BERNARD HELFFER

Hypoellipticité microlocale : présentation historique

Mémoires de la S. M. F., tome 51-52 (1977), p. 5-12
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__51-52__5_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 51-52, 1977, p. 5-12.

HYPOELLIPTICITE MICROLOCALE : PRESENTATION HISTORIQUE

par Bernard HELFFER
(Ecole Polytechnique)

On considère ici l'hypoellipticité d'opérateurs pseudodifférentiels (o.p.d.) proprement supportés définis dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On dira qu'un o.p.d. est régulier si son symbole complet p, admet un développement asymptotique de la forme : $p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}(x,\xi)$, où les $p_{m-j}(x,\xi)$ sont des symboles homogènes en ξ de degré m-j ; m est l'ordre de l'opérateur et p_m son symbole principal.

L'opérateur P de symbole p est défini pour u dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ par :

$$Pu = \int e^{ix.\xi}\, p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, đ\xi \quad \text{où} \quad đ\xi = (2\pi)^{-n}\, d\xi \quad .$$

Rappelons qu'un opérateur P différentiel (ou pseudodifférentiel) est hypoelliptique s'il a la propriété suivante :

(He) $\forall\, u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \forall\, \omega \subset \Omega\ ,\quad Pu \in C^\infty(\omega) \Longrightarrow u \in C^\infty(\omega)$.

On aura besoin de la notion plus précise suivante pour $k \in \mathbb{R}^+$.

$(He)_k$ On dira qu'un opérateur différentiel (ou pseudodifférentiel) d'ordre m défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est hypoelliptique avec perte de k dérivées si :

$\forall\, s \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \forall\, \omega \subset \Omega,\quad Pu \in H^s_{loc}(\omega) \Longrightarrow u \in H^{s+m-k}_{loc}(\omega)$.

Un opérateur elliptique vérifie $(He)_o$. Il a été démontré dans [12] qu'on ne pouvait espérer mieux que $(He)_{1/2}$ si p_m s'annulait en un point (x_o,ξ_o) de $T^*\Omega\backslash 0$ (le fibré cotangent privé de la section nulle).
Les opérateurs pseudodifférentiels réguliers vérifiant $(He)_{1/2}$ sont caractérisés par la condition suivante :

$$\boxed{(H\gamma) \qquad \frac{1}{i}\{p_m,\bar{p}_m\} < 0 \quad \text{lorsque } p_m = 0}$$

où pour deux fonctions sur $T^*\Omega$ f et g :

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial \xi_i}\right] .$$

Il est facile de voir qu'aucun opérateur différentiel ne vérifie cette propriété.

Les opérateurs dont le symbole principal vérifie (H४) sont de type principal, c'est-à-dire que si Σ désigne l'ensemble caractéristique :

$$\Sigma \overset{\text{déf}}{\equiv} \{(x,\xi) \in T^*\Omega\backslash 0 \ ; \ p_m(x,\xi) = 0\} ,$$

le gradient en (x,ξ) de p_m ne s'annule pas sur Σ.

De plus, Σ est une sous-variété symplectique C^∞ de $T^*\Omega\backslash 0$, c'est-à-dire que la 2-forme $\omega = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j$ restreinte à Σ est non dégénérée.

Nirenberg-Trèves [14], Egorov [5] ont poursuivi l'étude des opérateurs du type principal. Nous ne retiendrons que quelques points de leurs résultats.

a) Si un tel opérateur ne vérifie pas $(He)_{k/k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$, on ne peut espérer mieux que $(He)_{k+1/k+2}$.

b) $(He)_{k/k+1}$ est équivalent à la vérification d'une condition sur le symbole principal $(N.T.E)_{x,\xi}$ en tout point (x,ξ) de Σ.

c) On peut donner des CNS pour avoir $(He)_1$.

Insistons sur le fait que ces conditions ne portent que sur le symbole principal p_m de l'opérateur.

