

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

A. GRAMAIN

Formes d'intersection et d'enlacement sur une variété

Mémoires de la S. M. F., tome 48 (1976), p. 11-19

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__48__11_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMES D'INTERSECTION ET D'ENLACEMENT SUR UNE VARIÉTÉ

par

A. GRAMAIN

Dans cet exposé, nous souhaitons donner un bref aperçu des définitions et propriétés des formes d'intersection et d'enlacement, ainsi que des questions les concernant.

I - FORME D'INTERSECTION

(1) Soit W une variété compacte (connexe) orientée de dimension n . Etant données une q -chaîne x et une $(n-q)$ -chaîne y en bonne position, c'est-à-dire avec des points d'intersection transversaux en nombre fini a_i ($1 \leq i \leq r$), on définit le nombre d'intersection de x et y , noté $x \circ y$, par $x \circ y = \sum_i \varepsilon_i$, où $\varepsilon_i = 1$ ou -1 suivant que l'orientation de x puis de y en a_i donne celle de W ou l'opposée (cf. [14], § 70). Si $x = bz$, on vérifie immédiatement que $bz \cdot y = (-1)^q z \cdot by$ (fig. 1). Il en résulte que l'intersection d'un cycle et d'un bord est nulle. Par suite l'intersection passe à l'homologie et induit une forme bilinéaire (vérification facile)

$$H_q(W) \times H_{n-q}(W) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

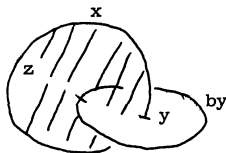


fig. 1

Si $n = 2\ell$, l'intersection induit sur $H_\ell(W)$ une forme qui est symétrique (resp. antisymétrique) si ℓ est pair (resp. impair). En fait, la forme d'intersection est définie sur le quotient libre $L_\ell(W)$ de $H_\ell(W)$.

En cohomologie, la forme d'intersection correspond, par la dualité de Poincaré, au cup-produit des cocycles évalué sur la classe d'orientation.

Si l'on interprète (th. de de Rham) la cohomologie $H^*(W, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) comme cohomologie du complexe des formes différentielles, le cup-produit correspond au produit extérieur des formes et l'intersection s'écrit alors (en cohomologie)

$$[\alpha] \cdot [\beta] = \int \alpha \wedge \bar{\beta} \, d\mu$$

où $d\mu$ est une mesure sur W (munie d'une structure riemannienne) définie par une section unitaire du fibré $\Lambda^n T(W)$ correspondant à l'orientation.

L'interprétation par le cup-produit en cohomologie permet d'étendre la notion de forme d'intersection à des anneaux de coefficients autres que $\mathbb{Z}$ où à des théories cohomologiques possédant un cup-produit.

(2) On suppose maintenant la variété W de dimension $n = 4k$ et on s'intéresse à la forme (bilinéaire symétrique) d'intersection sur $H_{2k}(W)$.

PROPOSITION 1. - Si W est une variété sans bord, la forme d'intersection est non-singulière (i.e. de déterminant $\neq 0$).

Il suffit en réalité d'hypothèses plus faibles concernant le bord ∂W . Supposons que l'homomorphisme naturel $i_{2k} : L_{2k}(W) \rightarrow L_{2k}(W, V)$ soit un isomorphisme. L'isomorphisme de dualité de Poincaré induit un isomorphisme $D : L_{2k}(W, V) \rightarrow \text{Hom}(L_{2k}(W), \mathbb{Z})$ (ce dernier groupe étant le quotient libre de $H^{2k}(W)$ d'après la formule de Künneth). Il reste à montrer que l'isomorphisme $D \circ i_{2k} : L_{2k}(W) \rightarrow \text{Hom}(L_{2k}(W), \mathbb{Z})$ est bien la corrélation de la forme d'intersection. Pour $x, y \in H^{2k}$ on a $\langle x \cup y, [W] \rangle = \langle x, y \cap [W] \rangle$ et l'on sait que $D(y \cap [W]) = y$.

