

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL R. HERMAN

Sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations

Mémoires de la S. M. F., tome 46 (1976), p. 181-188

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__181_0

© Mémoires de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONJUGAISON DES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE A DES ROTATIONS

par Michel R. HERMAN

Dans cet exposé on développera d'abord un exemple dû à ARNOLD [1] d'une famille à deux paramètres de difféomorphismes du cercle, puis on interprétera et complètera les observations faites grâce aux théorèmes généraux démontrés dans [4].

I. INTRODUCTION ET NOTATIONS.

On considère le tore T de dimension 1, identifié à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pour tout exposant r , entier nul ou infini ($0 \leq r \leq +\infty$), on considère $\text{Diff}_+^r(T)$ le groupe des difféomorphismes de T de classe C^r préservant l'orientation (donc isotopes à l'identité). $\text{Diff}_+^0(T)$ est le groupe des homéomorphismes de T préservant l'orientation.

On munit $\text{Diff}_+^r(T)$ de la C^r -topologie ; il est alors homéomorphe à un espace métrique complet, donc de Baire ainsi que tous ses fermés. De plus c'est un groupe topologique.

Pour tout r , on a une inclusion canonique j^r de T dans $\text{Diff}_+^r(T)$ définie par :

$$j^r(\alpha) = R_\alpha \quad \text{et} \quad R_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{1}$$

(R_α est la rotation d'angle α sur T).

Si f est un élément de $\text{Diff}_+^r(T)$, f se relève en un difféomorphisme $\tilde{f}$ du revêtement universel $\mathbb{R}$ de T , de classe C^r préservant l'orientation ; $\tilde{f} - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ est $\mathbb{Z}$ -périodique ($\tilde{f}(x+m) = \tilde{f}(x) + m$).

Soit $D^r(T)$ le sous-groupe de $\text{Diff}_+^r(\mathbb{R})$ des difféomorphismes de classe C^r de $\mathbb{R}$, de la forme $\text{Id} + \varphi$, où φ est $\mathbb{Z}$ -périodique.

$D^r(T)$ est le revêtement universel de $\text{Diff}_+^r(T)$ pour la C^r -topologie.

La rotation R_α se relève dans $D^r(T)$ en une translation notée $\tilde{R}_\alpha$:

$$\tilde{R}_\alpha(x) = x + \alpha.$$

Dans toute la suite de cet exposé, on étudie à quelle condition un élément de $\text{Diff}_+^r(T)$ est conjugué à une rotation, et, dans le cas où il existe, la classe de différentiabilité de l'homéomorphisme de conjugaison.

II. NOMBRE DE ROTATION - PRINCIPALES PROPRIÉTÉS.

Cette notion a été pour la première fois introduite par Poincaré. Pour une démonstration des principales propriétés énoncées ci-dessous, voir [1] ou [2].

THEOREME 1 [2] et DEFINITION 1. - Soit $\tilde{f}$ un élément de $D^0(T)$, la suite $\left\{ \frac{\tilde{f}^n - \text{Id}}{n} \right\}$ converge uniformément quand n tend vers l'infini vers un élément de $\mathbb{R}$, noté $\rho(\tilde{f})$, et appelé nombre de rotation de $\tilde{f}$.

On montre les propriétés suivantes :

- a) L'application ρ de $D^0(T)$ dans $\mathbb{R}$ est continue pour la C^0 -topologie [1].
- b) $\rho(\tilde{f}+1) = \rho(\tilde{f}) + 1$.
- c) $\rho(\tilde{f}) = \rho(\tilde{g} \circ \tilde{f} \circ \tilde{g}^{-1})$ (pour tout élément g de $D^0(T)$).
 $\rho(\tilde{f})$ est donc un invariant de conjugaison.
- d) $\rho(\tilde{R}_\alpha) = \alpha$.