La suite logique de l'étude des opérateurs du type principal est l'étude de l'hypoellipticité pour des opérateurs à caractéristiques doubles, c'est-à-dire ceux qui vérifient :

$$p_m(x,\xi) = 0 \Longrightarrow (\mathrm{grad}_{(x,\xi)} p_m)(x,\xi) = 0 .$$

On ne peut alors espérer mieux que $(He)_1$. Cette étude de $(He)_1$ a été menée à bien dans les articles suivants [15], [2], [3], [6], [4], [13], [1]. Avant de rappeler les principaux résultats, introduisons la classe $OPL^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ des opérateurs pseudodifférentiels réguliers d'ordre m dont le symbole est dans $L^{m,k}(\Omega,\Sigma)$. Un symbole est dans $L^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ s'il s'annule à l'ordre k sur un cône lisse Σ de $T^*\Omega\backslash 0$ au sens suivant :

Pour tout compact $K \subset\subset \Omega$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que, pour tout (x,ξ) dans $K \times \mathbb{R}^n$, tel que $|\xi| \geq 1$, on ait :

$$\frac{|p_{m-j}(x,\xi)|}{|\xi|^{m-j}} \leq C_K(d(x,\xi))^{k-2j} \quad , \quad j \in \mathbb{N} \ , \ 2j \leq k \ ,$$

où $d(x,\xi) = \inf\limits_{(y,\eta)\in\Sigma} \left(|x-y| + \left|\eta - \frac{\xi}{|\xi|}\right| \right)$ est la distance de (x,ξ) à Σ. Cette classe a été introduite par [15] puis généralisée dans [3]. On dira que p dans $L^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ est transversalement elliptique (ou non dégénéré) si son symbole principal p_m s'annule exactement à l'ordre k au sens suivant :
Pour tout compact $K \subset\subset \Omega$, il existe une constante $C_K > 0$, telle que, pour tout (x,ξ) dans $K \times \mathbb{R}^n$, tel que $|\xi| \geq 1$, on ait :

$$\frac{|p_m(x,\xi)|}{|\xi|^m} \geq C_K \ (d(x,\xi))^k \quad .$$

A l'opérateur P, on associe en tout point (x,ξ) de Σ, l'opérateur suivant :

$$\sigma^k_{(x,\xi)}(P) = \sum_{|\alpha+\beta|+2j=k} \frac{1}{\alpha!\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\beta} p_{m-j}(x,\xi) \, . \, y^{\alpha} \, D^{\beta}_y \quad .$$

C'est un opérateur différentiel, à coefficients polynomiaux, de degré total en (y,D_y) inférieur à k.
Cet opérateur est invariant au sens suivant :
Soit τ une transformation canonique homogène de $T^*\Omega\backslash 0$ dans $T^*\mathbb{R}^n\backslash 0$, soit $\mathfrak{J}$ un opérateur Fourier intégral elliptique associé à τ, alors en tout point (x,ξ) de Σ, il existe un opérateur unitaire U de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et se prolongeant en un opérateur continu de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\sigma^k_{\tau(x,\xi)}(\mathfrak{J}.P\mathfrak{J}^{-1}) = U \, . \, \sigma^k_{(x,\xi)}(P) \, . \, U^{-1} \quad .$$

Il est alors clair que les propriétés du type suivant : inversibilité dans $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, injectivité dans $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ pour l'opérateur $\sigma^k_{(x,\xi)}(P)$ sont invariantes par transformation canonique, en particulier ne dépendent pas d'un choix de coordonnées.
Dans [4], il a été démontré le théorème suivant :

<u>Théorème 1</u> : On suppose que P est dans $OPL^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ et que p_m est transversalement elliptique, alors les assertions suivantes sont équivalentes

i) P a une paramétrixe à gauche dans la classe de Boutet de Monvel $OPS^{-m,-k}(\Omega,\Sigma)$, [3].

ii) En tout point (x,ξ) de Σ, $\sigma^k_{(x,\xi)}(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

iii) P vérifie $(He)_{k/2}$.

