MÉMOIRES DE LA S. M. F.

O. LABORDE

Classes de Stiefel-Whitney en cohomologie étale

Mémoires de la S. M. F., tome 48 (1976), p. 47-51
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__48__47_0>

Col. sur les Formes Quadratiques (1975, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 48, 1976, p. 47-51

CLASSES DE STIEFEL - WHITNEY EN COHOMOLOGIE ETALE

par

O. LABORDE

On donne une construction des classes de Stiefel-Whtiney d'un fibré quadratique complexe en cohomologie usuelle et on indique comment la paraphraser au cas d'un module projectif quadratique sur un schéma avec la cohomologie étale. Enfin, on remarque que les classes ainsi obtenues coïncident avec celles définies par A. Delzant pour un espace quadratique sur un corps de caractéristique différente de 2.

I - Généralités sur les fibrés vectoriels

Etant donné un espace topologique B, un fibré $\xi = (E,p,B)$ sur B est formé d'un espace topologique E et d'une application continue p de E dans B. Un exemple bien connu est le n-fibré type réel $\theta^n = (B \times \mathbb{R}^n, pr_1, B)$.
A tout n-fibré vectoriel réel localement trivial, on associe un faisceau $\underline{\mathrm{Isom}}(\theta^n,\xi)$ sur Ouv(B) où $\Gamma(U,\underline{\mathrm{Isom}}(\theta^n,\xi)) = \mathrm{Isom}(U \times V, \xi|U)$. C'est un torseur sous le faisceau en groupes $\underline{\mathrm{Aut}}(\theta^n)$.
$\Gamma(U,\underline{\mathrm{Aut}}(\theta^n))$ s'identifiant à l'ensemble $\Gamma(U,\underline{G\ell(n,\mathbb{R})})$ des applications continues de U dans $G\ell(n,\mathbb{R})$, il y a une équivalence de catégories entre les n-fibrés vectoriels réels localement triviaux et les torseurs sous le faisceau en groupes $G\ell(n,\mathbb{R})$. Par conséquent, à chaque classe d'isomorphie de n-fibrés vectoriels localement triviaux, correspond un élément de l'ensemble $H^1(B,G\ell(n,\mathbb{R}))$, qui est d'ailleurs en correspondance bijective avec le premier groupe de cohomologie de Cech non abélienne $\check{H}^1(B,G\ell(n,\mathbb{R}))$. On a un résultat analogue pour les fibrés complexes.
Un fibré $\mathbb{C}$-orthogonal est un fibré muni d'une application continue Q de E dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à chaque fibre sera une forme quadratique non dégénérée. Il est localement isomorphe au fibré $B \times \mathbb{C}^n$ muni de la forme

$$Q(x, \sum_{i=1}^{n} z_i e_i) = \sum z_i^2$$

et comme ci-dessus, on lui associe un élément de $H^1(B,O(n,\mathbb{C}))$. Les inclusions de $O(n,\mathbb{R})$ dans $O(n,\mathbb{C})$ et $G\ell(n,\mathbb{R})$ ayant des espaces quotients qui sont contractiles (cf. [1]), si l'espace B est <u>paracompact</u>, le théorème de Feldbau ([8]) (Tout fibré de base paracompacte à fibre contractile admet une section), nous fournit des isomorphismes entre $H^1(B,O(n,\mathbb{R}))$, $H^1(B,O(n,\mathbb{C}))$ et $H^1(B,G\ell(n,\mathbb{R}))$.
Ces résultat nous montrent que les classifications sont équivalentes.

