

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JACQUES LAFONTAINE

Réunions d'ensembles de convergence absolue

Mémoires de la S. M. F., tome 19 (1969), p. 21-25

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1969__19__21_0

© Mémoires de la S. M. F., 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RÉUNIONS D'ENSEMBLES DE CONVERGENCE ABSOLUE

par

Jacques LAFONTAINE

I. On dit qu'un sous-ensemble E de la droite réelle \mathbb{R} est un ensemble de convergence absolue (ou ensemble du type N) s'il existe une série trigonométrique absolument convergente en tout point de E et dont la série des modules diverge. On trouvera dans [1] et [3] des exposés des principales propriétés de ces ensembles. On y démontre notamment que tout ensemble du type N est de mesure nulle, et que tout dénombrable est du type N ; que si E est un ensemble du type N et D un dénombrable, la réunion $E \cup D$ est du type N . Nous allons voir que contrairement à une assertion de [1], cette dernière propriété est la meilleure possible.

II. Théorème. Soit E une partie fermée de \mathbb{R} . Si l'union de E avec tout ensemble du type N est elle-même du type N , alors E est dénombrable.

Démonstration. Supposant E non dénombrable, nous allons construire un ensemble de convergence absolue F tel que, pour presque tout réel λ de $[0, 1]$, la somme $\lambda E + F$ soit un ensemble de mesure positive. Il en résultera (cf [3]) que $E \cup \frac{1}{\lambda}F$ n'est du type N pour presque aucun λ de $[0, 1]$.

Soient μ et ν deux mesures portées par E et F respectivement. L'ensemble

$\lambda E + F$ porte la mesure $\mu_\lambda * \nu$ (μ_λ étant définie par $\int f(x) d\mu_\lambda = \int f(\lambda x) d\mu$), dont la transformée de Fourier est $\hat{\mu}(\lambda u) \hat{\nu}(u)$. Si l'on a

$$(1) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\mu}(\lambda n) \hat{\nu}(n)|^2 < +\infty$$

l'ensemble $\lambda E + F$ modulo 2π sera de mesure positive d'après le théorème de Plancherel, et par conséquent $\lambda E + F$ aussi. On aura (1) pour presque tout λ de $[0, 1]$ si

$$\int_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\mu}(\lambda n) \hat{\nu}(n)|^2 d\lambda < +\infty$$

ou encore

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\nu}(n)|^2 \int_0^1 |\hat{\mu}(\lambda n)|^2 d\lambda < +\infty.$$

Si le fermé E n'est pas dénombrable, on peut prendre μ diffuse, et dans ces conditions, on a

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \int_0^1 |\hat{\mu}(\lambda n)|^2 d\lambda = 0 \quad (\text{cf } [6]).$$

On est donc ramené au problème suivant : une suite positive $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tendant vers zéro quand $|n|$ tend vers l'infini étant donnée, construire un ensemble de convergence absolue F et une mesure ν portée par F tels que

$$(2) \quad \sum |\hat{\nu}(n)|^2 a_n < +\infty.$$

La construction de F résulte des travaux de Salem. Tout d'abord, si $P_{\{\xi_k\}}$ est le parfait symétrique construit sur $[0, 2\pi]$ en prenant les ξ_k ($0 \leq \xi_k \leq \frac{1}{2}$) pour rapports de dissection successifs, et si $M(p) = 2\pi \cdot 2^p \cdot \xi_1 \xi_2 \dots \xi_p$ est la somme des longueurs des segments de la p -ième étape de la construction, on démontre dans [5]

que les coefficients de Fourier-Stieltjes $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de la mesure de Lebesgue de P vérifient

$$\sum M([\beta \log |n|]) |b_n|^2 < +\infty$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x .

On prend $F = P_{\{\xi_p\}}$, avec $\xi_p = \frac{1}{2}$ sauf pour une suite $\{i_j\}$ pour laquelle $\xi_{i_j} = \frac{1}{2j}$. Alors, comme nous allons le voir au paragraphe suivant, F est du type N ; et $M(p)$ peut tendre vers zéro arbitrairement lentement à condition de choisir la suite $\{i_j\}$ suffisamment lacunaire. c.q.f.d. (1)

III. Les mêmes considérations s'appliquent aux ensembles de Dirichlet. On dit qu'un compact E de \mathbb{R} est un ensemble de Dirichlet si

$$\liminf_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|e^{i\lambda x} - 1\|_{C(E)} = 0$$

ou, ce qui revient au même, s'il existe une suite d'entiers positifs $\{n_k\}$, tendant vers l'infini, telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\sin n_k x\|_{C(E)} = 0.$$

Tout ensemble de Dirichlet est un ensemble du type N ; par contre, l'union de 0 et d'une progression géométrique tendant vers zéro est un ensemble du type N qui n'est

(1) L'existence d'ensembles parfaits satisfaisant à (2) est également établie dans [3], chapitre III, par des méthodes de théorie du potentiel. L'existence d'ensembles du type N vérifiant (2) résulte alors de ce que, pour toute fonction déterminante de Hausdorff h telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)/t = 0$, il existe un ensemble du type N de h -mesure infinie.

pas de Dirichlet (cf [2]). On en déduit qu'il existe également des parfaits du type N qui ne sont pas des ensembles de Dirichlet, par exemple

$$G = \{0\} \cup \left(\bigcup_{p \neq 0} 1/2^p + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k / 2^{k^2} \right) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_k = 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

L'ensemble F construit précédemment est un ensemble de Dirichlet, d'après la démonstration de Salem ([4]) :

Prenons $p = i_j$. Les origines α_{pk} ($k = 1, 2, \dots, 2^p$) des 2^p intervalles de la p -ième étape sont données par

$$\alpha_{pk} = 2\pi (\varepsilon_1(1 - \xi_1) + \varepsilon_2 \xi_2(1 - \xi_1) \dots + \varepsilon_p \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{p-1}(1 - \xi_p))$$

et ces intervalles ont tous pour longueur $\eta_p = 2\pi 2^{-p}(j!)^{-1}$. Si $n_p = 2^p(j-1)!$,

on a

$$|\sin n_p \alpha_{pk}| \leq 2\pi/j \quad \text{et} \quad n_p \eta_p = 1/j.$$

Par conséquent

$$|\sin n_p x| \leq (2\pi + 1)/j$$

pour tout x dans F .

Le théorème du §2 est donc encore vrai pour les ensembles de Dirichlet.

Bibliographie

- [1] ARBAULT (J.). L'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique. Bull. Soc. Math. France, t. 80 (1952), 253-317.
- [2] KAHANE (J.-P.). Ensembles de Dirichlet et ensembles de Kronecker. A paraître.
- [3] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann, Paris, 1963.

- [4] SALEM (R.). The absolute convergence of trigonometrical series in Oeuvres Mathématiques, Hermann, Paris, 1967, 201-218.
- [5] SALEM (R.). On some properties of symmetrical perfect sets. Ibidem, 219-227.
- [6] ZYGMUND (A.). Trigonometric series. Cambridge University Press, 1959. Tome II, p. 261.

Jacques LAFONTAINE
Mathématiques (425)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)