La classe $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ sera généralisée dans notre second article.

Le cas symplectique

Dans le cas où Σ est symplectique, le théorème a été démontré dans [15], [2], [3]. Dans le cas $k = 2$, on peut expliciter [cf. 15] les conditions en introduisant les invariants suivants.

Si $\rho \in \Sigma$, $u \in T_\rho(T^*\Omega)$, $v \in T_\rho(T^*\Omega)$.

Si X (resp. Y) est un champ de vecteur défini au voisinage de ρ et égal à u au point ρ (resp. v), on définit le hessien de p_m au point ρ par :

$$(\mathrm{Hess}\ p_m)_\rho(u,v) = \frac{1}{2}(XY\ p_m)_\rho \quad .$$

D'autre part, on sait que sur Σ, le symbole sous-principal défini par

$$p'_{m-1}(\rho) = p_{m-1} - \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j\partial\xi_j} \text{ est invariant.}$$

Enfin, définissons A_ρ la matrice fondamentale (ou application hamiltonnienne) par :

$$\omega(u,A_\rho v) = (\mathrm{Hess}\ p_m)_\rho\ (u,v)$$

par u et v dans $\widetilde{T}_\rho(T^*\Omega)$, le complexifié de $T_\rho(T^*\Omega)$.

On suppose que p_m prend localement ses valeurs dans un secteur Γ de $\mathbb{C}$ d'angle inférieur à π ; alors si 2ν désigne la codimension de Σ, A_ρ a 2ν valeurs propres non nulles de la forme $\pm i\lambda_j$, $j = 1,\dots,\nu$ avec $\lambda_j \in \Gamma$. La condition ii) du théorème 1 peut alors s'écrire :

$$\left[\begin{array}{l} \forall\ \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_\nu) \in \mathbb{N}^\nu\ ,\quad \forall\ (x,\xi) \in \Sigma \\ \qquad\qquad (p'_{m-1} + \sum_{j=1}^{\nu}(2\alpha_j+1)\lambda_j)(x,\xi) \neq 0 \quad . \end{array}\right.$$

Dans le cas où la codimension de Σ est 2 ($\nu = 1$), il est nécessaire d'introduire un nouvel invariant, considéré dans [15] ; le "winding number" ou indice d'enroulement.

Soit $N_\rho(\Sigma)$ l'orthogonal de $T_\rho(\Sigma)$ pour ω. $N_\rho(\Sigma)$ est de dimension 2 et ω étant non dégénérée lorsqu'elle est restreinte à Σ, on peut choisir deux vecteurs e_1, e_2 de $N_\rho(\Sigma)\backslash 0$ tels que $\omega(e_1,e_2) < 0$. On peut alors identifier

$N_\rho(\Sigma)$ à $\mathbb{C}$ en identifiant e_1 et 1, e_2 et i.
Si p_m s'annule à l'ordre k, si $t \in T_\rho(T^*\Omega)$, et si X est un champ de vecteur sur $T^*\Omega$ égal à t au point ρ, on peut poser :

$$a_\rho(t) = (\mathrm{Hess}^k\ p_m)(t,\dots,t) = \frac{1}{M!}\,(X^k\ p_m)_\rho \quad .$$

Restreint à $N_\rho(\Sigma)$, a_ρ définit une application de $N_\rho(\Sigma)\backslash 0$ dans $\mathbb{C}\backslash 0$, et donc, en faisant l'identification ci-dessus de $\mathbb{C}\backslash 0$ dans $\mathbb{C}\backslash 0$ et on associe alors à $a_\rho(t)$ son indice d'enroulement (ou degré).
Lorsque cet indice d'enroulement est > 0, l'opérateur n'est pas hypoelliptique [15] ; lorsqu'il est égal à -k, il est toujours hypoelliptique [15]. Dans le cas où cet indice (c'est un entier !) est dans]-k,0], des réponses partielles sont données dans [7] [9] ; cette réponse est liée à l'étude d'équations différentielles ordinaires.
En particulier, soit P un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 1/2 vérifiant $(H\vartheta)$, et Q un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0 quelconque, alors

$$\mathcal{P} = P^2 + Q \quad \text{vérifie } (He)_1 \quad ([15]) \quad .$$

Une question naturelle était alors de se demander :

