

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MAURICE MIGNOTTE

## Calculs sur des suites récurrentes linéaires

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 49-50 (1977), p. 137-140

<[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1977\\_\\_49-50\\_\\_137\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__49-50__137_0)>

© Mémoires de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# CALCULS SUR DES SUITES RECURRENTES LINEAIRES

par Maurice MIGNOTTE

-----

Nous étudierons le problème de la détermination des zéros d'une suite récurrente linéaire.

## 1. Notations et préliminaires -

Une suite  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  de nombres est dite récurrente s'il existe un entier  $h$ , et des nombres  $q_1, \dots, q_h$  ( $q_h \neq 0$ ) tels que :

$$(1) \quad u_{n+h} = q_1 u_{n+h-1} + \dots + q_h u_n, \quad \text{si } n \geq 0,$$

une telle suite est dite d'ordre au plus  $h$ .

On considérera le cas où les  $u_n$  et  $q_j$  sont entiers. Si on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+h-1} \end{pmatrix} \quad \text{pour } n \geq 0 \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ q_h & \dots & \dots & \dots & q_1 \end{pmatrix}$$

la relation (1) s'écrit sous forme matricielle

$$(1') \quad U_{n+1} = A U_n = A^{n+1} U_0 \quad \text{pour } n \geq 0.$$

On associe à  $u$  le polynôme

$$P(X) = X^h - q_1 X^{h-1} - \dots - q_h = (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_r)^{k_r}$$

où les  $\alpha_i$  sont distincts et vérifient  $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \dots \geq |\alpha_r|$ . En utilisant la décomposition de Jordan de  $A$ , on voit qu'il existe des polynômes  $R_1, \dots, R_r$ , tels que l'on ait :

$$(2) \quad u_n = R_1(n) \alpha_1^n + \dots + R_r(n) \alpha_r^n, \quad \text{si } n \geq 0$$

le degré de  $R_i$  étant majoré par  $k_i - 1$ , pour  $i = 1, \dots, r$ .

Inversement, une suite  $u$ , définie par (2), vérifie la relation (1). Si  $u$  vérifie (1), et si on considère la suite  $v = (v_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$v_n = u_{nT+m}, \quad n \geq 0 \quad (T > 0, m \geq 0, \text{ entiers fixés}),$$

la relation (2) montre que l'on a :

$$(3) \quad v_n = \sum_{j=1}^r \alpha_j^m R_j(nT+m) (\alpha_j^T)^n$$

on en déduit que  $v$  vérifie une relation de récurrence d'ordre  $\leq h$  et que cette relation ne dépend que de  $T$ .

## 2. Le théorème de Skolem-Mahler -

Il s'agit du résultat suivant.

THEOREME 1.- Soit  $(u)$  une suite récurrente linéaire. Soit  $E$  l'ensemble des indices  $n$  tels que  $u_n$  soit nul. Alors  $E$  est égal à une union finie de progressions arithmétiques (dont certaines peuvent être de raison nulle !).

Démonstration - Voir <sup>(5)</sup>, par exemple.

COROLLAIRE.- Si  $u$  admet une infinité de zéros, alors, pour tout  $\alpha_i$ , il existe  $\alpha_j$ ,  $j \neq i$ , tel que  $\alpha_i/\alpha_j$  soit une racine de l'unité.

Démonstration - Si  $v_n = u_{nT+m} = 0$  pour tout  $n$ , la relation (3) permet facilement d'obtenir le résultat annoncé.

Le théorème 1 a pu être précisé, nous nous contenterons d'énoncer le résultat suivant (voir <sup>(4)</sup> pour plus de détails et d'autres résultats).

**THEOREME 2.**- Il existe un algorithme permettant de décider si une suite récurrente linéaire à termes entiers possède une infinité de termes nuls.

### 3. Une application d'un résultat de Baker -

En utilisant la minoration de formes linéaires en logarithmes de nombres algébriques démontrée en <sup>(2)</sup>, on démontre le résultat suivant.

