MÉMOIRES DE LA S. M. F.

GUY ROBIN

Un algorithme d'inversion pour les matrices de Toeplitz par blocs

Mémoires de la S. M. F., tome 49-50 (1977), p. 177-180
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__49-50__177_0>

Calculateurs en Math. (1975 - LIMOGES)
Bull. Soc. math. France
Mémoire 49-50, 1977, p. 177-180

UN ALGORITHME D'INVERSION POUR LES MATRICES DE TOEPLITZ PAR BLOCS

Guy ROBIN

I - Matrices de Toeplitz -

On désigne par matrice de Toeplitz une matrice à coefficients complexes T telle que $T_{i,j} = a_{i-j}$; si l'on remplace les coefficients a_i par des matrices $(p \times p)$ à coefficients complexes on a alors une matrice de Toeplitz par blocs $(p \times p)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est une matrice par blocs (2×2)

Le produit de deux matrices de Toeplitz n'est en général pas de Toeplitz; il en est de même pour l'inverse; ainsi l'inverse de la matrice ci-dessus est :

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Une matrice de Toeplitz est déterminée par sa première ligne $[\delta, \rho_1, \rho_2, \dots \rho_n]$ et sa première colonne $[\delta, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$. On peut montrer qu'une matrice de Toeplitz à coefficients complexes a une inverse de Toeplitz si et seulement si, elle est k-circulante, c'est-à-dire :

$$\exists k \; ; \; \forall i \quad \sigma_i = k\, \rho_{n+1-i}$$

Remarquons ici que les matrices de Hankel $(T_{i,j} = a_{i+j})$ s'étudient de façon analogue.

II - Où interviennent ces matrices ?

Les matrices de Toeplitz interviennent dans de nombreux domaines, par exemple :

1) Lors de la résolution pratique de nombreux problèmes de physique
- Diffraction d'une onde magnétique par N cylindres identiques équidistants (4)
- Résolution de l'équation de la chaleur ou de l'équation de Helmotz par discrétisation.

2) Déconvolution numérique dans $\mathbb{R}^n$.

Soit à déterminer f telle que $h = f * g$.

Montrons que la recherche de f par la méthode du " point matching " conduit à une matrice de Toeplitz par blocs, lorsque f, g, h sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ à support dans un domaine $\mathcal{D}$ centré à l'origine.

On décompose $\mathcal{D}$ en rectangles $\mathcal{D}_{ij}$ de centre $P_{ij} = (x_i , y_j)$ les x_i (resp. les y_j) étant équidistants, $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, N$. En supposant f constant dans chaque $\mathcal{D}_{ij}$ on peut écrire :

$$h(P_{k,\ell}) = \sum_{i,j} f(P_{i,j}) \iint_{\mathcal{D}_{ij}} g(P_{k\ell} - Q)\, d\, Q.$$

Ordonnons les couples, en posant :

$$\begin{matrix} m = (i-1)\, N + j \\ n = (k-1)\, N + \ell \end{matrix} \qquad 1 \leqslant \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \leqslant N\, M$$

Nous avons à résoudre un système linéaire de $N\, M$ équations à $N\, M$ inconnues dont la matrice G a pour coefficients :

$$G_{m,n} = \iint_{\mathcal{D}_{ij}} g(P_{k,\ell} - Q)\, d\, Q$$

On peut vérifier alors que G est une matrice de Toeplitz par blocs, les blocs étant de dimension M.

3) En statistique et en théorie de signal

- Soit $X(t)$ un processus aléatoire de carré sommable; si le processus est stationnaire d'ordre 2 la covariance

$$\Gamma(t_1 , t_2) = E\, X(t_1)\, \overline{X(t_2)}$$

ne dépend que de $t_1 - t_2$ et par suite la matrice de covariance relative à des temps équidistants est de Toeplitz; elle est de plus hermitienne définie positive [5].

4) Le problème des moments trigonométriques fait aussi intervenir ce type de matrice.

III - Algorithme d'inversion - [6] voir aussi ([1],[2],[3],[5],[7].

Nous présentons ici l'algorithme sans démonstration. Soit la matrice :

$$T_{n+1} = \begin{bmatrix} \delta & \tilde{a}_n \\ & \\ r_n & T_n \end{bmatrix}$$

avec
$$\tilde{a}_n = [\sigma_1 , \sigma_2 , \ldots, \sigma_n]$$
$$\tilde{r}_n = [\rho_1 , \rho_2 , \ldots, \rho_n]$$

1°) On peut alors écrire :

$$B_{n+1} = (T_{n+1})^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_n & \lambda_n \tilde{f}_n \\ & \\ g_n \lambda_n & (T_n)^{-1} + g_n \lambda_n \tilde{f}_n \end{bmatrix}$$

avec
$$\tilde{f}_n = [(f_n)_1 , (f_n)_2 , \ldots , (f_n)_n]$$
$$\tilde{g}_n = [(g_n)_1 , (g_n)_2 , \ldots , (g_n)_n]$$

et $$C_{n+1} = (\tilde{T}_{n+1})^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_n & \gamma_n \tilde{h}_n \\ k_n \gamma_n & (T_n)^{-1} + k_n \gamma_n \tilde{h}_n \end{bmatrix}$$

l'opérateur $(\sim)$ désignant la transposition par blocs.

