

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

GUY ROBIN

## **Un algorithme d'inversion pour les matrices de Toeplitz par blocs**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 49-50 (1977), p. 177-180

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1977\\_\\_49-50\\_\\_177\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__49-50__177_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN ALGORITHME D'INVERSION  
 POUR LES MATRICES DE TOEPLITZ PAR BLOCS

Guy ROBIN

I - Matrices de Toeplitz -

On désigne par matrice de Toeplitz une matrice à coefficients complexes  $T$  telle que  $T_{i,j} = a_{i-j}$ ; si l'on remplace les coefficients  $a_i$  par des matrices  $(p \times p)$  à coefficients complexes on a alors une matrice de Toeplitz par blocs  $(p \times p)$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est une matrice par blocs  $(2 \times 2)$

Le produit de deux matrices de Toeplitz n'est en général pas de Toeplitz; il en est de même pour l'inverse; ainsi l'inverse de la matrice ci-dessus est :

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Une matrice de Toeplitz est déterminée par sa première ligne  $[\delta, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n]$  et sa première colonne  $[\delta, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$ . On peut montrer qu'une matrice de Toeplitz à coefficients complexes a une inverse de Toeplitz si et seulement si, elle est  $k$ -circulante, c'est-à-dire :

$$\exists k; \forall i \quad \sigma_i = k \rho_{n+1-i}$$

Remarquons ici que les matrices de Hankel  $(T_{i,j} = a_{i+j})$  s'étudient de façon analogue.

II - Où interviennent ces matrices ?

Les matrices de Toeplitz interviennent dans de nombreux domaines, par exemple :

- 1) Lors de la résolution pratique de nombreux problèmes de physique
  - Diffraction d'une onde magnétique par  $N$  cylindres identiques équidistants <sup>(4)</sup>
  - Résolution de l'équation de la chaleur ou de l'équation de Helmholtz par discrétisation.
- 2) Déconvolution numérique dans  $\mathbb{R}^n$ .

Soit à déterminer  $f$  telle que  $h = f * g$ .

Montrons que la recherche de  $f$  par la méthode du " point matching " conduit à une matrice de Toeplitz par blocs, lorsque  $f, g, h$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  à support dans un domaine  $\mathcal{D}$  centré à l'origine.

On décompose  $\mathcal{D}$  en rectangles  $\mathcal{D}_{ij}$  de centre  $P_{ij} = (x_i, y_j)$  les  $x_i$  (resp. les  $y_j$ ) étant équidistants,  $i = 1, \dots, M$ ,  $j = 1, \dots, N$ . En supposant  $f$  constant dans chaque  $\mathcal{D}_{ij}$  on peut écrire :

$$h(P_{k,\ell}) = \sum_{i,j} f(P_{i,j}) \iint_{\mathcal{D}_{ij}} g(P_{k,\ell} - Q) dQ.$$

Ordonnons les couples, en posant :

$$\begin{aligned} m &= (i-1)N + j \\ n &= (k-1)N + \ell \end{aligned} \quad 1 \leq \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \leq NM$$

Nous avons à résoudre un système linéaire de  $NM$  équations à  $NM$  inconnues dont la matrice  $G$  a pour coefficients :

$$G_{m,n} = \iint_{\mathcal{D}_{ij}} g(P_{k,\ell} - Q) dQ$$

On peut vérifier alors que  $G$  est une matrice de Toeplitz par blocs, les blocs étant de dimension  $M$ .

3) En statistique et en théorie de signal

- Soit  $X(t)$  un processus aléatoire de carré sommable; si le processus est stationnaire d'ordre 2 la covariance

$$\Gamma(t_1, t_2) = E X(t_1) \overline{X(t_2)}$$

ne dépend que de  $t_1 - t_2$  et par suite la matrice de covariance relative à des temps équidistants est de Toeplitz; elle est de plus hermitienne définie positive (5).

4) Le problème des moments trigonométriques fait aussi intervenir ce type de matrice.

III - Algorithme d'inversion - (6) voir aussi ((1), (2), (3), (5), (7)).

Nous présentons ici l'algorithme sans démonstration. Soit la matrice :

$$T_{n+1} = \begin{bmatrix} \delta & \widetilde{a}_n \\ r_n & T_n \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_n &= [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n] \\ \widetilde{r}_n &= [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n] \end{aligned}$$

1°) On peut alors écrire :

$$B_{n+1} = (T_{n+1})^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_n & \lambda_n \widetilde{f}_n \\ g_n \lambda_n & (T_n)^{-1} + g_n \lambda_n \widetilde{f}_n \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_n &= [(f_n)_1, (f_n)_2, \dots, (f_n)_n] \\ \widetilde{g}_n &= [(g_n)_1, (g_n)_2, \dots, (g_n)_n] \end{aligned}$$

et

$$C_{n+1} = (T_{n+1})^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_n & \gamma_n \tilde{h}_n \\ k_n \gamma_n & (T_n)^{-1} + k_n \gamma_n \tilde{h}_n \end{bmatrix}$$

l'opérateur  $(\sim)$  désignant la transposition par blocs.

