvel invariant, considéré dans [15]; le "winding number" ou indice d'enroulement.

Soit  $N_\rho(\Sigma)$  l'orthogonal de  $T_\rho(\Sigma)$  pour  $\omega$ .  $N_\rho(\Sigma)$  est de dimension 2 et  $\omega$  étant non dégénérée lorsqu'elle est restreinte à  $\Sigma$ , on peut choisir deux vecteurs  $e_1, e_2$  de  $N_\rho(\Sigma) \setminus 0$  tels que  $\omega(e_1, e_2) < 0$ . On peut alors identifier

$N(\Sigma)$  à  $\mathbb{E}$  en identifiant  $e_1$  et 1,  $e_2$  et  $i$ .

Si  $p_m$  s'annule à l'ordre  $k$ , si  $t \in T_\rho(T^*\Omega)$ , et si  $X$  est un champ de vecteur sur  $T^*\Omega$  égal à  $t$  au point  $\rho$ , on peut poser :

$$a_\rho(t) = (\text{Hess}^k p_m)(t, \dots, t) = \frac{1}{M!} (X^k p_m)_\rho .$$

Restreint à  $N_\rho(\Sigma)$ ,  $a_\rho$  définit une application de  $N_\rho(\Sigma) \setminus 0$  dans  $\mathbb{E} \setminus 0$ , et donc, en faisant l'identification ci-dessus de  $\mathbb{E} \setminus 0$  dans  $\mathbb{E} \setminus 0$  et on associe alors à  $a_\rho(t)$  son indice d'enroulement (ou degré).

Lorsque cet indice d'enroulement est  $> 0$ , l'opérateur n'est pas hypoelliptique [15] ; lorsqu'il est égal à  $-k$ , il est toujours hypoelliptique [15]. Dans le cas où cet indice (c'est un entier !) est dans  $]-k, 0]$ , des réponses partielles sont données dans [7] [9] ; cette réponse est liée à l'étude d'équations différentielles ordinaires.

En particulier, soit  $P$  un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre  $1/2$  vérifiant  $(H\theta)$ , et  $Q$  un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0 quelconque, alors

$$\rho = P^2 + Q \text{ vérifie } (He)_1 \text{ ([15])} .$$

Une question naturelle était alors de se demander :

[Q1] Soit  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) un opérateur pseudodifférentiel d'ordre  $1/2$  vérifiant  $(H\theta)$  et  $Q$  un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0 quelconque, alors  $\rho = P_1 P_2 + Q$  vérifie-t-il  $(He)_1$  ?

Une réponse positive sera donnée dans notre deuxième article.

### Le cas général

Dans le cas où  $\Sigma$  n'est pas symplectique, signalons que le théorème 1 est une extension des résultats de [3] où est introduite la classe  $OPS^{m,k}(\Omega, \Sigma)$  et de [6] (cas où le rang de  $\omega$  restreint à  $\Sigma$  est constant).

Dans le cas  $k=2$ , mais lorsque  $p_m$  n'est plus transversalement elliptique ou lorsque l'ensemble caractéristique n'est plus une sous-variété de  $T^*\Omega \setminus 0$ , une caractérisation de  $(He)_1$  est donnée dans [13] lorsque  $p_m$  prend localement ses valeurs dans un secteur d'angle inférieur à  $\pi$ . Dans ce cas,  $c_{(x,\xi)}^2(P)$  ne rend pas compte de la propriété  $(He)_1$  ( $p_{m-1}/\Sigma$  et le Hessien de  $p_m$  ne fournissent pas une information suffisante). On peut voir dans [8] un exemple simple de ce phénomène ; c'est le cas où  $p_m$  s'annule

exactement à l'ordre  $2q$  ( $q > 1$ ) sur  $\Sigma$ .

Dans le cas considéré par L. Hörmander [13], il résulte d'un théorème de Beals [1] que l'opérateur  $P$  a une paramétrix à gauche dans une classe de Beals dès que  $P$  vérifie  $(He)_1$ . Il est montré dans [13] que si  $(He)_1$  n'est pas vérifiée par  $P$ , on ne peut espérer mieux que  $(He)_{9/8}$ . Dans le cas où  $k=2$  et où  $p_m$  est caractéristique sur un cône lisse symplectique et transversalement elliptique, il est montré dans [15] qu'on ne pouvait espérer mieux que  $(He)_{3/2}$ .

Il était alors naturel de se poser la question suivante :

[Q2] Soit  $P$  un opérateur pseudodifférentiel régulier de  $OPL^{m,2}(\Omega, \Sigma)$  transversalement elliptique et on suppose que  $\Sigma$  est symplectique de codimension  $2\nu$ , que l'indice d'enroulement de  $p_m$  est nul si  $\nu=1$  et qu'en un point  $(x_0, \xi_0)$  de  $\Sigma$ , il existe  $\alpha$  dans  $\mathbb{N}^\nu$  tel que :

$$(p'_{m-1} + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j + 1)\lambda_j)(x_0, \xi_0) = 0 .$$

Alors sous quelle condition  $P$  vérifie-t-il  $(He)_{3/2}$  (microlocalement au voisinage de  $(x_0, \xi_0)$ ) ?

On répond partiellement à cette question dans notre premier article.

