

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE SCHREIBER

**Une caractérisation des nombres de Pisot-Salem
des corps p -adiques \mathbb{Q}_p**

Mémoires de la S. M. F., tome 19 (1969), p. 55-63

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1969__19__55_0

© Mémoires de la S. M. F., 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE CARACTERISATION DES NOMBRES DE PISOT-SALEM DES
CORPS p-ADIQUES \mathbb{Q}_p .

par Jean-Pierre SCHREIBER

On se propose de montrer l'existence dans le groupe additif \mathbb{Q}_p , d'ensembles discrets, relativement denses au sens de Bohr (c'est-à-dire rencontrant, pour un certain ℓ , toutes les boules de rayon ℓ) et sur lesquels tout caractère faible peut être uniformément approché par des restrictions de caractères continus de \mathbb{Q}_p . De tels ensembles ont été récemment caractérisés dans \mathbb{R} par Y. Meyer ([5]). Cette caractérisation est ici étendue au cas de \mathbb{Q}_p , à partir d'ensembles élémentaires (cf. prop. 1) jouant le rôle des groupes discrets de \mathbb{R} .

On déduit ensuite une caractérisation des nombres de Pisot-Salem de \mathbb{Q}_p analogue à celle donnée pour \mathbb{R} dans [5].

I - NOTATIONS ET DEFINITIONS.

Pour un nombre premier p , on désigne par Ω_p la clôture algébrique de \mathbb{Q}_p et pour x dans Ω_p , par $|x|_p$ la valeur absolue p -adique de x . Il arrivera que le corps des nombres complexes \mathbb{C} soit désigné par Ω_0 et la valeur absolue ordinaire par $|\cdot|_0$.

On appelle $\mathbb{Z}(p)$ l'anneau des rationnels qui s'écrivent $\frac{q}{p^r}$ où q est un entier relatif premier avec p , et \mathbb{E}_p l'anneau des entiers p -adiques.

A tout élément x de \mathbb{Q}_p sont associés de manière unique le rationnel $H_p(x) \in \mathbb{Z}(p) \cap [0, 1[$ et l'entier p -adique $\varepsilon_p(x)$, ($|\varepsilon_p(x)|_p \leq 1$), de telle sorte que

$$x = H_p(x) + \varepsilon_p(x).$$

On notera pour $y \in [0, 1[$

$$\|y\| = \inf(y, 1-y).$$

Sur le groupe additif \mathbb{Q}_p , abélien, localement compact, les caractères continus sont tous de la forme

$$y \mapsto \exp[2i\pi H_p(xy)] ,$$

où $x \in \mathbb{Q}_p$ [[3] p.400]. Il sera pour nous plus commode de considérer les caractères comme homomorphismes de \mathbb{Q}_p dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} (identifié à $[0,1[$) :

$$y \mapsto H_p(xy)$$

De même les caractères faibles sur \mathbb{Q}_p sont des homomorphismes non nécessairement continus de \mathbb{Q}_p dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} :

$$y \mapsto \chi(y) .$$

II - ENSEMBLES HARMONIEUX.

Un fermé Λ de \mathbb{Q}_p est dit harmonieux si, pour tout caractère faible χ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver x dans \mathbb{Q}_p tel que

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \|\chi(\lambda) - H_p(x\lambda)\| < \varepsilon$$

Voyons maintenant l'exemple fondamental.

Proposition 1 : L'ensemble $\mathbb{Z}(p) \cap [0,1[$ est harmonieux dans \mathbb{Q}_p .

Les éléments de $\Lambda = \mathbb{Z}(p) \cap [0,1[$ sont des rationnels de la forme $\frac{q}{p^r}$, avec q entier premier avec p , $q < p^r$. Un caractère faible χ est donc déterminé, sur Λ , dès que sont fixées les valeurs

$$\theta_r = \chi\left(\frac{1}{p^r}\right) \quad r=0,1,\dots$$

$$\theta \leq \theta_r < 1 .$$

Les nombres θ_r sont liés par les relations :

$$p \theta_r = \theta_{r-1} \pmod{1}$$

ou encore

$$p \theta_r = \theta_{r-1} + A_r, \quad A_r \in \mathbb{Z} \cap [0, p[;$$

d'où

$$\theta_r = \frac{a_r}{p} + \frac{a_{r-1}}{p^2} + \dots + \frac{a_1}{p^r} + \frac{\theta_0}{p^r} .$$

