JEAN LAGRANGE

Construction d’une table de nombres congruents

Mémoires de la S. M. F., tome 49-50 (1977), p. 125-130
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__49-50__125_0>

Calculateurs en Math. (1975 - LIMOGES)
Bull. Soc. math France
Mémoire 49-50, 1977, p.125-130

CONSTRUCTION D'UNE TABLE DE NOMBRES CONGRUENTS

par Jean LAGRANGE

-----

1) Soit n un entier positif " quadratfrei ", on dit que n est un nombre congruent s'il existe une fraction $\frac{E}{F}$ telle que les fractions $(\frac{E}{F})^2 + n$ et $(\frac{E}{F})^2 - n$ sont des carrés.

Ainsi Léonard de Pise (FIBONACCI) donne en 1220 :

$$(\frac{41}{12})^2 + 5 = (\frac{49}{12})^2 \quad , \quad (\frac{41}{12})^2 - 5 = (\frac{31}{12})^2 .$$

On sait ou on vérifie facilement que n est un nombre congruent si et seulement si, il existe des entiers naturels A, B, C tels que

(1) $$n C^2 = A B (A + B) (A - B)$$

Ou encore posant $\frac{A}{B} = \frac{X}{n Z}$, $\frac{C}{B^2} = \frac{Y}{n^2 Z}$

n est un nombre congruent si et seulement si, la courbe elliptique $Y^2 Z = X(X^2 - n^2 Z^2)$ a des points rationnels différents des points d'ordre 2.

2) Notre but est de construire une table de nombres congruents inférieurs à 1000. La première table a été construite par GERARDIN en 1915 (6) qui donne 62 nombres congruents inférieurs à 1000. La même année BASTIEN (3) donne la liste complète des nombres congruents inférieurs à 100 , soit 36 nombres. En 1972, ALTER, CURTZ et KUBOTA (1) donnent une table de 198 nombres congruents inférieurs à 1000 et font la conjecture que tout nombre congru mod. 8 à 5, 6 ou 7 est congruent. En 1972, ALTER et CURTZ (2) ajoutent 18 nombres à cette table. Enfin BIRCH (4) en 1968 montre que si p est premier, congru à 3 mod. 4, alors $2p$ est congruent.

3) Dans (7) utilisant la méthode de BIRCH et SWINNERTON-DYER (5) nous avons donné des critères pour qu'un nombre soit non congruent et montré que la conjecture rappelée au paragraphe précédent est une conséquence de la conjecture bien connue suivant laquelle le rang d'une courbe elliptique est de la parité du nombre de la première descente. Nous avons donné également une table de 227 nombres non congruents, inférieurs à 1000; pour la commodité du lecteur cette table est reproduite ici.

La méthode utilisée permet de construire une table de nombres congruents. Par exemple prenons :

(2) $n = p q$ avec $p = -3$, $q = 3$ mod. 8 et $(\frac{p}{q}) = -1$.

On doit rechercher une solution entière de l'équation

(3) $q^2 x^4 + y^4 = 2 p z^2$ (voir la dernière ligne du tableau de la page 9 et l'équation 5' de la page 4 de (7)).

On établit ensuite la liste des nombres inférieurs à 1000 qui vérifient (2) et sur ordinateur on recherche une solution de l'équation (3).

4) Une méthode qui conduit aux mêmes calculs consiste à examiner dans l'équation (1) la divisibilité de A, B, A + B, A −B par les facteurs premiers de n.

Reprenons l'exemple précédent; une étude élémentaire, mais assez longue, montre que nécessairement p divise A + B et q divise A −B; A et B sont donc des carrés et on pose :

$$A = \alpha^2 \quad , B = \beta^2 \text{ d'où le système :}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = p\,\gamma^2 \\ \alpha^2 - \beta^2 = q\,\delta^2 \end{cases}$$

La solution générale de la seconde équation est :

$$\begin{cases} \alpha \pm \beta = q\,x^2 \\ \alpha \mp \beta = y^2 \end{cases}$$

et on obtient $q^2 x^4 + y^4 = 2\,p\,\gamma^2$.