(3) PROPOSITION 2 (cf. [6], p. 85). - Si W est une variété sans bord, l'indice $\tau(W)$ de la forme d'intersection est donné par la formule de Hirzebruch

$$\tau(W) = L_k(p_1, \dots, p_k) [W],$$

où le polynôme L_k est un polynôme universel à coefficients rationnels, homogène de poids $4k$ en les classes de Pontrjagin $p_i \in H^{4i}(W)$ de la variété W .

Pour démontrer ce théorème, Hirzebruch utilise trois ingrédients : la théorie du cobordisme de Thom, la proposition 3 ci-dessous et les remarques suivantes :

$$\tau(W \times W') = \tau(W) \cdot \tau(W')$$

$$\tau(W \# W') = \tau(W) + \tau(W') .$$

D'après la proposition 3, $\tau(W)$ n'est fonction que de la classe de cobordisme de W ; mais d'après la théorie de Thom, cette classe (modulo torsion) est caractérisée par les nombres de Pontrjagin. On en déduit que $\tau(W)$ est une fonction des nombres de Pontrjagin ; ses propriétés et des tests sur les variétés produits d'espaces projectifs complexes permettent de déterminer entièrement cette fonction.

(4) PROPOSITION 3 (Thom). - Si W est un bord, $\tau(W) = 0$.

Supposons que $W = \partial M$ et soient $i : W \rightarrow M$ l'inclusion, $i^* : H^*(M) \rightarrow H^*(W)$ et K^* l'image de i^* . Le groupe K^* est une sous-algèbre graduée de $H^*(W)$ pour le cup-produit. On a $K^{n-q} \cdot K^q = 0$ car $K^n = \ker(H^n(W) \rightarrow H^{n+1}(M, W)) = 0$. Il en résulte que K^{2k} est un sous-espace isotrope de $H^{2k}(W)$. Par dualité avec l'homologie, on voit que K^{2k} est de rang moitié, d'où la proposition.

(5) Dans le cas d'une variété riemannienne sans bord W , on a une autre interprétation de $\tau(W)$ due à Atiyah-Singer (cf. [3]). Soient Ω^i l'espace des formes différentielles complexes de degré i sur W , $d : \Omega^i \rightarrow \Omega^{i+1}$ la différentiation extérieure et $d^* : \Omega^{i+1} \rightarrow \Omega^i$ l'adjoint. La dualité de Poincaré donne un opérateur $*$: $\Omega^i \rightarrow \Omega^{4k-i}$. En multipliant $*$ par un coefficient i^q convenable, on obtient un opérateur involutif u qui anticommute à $d + d^* : \Omega^* \rightarrow \Omega^*$. Soient Ω_+ et Ω_- les espaces propres de u pour les valeurs propres 1 et -1 , l'opérateur auto-adjoint $d + d^*$ se décompose sur $\Omega_+ \oplus \Omega_-$ en

$$d + d^* = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 4. - On a $\tau(W) = \text{index}(A) = \dim \ker(A) - \dim \ker(A^*)$.

L'idée de la démonstration est la suivante. Si α est une forme de degré $2k$, on a $\int \alpha \wedge \bar{\alpha} = \int (u(\alpha)|\alpha)$, intégrale qui est > 0 si $\alpha \in \Omega_+$, < 0 si $\alpha \in \Omega_-$, α étant $\neq 0$. D'autre part, on a $\ker(A) = \text{Harm}(W) \cap \Omega_+$, où $\text{Harm}(W)$ est l'espace des formes harmoniques, noyau du laplacien $\Delta = d d^* + d^* d = (d + d^*)^2$; en effet, on a aussi $\ker(\Delta) = \ker(d) \cap \ker(d^*)$. De même $\ker(A^*) = \text{Harm}(W) \cap \Omega_-$. Le théorème de Hodge- de Rham dit que $\text{Harm}(W) \rightarrow H^*(W; \mathbb{C})$ est un isomorphisme. On en déduit une décomposition en somme orthogonale de $H^{2k}(W; \mathbb{C})$ en $\ker(A)$, sur lequel l'intersection est définie positive, et $\ker(A^*)$, sur lequel l'intersection est définie négative, d'où la proposition.

