

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

RENÉ OUZILOU

Structures symplectiques faibles et intégrabilité globale de certains systèmes hamiltoniens

Mémoires de la S. M. F., tome 46 (1976), p. 13-28

[<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__13_0>](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__13_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

STRUCTURES SYMPLECTIQUES FAIBLES ET INTEGRABILITE GLOBALE DE CERTAINS SYSTEMES HAMILTONIENS

par René OUZILLOU

Le physicien a à cœur de croire que les champs de vecteurs qu'il rencontre sont complets ; à charge au mathématicien de montrer que c'est vrai. La méthode la plus souvent utilisée pour cela est celle de l'énergie, ce qui convient tout particulièrement aux systèmes hyperboliques ; ceux-ci sont en effet déterminés à partir de leur énergie par l'intermédiaire d'une forme symplectique qui présente l'inconvénient de n'être que faiblement non dégénérée, inconvénient d'ailleurs inhérent à la nature de tels systèmes, lesquels ne sont pas partout définis sur l'espace de phases.

Le résultat principal de cet exposé consiste à étendre aux variétés de Sobolev un résultat de P. Chernoff et J. Marsden concernant un hamiltonien de la forme $K+V$ sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , le "potentiel" V étant positif et l'"énergie cinétique" K étant une forme quadratique minorée par celle de \mathcal{H} . Le modèle global correspondant ici à K est une fonction dont le hessien possède cette propriété par rapport à la métrique de Sobolev. Le principe essentiel permettant cette généralisation est un résultat de J.P. Penot qui assure que deux points d'une variété de Sobolev \mathcal{V} peuvent être joints par une géodésique minimisante dès qu'ils sont dans la même composante connexe de \mathcal{V} [5].

Au préalable, des précisions sur le cas linéaire sont apportées pour essayer de montrer que les méthodes symplectiques sont plus agréables que les méthodes traditionnelles de l'analyse fonctionnelle ([6] et [7], par exemple) quand il s'agit de résoudre le problème de Cauchy dans le cas hyperbolique.

1. STRUCTURES SYMPLECTIQUES LINEAIRES.

1.1. GENERALITES. - Pour tout espace de Banach \mathcal{E} , on désignera par \mathcal{E}' le dual topologique fort de \mathcal{E} , par $C_{\mathcal{E}}$ l'injection canonique de \mathcal{E} dans \mathcal{E}'' . Pour toute application linéaire continue $L : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ portant sur des espaces de Banach, on notera L' la transposée topologique $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{E}'$ de L . Pour tout sous-espace vectoriel \mathcal{A} de \mathcal{E} , on notera $I_{\mathcal{A}}$ l'injection canonique de \mathcal{A} dans \mathcal{E} .

Rappelons que l'identité :

$$\varphi(x, y) = (\tilde{\varphi}.x).y \quad ; \quad x, y \in \mathcal{E}$$

définît une correspondance biunivoque entre les formes bilinéaires continues $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ sur un espace de Banach réel \mathcal{E} et les applications linéaires continues $\tilde{\varphi} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$. Une telle forme φ est symétrique (resp. antisymétrique) si, et seulement si, $\tilde{\varphi}' \circ C_{\mathcal{E}} = \tilde{\varphi}$ (resp. $\tilde{\varphi}' \circ C_{\mathcal{E}} = -\tilde{\varphi}$). Pour tout sous-espace vectoriel fermé \mathcal{F} de \mathcal{E} , la restriction $\varphi_{\mathcal{F}}$ de φ à \mathcal{F} correspond à l'application linéaire continue $I'_{\mathcal{F}} \circ \tilde{\varphi} \circ I_{\mathcal{F}}$; de façon plus générale, pour toute application linéaire continue $L : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}$, l'image réciproque $L_{i\varphi}^*$ de φ par L est définie par l'application linéaire continue $L' \circ \tilde{\varphi} \circ L : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$.

Une forme bilinéaire continue $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, symétrique ou antisymétrique, est dite *faiblement* (resp. *fortement*) *non dégénérée* lorsque $\tilde{\varphi} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est injective (resp. bijective). Notons que, grâce à Hahn-Banach, si φ est faiblement non dégénérée et si \mathcal{E} est réflexif, alors l'image de $\tilde{\varphi}$ est dense dans \mathcal{E}' .

Par *forme symplectique faible* (resp. *forte*) sur un espace de Banach réel \mathcal{B} , on entendra une forme bilinéaire continue, antisymétrique $\varphi : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, faiblement (resp. fortement) non dégénérée.