2°) On établit la formule :

$(B_{n+1})_{i+1,j+1} = (B_{n+1})_{i,j} + (g_n)_i \lambda_n (f_n)_j - (k_n)_{n+1-i} \gamma_n (h_n)_{n+1-j}$   
 qui permet de reconstruire toute l'inverse à partir de la 1<sup>ère</sup> ligne et de la 1<sup>ère</sup> colonne des matrices  $B_{n+1}$  et  $C_{n+1}$ .

3°) On montre alors que ces premières lignes et colonnes se calculent par récurrence. Finalement l'algorithme est le suivant :

- 1) Initialisation :  $\gamma_0 = \lambda_0 = \delta^{-1}$
- 2) Pour  $p = 1, 2, \dots, n$  on calcule :
  - a)  $\theta_p = \sigma_p + (f_{p-1})_1 \sigma_{p-1} + (f_{p-1})_2 \sigma_{p-2} + \dots + (f_{p-1})_{p-1} \sigma_1$   
 $\psi_p = \rho_p + (h_{p-1})_1 \rho_{p-1} + (h_{p-1})_2 \rho_{p-2} + \dots + (h_{p-1})_{p-1} \rho_1$
  - b)  $(f_p)_p = -\theta_p \gamma_{p-1}$   
 $(h_p)_p = -\psi_p \lambda_{p-1}$   
 $(g_p)_p = -\gamma_{p-1} \psi_p$   
 $(k_p)_p = -\lambda_{p-1} \theta_p$
  - c)  $\forall s = 1, \dots, p-1$ 
 $(f_p)_s = (f_{p-1})_s + (f_p)_p (h_{p-1})_{p-s}$   
 $(h_p)_s = (h_{p-1})_s + (h_p)_p (f_{p-1})_{p-s}$   
 $(g_p)_s = (g_{p-1})_s + (k_{p-1})_{p-s} (g_p)_p$   
 $(k_p)_s = (k_{p-1})_s + (g_{p-1})_{p-s} (k_p)_p$
  - d)  $\lambda_p = \lambda_{p-1} [u - (f_p)_p \cdot (k_p)_p]^{-1}$   
 $\gamma_p = \gamma_{p-1} [u - (h_p)_p (f_p)_p]^{-1}$

3°) On reconstitue toute l'inverse en utilisant :  $\forall j = 1, \dots, n$

$$(B_{n+1})_{1,j+1} = \lambda_n (f_n)_j$$

$$(B_{n+1})_{j+1,1} = (g_n)_j \lambda_n$$

et  $(B_{n+1})_{i+1,j+1} = (B_{n+1})_{i,j} + (g_n)_i \lambda_n (f_n)_j - (k_n)_{n+1-i} \gamma_n (h_n)_{n+1-j}$

#### IV - Programmation -

Le nombre de multiplications intervenant dans l'algorithme est de l'ordre de  $5n^2p^3$  alors que la méthode de Gauss en utilise  $n^3p^3$ , d'où gain de temps - concrétisé effectivement par la machine - d'autant plus grand que  $p$  est petit.

Un programme FORTRAN a été écrit et est utilisé sur IBM 370/168 de CIRCE

Le programme peut tenir compte de propriétés supplémentaires de la matrice donnée : symétrie des blocs, symétrie par blocs, matrice, bande ...

BIBLIOGRAPHIE

- (1) AKAIKE Hirotugu.- Bloch Toeplitz matrix inversion.- Siam J. Appl. Math.- Vol.24 n° 2.- (Mars 1973) p. 234-241.
- (2) BAREISS Erwin H.- Numerical solution of linear equations with Toeplitz and Vector Toeplitz matrices.- Numr. Math. 13.- p. 404-424 (1969).
- (3) EKSTROM Michal P.- An iterative Impvement Approach to the Numerical Solution of Vector Toeplitz Systems.- I.E.E.E. Trans, Cimp.- (1974) C. 23, n° 3.- p. 320-325.
- (4) FACQ Paul.- Diffraction par des structures cylindriques périodiques limitées.- Ann. des Télécommunications.- T. 31, n° 34 (Mars-Avril 1976).
- (5) KUTIKOV L.-M.- The Structure of Matrices which are the inverse of the correlation matrices of random vector processes.- U.R.S.S. Comput.- Math ant Math Phys.- 7 (1967) n° 4, p. 58-71.
- (6) ROBIN Guy.- Algorithme d'inversion d'une matrice de Toeplitz par blocs.- C.R.A.S. Paris t. 279.- (Oct. 1974) p. 659-662.
- (7) TRENCH William F.- An algorithme for the inversion of finite Toeplitz matrices.- J. Soc. Indust. Appl. Math.- Vol. 12, n° 3.- (1964) p. 515-522.

Guy ROBIN  
Université de LIMOGES  
Département de Mathématiques  
123, rue Albert Thomas  
87100 - LIMOGES

---