Remarquons que, dans le cas d'une variété riemannienne, la valeur de $L_k(p_1, \dots, p_k)[W]$ se calcule par une intégrale $\int_W L_k(p_1, \dots, p_k) d\mu$ où les p_i sont les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice de courbure.

II - FORME D'ENLACEMENT

(6) Soit V une variété de dimension $2\ell+1$. Voici comment on définit géométriquement l'enlacement ([14], § 77). Soient x et y deux chaînes de dimension ℓ , disjointes. Supposons que $x = bx'$ où x' est une chaîne en bonne position avec y . On pose $e(x, y) = x' \cdot y$. Cette définition a un sens si y est un cycle car, si x'' est une autre chaîne telle que $x = bx''$, on a $(x' - x'') \cdot y = 0$. Le nombre d'enlacement $e(x, y)$ ne dépend que de la classe d'homologie de x dans le complémentaire de y .

Supposons maintenant que les classes de x et y soient de torsion dans $H_\ell(V)$. Soit x' une $\ell+1$ -chaîne telle que $bx' = qx$ ($q \in \mathbb{Z}$). On vérifie que le nombre rationnel $e(x, y) = \frac{1}{q} x' \cdot y$ ne dépend pas du couple (x', q) . De plus, si x est homologue à x_1 , on a $x - x_1 = bu$, d'où $qx_1 = b(x' + qu) = bx'_1$, d'où $e(x, y) \equiv e(x_1, y) \pmod{\mathbb{Z}}$. Par passage aux classes, on définit l'enlacement

$e([x],[y]) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On vérifie qu'on a ainsi défini une forme bilinéaire $(-1)^{\ell+1}$ -symétrique sur la torsion $T_{\mathcal{L}}(V)$ de $H_{\mathcal{L}}(V)$.

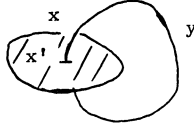


fig. 2

(7) Supposons maintenant que V soit une variété sans bord de dimension $n = 4k-1$. La forme d'enlacement est symétrique.

PROPOSITION 5. - La forme d'enlacement est non-singulière.

Décomposons $H^{2k}(V)$ et $H_{2k-1}(V)$ en torsion et quotient libre

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{2k-1}(V), \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2k}(V) \rightarrow \text{Hom}(H_{2k}(V), \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow T_{2k-1}(V) \rightarrow H_{2k-1}(V) \rightarrow L_{2k-1}(V) \rightarrow 0.$$

La dualité de Poincaré induit un isomorphisme, $D : T_{2k-1}(V) \rightarrow \text{Ext}(H_{2k-1}(V), \mathbb{Z})$. Ce dernier groupe s'identifie à $\text{Hom}(T_{2k-1}(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et l'isomorphisme obtenu est précisément la corrélation de la forme d'enlacement.

(8) Exemple. Considérons la sphère unité S_{4k-1} de $\mathbb{C}^{2k}$. Soient p un nombre premier, $\xi = \exp(2i\pi/p)$ et T l'isomorphisme de S_{4k-1} défini par

$$T(z_1, \dots, z_n) = (\xi^{\ell_1} z_1, \dots, \xi^{\ell_{2k}} z_{2k}),$$

où les ℓ_i sont des entiers premiers à p . L'opération T est périodique et sans point fixe ; le quotient L est une variété et la projection $p : S_{4k-1} \rightarrow L$ un revêtement de groupe $\mathbb{Z}/(p)$. On note traditionnellement $L = L(p; r_1, \dots, r_{2k})$ avec $r_i \equiv \ell_i^{-1} \pmod{p}$, et on dit que L est un espace lenticulaire.