Soit $h : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ une forme hermitienne continue sur un espace de Banach complexe \mathcal{E} ; alors $\text{Re. } h$ (resp. $\text{Im. } h$) est une forme \mathbb{R} -bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique). Inversement, une forme bilinéaire symétrique continue σ et une forme bilinéaire antisymétrique continue ω , sur un même espace de Banach réel \mathcal{B} , sont dites *compatibles* s'il existe une structure complexe J sur \mathcal{B} (i.e. $J^2 = -I$) telle que $\sigma + i\omega : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$ soit une forme J -hermitienne, ce qui a lieu si, et seulement si, $\tilde{\sigma} = \tilde{\omega} \circ J$; dans ces conditions, si l'une des deux formes σ ou ω est faiblement (resp. fortement) non dégénérée, il en est de même de l'autre et ces deux formes sont invariantes par J . On peut donc affirmer que :

PROPOSITION 1. - *Etant donnée sur un espace de Banach réel \mathcal{B} une forme bilinéaire continue, symétrique, $\sigma : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, faiblement (resp. fortement) non dégénérée,, il existe une correspondance biunivoque canonique entre les formes symplectiques faibles (resp. fortes) $\omega : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ compatibles avec σ et les structures complexes J sur \mathcal{B} qui laissent σ invariante.*

Dans le cas d'un espace de Hilbert réel \mathcal{H} , de produit scalaire σ , ce résultat se complète par le théorème de structure que voici, qui précise un résultat connu ([3] p. 7).

PROPOSITION 2. - Sur un espace de Hilbert réel (\mathcal{H}, σ) , les formes symplectiques faibles se présentent canoniquement sous la forme $P^* \omega$, ω étant une forme symplectique (forte !) compatible avec σ et P un opérateur auto-adjoint >0 commutant avec la structure complexe J définie par ω sur \mathcal{H} . Une telle forme symplectique $P^* \omega$ est forte si, et seulement si P est bijectif.

Preuve. - Tout d'abord il est clair que, pour toute forme symplectique ω sur \mathcal{H} et tout opérateur symétrique injectif S , partout défini sur \mathcal{H} , $S^* \omega$ est faiblement non dégénérée du fait que l'image de S est dense dans \mathcal{H} . Si, de plus, ω est compatible avec σ et si S commute avec l'opérateur complexe J défini par ω , alors $\widetilde{S^* \omega} = J \circ S^2 = S^2 \circ J$ et ceci est une décomposition polaire, ce qui détermine J et S lorsque cet opérateur symétrique est positif.

Réciproquement, si A est un opérateur antisymétrique injectif, partout défini sur \mathcal{H} , l'image de A est dense dans \mathcal{H} , ce qui fait que, dans la décomposition polaire :

$$A = J \circ |A|$$

(commutative du fait que A est normal), J est un opérateur orthogonal et, de :

$$|A| \circ J = J \circ |A| = -|A| \circ J^*$$

on déduit $J^* = -J$, ce qui assure que J est une structure complexe sur \mathcal{H} qui détermine une forme symplectique ω compatible avec σ et, en posant $P = A^{1/2}$, on voit bien alors que la forme symplectique déterminée par A est égale à $P^* \omega$.

q.e.d.

Exemples classiques. - Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert réel ; la forme symplectique canonique sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est définie par l'opérateur canonique de complexification

$$\begin{bmatrix} 0 & -I_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & 0 \end{bmatrix}$$

De façon plus générale, pour tout espace de Banach réel \mathcal{B} , on a sur $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ une forme symplectique faible définie par

$$\begin{bmatrix} 0 & -I_{\mathcal{B}'} \\ C_{\mathcal{B}} & 0 \end{bmatrix}$$

Cette forme symplectique est forte si, et seulement si \mathcal{B} est réflexif.

1.2. ORTHOGONALITE. - Soit $\omega : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme symplectique faible sur un espace de Banach \mathcal{B} . Pour toute partie α de \mathcal{B} l'orthogonal de $\widetilde{\omega}(\alpha)$, au sens de la dualité entre \mathcal{B} et \mathcal{B}' , est appelé l'orthogonal de α suivant ω ; c'est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{B} qu'on note ${}^{\omega}\alpha$. Si $\alpha \subset {}^{\omega}\alpha$ (resp. $\alpha \supset {}^{\omega}\alpha$), on dit que α est ω -isotrope (resp. ω -coisotrope). Si ces deux conditions sont réunies, i.e. $\alpha = {}^{\omega}\alpha$, alors α est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{B} qu'on dira ω -bi-isotrope.