Le tableau suivant calculé sur ordinateur (1) montre que tous les nombres inférieurs à 1000 qui vérifient (2) sont congruents.

n	p	q	x	y	n	p	q	x	y
15	5	3	1	1	671	61	11	1	1
87	29	3	7	11	247	13	19	25	11
159	53	3	5	17	551	29	19	3	23
303	101	3	109	607	703	37	19	329	545
447	149	3	121	31	215	5	43	1	9
519	173	3	411	797	767	13	59	425	4289
591	197	3	23	35	335	5	67	9	13
807	269	3	2987	3743	871	13	67	1	85
879	293	3	1	11	415	5	83	13	213
951	317	3	1	5	535	5	107	1	27
143	13	11	5	19	815	5	163	871	1719
319	29	11	3	1					

5) Pour les nombres ayant trois diviseurs premiers impairs la méthode précédente est la seule praticable.

Ainsi pour n = 885 = 3.5.59 on montre que nécessairement 3 divise A + B, 5 divise A −B, 59 divise B. On pose donc :

(1) I.B.M. 370

$$A = \alpha^2 \ , \ B = 59\ \beta^2 \ , \ A + B = 3\ \gamma^2 \ , \ A - B = 5\ \delta^2$$

et on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha^2 + 59\ \beta^2 = 3\ \gamma^2 \\ \alpha^2 - 59\ \beta^2 = 5\ \delta^2 \end{cases}$$

On écrit ce système sous la forme :

$$\begin{cases} 59\ \beta^2 + 5\ \delta^2 = \alpha^2 \\ 118\ \beta^2 + 5\ \delta^2 = 3\ \gamma^2 \end{cases}$$

et une recherche sur calculateur de table [(2)] fournit :

$$\beta = 59 \ , \ \delta = 197 \ , \ \alpha = 632 \ , \ \gamma = 449$$

6) La table de 322 nombres congruents que nous donnons ci-dessous comporte les nombres pour lesquels nous avons effectivement trouvé les valeurs de A et B ainsi que les nombres $2p$ ($p \equiv 3$ mod. 4) qui sont congruents d'après le théorème de BIRCH.

On constatera l'absence du nombre 897 qui se trouve dans la table de ALTER, CURTZ et KUBOTA [1]. En effet, ceux-ci n'ont pas trouvé dans leur recherche le nombre 897 mais l'ont repris des tables de GERARDIN [6]. Nous pensons que ce dernier n'a pas pu obtenir ce nombre car il a fait les calculs à la main et un ordinateur ne nous l'a pas fourni; il s'agit probablement d'une erreur et nous considérons ce nombre comme non classé.

Signalons que le nombre 113 qui est non classé, est conjecturé non congruent par BIRCH et SWINNERTON-DYER (voir les tables de [5]).

Le tableau ci-dessous donne suivant la valeur de n mod. 8 la répartition des nombres " quadratfrei " en nombres congruents, non congruents et non classés.

Table 1

n mod 8	1	2	3	5	6	7	Total
nombres quadratfrei	98	101	101	102	103	103	608
nombres congruents	22	19	12	79	103	87	322
nombres non congruents	64	76	87	0	0	0	227
nombres non classés	12	6	2	23	0	16	59