On a une décomposition cellulaire de L avec une cellule e_i en chaque dimension i , $0 \leq i \leq 4k-1$, qu'on peut décrire par un relèvement dans S_{4k-1} :

$$e_{2j-2} = \begin{cases} z_i = 0 & \text{pour } i > j \\ \text{Arg}(z_j) = 0 \end{cases}$$

$$e_{2j-1} = \begin{cases} z_i = 0 & \text{pour } i > j \\ 0 \leq \text{Arg}(z_j) \leq 2\pi/p \end{cases}$$

Dans S_{4k-1} , on a :

$$b e_{2j} = (1 + T + \dots + T^{p-1}) e_{2j-1},$$

$$b e_{2j-1} = (T^{r_j} - 1) e_{2j-2}$$

(comme le montre la figure 3), d'où, dans L ,

$$b e_{2j} = p e_{2j-1} ,$$

$$b e_{2j-1} = 0 .$$

Le complexe cellulaire donnant l'homologie de L est donc :

$$Z \xrightarrow{xp} Z \xrightarrow{0} Z \xrightarrow{xp} Z \dots Z \xrightarrow{xp} Z .$$

L'homologie de L est 0 en dimensions paires et Z/p en dimensions impaires. En particulier $H_{2k-1}(L) \simeq Z/(p)$. Pour déterminer la forme d'enlacement, il suffit de calculer l'enlacement $e(\varepsilon_{2k-1}, \varepsilon'_{2k-1})$, où ε_{2k-1} est la classe de e_{2k-1} . On voit que l'on a $e(\varepsilon_{2k-1}, \varepsilon'_{2k-1}) = 1/p$, où ε'_{2k-1} est la classe de la cellule e'_{2k-1} définie par $z_i = 0$ pour $i \leq k$, $0 \leq \text{Arg}(z_{k+1}) \leq 2\pi/p$.

En effet, $p e_{2k-1}$ a pour cobord l'image du disque d_{2k} , défini par $z_i = 0$ pour $i > k$, dont l'intersection avec e'_{2k-1} est 1. Ensuite, on vérifie que $\varepsilon = r_1 \dots r_k \varepsilon_{2k-1}$ est homologue à $r_{k+1} \dots r_{2k} \varepsilon'_{2k-1}$. On a donc un générateur ε de $H_{2k-1}(L)$ tel que $e(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{r}{p} \in \mathbb{Q}/Z$, où $r = \prod r_i$.

La classe de r modulo les carrés de Z/p est un invariant du type d'homotopie de L puisque pour tout élément $q \in H_{2k-1}(L)$, on a $e(q \varepsilon, q \varepsilon) = \frac{q^2 r}{p} \mod Z$. C'est cette remarque qui a permis à Alexander de distinguer divers espaces lenticulaires de dimension 3. Pour plus de précisions sur la classification des espaces lenticulaires, voir [11], [12] ou [13].

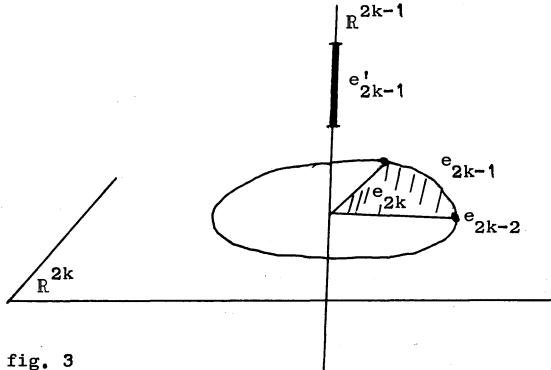


fig. 3

La figure représente R^{4k-1} et il faut imaginer S_{4k-1} comme son compactifié. Le plan horizontal est le plan $z_{k+1} = \dots = z_{2k} = 0$, le disque unité de ce plan est le disque d_{2k} , son axe est la "grande sphère" qui supporte la cellule e'_{2k-1} ainsi que ses transformés par les puissances de T .