**THEOREME 3.**- Soit  $u$  une suite d'entiers définie par (1) et (2). Supposons que  $P$  admette au plus trois racines de module maximal et que ces racines  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  sont simples. Alors, il existe des constantes  $n_0$  et  $c$ , effectivement calculables telles que, pour  $n \geq n_0$  on ait :

$$|u_n| \geq |\alpha_1|^n n^{-c} \quad \text{si} \quad R_1 \alpha_1^n + \dots + R_\ell \alpha_\ell^n \neq 0.$$

(Les polynômes  $R_1, \dots, R_\ell$  sont constants).

Démonstration - Voir <sup>(6)</sup> ou <sup>(7)</sup>.

### 4. Etude d'un exemple -

Considérons la suite définie par :

$$u_0 = u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_{n+3} = 2 u_{n+2} - 4 u_{n+1} + 4 u_n, \quad \text{si } n \geq 0.$$

On constate que l'on a :

$$u_0 = u_1 = u_4 = u_6 = u_{13} = u_{52} = 0.$$

Cet exemple, dû à Jean Berstel, contredit une conjecture affirmant qu'une suite récurrente cubique à valeurs entières, qui n'a qu'un nombre fini de zéros, en a au plus cinq (voir <sup>(5)</sup>). La détermination de tous les zéros de  $(u_n)$  était donc intéressante. Nous allons indiquer plusieurs méthodes permettant de prouver que les zéros indiqués plus haut sont les seuls.

#### a) Méthode $p$ -adique -

Elle utilise le théorème suivant, dû à Strassman.

**THEOREME 4.**- Soit  $f(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$ , une série à coefficients dans un corps  $p$ -adique  $K_p$ , non identiquement nulle, convergente sur  $0_p$ , anneau des entiers de  $K$ . Alors, le nombre de zéros de  $f$  dans  $0_p$  est majoré par :

$$N = \max \{k; v_p(a_k) \text{ est minimal}\},$$

où  $v_p$  désigne la valuation  $p$ -adique de  $K$ .

On considère ici un corps  $p$ -adique de décomposition de  $P$  considéré comme polynôme à coefficients dans  $\mathbb{Q}_p$  pour  $p = 53$ . Voir <sup>(6)</sup> pour plus de détails.

b) Calculs modulo  $m$  -

Grâce à un raffinement quantitatif du théorème qui figure dans l'article de Baker (1), on obtient :

$$u_n \neq 0 \quad \text{si } n > 10^{190}$$

Ainsi, un nombre fini de calculs (!) permet de déterminer tous les zéros de  $u_n$ .

En réduisant  $u_n$  modulo  $m$ , il est facile de montrer que la suite des résidus est ultimement périodique (il n'y a qu'un nombre fini de triplets distincts modulo  $m$ ). De plus, si  $m$  est impair, la suite est purement périodique (modulo  $m$ ,  $u_n$  est déterminé par  $u_{n+1}$ ,  $u_{n+2}$ ,  $u_{n+3}$ ). Soit  $Z_m$  l'ensemble des zéros modulo  $m$ . Si  $u_n = 0$ , on a  $n \in Z_m$ , et réciproquement. En prenant des valeurs de  $m$  convenablement choisies, on arrive, de proche en proche, à déterminer des nombres  $K$  de plus en plus grands tels que :

$$u_n = 0 \Rightarrow n \in Z \bmod K \quad (\text{où } Z = \{0, 1, 4, 6, 13, 52\}).$$

Un exemple montrera la marche à suivre.

On a :

- modulo 18481 ; période  $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$  , zéros :  $Z$
- modulo 8737 ; période  $2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$  , zéros :  $Z$
- modulo 21377 ; période  $2^7 \cdot 167$  , zéros :  $Z + (6546)$
- modulo 19457 ; période  $2^{10} \cdot 19$  , zéros :  $Z + (11338)$ .

Des deux premiers résultats, et du fait que les éléments de  $Z$  sont distincts modulo le p. g. c. d. des périodes (égal à  $2^4 \cdot 3 \cdot 7$ ), on voit que les zéros de  $(u_n)$  appartiennent à l'ensemble  $Z + (2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13) \cdot \mathbb{N}$ . Puis la réduction modulo 21377 fournit, en plus de  $Z$ , le nombre 6546; mais ce nombre n'appartient pas à l'ensemble  $Z + 2^5 \cdot \mathbb{N}$  (et il en est de même pour les nombres de la progression  $6546 + 2^7 \cdot 167 \cdot \mathbb{N}$ ), donc les zéros de  $(u_n)$  appartiennent à l'ensemble  $Z + (2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 167) \cdot \mathbb{N}$ . Finalement l'étude de ces quatre cas montre que les zéros de  $u_n$  sont situés dans les progressions  $Z + (2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 167) \cdot \mathbb{N}$ . En particulier, les seuls indices  $n < 2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 167$  sont les nombres de  $Z$ .