Soit x l'entier p -adique défini par

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n p^{n-1} ;$$

on a donc

$$\chi\left(\frac{1}{p^r}\right) = H_p\left(\frac{x}{p^r}\right) + \frac{\theta_0}{p^r} .$$

Pour ε , $0 < \varepsilon < 1$, on peut trouver un rationnel γ de $\mathbb{Z}(p) \cap [0, 1[$ vérifiant :

$$|\gamma - \theta_0| < \varepsilon.$$

En posant $y = x + \gamma$, on obtient pour l'élément $\frac{q}{p^r}$ de Λ :

$$\left\| \chi\left(\frac{q}{p^r}\right) - H_p\left(\frac{\gamma q}{p^r}\right) \right\|_{\frac{\theta_0}{p^r}}^{\frac{\theta_0}{p^r}} q - H_p\left(\frac{\gamma q}{p^r}\right) \left\|.$$

Comme $\frac{\gamma q}{p^r} \in \mathbb{Z}(p) \cap [0, 1[$, $H_p\left(\frac{\gamma q}{p^r}\right) = \frac{\gamma q}{p^r}$ et $\left\| \theta_0 \frac{q}{p^r} - \gamma \frac{q}{p^r} \right\| \leq \frac{q}{p^r} |\theta_0 - \gamma| \leq \varepsilon$.

Le caractère fort γ approche donc uniformément χ à ε près sur Λ .

Corollaire : Pour tout intervalle (a, b) l'ensemble $\mathbb{Z}(p) \cap (a, b)$ est harmonieux dans \mathbb{Q}_p .

Proposition 2 : Soit M un $\mathbb{Z}(p)$ module de type fini, contenu dans \mathbb{Q}_p , et

soit s_1, \dots, s_n , une base de M . On suppose qu'on a n applications $\mathbb{Z}(p)$ -linéaires $L_1^0, L_2^0, \dots, L_n^0$ de M dans \mathbb{R} , indépendantes sur \mathbb{R} , et d'autre part n applications $\mathbb{Z}(p)$ linéaires $L_1^p, L_2^p, \dots, L_n^p$ de M dans \mathbb{Q}_p , indépendantes sur \mathbb{Q}_p ; L_1^p est l'injection canonique de M dans \mathbb{Q}_p .

Soit Λ l'ensemble des λ de M vérifiant

$$|L_1^0(\lambda)|_0 \leq 1 \text{ pour } i=1, 2, \dots, n$$

$$\text{et } |L_i^p(\lambda)|_p \leq 1 \text{ pour } i=2, 3, \dots, n.$$

Alors Λ est harmonieux dans \mathbb{Q}_p .

Démonstration : Les éléments de Λ sont de la forme :

$$\lambda = \sum_{i=1}^n a_i(\lambda) s_i \quad a_i(\lambda) \in \mathbb{Z}(p)$$

Les applications L_i^0 étant indépendantes sur \mathbb{R} , définissent un homéomorphisme de $[\mathbb{Z}(p)]^n$ (muni de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^n) dans \mathbb{R}^n et on a donc une constante A telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $|a_i(\lambda)|_0 < A$.

Soit χ un caractère faible sur Λ et ε un nombre réel positif. Il résulte du corollaire de la proposition 1 que pour chaque k , $k=1, 2, \dots, n$,

$$\{a_j s_k ; a_j \in \mathbb{Z}(p) \cap]-A, A[\}$$

est harmonieux ; on peut donc trouver $x_k \in \mathbb{Q}_p$ tel que

$$\|\chi(a_k s_k) - H_p(x_k a_k s_k)\| < \frac{\varepsilon}{2n}, \forall a_k \in Z(p) \cap]-A, A[.$$

On est alors ramené à l'approximation uniforme sur Λ du caractère faible

$$\lambda \rightsquigarrow H_p\left(\sum_{k=1}^n x_k a_k(\lambda) s_k\right)$$

par un caractère fort du type

$$\lambda \rightsquigarrow H_p\left(x \sum_{k=1}^n a_k(\lambda) s_k\right).$$

Si $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ sont des entiers p -adiques et si $\lambda \in \Lambda$, $H_p(\xi_j L_j^p(\lambda)) = 0$ pour $j=2, \dots, n$. Par conséquent, si nous posons

$$L_j^p(s_k) = t_{j,k},$$

il nous suffit de trouver $x \in \mathbb{Q}_p$ et ξ_2, \dots, ξ_n , entiers p -adiques, de façon