(9) Soit A un anneau commutatif ; on note $W(A)$ le groupe de Witt bilinéaire ; c'est le groupe de Grothendieck des classes de A -modules projectifs de type fini munis d'une forme bilinéaire symétrique non-singulière, modulo le sous-groupe engendré par les modules neutres (i.e. possédant un facteur direct qui est

son propre orthogonal). Par exemple $W(\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, l'isomorphisme étant donné par l'indice. La proposition 3 se généralise ainsi : si W est un bord, la classe dans $W(\mathbb{Q})$ de $H_{2k}(W; \mathbb{Q})$ muni de la forme d'intersection est 0, la démonstration restant la même.

Soit $W(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ le groupe de Grothendieck des groupes abéliens finis munis d'une forme bilinéaire symétrique à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, modulo les neutres (cf. [4], [9]). On a une suite exacte

$$0 \rightarrow W(\mathbb{Z}) \rightarrow W(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\delta} W(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Le groupe $W(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ est isomorphe à la somme directe des $W(\mathbb{F}_p)$ (p premier).

PROPOSITION 6 (cf. [4]). - Soit W une variété de dimension $4k$, ayant un bord V . La forme d'intersection sur $H_{2k}(W; \mathbb{Q})$ induit une forme non-dégénérée sur $H_{2k}(W; \mathbb{Q})/\text{Im}(H_{2k}(V; \mathbb{Q}))$. Notons $\tau(W) \in W(\mathbb{Q})$ sa classe. Soit $e(V) \in W(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ la classe de la forme d'enlèvement de V . On a :

$$\delta \tau(W) + e(V) = 0.$$

(10) On en déduit que la classe $e(V) \in W(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ est invariante par $H_{\mathbb{Q}}$ -cobordisme. Un $H_{\mathbb{Q}}$ -cobordisme W entre deux variétés V_0 et V_1 est une variété W de bord $V_1 - V_0$ et telle que $H_*(W, V_1; \mathbb{Q}) = 0$. Il suffit d'appliquer la proposition 6 à W en remarquant la nullité de $H_{2k}(W)/\text{Im } H_{2k}(V_1)$.

III - REMARQUES ET COMPLEMENTS

(11) Les groupes de Witt jouent un rôle dans le calcul des groupes de sphères d'homotopie ou d'homologie ([7], [4]) ; ils apparaissent dans la partie chirurgicale de cette étude. Soit $P_n^{\mathbb{Q}}$ le groupe de cobordisme pour lequel les objets sont les variétés W de dimension n , munis d'une $\mathbb{Q}$ -parallélisation (cf. [4]) et dont le bord est une sphère d'homologie à coefficients rationnels, et pour lequel les cobordismes sont $\mathbb{Q}$ -parallélisés et induisent un $H_{\mathbb{Q}}$ -cobordisme au bord. Pour $n = 4k$, la forme d'intersection de W est non-dégénérée car l'homologie $H_{2k}(bW; \mathbb{Q})$ est nulle, et l'on a une application $\tau : P_{4k}^{\mathbb{Q}} \rightarrow W(\mathbb{Q})$, compte-tenu de l'invariance par cobordisme. Le théorème de chirurgie s'exprime alors ainsi :

PROPOSITION 7. - Pour $k \geq 2$, $\tau : P_{4k}^{\mathbb{Q}} \rightarrow W(\mathbb{Q})$ est bijectif.

Si l'on remplace $\mathbb{Q}$ par un sous-anneau A de $\mathbb{Q}$ dans toute la question : forme d'intersection sur $H_{2k}(W; A)$, sphère d'homologie à coefficients dans A , A -parallélisation, l'énoncé de la proposition doit être modifié. On remarque que, si W est A -parallélisable, la forme d'intersection est paire et τ se relève en

$\tau_q : P_{4k}^A \rightarrow W_q(A)$, où W_q est le groupe de Witt quadratique. C'est τ_q qui est bijective ([4]).