D'après la propriété b), ρ est défini sur l'ensemble quotient de $D^1(T)$ par $\mathbb{Z}$. On définit par passage au quotient une application ρ de $\text{Diff}_+^0(T)$ dans $\mathbb{T}$, encore appelée nombre de rotation.

Le nombre ρ est un invariant de conjugaison par homéomorphisme dans le groupe $\text{Diff}_+^0(T)$. Notons que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

f est C^0 -conjugué à une rotation.

$\tilde{f}$ relèvement de f est C^0 -conjugué à une translation.

e) Soit f un élément de $\text{Diff}_+^0(T)$, $\tilde{f}$ un relèvement de f . Ces deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\rho(\tilde{f})$ appartient à $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
- f n'admet pas de point périodique.

En outre $\rho(\tilde{f}) = \frac{p}{q}$ ($\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, p et q entiers) est équivalent à : q est le plus petit entier tel que f^q ait un point fixe [1].

f) Soit f un élément de $\text{Diff}_+^1(T)$ et supposons que f soit conjugué à une rotation R_α d'angle α irrationnel par 2 homéomorphismes h et h_1 :

$$f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$$

$$f = h_1^{-1} \circ R_\alpha \circ h_1$$

Alors

$$h = R_\beta \circ h_1.$$

(Puisque le centralisateur d'une rotation irrationnelle est le groupe des rotations).

En particulier les classes de différentiabilité de h et h_1 sont les mêmes.

g) THEOREME DE DENJOY [2]. - Soit f un élément de $\text{Diff}_+^2(T)$. Supposons que $\rho(f) = \alpha$ soit irrationnel. Alors il existe u dans $\text{Diff}_+^0(T)$ tel que :

$$f = u^{-1} \circ R_\alpha \circ u.$$

Pour une démonstration plus simple donnée par A. DENJOY en 1946, voir [3].

Remarque. - Si $\rho(f) = \frac{p}{q}$, "en général" f n'est pas conjugué à une rotation ("en général" $f^q \neq \text{Id}$, bien que f^q ait un point fixe). Pour un approfondissement de cette question, on renvoie à [1].

III. EXEMPLE D'ARNOLD [1].

Soit $\tilde{f}$ un élément de $D^0(T)$.

Considérons l'application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(b) = \rho(\tilde{f} + b)$$

D'après la propriété a), h est continue et on voit facilement que :

$$h(b+1) = h(b) + 1.$$

PROPOSITION 1. - La fonction h est croissante au sens large et strictement croissante aux points irrationnels.

Pour une démonstration de cette proposition, voir ARNOLD ([1], p. 266) ou HERMAN [4].

Si μ est irrationnel, $h^{-1}(\mu) = \{b\}$.

Addendum. - En général, si μ est rationnel ($\mu = \frac{p}{q}$), $h^{-1}(\mu) = [a_1, a_2]$, $a_1 < a_2$.

On montre que $a_1 = a_2$ si et seulement si $\tilde{f}^q = \tilde{R}_p$ (translation sur $\mathbb{R}$ de longueur p) car $(\tilde{R}_{a_1} \circ \tilde{f})^q(x) \geq \tilde{R}_p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

et $(\tilde{R}_{a_2} \circ \tilde{f})^q(x) \leq \tilde{R}_p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Nous allons maintenant préciser l'exemple précédent en considérant une famille explicite à 2 paramètres de difféomorphismes du tore.

Soient a et b deux paramètres réels :

$$0 < a < \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq b \leq 1.$$

Considérons pour tout couple (a, b) le difféomorphisme analytique de $\mathbb{R}$, $\tilde{f}_b$ élément de $D^0(T)$ défini par :

$$\tilde{f}_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b.$$

Le paramètre a étant supposé fixé, nous pouvons considérer la fonction h définie par

$$h(b) = \rho(f_b).$$

PROPOSITION 2. - La fonction h est monotone non décroissante, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, et de plus pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ ($\frac{p}{q} \in [0, 1]$) $h^{-1}(\frac{p}{q})$ est un intervalle d'intérieur non vide.