Notons que, lorsque ω est fortement non dégénérée et que α est un sous-espace vectoriel de \mathcal{B} , le biorthogonal ${}^{\omega\omega}\alpha$ s'identifie à l'adhérence de α dans \mathcal{B} .

La notion d'orthogonalité relative à la 2-forme canonique ω d'un produit hilbertien $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ permet de "raffraîchir" la théorie de l'adjonction dans le cas réel. En effet, le graphe de l'adjoint A^* d'un opérateur \mathbb{R} -linéaire A défini sur un sous-espace dense de \mathcal{H} et à valeurs dans \mathcal{H} est identique à l'orthogonal suivant ω du graphe de A , de sorte qu'on peut dire que A est symétrique (resp. auto-adjoint) si, et seulement si, son graphe est ω -isotrope (resp. ω -bisotrope). Avec cette façon de voir, on peut aussi retrouver aisément le fait qu'un opérateur A sur \mathcal{H} est fermable si, et seulement si, le domaine de définition de A^* est dense dans \mathcal{H} .

DEFINITION. - Un sous-espace vectoriel fermé \mathcal{V} d'un espace de Banach symplectique (\mathcal{B}, ω) est dit ω -lagrangien s'il est ω -isotrope et s'il admet un supplémentaire fermé ω -isotrope \mathcal{W} .

La décomposition en somme directe topologique :

$$\mathcal{B} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

ainsi définie est dite ω -lagrangienne.

Exemple. - La décomposition canonique de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}'$ est lagrangienne pour la forme symplectique canonique de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}'$.

PROPOSITION. - Considérons pour un sous-espace vectoriel fermé \mathcal{V} de \mathcal{B} les assertions suivantes relatives à une forme symplectique faible ω sur \mathcal{B} :

- i) a) \mathcal{V} est lagrangien ;
- b) \mathcal{V} est un sous-espace isotrope maximal ;
- c) \mathcal{V} est bisotrope.

Alors a) \Rightarrow b) \Rightarrow c).

- ii) Si \mathcal{B} est un espace de Hilbert réel et si ω est fortement non dégénérée, alors c) \Rightarrow a).

Preuve :

- i) a) \Rightarrow b). Soient \mathcal{W} un supplémentaire lagrangien de \mathcal{V} et \mathcal{V}' un sous-espace

isotrope contenant \mathcal{V} . Alors, pour tout $x \in \mathcal{V}$ la projection de x sur \mathcal{W} parallèlement à \mathcal{V} est orthogonale à \mathcal{V} et, comme elle est orthogonale à \mathcal{W} , elle est forcément nulle.

b) \Rightarrow c). Pour tout $x \in \mathcal{B}$, orthogonal à \mathcal{V} , le sous-espace $\mathcal{V} + \mathbb{R}x$ est évidemment isotrope ce qui, par hypothèse, donne $x \in \mathcal{V}$.

ii) Sous réserve de prendre l'image réciproque de ω par un opérateur symétrique bijectif P de \mathcal{B} , conformément à (1.1., prop. 2), on peut supposer que ω est définie par une structure complexe J compatible avec le produit scalaire de \mathcal{H} et alors l'hypothèse se traduit par le fait que $J\mathcal{V}$ est orthogonal à \mathcal{V} et que tout $x \in \mathcal{B}$ orthogonal à $J\mathcal{V}$ est dans \mathcal{V} . Mais alors tout vecteur orthogonal à $\mathcal{V} \oplus J\mathcal{V}$ est nul et, puisque \mathcal{V} et $J\mathcal{V}$ sont orthogonaux, ceci donne :

$$\mathcal{B} = \mathcal{V} \oplus J\mathcal{V}$$

En application de ceci, on retrouve aisément un résultat très classique :

COROLLAIRE. - Les opérateurs auto-adjoints d'un espace de Hilbert réel \mathcal{H} sont exactement les opérateurs symétriques maximaux de \mathcal{H} .

Preuve. - Le fait qu'un opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H} soit symétrique maximal résulte de c) \Rightarrow b). La réciproque résulte du fait que, si on prolonge \mathbb{R} -linéairement un opérateur A sur \mathcal{H} en un point $x_0 \in \mathcal{D}_A^*$ par la valeur A^*x_0 en x_0 , on obtient, si A est symétrique, un opérateur symétrique \tilde{A} .