2°) On établit la formule :

$$(B_{n+1})_{i+1,j+1} = (B_{n+1})_{i,j} + (g_n)_i \lambda_n (f_n)_j - (k_n)_{n+1-i} \gamma_n (h_n)_{n+1-j}$$

qui permet de reconstruire toute l'inverse à partir de la $1^{ère}$ ligne et de la $1^{ère}$ colonne des matrices B_{n+1} et C_{n+1}.

3°) On montre alors que ces premières lignes et colonnes se calculent par récurrence. Finalement l'algorithme est le suivant :

1) Initialisation : $\gamma_o = \lambda_o = \delta^{-1}$

2) Pour $p = 1, 2, \ldots, n$ on calcule :

a) $\theta_p = \sigma_p + (f_{p-1})_1 \sigma_{p-1} + (f_{p-1})_2 \sigma_{p-2} + \ldots + (f_{p-1})_{p-1} \sigma_1$
$\psi_p = \rho_p + (h_{p-1})_1 \rho_{p-1} + (h_{p-1})_2 \rho_{p-2} + \ldots + (h_{p-1})_{p-1} \rho_1$

b) $(f_p)_p = -\theta_p \gamma_{p-1}$
$(h_p)_p = -\psi_p \lambda_{p-1}$
$(g_p)_p = -\gamma_{p-1} \psi_p$
$(k_p)_p = -\lambda_{p-1} \theta_p$

c) $\forall\, s = 1, \ldots, p-1$
$(f_p)_s = (f_{p-1})_s + (f_p)_p (h_{p-1})_{p-s}$
$(h_p)_s = (h_{p-1})_s + (h_p)_p (f_{p-1})_{p-s}$
$(g_p)_s = (g_{p-1})_s + (k_{p-1})_{p-s} (g_p)_p$
$(k_p)_s = (k_{p-1})_s + (g_{p-1})_{p-s} (k_p)_p$

d) $\lambda_p = \lambda_{p-1} \left[\mu - (f_p)_p (k_p)_p\right]^{-1}$
$\gamma_p = \gamma_{p-1} \left[\mu - (h_p)_p (f_p)_p\right]^{-1}$

3°) On reconstitue toute l'inverse en utilisant : $\forall\, j = 1, \ldots, n$

$$(B_{n+1})_{1,j+1} = \lambda_n (f_n)_j$$
$$(B_{n+1})_{j+1,1} = (g_n)_j \lambda_n$$

et $$(B_{n+1})_{i+1,j+1} = (B_{n+1})_{i,j} + (g_n)_i \lambda_n (f_n)_j - (k_n)_{n+1-i} \gamma_n (h_n)_{n+1-j}$$

IV - Programmation -

Le nombre de multiplications intervenant dans l'algorithme est de l'ordre de $5\, n^2\, p^3$ alors que la méthode de Gauss en utilise $n^3\, p^3$, d'où gain de temps - concrétisé effectivement par la machine - d'autant plus grand que p est petit.

Un programme FORTRAN a été écrit et est utilisé sur IBM 370/168 de CIRCE

Le programme peut tenir compte de propriétés supplémentaires de la matrice donnée : symétrie des blocs, symétrie par blocs, matrice, bande ...

BIBLIOGRAPHIE

(1) AKAIKE Hirotugu.- Bloch Toeplitz matrix inversion.- Siam J. Appl. Math.- Vol.24 n° 2.- (Mars 1973) p. 234-241.

(2) BAREISS Erwin H.- Numerical solution of linear equations with Toeplitz and Vector Toeplitz matrices.- Numr. Math. 13.- p. 404-424 (1969).

(3) EKSTROM Michal P.- An iterative Impvement Approach to the Numerical Solution of Vector Toeplitz Systems.- I.E.E.E. Trans, Cimp.- (1974) C. 23, n° 3.- p. 320-325.

(4) FACQ Paul.- Diffraction par des structures cylindriques périodiques limitées.- Ann. des Télécommunications.- T. 31, n° 34 (Mars-Avril 1976).

(5) KUTIKOV L.-M.- The Structure of Matrices which are the inverse of the correlation matrices of random vector processes.- U.R.S.S. Comput.- Math ant Math Phys.- 7 (1967) n° 4, p. 58-71.

(6) ROBIN Guy.- Algorithme d'inversion d'une matrice de Toeplitz par blocs.- C.R.A.S. Paris t. 279.- (Oct. 1974) p. 659-662.

(7) TRENCH William F.- An algorithme for the inversion of finite Toeplitz matrices.- J. Soc. Indust. Appl. Math.- Vol. 12, n° 3.- (1964) p. 515-522.

Guy ROBIN
Université de LIMOGES
Département de Mathématiques
123, rue Albert Thomas
87100 - LIMOGES