(2) Programma 602 d'OLIVETTI

Table 2

Nombres congruents

5	6	7	13	14	15	21	22	23	29	30	31
34	37	38	39	41	46	47	53	55	61	62	65
69	70	71	77	78	79	85	86	87	93	94	95
101	102	103	109	110	111	118	119	127	133	134	137
138	141	142	143	145	149	151	154	157	158	159	161
165	166	167	173	174	181	182	183	190	191	194	197
199	205	206	210	213	214	215	219	221	222	223	226
229	230	231	237	238	239	246	247	253	254	255	257
262	265	269	271	277	278	285	286	287	291	293	295
299	301	302	303	309	310	311	313	318	319	323	326
327	330	334	335	341	349	353	357	358	359	365	366
371	374	381	382	383	386	390	391	395	397	398	399
406	407	410	413	415	421	422	426	429	430	431	434
437	438	439	442	445	446	447	453	454	455	457	461
462	463	465	469	470	471	478	479	485	487	493	494
501	502	505	509	510	511	514	517	518	519	526	527
533	534	535	541	542	546	551	559	561	565	566	574
581	582	583	589	590	591	598	602	606	609	614	615
622	629	631	638	645	646	651	654	655	658	661	662
663	669	670	671	674	678	679	685	687	689	694	695
703	709	710	718	719	721	723	731	734	741	742	749
751	758	759	761	766	767	773	777	781	782	789	790
791	793	798	799	805	806	807	813	814	815	821	822
830	831	838	839	854	861	862	866	869	870	871	878
879	885	886	889	890	894	895	901	902	903	905	910
915	919	926	934	935	942	943	949	951	957	958	959
966	973	974	982	985	987	989	991	995	998		

Table 3

Nombres non congruents

1	2	3	10	11	17	19	26	33	35	42	43
51	57	58	59	66	67	73	74	82	83	89	91
97	105	106	107	114	115	122	123	129	130	131	139
146	155	163	170	177	178	179	185	186	187	193	195
201	202	203	209	211	217	218	227	233	235	241	249
251	258	259	266	267	273	274	281	283	290	298	305
307	314	321	322	329	331	339	345	346	347	354	355
362	370	377	379	385	393	394	401	402	403	411	417
418	419	427	433	435	443	449	451	458	466	467	473
474	481	483	489	491	497	498	499	506	515	523	530
537	538	545	547	553	554	555	562	563	570	571	579
586	587	595	601	610	611	617	618	619	626	633	634
635	641	642	643	649	659	665	667	673	681	682	683
690	691	697	698	699	705	707	713	714	715	730	737
739	745	746	753	754	755	762	763	769	770	771	778
779	785	786	787	794	795	803	811	817	818	826	827
834	835	842	843	849	851	858	859	865	874	883	899
906	907	913	914	921	922	923	929	930	937	946	947
955	962	969	970	971	977	978	979	986	993	994	

Table 4

Nombres non classés

113	263	282	317	337	367	373	389	409	482	503	521
543	557	569	573	577	593	597	599	607	613	623	627
647	653	677	701	706	717	727	733	743	757	797	802
809	823	829	853	857	863	877	881	887	893	897	898
911	917	933	938	939	941	953	965	967	983	997	

BIBLIOGRAPHIE

(1) ALTER (R.), CURTZ (Y.B.) and KUBOTA (K.K.).- Remarks and results on congruent numbers, " Proceedings of the 3 rd southeastern conference on combinatorics, graph theory and computing 1972. Boca Raton ", p. 27-35.- Boca Raton, Florida Atlantic University, 1972.

(2) ALTER (R.) and CURTZ (T.B.).- A note on congruent numbers, Math. of comput., t. 28, (1974), p. 303-305.

(3) BASTIEN (L.).- Nombres congruents, Intermédiaire des Math., V. 22, (1915) p. 231-232

(4) BIRCH (B.J.).- Diophantine analysis and modular functions, " Algebraic geometry, Bombay Colloquium, 1968 ", p. 35-42.- Bombay, Tata Institute; London, Oxford University Press, 1969 (Tata Institute of fundamental Research. Studies in Mathematics, 4).

(5) BIRCH (B.J.)- and SWINNERTON-DYER (H.P.F.).- Notes on elliptic curves, II, J. reine angew. Math., t. 218, 1965, p. 79-108.

(6) GERARDIN (A.).- Nombres congruents, Intermédiaire des Math., V. 22, 1915, p. 52-53.

(7) LAGRANGE (J.).- Nombres congruents et courbes elliptiques.- Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 16ème année, 1974, n° 16.

Jean LAGRANGE
Faculté des Sciences, Mathématiques
Boite Postale 347
51062 REIMS-CEDEX