(12) Soit θ_n^Q le groupe de cobordisme des n -sphères d'homologie rationnelle modulo H_Q -cobordisme. Soit $b : P_{n+1}^Q \rightarrow \theta_n^Q$ l'application induite par $W \mapsto bW$. D'après la proposition 6, on a un diagramme anticommutatif :

$$\begin{array}{ccc} P_{4k}^Q & \xrightarrow{b} & \theta_{4k-1}^Q \\ \downarrow \tau & & \downarrow e \\ W(Q) & \xrightarrow{\delta} & W(Q, Z) \rightarrow 0 \end{array}$$

D'après la proposition 7, pour $k \geq 2$, $e : \theta_{4k-1}^Q \rightarrow W(Q, Z)$ est surjectif. Ainsi toute classe de $W(Q, Z)$ est réalisée par la forme d'enlacement d'une sphère d'homologie rationnelle qui est le bord d'une variété Q -parallélisable.

On a des énoncés analogues pour un anneau $A \subset Q$ de coefficients.

(13) Soit $T : S_N \rightarrow S_N$ un difféomorphisme d'ordre fini p premier. Le lieu F des points fixes est une sphère d'homologie à coefficients Z/p d'après la théorie de P.A. Smith (voir [5] pour un exposé complet). La multiplication par p dans $H_1(F; Z)$ est donc surjective et $H_1(F; Z)$ est un groupe de torsion sans p -torsion.

Supposons que F soit une variété de dimension $4k-1$. Si T peut être prolongée au disque B_{N+1} , alors $F = bG$, où G est un disque d'homologie rationnelle (toujours d'après P.A. Smith). Par suite, la classe $e(F) \in W(Q, Z)$ de la forme d'enlacement de F est 0. En particulier, le cardinal de $T_{2k-1}^Q(F)$ (torsion de $H_{2k-1}^Q(F)$) est un carré. C'est ce que remarquent les auteurs de [1] qui n'utilisent pas le commode formalisme de [4].

Dans la même note [1], dans le cas d'une opération T dans une variété M de dimension $4N$ (non nécessairement une sphère) dont le lieu fixe F est de dimension $4k$, les auteurs annoncent des relations entre l'indice de F et l'image dans $W(Q, Z)$ de la forme d'intersection sur les classes fixées par T de $H_{2N}^Q(M; Q)$. Pour la démonstration de ces formules, on utilise un voisinage tubulaire N de F , équivariant sous T ; comme bN est fibré en espace lenticulaire L , on peut exprimer l'enlacement de bN en fonction de la signature de N et de l'enlacement de L .

(14) Les groupes de Witt quadratiques et bilinéaires de Z et Q prennent place dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathbb{Z}/8 & & \\
 & & & & \downarrow \gamma & & \\
 0 & \rightarrow & W_q(\mathbb{Z}) & \rightarrow & W_q(\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\delta_q} & W_q(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \times 8 & & \parallel & & \downarrow \sigma \\
 0 & \rightarrow & W(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{I} & W(\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\delta} & W(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \mathbb{Z}/8 & & & & \downarrow 0 \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

qui est commutatif et dont lignes et colonnes sont exactes. On y identifie $W(\mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}$ par l'indice, et $W_q(\mathbb{Z})$ au sous-groupe $8\mathbb{Z}$. La flèche I est la rétraction définie par l'indice. La flèche γ est la rétraction définie par la somme de Gauss (cf. [9]) et l'on a, pour $x \in W_q(\mathbb{Z})$, $I(x) \equiv \gamma \circ \delta_q(x) \pmod{8}$, formule dite de Milgram, due à Braun et Van der Blij (cf. [8], [11]) d'où résulte d'ailleurs l'assertion ci-dessus concernant l'homomorphisme $W_q(\mathbb{Z}) \rightarrow W(\mathbb{Z})$.