$$\text{que } \forall k, \forall \lambda \in \Lambda, \|H_p[a_k(\lambda)(x_k s_k - x s_k - \sum_{j=2}^n \xi_j t_{j,k})]\| < \frac{\varepsilon}{2n},$$

pour avoir pour tout λ de Λ

$$\|H_p(x\lambda) - \chi(\lambda)\| < \varepsilon.$$

Comme $a_k(\lambda) \in Z(p) \cap]-A, A[$, il nous suffit donc de trouver x, ξ_2, \dots, ξ_n , de manière que

$$\begin{aligned} \forall k, c_k = x_k s_k - x s_k - \sum_{j=2}^n \xi_j t_{j,k} &\in Z(p) \cap]-p^{-c}, p^{-c}[, \\ \text{avec } p^{-c} &< \frac{1}{A} \frac{\varepsilon}{2n}. \end{aligned}$$

Ecrivons plutôt, après avoir posé $x = x' + \xi_1$,

$$c_k = x_k s_k - x' s_k - \xi_1 s_k - \sum_{j=2}^n \xi_j t_{j,k}.$$

On est alors ramené à la résolution en x', c_k, b_k du système

$$(*) \quad x' s_k = x_k s_k - c_k - b_k \quad k=1, 2, \dots, n.$$

$$\text{avec } \begin{cases} x' \in \mathbb{Q}_p \\ c_k \in Z(p) \cap]-p^{-c}, p^{-c}[\\ b_k \in p^B E_p \quad k=1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

B étant une constante entière telle que pour b_1, b_2, \dots, b_n dans $p^B E_p$, on puisse trouver $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, dans E_p , avec

$$b_k = \xi_1 s_k + \sum_{j=2}^n \xi_j t_{j,k} = \sum_{j=1}^n \xi_j L_j^p(s_k).$$

L'existence d'une telle constante résulte de l'indépendance des L_j^p .

L'existence d'une solution au système (*) va résulter du lemme suivant, qui est le théorème de Kronecker [[7] 5.1.3] appliqué à \mathbb{Q}_p :

Lemme : Si p_1, p_2, \dots, p_n sont des éléments de \mathbb{Q}_p indépendants sur \mathbb{Q} , l'ensemble des n -uples $\{H_p(x p_k)\}_{k=1,2,\dots,n}$, x décrivant \mathbb{Q}_p , est dense dans $[0,1]^n$.

Soit alors $x' \in \mathbb{Q}_p$ tel que

$$|H_p(x' p^{-B} s_k) - H_p(x_k s_k p^{-B})| < p^{-B-C}.$$

Posons

$$H_p(x_k s_k p^{-B}) - H_p(x' s_k p^{-B}) = c_k p^{-B}$$

$$\varepsilon_p(x_k s_k p^{-B}) - \varepsilon_p(x' s_k p^{-B}) = b_k p^{-B}$$

alors c_k appartient à $Z(p) \cap]-p^{-C}, p^{-C}[$, b_k appartient à $p^B E_p$, et en ajoutant on trouve

$$x_k s_k - x' s_k = b_k + c_k.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.

On peut énoncer pour les ensembles harmonieux de \mathbb{Q}_p une caractérisation identique à celle donnée dans [5] pour le cas réel, la démonstration de [5], th.1, valant pour tous les groupes localement compact métrisables :

Proposition 3 : Si Λ est un fermé de \mathbb{Q}_p , les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Λ est harmonieux.

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0$, χ caractère faible sur Λ , $\exists x \in \mathbb{Q}_p$

$$|x|_p \leq T \text{ et } \|\chi(\lambda) - H_p(x\lambda)\| < \varepsilon.$$

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0$ tel que l'ensemble $E(\Lambda, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{Q}_p, \|H_p(x\lambda)\| < \varepsilon\}$ rencontre tout disque de rayon supérieur à T .

III - NOMBRES DE PISOT-SALEM DANS \mathbb{Q}_p .

De nombreuses propriétés des nombres de Pisot réels ont été étendues au cas p -adiques : cf. par exemple [2], [6] et [1]. Nous définirons l'ensemble des nombres de Pisot-Salem de \mathbb{Q}_p comme suit :

Définition : Soit T_p l'ensemble des éléments θ de \mathbb{Q}_p , $|\theta|_p > 1$, tels qu'il existe un polynôme $A[x]$ à coefficients entiers relatifs, irréductible sur \mathbb{Q} et vérifiant :

- 1) La seule racine de A dans \mathbb{Q}_p ayant une valeur absolue p -adique strictement supérieure à 1 est θ .
- 2) Pour tout nombre premier p' différent de p et pour $p'=0$, les racines de A dans $\mathbb{Q}_{p'}$ (resp. dans \mathbb{C}) sont de valeur absolue p' adique (resp. valeur absolue ordinaire) inférieure ou égale à 1.