[Q1] Soit P_1 (resp. P_2) un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1/2 vérifiant $(H\vartheta)$ et Q un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0 quelconque, alors $\mathcal{P} = P_1P_2 + Q$ vérifie-t-il $(He)_1$?

Une réponse positive sera donnée dans notre deuxième article.

Le cas général

Dans le cas où Σ n'est pas symplectique, signalons que le théorème 1 est une extension des résultats de [3] où est introduite la classe $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ et de [6] (cas où le rang de ω restreint à Σ est constant).

Dans le cas $k = 2$, mais lorsque p_m n'est plus transversalement elliptique ou lorsque l'ensemble caractéristique n'est plus une sous-variété de $T^*\Omega\backslash 0$, une caractérisation de $(He)_1$ est donnée dans [13] lorsque p_m prend localement ses valeurs dans un secteur d'angle inférieur à π. Dans ce cas, $\sigma^2_{(x,\xi)}(P)$ ne rend pas compte de la propriété $(He)_1$ (p'_{m-1}/Σ et le Hessien de p_m ne fournissent pas une information suffisante). On peut voir dans [8] un exemple simple de ce phénomène ; c'est le cas où p_m s'annule

exactement à l'ordre $2q$ $(q > 1)$ sur Σ.
Dans le cas considéré par L. Hörmander [13], il résulte d'un théorème de Beals [1] que l'opérateur P a une paramétrixe à gauche dans une classe de Beals dès que P vérifie $(He)_1$. Il est montré dans [13] que si $(He)_1$ n'est pas vérifiée par P, on ne peut espérer mieux que $(He)_{9/8}$. Dans le cas où $k = 2$ et où p_m est caractéristique sur un cône lisse symplectique et transversalement elliptique, il est montré dans [15] qu'on ne pouvait espérer mieux que $(He)_{3/2}$.
Il était alors naturel de se poser la question suivante :

[Q2] Soit P un opérateur pseudodifférentiel régulier de $OPL^{m,2}(\Omega,\Sigma)$ transversalement elliptique et on suppose que Σ est symplectique de codimension 2ν, que l'indice d'enroulement de p_m est nul si $\nu = 1$ et qu'en un point (x_o,ξ_o) de Σ, il existe α dans $\mathbb{N}^\nu$ tel que :

$$(p'_{m-1} + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j + 1)\lambda_j)(x_o,\xi_o) = 0 \quad .$$

Alors sous quelle condition P vérifie-t-il $(He)_{3/2}$ (microlocalement au voisinage de (x_o,ξ_o)) ?

On répond partiellement à cette question dans notre premier article.
Dans le cas où la codimension est 2, on peut expliciter la condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité avec perte de 3/2 dérivées.
On suppose qu'il existe un point (x_o,ξ_o) de Σ et un entier j tel que :

$$(p'_{m-1} + (2j+1)\lambda)(x_o,\xi_o) = 0 \quad .$$

Pour (x,ξ) dans Σ, on pose $\tilde{p}_{m-1}(x,\xi) = p'_{m-1}(x,\xi) + (2j+1)\lambda(x,\xi)$; c'est un symbole sur Σ, et Σ étant symplectique, on peut définir sur Σ un crochet de Poisson canonique $\{\ ,\ \}_\Sigma$ de deux symboles sur Σ.
On suppose que $\tilde{p}_{m-1}$ vérifie (Hö) en un point (x_o,ξ_o) de Σ, alors P vérifie $(He)_{3/2}$ au voisinage de (x_o,ξ_o). Par exemple l'opérateur
$L = D_t^2 + t^2(D_x^2 + D_y^2) + (1+y)D_x + iD_y$ est hypoelliptique avec perte de 3/2 dérivées dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^3$.
Lorsque la codimension de Σ est plus grande que 2, l'étude de $(He)_{3/2}$ (plus généralement $(He)_{1+k/k+1}$, $k \in \mathbb{N}$) se ramène à l'étude de $(He)_{1/2}$ (resp. $(He)_{k/k+1}$) pour des systèmes dont le symbole est défini sur Σ.