Soit V une variété de dimension $4k-1$ qui soit le bord d'une variété $\mathbb{Q}$ -parallélisable W . La forme d'intersection de W a une classe $x \in W_q(\mathbb{Q})$ telle que $\sigma \circ \delta_q(x) = e(V)$. On vérifie que la classe $\delta_q(x) \in W_q(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ ne dépend pas de W mais uniquement de V muni de sa $\mathbb{Q}$ -trivialisatation. Dans [8], on construit géométriquement une forme quadratique d'enlacement sur V dont la classe dans $W_q(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ soit précisément $-\delta_q(x)$; et l'on a $I(W) \equiv -\gamma e_q(V) \pmod{8}$.

Si V , stablement $\mathbb{Q}$ -parallélisée, est le bord de W non nécessairement $\mathbb{Q}$ -parallélisable, les classes de Pontrjagin de W se relèvent dans la cohomologie de (W, V) grâce à la $\mathbb{Q}$ -trivialisatation de V , et l'on peut calculer la valeur du polynôme L_k d'Hirzebruch, que nous noterons $L_k(W)$. La différence $I(W) - L_k(W)$ n'est fonction que de V munie de sa trivialisatation stable. On démontre ([8]), en utilisant les travaux d'Adams, que l'on a $I(W) - L_k(W) \equiv -\gamma e_q(V) \pmod{8}$, formule qui a un sens car $L_k(W) \in \mathbb{Z}_{(2)}$.

(15) Si W est une variété riemannienne de dimension $4k$, à bord V , dont la métrique au voisinage du bord soit un produit, alors $I(W) - \int_W L_k(p_1, \dots, p_k)$ est un invariant de V muni de sa métrique. Dans [2], Atiyah, Patodi et Singer expriment cet invariant à l'aide d'une fonction du type fonction zéta des valeurs propres de l'opérateur $\varepsilon(d^* - *d)$ sur les formes paires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ALEXANDER, G. HAMRICK, J. VICK - Bilinear forms and cyclic group actions, Bull. A.M.S., 80 (1974), 730-734.
- [2] M. ATIYAH, V. PATODI, I. SINGER - Spectral asymmetry and riemannian geometry, Bull. London Math. Soc. 5 (1973), 229-234.
- [3] M. ATIYAH, I. SINGER - The index of elliptic operators, Ann. of Math., 87 (1968), 484-530.
- [4] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR, P. VOGEL - Λ -sphères, Ann. Sc. ENS, 7 (1974), 463-506.
- [5] A. BOREL - Seminar on transformation groups, Ann. of Math. Studies n° 46, Princeton Univ. Press, 1960.
- [6] F. HIRZEBRUCH - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer Verlag, Berlin, 1962.
- [7] M. Kervaire, J. MILNOR - Groups of homotopy-spheres, Ann. of Math., 77 (1963), 504-537.
- [8] J. LANNES, F. LATOUR - Forme quadratique d'enlacement et applications, Astérisque n° 26 (1975).
- [9] J. LANNES - Transfert de Scharlau et formes quadratiques d'enlacement dans les corps de nombres (dans ce volume).
- [10] J. MILNOR - Whitehead torsion, Bull. A.M.S., 72 (1966), 358-426.
- [11] J. MILNOR, D. HUSEMOLLER - Symmetric bilinear forms, Springer Verlag, Berlin, 1973.
- [12] P. OLUM - Mappings of manifolds and the notion of degree, Ann. of Math., 58 (1953), 458-480.
- [13] G. DE RHAM - Torsion et type simple d'homotopie, Séminaire 1963-64, Université de Lausanne (Lecture Notes in Math. n° 48, Springer Verlag, Berlin, 1967).
- [14] H. SEIFERT, W. THRELFALL - Lehrbuch der Topologie. réed. Chelsea, New-York.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Parc de Grandmont

37200 TOURS

FRANCE