Théorème 1 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre p -adique θ appartienne à T_p est que l'ensemble $\{\theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soit harmonieux.

a) Soit $\theta \in T_p$.

Rappelons d'abord que les conditions 1) et 2) entraînent qu'on peut prendre A sous la forme

$$A(x) = p^r x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m; a_m \neq 0.$$

(cf. [1], II 1.2).

Il en résulte que l'ensemble $\{\theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ appartient au $\mathbb{Z}(p)$ -module engendré par $1, \theta, \dots, \theta^{m-1}$. Soit M ce $\mathbb{Z}(p)$ -module. Construisons les applications L_j^p et L_j^0 de la proposition 3.

Soient $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ les m \mathbb{Q} -isomorphismes du corps $\mathbb{Q}(\theta)$ (dans lequel M est plongé), à valeurs dans \mathbb{Q}_p , τ_1 étant l'injection canonique. En posant $\tau_j(\theta) = \theta_j$, racine de A dans \mathbb{Q}_p , on a par hypothèse $|\theta_j|_p < 1$ pour $j \geq 2$.

Dans $(\mathbb{Q}_p)^m$ les m vecteurs v_0, v_1, \dots, v_{m-1} :

$$v_k = \{\theta^k, \theta_2^k, \dots, \theta_m^k\}$$

sont indépendants sur \mathbb{Q}_p , (le déterminant du système des v_k sur la base canonique de $(\mathbb{Q}_p)^m$ étant non nul) donc sont indépendants sur \mathbb{Q}_p . Les projections v_k' des v_k sur $(\mathbb{Q}_p)^{m-1}$,

$$v_k' = \{\theta_2^k, \dots, \theta_m^k\}$$

forment un système, de rang $m-1$, de vecteurs contenus dans la boule unité de $(\mathbb{Q}_p)^{m-1}$, puisque $|\theta_j|_p \leq 1$ si $2 \leq j \leq m$. Il est donc possible de définir, sur le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel N engendré par v_0, v_1, \dots, v_{m-1} , m formes \mathbb{Q}_p -linéaires à valeur dans \mathbb{Q}_p , L'_1, L'_2, \dots, L'_m , qui soient \mathbb{Q}_p -indépendantes et telles que : $L'_1(v_k) = \theta^k$ et, pour $j=2, \dots, m$, $|L'_j(x)|_p \leq p$ pour tous les éléments x de N dont les $m-1$ dernières coordonnées sur la base canonique de $(\mathbb{Q}_p)^m$ ont une valeur absolue inférieure ou égale à 1.

Soit alors τ l'application $\mathbb{Z}(p)$ -linéaire de M dans N définie par

$$\tau(\theta^k) = v_k.$$

On obtient m applications \mathbb{Q}_p -indépendantes et $\mathbb{Z}(p)$ -linéaires de M dans \mathbb{Q}_p en posant :

$$L_j^p = L'_j \circ \tau,$$

et ces applications vérifient pour tout λ de l'ensemble $\Lambda = \{\theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$L_1^p(\lambda) = \lambda \text{ et } |L_j^p(\lambda)|_p \leq 1 \text{ pour } p=2, \dots, m.$$

Soient maintenant $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, les m \mathbb{Q} -isomorphismes du corps $\mathbb{Q}(\theta)$, à valeurs dans \mathbb{C} . On définit alors, dans \mathbb{C}^m , comme précédemment dans $(\mathbb{Q}_p)^m$, m vecteurs indépendants sur le corps des réels \mathbb{R} et situés tous, cette fois, dans la boule unité de \mathbb{C}^m . On en déduit donc m applications $\mathbb{Z}(p)$ -linéaires et \mathbb{R} -indépendantes de Λ dans $\mathbb{R} : L_1^0, \dots, L_m^0$, telles que

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad |L_j^0(\lambda)|_0 \leq 1.$$

La proposition 3 s'applique alors, et montre que Λ est contenu dans un ensemble harmonieux, donc harmonieux.

b) Si $\{\theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est harmonieux, θ est algébrique.