On est alors naturellement conduit à se poser des questions du type suivant :

[Q3] Soit P_1 (resp. P_2) un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 1/2 vérifiant $(H\vartheta)$; soient Q_1, Q_2 des o.p.d. réguliers d'ordre 0, alors

$$\wp = \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ Q_2 & P_2 \end{pmatrix} \text{ vérifie-t-il } (He)_{1/2} \ ?$$

Cette question étant classiquement liée à [Q1], une réponse positive à [Q1] entraînera une réponse positive à [Q3]. Par exemple, le

système $\begin{pmatrix} D_t + i\,t\,|D_x| & \lambda\,|D_x|^{1/2} \\ \mu\,|D_x|^{1/2} & D_y + i\,y\,|D_x| \end{pmatrix}$ est microlocalement hypoelliptique

dans $T^* \mathbb{R}^3 \setminus 0$ au voisinage de $\tau = t = \eta = y = 0$ indépendanmment des constantes λ et μ.

Cette présentation historique constitue une introduction aux deux articles qui suivent, qui font partie de ma thèse d'état soutenue à Orsay et qui peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre.

Le premier article : Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (perte de 3/2 dérivées) a été annoncé dans [10].

Le second article : Construction de paramétrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels caractéristiques sur la réunion de deux cônes lisses est annoncé dans [11].

REFERENCES

[1] R. Beals, Characterization of pseudodifferential operators and applications (to appear).
Voir également l'exposé de A. Grigis sur cet article (Séminaire Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé XIX).

[2] L. Boutet de Monvel - F. Trèves, On a classe of pseudodifferential operators with double characteristics, Inventiones Math. 24, 1-34 (1974).

[3] L. Boutet de Monvel, Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators, Comm. Pure Appl. Math. , 585-639 (1974).

[4] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer, Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques, Astérisque (Juillet 1976).

[5] Yu. B. Egorov, Subelliptic Operators, Uspekhi Mat. Nauk 30:2 (1975) 57-114, Russian Math. Surveys 30:2 (1975) 59-118.

[6] A. Grigis, Hypoellipticité pour une classe d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles et paramétrixes associées, Astérisque (Juillet 1976).

[7] B. Helffer, Sur une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples, J. Math. Pures et Appl. (1976).

[8] B. Helffer, Invariants associés à une classe d'opérateurs pseudodifférentiels, Ann. Inst. Fourier (1976).

[9] B. Helffer - L. Rodino, Elliptic pseudodifferential operators degenerate on a symplectic manifold, Research Announcement in the Bull. AMS (1976).

[10] B. Helffer, Sur l'hypoellipticité d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 281 (10 Nov. 1975).

[11] B. Helffer, Constructions de paramétrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels caractéristiques sur la réunion de deux cônes lisses, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris (1976).

[12] L. Hörmander, Pseudodifferential operators and non elliptic boundary problems, Ann. of Math. 83 (1966), 129-209.

[13] L. Hörmander, A class of pseudodifferential operators with double characteristics, Math. Annalen 217, No 2 (1975).

[14] L. Nirenberg - F. Trèves, On local solvability of linear partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 1-28,
Ibid. 23 (1970), 459-509,
Ibid. 24 (1971), 279-288.

[15] J. Sjöstrand, Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics, Ark. för Math. 12 (1974), 85-130.

Bernard H E L F F E R
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU CEDEX