La proposition 2 résulte de l'addendum de la proposition 1 et du lemme suivant.

LEMME. - Soit φ une fonction analytique réelle périodique, se prolongeant en une application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, encore notée φ .

Posons $\tilde{f} = \text{Id} + \varphi$.

Soient $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$.

Si $\tilde{f}^q = R_p$, alors φ est une constante.

Démonstration. - L'égalité $\tilde{f}^q = R_p$ s'écrit $(R_{-p} \circ \tilde{f}^{q-1}) \circ \tilde{f} = \text{Id}_{\mathbb{C}}$, $\tilde{f}$ est donc un difféomorphisme biholomorphe de $\mathbb{C}$. D'après le théorème de la représentation conforme, il existe α et β tels que $\tilde{f}(z) = \alpha z + \beta = z + \varphi(z)$.

Donc $\alpha = 1$, $\varphi = \beta$.

COROLLAIRE. - L'ensemble $K = [0, 1] - \text{Int } h^{-1}(Q \cap [0, 1])$ est un ensemble de Cantor de $[0, 1]$ et $K_a \cap h^{-1}(Q \cap [0, 1]) = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} = D_a$ est dénombrable et dense dans K_a .

Démonstration. - K_a est un ensemble métrique compact. D'après la proposition 1, K_a est totalement discontinu et n'a pas de point isolé.

ARNOLD a montré que la mesure de Lebesgue de K_a tend vers 1 si a tend vers 0 ([1]).

Nous remarquons, d'après le théorème de Denjoy que $K_a - D_a$ est contenu dans l'ensemble des b tels que $\tilde{f}_b$ soit C^∞ -conjugué à une translation, et l'ensemble des b tels que $\tilde{f}_b$ soit C^∞ -conjugué à une rotation est contenu dans K_a .

Ci-dessous est la figure reproduite de [1] représentant les ensembles $\rho(\tilde{f}_b) = \frac{p}{q}$ quand les paramètres a et b varient.

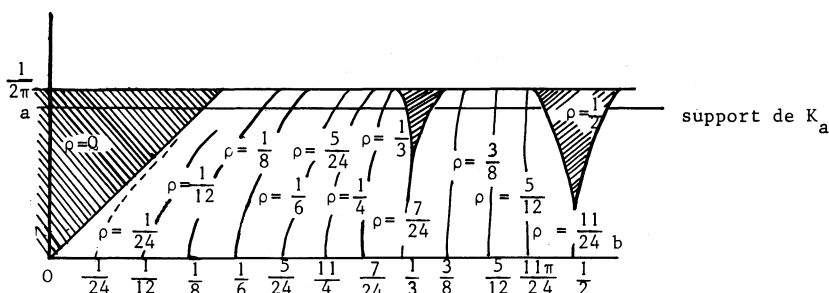


Figure 8

(les "languettes" très minces $\rho = \frac{1}{8}$ par exemple, sont représentées par un seul trait. On montre que les courbes limites de la zone $\rho = \frac{p}{q}$ ont un contact d'ordre $q-1$ sur la droite $a=0$).

IV. INVARIANT DE CONJUGAISON C^r A UNE ROTATION.

Invariant de conjugaison C^0 . - Soit d la métrique sur T quotient de la métrique standard sur $\mathbb{R}$; on en déduit sur $\text{Diff}_+^0(T)$ la métrique δ définie par :

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in T} d(f(x), g(x))$$

Posons pour tout élément f de $\text{Diff}_+^0(T)$:

$$K_0(f) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \delta(f^n, \text{Id}_T)$$

K_0 est une application de $\text{Diff}_+^0(T)$ dans $\mathbb{R}$, semi-continue supérieurement.

THEOREME 1. - f est C^0 conjugué à une rotation si et seulement si $K_0(f) = 0$.

Le théorème 1 résulte de la démonstration du théorème de Denjoy.