En effet, si θ est transcendant, l'ensemble $\{\theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est indépendant sur \mathbb{Q} et toute suite $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $0 \leq \alpha_n < 1$, définit dessus un caractère faible. On montre alors comme dans le cas réel ([5] 3.3) que $\{\theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas être harmonieux : pour ε assez petit, l'ensemble K_ε des éléments x de \mathbb{Q}_p vérifiant pour tout $n \geq 0 : H_p(x\theta^n) \in [0, \varepsilon[\cup]\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+[\cup]1-\varepsilon, 1[$, a tous ses points isolés

et est donc au plus dénombrable, alors que l'ensemble des suites $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ prenant les valeurs 0 ou $\frac{1}{2}$ a la puissance du continu ; on ne peut donc pas approcher à ε près toutes ces suites $\{\alpha_n\}$ par des suites $H_p(x\theta^n)$.

c) Si θ est racine du polynôme $P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$ de $\mathbb{Z}[x]$, irréductible et primitif et si l'ensemble $\{\theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est harmonieux, on peut trouver, pour $\varepsilon > 0$, un x de \mathbb{Q}_p tel que

$$\|H_p(x\theta^n)\| < \varepsilon, \text{ et } x \neq 0.$$

Si nous considérons plutôt la décomposition des éléments y de \mathbb{Q}_p de la forme

$$y = H'_p(y) + \varepsilon'_p(y), \text{ avec } H'_p(y) \in \mathbb{Z}(p) \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

et $|\varepsilon'_p(y)|_p \leq 1$, nous aurons

$$|H'_p(x\theta^n)|_0 < \varepsilon.$$

Prenons alors $\varepsilon < (\sum_{i=0}^m |a_i|)^{-1}$. Dans l'égalité

$$\sum_{i=0}^m a_i H'_p(x\theta^{k+m-i}) = \sum_{i=0}^m a_i \varepsilon'_p(x\theta^{k+m-i})$$

le membre de droite est un entier p -adique et le membre de gauche un rationnel de $\mathbb{Z}(p) \cap]-1, 1[$; ces deux membres sont donc nuls. Les rationnels $u_n = H'_p(x\theta^n)$ vérifient ainsi la même relation de récurrence que θ^n et comme on a

$$|u_n|_p \leq |x|_p |\theta^n|_p,$$

pour un entier r assez grand on aura $p^{rn} u_n \in \mathbb{Z}$. Alors le théorème de Fatou [[4] p.64], appliqué à la série $\sum_{n=0}^{\infty} p^{rn} u_n \left(\frac{z}{p^r}\right)^n$, nous permet d'écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \frac{A(z)}{B(z)}$$

où A et B sont des polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ premiers entre eux.

Pour tout nombre premier p' différent de p et pour $p' \neq 0$, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ converge dans le disque $|z|_{p'} < 1$ puisque $|u_n|_{p'} \leq 1$ ($u_n \in \mathbb{Z}(p) \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$). Donc dans $\mathbb{Q}_{p'}$, les racines de B sont de valeur absolue supérieure ou égale à 1. Dans \mathbb{Q}_p , comme on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} x \theta^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_p(x\theta^n) z^n \\ &= \frac{x}{1-\theta z} - g(z) \end{aligned}$$

où $g(z)$ est définie pour tout z , $|z|_p < 1$ (puisque $|\varepsilon'_p(x\theta^n)|_p \leq 1$), les racines de B autres que $\frac{1}{\theta}$ ont une valeur absolue p -adique supérieure ou égale à 1. Alors θ appartient bien à la classe T_p .

Cela termine la démonstration du théorème.

Références

- [1] BERTRANDIAS (F.). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques. - Thèse. - Bull. Soc. Math. France, Mémoire n°4 (1965).
- [2] CHABAUTY (C.). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p -adiques. - C. R. Acad. Sc. Paris, t.231 (1950) p. 465-466.
- [3] HEWITT and ROSS. - Abstract harmonic analysis I. - Springer.
- [4] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann (1963).
- [5] MEYER (Y.). - Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique. - à paraître.
- [6] PISOT (C.). - Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques. - Montréal (1963).
- [7] RUDIN (W.). - Fourier analysis on groups. - Interscience (1962).

Jean-Pierre SCHREIBER
 Institut de Mathématique
 Faculté des Sciences d'Orsay
 91 - ORSAY (France)