Les calculs faits sur machine ont permis de dépasser la borne  $10^{190}$ .

c) Approximations diophantiennes -

Une autre méthode, inspirée du travail de Baker et Davenport (2), n'utilise que le calcul (avec une très grande précision) des logarithmes des quantités  $a$ ,  $\omega$ ,  $b$ ,  $\omega'$ , définies par la condition

$$u_n = a \omega^n + \bar{a} \bar{\omega}^n + b \omega'^n \quad \text{si } n \geq 0.$$

La démonstration du théorème 3 montre en effet que la condition  $u_n = 0$  implique, pour  $n$  assez grand, une inégalité du type

$$(4) \quad |n \alpha - m + \beta| < e^{-\varepsilon n}, \quad \text{pour un certain } \varepsilon > 0, \quad \alpha, \beta, \text{ réels.}$$

C'est un problème non homogène, mais un argument, dû à Davenport, permet de le ramener à l'étude d'un problème d'approximation diophantienne homogène :

LEMME.- Soit  $K > 6$ . Pour tout entier positif  $M$ , soient  $p$  et  $q$  des entiers vérifiant :

$$1 \leq q \leq KM, \quad |\alpha p - q| < 2(KM)^{-1}$$

Alors, si

$$\|q\beta\| \geq 3K^{-1} \quad (\text{où } \|\cdot\| = \text{distance à l'entier le plus proche}),$$

l'inégalité (4) n'a pas de solution dans l'intervalle

$$(5) \quad \frac{\log K^2 M}{e} < n < M$$

Démonstration - Posons  $q\alpha = p + \phi$ , avec  $|\phi| < 2(KM)^{-1}$ . En multipliant (4) par  $q$ , il vient

$$(6) \quad |n(p + \phi) - mq + q\beta| < q e^{-\epsilon n}$$

Supposons que  $n$  vérifie (4). Alors,

$$|\phi| n < 2M(KM)^{-1} = 2K^{-1}; \quad q e^{-\epsilon n} \leq KM e^{-n} < K^{-1}$$

Puis (6) implique  $\|q\beta\| < 3K^{-1}$ . Contradiction.

Il faudrait ici calculer  $\alpha$  et  $\beta$  avec une précision de l'ordre de  $10^{-250}$ . La meilleure méthode consiste à utiliser la méthode de Newton en inversant la fonction exponentielle (et non le développement en série du logarithme !).

Remarque - L'existence de  $p$  et  $q$  dans l'énoncé du lemme 3 résulte du lemme d'approximation de Dirichlet.

#### REFERENCES

=====

- (1) A. BAKER.- Linear forms in the logarithms of algebraic numbers.- IV. Mathematika 15, (1968) p. 204-216.
- (2) A. BAKER.- A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms.- Acta Arith. 21, (1974) p. 117-129.
- (3) A. BAKER et H. DAVENPORT.- The equations  $3x^2 - 2 = y^2$  and  $8x^2 - 7 = z^2$ . Quart. J. Math. Oxford 2.- (1969) p. 129-137.
- (4) J. BERSTEL et M. MIGNOTTE.- Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires.- Bull. Soc. Math. France. 104 (1976) p. 175-184.
- (5) D.J. LEWIS.- Diophantine equations : p-adic methods.- Studies in Number Theory.- p. 23-75.- Englewood Cliffs, Prentice Hall. (1969).
- (6) M. MIGNOTTE.- Suites récurrentes linéaires.- Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU.- (1973-74) n° G 14, 9 p.
- (7) M. MIGNOTTE.- A note on linear recursive sequences.- J. Australian Math. Soc. 20, sec. A, part. 2, (1974), p. 242-244.

Maurice MIGNOTTE  
Université Louis Pasteur  
Centre de Calcul  
STRASBOURG