Invariant de conjugaison C^r . - Soit $0 \leq r < \infty$.

Soit f un élément de $\text{Diff}_+^r(T)$, $\tilde{f}$ son relèvement dans $D^r(T)$.

Posons $H^r(f) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |Df^n|_0 + \sup_{n \in \mathbb{Z}} |D^r f^n|_0$. (pour g fonction périodique, on pose

$$|g|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|.$$

H^r est une application de $\text{Diff}_+^r(T)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ semi-continue inférieurement.

LEMME. - Si f est C^1 -conjugué à une rotation, $H^1(f) < +\infty$.

Démonstration. - Posons $\tilde{f} = \tilde{h} \circ \tilde{R}_\alpha \circ \tilde{h}^{-1}$, avec $\tilde{h} \in D^1(T)$, $\tilde{R}_\alpha$ translation de longueur α . On a, pour tout entier n dans $\mathbb{Z}$, $\tilde{f}^n = \tilde{h} \circ \tilde{R}_{n\alpha} \circ \tilde{h}^{-1}$.

$\tilde{Dh}$ et $\tilde{Dh}^{-1}$ sont des fonctions périodiques positives donc bornées :

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |D\tilde{f}^n|_0 \leq |\tilde{Dh}|_0 |\tilde{Dh}^{-1}|_0 < +\infty.$$

Le théorème suivant est démontré par HERMAN dans [4].

THEOREME 2. - Soit r un entier ≥ 1 , f un élément de $\text{Diff}_+^r(T)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit C^r -conjugué à une rotation est que $H^r(f)$ soit fini. Si f est élément de $\text{Diff}_+^\infty(T)$, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit C^∞ -conjugué à une rotation est que $H^r(f)$ soit fini, pour tout entier r , $r \geq 1$.

COROLLAIRE. - Soit f un élément de $\text{Diff}_+^1(T)$, avec $\rho(f) = \frac{p}{q}$. Si $f^q \neq \text{Id}_T$, alors $H^1(f) = +\infty$.

Exemple. - Reprenons l'exemple étudié précédemment. Nous étudions le sous-ensemble de K_a formé des éléments b tels que f_b soit C^1 -conjugué à une rotation.

Considérons l'application η^1 de K_a dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\eta^1(b) = H^1(f_b).$$

La fonction η^1 est semi-continue inférieurement sur K_a .

Soit $G_a = \{b \in K_a ; \eta^1(b) = +\infty\}$.

G_a est un G_δ (intersection dénombrable d'ouverts). D'autre part $D_a \subset G_a$ d'après le corollaire. D_a est dense dans K_a : G_a est un G_δ dense dans K_a .

$(K_a - D_a) \cap G_a$ est un ensemble résiduel. Si b est un élément de $(K_a - D_a) \cap G_a$, f_b est C^0 -conjugué à une rotation, mais non C^1 -conjugué à une rotation.

Cet exemple illustre les résultats généraux suivants démontrés par HERMAN dans

[4], à l'aide des invariants de conjugaison.

V. CLASSIFICATION DES ORBITES DES ROTATIONS.

Pour tout entier r ($0 \leq r \leq +\infty$), nous munissons $\text{Diff}_+^r(T)$ de la C^r -topologie.

Pour tout élément α de T , nous considérons les ensembles suivants :

$$F_\alpha^r = \{f ; f \in \text{Diff}_+^r(T), \rho(f) = \alpha\}.$$

$$F_\alpha^r \text{ est fermé dans } \text{Diff}_+^r(T).$$

$$O_\alpha^r = \{f ; f = g \circ R_\alpha \circ g^{-1} ; g \in \text{Diff}_+^r(T)\}.$$

Notons que, en général O_α^r n'est pas fermé dans $\text{Diff}_+^r(T)$. D'après la propriété c) $O_\alpha^r \subset F_\alpha^r$.

$$\text{Posons } O_\alpha^{r,k} = O_\alpha^k \cap F_\alpha^r \quad (k \leq r).$$

THEOREME 3. - Si α est irrationnel, O_α^0 est un G_δ -dense (résiduel) dans F_α^0 pour la C^0 -topologie, $O_\alpha^{1,0}$ est résiduel dans F_α^1 pour la C^1 -topologie et de plus $F_\alpha^0 - O_\alpha^0$ (resp. $F_\alpha^1 - O_\alpha^{1,0}$) est dense dans F_α^0 (resp. F_α^1) pour la C^0 -topologie.