II - Classes de Stiefel-Whitney d'un fibré orthogonal complexe

Dans ce qui suit, on note $P^{n-1}(\mathbb{C})$ l'espace projectif complexe de dimension $n-1$ et $P^{n-1}(\mathbb{C})^*$ désigne $P^{n-1}(\mathbb{C}) - V_{\mathbb{C}}$, où $V_{\mathbb{C}} = \{L \in P^{n-1}(\mathbb{C}) \mid Q(L) = 0\}$, Q étant ici la forme

$$\sum_{i=1}^{n} z_i e_i \in \mathbb{C}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \in \mathbb{C} .$$

A un fibré quadratique complexe $\xi = (E,p,B,Q)$, on associe le fibré $P(\xi) = (E',q',B)$ où E' est obtenu en identifiant les vecteurs non nuls des droites des fibres, l'application q' étant obtenue à partir de p. Il contient la sous-variété $V_\xi = \{L \in E' \mid Q(L) = 0\}$.

On appelle $P(\xi)^*$ le fibré d'espace total $E' - V_\xi$, de base B, la projection q est obtenue par restriction de q'. Ce fibré est localement isomorphe à $B \times P^{n-1}$ $B \times P^{n-1}(\mathbb{C})^*$.

Considérons le champ $\mathcal{F}$ (cf. [4]) formé par les fibrés vectoriels sur $\mathrm{Ouv}(B)$ qui sont munis d'une forme quadratique non dégénérée. Le fibré trivial de rang un, i. e. $(B \times \mathbb{C}, pr_1, B, (x,z) \mapsto z^2)$ sera désigné par $\mathbb{1}$.

Il y a une équivalence de catégories entre les fibrés quadratiques sur B localement isomorphes à $\mathbb{1}$ et les torseurs sur B en groupe $\mathbb{Z}/2 \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{1})$ qui à tout fibré quadratique ξ associe le faisceau $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbb{1},\xi)$.

On notera $E^{n-1}(\mathbb{C})$ (resp. $E^{n-1}(\mathbb{R})$) le fibré universel linéaire sur $P^{n-1}(\mathbb{C})$ (resp. $P^{n-1}(\mathbb{R})$) (cf. [5] ou [6]).

Il est bien connu que l'élément $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbb{1},E^{n-1}(\mathbb{R}))$ de $H^1(P^{n-1}(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2)$ est un générateur de $H^*(P^{n-1}(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2)$ (cf. [7]).

Puisque $P^{n-1}(\mathbb{R})$ est un rétracte par déformation de $P^{n-1}(\mathbb{C})^*$, si $E^{n-1}(\mathbb{C})^*$ est la restriction de $E^{n-1}(\mathbb{C})$ à $P^{n-1}(\mathbb{C})^*$, il en résulte que $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbb{1},E^{n-1}(\mathbb{C})^*) \in H^1(P^{n-1}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/2)$ est un générateur de $H^*(P^{n-1}(\mathbb{C})^*,\mathbb{Z}/2)$.

Nous avons dans $q^{-1}\xi$ le sous-fibré de rang un $\lambda_\xi = \{(\langle \ell \rangle,x) \in P(\xi^*) \times E \mid x \in [\ell]\}$.

On lui associe l'élément $\underline{\mathrm{Isom}}(1,\lambda_\xi)$ de $H^1(P(\xi^*),\mathbb{Z}/2)$ que l'on notera a_ξ. Pour chaque $b \in B$, on a en choisissant une base dans la fibre, un isomorphisme j_b entre $q^{-1}(b)$ et $P^{n-1}(C)^*$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E_1^{n-1}(\mathbb{C})^* \arrow[r] \arrow[d] & \lambda_\xi \arrow[r, hook] \arrow[dr] & q^{-1}\xi \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
P^{n-1}(\mathbb{C})^* \arrow[rr, "j_b"] & & P(\xi^*) \arrow[r, "q"] & B
\end{tikzcd}$$

Les fibrés $j_b^{-1}(\lambda_\xi)$ et $E_1^{n-1}(\mathbb{C})^*$ étant isomorphes, $j_b^*(a_\xi)$ est un générateur de $H^*(P^{n-1}(\mathbb{C})^*,\mathbb{Z}/2)$.