Dans le cas où la codimension est 2, on peut expliciter la condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité avec perte de  $3/2$  dérivées.

On suppose qu'il existe un point  $(x_0, \xi_0)$  de  $\Sigma$  et un entier  $j$  tel que :

$$(p'_{m-1} + (2j+1)\lambda)(x_0, \xi_0) = 0 .$$

Pour  $(x, \xi)$  dans  $\Sigma$ , on pose  $\tilde{p}_{m-1}(x, \xi) = p'_{m-1}(x, \xi) + (2j+1)\lambda(x, \xi)$  ; c'est un symbole sur  $\Sigma$ , et  $\Sigma$  étant symplectique, on peut définir sur  $\Sigma$  un crochet de Poisson canonique  $\{ , \}_\Sigma$  de deux symboles sur  $\Sigma$ .

On suppose que  $\tilde{p}_{m-1}$  vérifie (H $\tilde{H}$ ) en un point  $(x_0, \xi_0)$  de  $\Sigma$ , alors  $P$  vérifie  $(He)_{3/2}$  au voisinage de  $(x_0, \xi_0)$ . Par exemple l'opérateur

$L = D_t^2 + t^2(D_x^2 + D_y^2) + (1+y)D_x + iD_y$  est hypoelliptique avec perte de  $3/2$  dérivées dans un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^3$ .

Lorsque la codimension de  $\Sigma$  est plus grande que 2, l'étude de  $(He)_{3/2}$  (plus généralement  $(He)_{1+k/k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ) se ramène à l'étude de  $(He)_{1/2}$  (resp.  $(He)_{k/k+1}$ ) pour des systèmes dont le symbole est défini sur  $\Sigma$ .

On est alors naturellement conduit à se poser des questions du type suivant :

[Q3] Soit  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre  $1/2$  vérifiant (H8) ; soient  $Q_1, Q_2$  des o.p.d. réguliers d'ordre  $0$ , alors

$$\rho = \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ Q_2 & P_2 \end{pmatrix} \text{ vérifie-t-il (He)}_{1/2} ?$$

Cette question étant classiquement liée à [Q1], une réponse positive à [Q1] entraînera une réponse positive à [Q3]. Par exemple, le

système  $\begin{pmatrix} D_t + i t |D_x| & \lambda |D_x|^{1/2} \\ \mu |D_x|^{1/2} & D_y + i y |D_x| \end{pmatrix}$  est microlocalement hypoelliptique

dans  $T^* \mathbb{R}^3 \setminus 0$  au voisinage de  $\tau = t = \eta = y = 0$  indépendamment des constantes  $\lambda$  et  $\mu$ .

Cette présentation historique constitue une introduction aux deux articles qui suivent, qui font partie de ma thèse d'état soutenue à Orsay et qui peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre.

Le premier article : Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (perte de  $3/2$  dérivées) a été annoncé dans [10].

Le second article : Construction de paramétrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels caractéristiques sur la réunion de deux cônes lisses est annoncé dans [11].

#### R E F E R E N C E S

- [1] R. Beals, Characterization of pseudodifferential operators and applications (to appear).  
Voir également l'exposé de A. Grigis sur cet article (Séminaire Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé XIX).
- [2] L. Boutet de Monvel - F. Trèves, On a classe of pseudodifferential operators with double characteristics, *Inventiones Math.* 24, 1-34 (1974).



- [3] L. Boutet de Monvel, Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* , 585-639 (1974).
- [4] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer, Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques, *Astérisque* (Juillet 1976).
- [5] Yu. B. Egorov, Subelliptic Operators, *Uspekhi Mat. Nauk* 30:2 (1975) 57-114, *Russian Math. Surveys* 30:2 (1975) 59-118.
- [6] A. Grigis, Hypoellipticité pour une classe d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles et paramétrixes associées, *Astérisque* (Juillet 1976).
- [7] B. Helffer, Sur une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples, *J. Math. Pures et Appl.* (1976).
- [8] B. Helffer, Invariants associés à une classe d'opérateurs pseudodifférentiels, *Ann. Inst. Fourier* (1976).
- [9] B. Helffer - L. Rodino, Elliptic pseudodifferential operators degenerate on a symplectic manifold, *Research Announcement in the Bull. AMS* (1976).
- [10] B. Helffer, Sur l'hypoellipticité d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles, *Note aux C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 281 (10 Nov. 1975).
- [11] B. Helffer, Constructions de paramétrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels caractéristiques sur la réunion de deux cônes lisses, *Note aux C.R. Acad. Sc. Paris* (1976).
- [12] L. Hörmander, Pseudodifferential operators and non elliptic boundary problems, *Ann. of Math.* 83 (1966), 129-209.
- [13] L. Hörmander, A class of pseudodifferential operators with double characteristics, *Math. Annalen* 217, No 2 (1975).
- [14] L. Nirenberg - F. Trèves, On local solvability of linear partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 23 (1970), 1-28,  
   Ibid.  23 (1970), 459-509,  
   Ibid.  24 (1971), 279-288.
- [15] J. Sjöstrand, Parametrixes for pseudodifferential operators with multiple characteristics, *Ark. för Math.* 12 (1974), 85-130.

Bernard H E L F F E R  
 Centre de Mathématiques  
 Ecole Polytechnique  
 91128 PALAISEAU CEDEX

---