La deuxième partie du théorème résulte des exemples de DENJOY [2].

Remarquons que le théorème de Denjoy se traduit par :

$$F_\alpha^2 = O_\alpha^{2,0} \quad \text{pour } \alpha \text{ irrationnel.}$$

THEOREME 4. - Si α est irrationnel et $1 \leq r < \infty$, alors O_α^r est maigre dans F_α^r (contenu dans un F_σ sans point intérieur).

Suivant la nature arithmétique du nombre de rotation, ce résultat peut être précisé.

DEFINITION 2. - Soit α un élément de T , $\bar{\alpha}$ un relèvement de α dans $\mathbb{R}$. α est un nombre de Liouville, si $\bar{\alpha}$ est irrationnel et si pour tout entier $n \geq 1$, il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $|\bar{\alpha} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$; ($q \geq 2$).

L'ensemble des nombres de Liouville est un résiduel dans T de mesure de Lebesgue nulle.

THEOREME 5. - Si α est un nombre de Liouville, $O_\alpha^{\infty,1} \cap \bar{O}_\alpha^\infty$ est maigre dans $\bar{O}_\alpha^\infty$ pour la C^∞ -topologie.

$(\bar{O}_\alpha^\infty \text{ est l'adhérence de } O_\alpha^\infty \text{ dans } \text{Diff}_+^\infty(T)).$

DEFINITION 3. - Soit α un élément de T , $\bar{\alpha}$ un relèvement de α dans $\mathbb{R}$. α est de type constant s'il existe une constante c ($c > 0$) tel que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ $|\bar{\alpha} - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^2}$.

L'ensemble des nombres de type constant est de mesure de Lebesgue nulle.

THEOREME 6. - Soit α un élément de T irrationnel non de type constant et r un entier $2 \leq r < +\infty$.

Alors $O_\alpha^{r, r-1} \cap \bar{O}_\alpha^r$ est maigre dans $\bar{O}_\alpha^r$ pour la C^r -topologie.

Posons $O^\infty = \bigcup_{\alpha \in T} O_\alpha^\infty$.

$\bar{O}^\infty$: adhérence de O^∞ dans $\text{Diff}_+^\infty(T)$ pour la C^∞ -topologie.

THEOREME 7. - Les deux propriétés suivantes sont génériques (c'est-à-dire vraies sur des ensembles résiduels) dans $\bar{O}^\infty$ pour la C^∞ -topologie.

- a) f est C -conjugué à une rotation R_α (α irrationnel). Soit $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ et on a presque partout $Dh = Dh^{-1} = 0$ (donc non C^1 -conjugué).
- b) Le centralisateur de classe C^∞ de f a la puissance du continu.

On montre que le théorème 7 s'applique à la famille de difféomorphismes traitée dans l'exemple, on retrouve le fait que la propriété d'être C^0 et non C^1 -conjugué à une rotation est générique dans K_a .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.I. ARNOL'D, *Small denominators I*, Translations A.M.S. 2e série, v. 49, p. 213-284.
- [2] A. DENJOY, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, Journal de Mathématiques 11, (1932), Fasc. IV, p. 333-375.
- [3] A. DENJOY, *Les trajectoires à la surface du tore*, C.R. Acad. Sc. Paris, vol 223, (1946), p. 5-7.
- [4] M.R. HERMAN, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations* (à paraître).

Michel R. HERMAN
Ecole Polytechnique
PALAISEAU