Les éléments $1, a_\xi, \ldots, a_\xi^{n-1}$ sont tels que leurs images par j_b^* forment une $\mathbb{Z}/2$-base de $H^{n-1}(P^{n-1}(\mathbb{C})^*, \mathbb{Z}/2)$ et le théorème de Leray-Hirsch ([7]) montre qu'ils forment une $H^*(B,\mathbb{Z}/2)$-base de $H^*(P(\xi^*),\mathbb{Z}/2)$.
L'élément a_ξ^n peut don s'écrire

$$- \sum_{i=1}^{n} w_i(\xi)\, a_\xi^{n-i}$$

où les $w_i(\xi) \in H^i(B,\mathbb{Z}/2)$, et on définit la classe de Stiefel-Whitney totale de ξ par :

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \ldots + w_n(\xi) \quad .$$

Remarquons que $H^*(B(\xi),\mathbb{Z}/2)$ s'injecte dans $H^*(P(\xi^*),\mathbb{Z}/2)$.
Ces classes possèdent les propriétés suivantes qui les caractérisent de façon unique :

1) fonctorialité,
2) additivité,
3) normalité : si ξ est un fibré quadratique de rang un, $w_1(\xi)$ est l'élément de $H^1(B,\mathbb{Z}/2)$ fourni par ce fibré.

Pour les démontrer, on commence par remarquer qu'il existe pour chaque fibré $\xi =$ $= (E,P,B,Q)$ une application continue d'un espace B_1 dans B telle que $f^{-1}\xi$ soit une somme orthogonale de fibrés quadratiques de rang un et que l'application f^* de $H^*(B)$ dans $H^*(B_1)$ soit injective.
Son existence est obtenue à partir de la décomposition $q^{-1}\xi = \lambda_\xi + \sigma_\xi$ (λ_ξ anisotrope) et on réitère.

$$\begin{tikzcd}
\lambda_\xi \arrow[r, hook] \arrow[d] & q^{-1}\xi \arrow[r] \arrow[dl] & E \arrow[d] \\
P(\xi^*) \arrow[rr, "q"] & & B
\end{tikzcd}$$

Pour l'additivité, il suffit de montrer que si $\xi = \lambda_1 \perp \ldots \perp \lambda_n$, alors $w(\xi) = \prod_{i=1}^{n} (1 + w_1(\lambda_i))$. La démonstration s'inspire de ([5]). On a les suites exactes :

$$0 \to \lambda_\xi \to q^{-1}\xi \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} q^{-1}\lambda_i \to \sigma_\xi \to 0$$

$$0 \to \theta^1 \simeq \check{\lambda}_\xi \otimes \lambda_\xi \to \bigoplus_{i=1}^{n} [\check{\lambda}_\xi \otimes q^{-1}\lambda_i] \to \check{\lambda}_\xi \otimes \sigma_\xi \to 0$$

Le fibré $\check{\lambda}_\xi \otimes \lambda_\xi$ a une section non triviale que nous composons pour obtenir des sections s_i de $\check{\lambda}_\xi \otimes q^{-1}\lambda_i$.

Soit V_i l'ouvert de $P^{n-1}(\mathbb{C})^*$ formé des points où s_i est non nulle. L'image de $w_1(\check{\lambda}_\xi \otimes q^{-1}\lambda_i)$ est nulle dans $H^1(V_i)$ et elle prend ses valeurs en fait dans

$H^*(P^{n-1}(\mathbb{C})^*, V_i)$. En outre, le cup-produit $\sum_{i=1}^{n} w_i(\lambda_\xi \otimes q^{-1}\check{\lambda}_i)$ est un élément de $H^*(P^{n-1}(\mathbb{C})^*, \bigcup_{i=1}^{n} V_i) = H^*(P^{n-1}(\mathbb{C})^*, P^{n-1}(\mathbb{C})^*) = 0$. Nous avons donc une relation $\prod_{i=1}^{n} [q^*(w_1(\lambda_i) + w_1(\check{\lambda}_\xi) = 0$ qui donne l'égalité recherchée. On en déduit aussitôt l'unicité.

III - Classes caractéristiques d'un module quadratique sur un schéma S

Soit M un $\mathcal{O}_S$-Module. On appelle forme quadratique sur M un morphisme Q de M dans S qui vérifie les conditions suivantes :

a) pour tout ouvert U de S, pour tout $\lambda \in \Gamma(U,S)$ et tout $x \in \Gamma(U,M)$, on a $Q(\lambda\, x) = \lambda^2 Q(x)$,

b) l'application de $M \times M$ dans S définie par $Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ est bilinéaire en x et y.

On suppose que M est localement libre de type fini. Considérons le foncteur qui à chaque S-schéma S' associe l'ensemble $G\,Q(M_{S'})$ formé des sous-modules quadratiques inversibles et localement facteurs directs tels que la forme quadratique induite soit non dégénérée. Il est représentable par un schéma noté $P(M)^*$.

Nous supposons maintenant que les corps résiduels sont de caractéristique différente de 2. Pour la cohomologie étale, on peut se référer à ([2]).

En employant une construction identique à celle qui précède, on obtient un module L^* qui correspond à la donnée d'un torseur sur $\mu_2 \simeq \mathbb{Z}/2$, i. e. d'un élément de $H^1(P(M)^*, \mathbb{Z}/2)$. L'analogue en cohomologie étale du théorème de Leray-Hirsch, implique encore que les éléments $1, \eta, \ldots, \eta^{n-1}$ forment une $H^*(S,\mathbb{Z}/2)$-base de $H^*(P(M)^*, \mathbb{Z}/2)$.

Les classes de Stiefel-Whitney de Q sont données par $\eta^n = -\sum_{i=1}^{n} w_i(Q)\,\eta^{n-i}$ et on pose encore $w(Q) = 1 + w_1(Q) + \ldots + w_n(Q)$. Ces classes ont les propriétés suivantes :

1) fonctorialité par changement de base,

2) $w(Q_1 \perp Q_2) = w(Q_1)\, w(Q_2)$,

3) normalité : si Q est une forme quadratique sur S, $w(Q)$ correspond au torseur associé à celle-ci et elles les caractérisent de façon unique.

Si nous prenons un espace quadratique sur un corps k de caractéristique différente de 2, nous retrouvons les classes définies par A. Delzant dans ([3]) car $X =$ $= \mathrm{Spec}(k)$ et si $\bar{k}$ est la clôture séparable de k, nous avons $H_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Z}/2) =$ $= H(G(\bar{k}/k); \mathbb{Z}/2)$ et $H^1(G(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/2) \simeq k^*/k^{*2}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. CHEVALLEY, Theory of Lie groups. Princeton University Press, 1946.

[2] P. DELIGNE, Cohomologie étale : Les points de départ. Cours à Arcata en 1974.

[3] A. DELZANT, Définition des classes de Stiefel-Whitney d'un module quadratique sur un corps de caractéristique différente de 2. C.R.Acad. Sci. Paris. 255, 1366-1368 (1962).

[4] J. GIRAUD, Cohomologie non abélienne. Springer Verlag, Berlin, 1971.

[5] D. HUSEMOLLER, Fibre Bundles. Mc Graw Hill, 1966.

[6] J.W. MILNOR and J.D. STASHEFF, Caracteristic classes. Annals of Mathematics studies. Princeton University Press, 1974.

[7] E.H. SPANIER, Algebraic topology, Mc Graw Hill, 1966.

[8] N. STEENROD, The topology of fibre bundle. Princeton University Press, 1951.

Institut des Mathématiques
Université des Sciences et
Techniques du Languedoc

34060 - MONTPELLIER-CEDEX

FRANCE