Remarque. - L'équivalence de a) et b) dans le cas hilbertien a été signalée pour la première fois par A. WEINSTEIN ([8], § 5).

2. SYSTEMES HAMILTONIENS LINEAIRES.

2.1. SUR UN CHAINON DE DENSITE. - Un chaînon d'espaces de Banach (réels) consiste en un couple $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ d'espaces de Banach tels que \mathcal{B}_1 soit un sous-espace vectoriel de \mathcal{B}_0 et que l'injection canonique $\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_0$ soit continue. Si de plus \mathcal{B}_1 est dense dans \mathcal{B}_0 , on dit alors que $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0)$ est un chaînon de densité dans la catégorie des espaces de Banach (réels). Voici, en dehors des exemples classiques constitués par les espaces H^s , un exemple intéressant :

Considérons un opérateur linéaire $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ défini sur un sous-espace dense d'un espace de Banach \mathcal{B} et munissons \mathcal{D} de la topologie du graphe de A , i.e. la topologie la moins fine qui rende A continu ainsi que l'injection canonique $I_{\mathcal{D}}$. On fait ainsi de \mathcal{D} un e.v.t. normable par $x \mapsto \|A.x\| + \|x\|$ ($= \|x\|_A$). (Lorsque $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ est bijectif et $A^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ continu, cet e.v.t. est normable par

$x \mapsto \|A.x\|$). Cet espace normable \mathcal{D} est complet si, et seulement si, A est fermé (i.e., rappelons-le, le graphe de A est fermé dans $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$). De façon plus générale, l'injection canonique $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ induit une application linéaire du complété \mathcal{D}^A de $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_A)$ dans \mathcal{B} ; cette application linéaire est injective si, et seulement si, l'opérateur A est fermable; on a alors une chaîne de densité :

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^A \rightarrow \mathcal{B}$$

et le prolongement canonique de A à \mathcal{D}^A s'identifie à la fermeture de A .

Il est bon de noter que, étant donnés un chaînon de densité $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ et une forme symplectique *forte* ω sur \mathcal{B}_0 , la restriction de ω à \mathcal{B}_1 est toujours une forme symplectique *faible* si \mathcal{B}_1 n'est pas identique à \mathcal{B}_0 . De la sorte, on a sur tout produit $H^{s+1}(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$ une forme symplectique faible canonique par restriction de la forme symplectique canonique de $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$.

Soient $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ un chaînon d'espaces de Banach, $A : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_0$ un opérateur linéaire continu et $\omega : \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme antisymétrique continue. Comme il est d'usage, notons $i_A \omega$ la 1-forme antisymétrique définie sur \mathcal{B}_1 par :

$$i_A \omega(x).h = \omega(A.x, h) \quad ; \quad x, h \in \mathcal{B}_1$$

et posons :

$$(1) \quad H(x) = \frac{1}{2} \omega(A.x, x)$$

(C'est ce qu'on appelle l'énergie de A suivant ω).

Alors, le calcul différentiel sur l'espace de Banach \mathcal{B}_1 donne :

$$\begin{aligned} di_A \omega(x).(h, k) &= (D(i_A \omega)(x).h).k - (D(i_A \omega).k).h \\ &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (\omega(A.(x+th), k) - \omega(A.(x+tk), h)) \\ &= \omega(A.h; k) - \omega(A.k, h). \end{aligned}$$

De même, on obtient facilement

$$dH(x).h = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} H(x+th) = \frac{1}{2} (\omega(A.x, h) + \omega(A.h, x))$$

d'où il résulte que :

PROPOSITION 1. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $i_A \omega$ est une forme différentielle fermée sur \mathcal{B}_1 ;
- ii) L'opérateur A est antisymétrique par rapport à la restriction de ω sur \mathcal{B}_1 .

iii) $dH = i_A \omega$.

DEFINITION. - In abstracto, nous dirons qu'un opérateur linéaire $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}_0$ défini sur un sous-espace vectoriel dense \mathcal{D} d'un espace de Banach \mathcal{B}_0 est hamiltonien s'il existe une forme symplectique faible ω sur \mathcal{B}_0 telle que A soit antisymétrique par rapport à ω . Dans ces conditions, A est fermable (ce que nous verrons en (2.2) au moyen de l'adjonction symplectique), ce qui permet d'appliquer la proposition 1 à la fermeture $\hat{A} : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_0$ de A .

COROLLAIRE. - Soit $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}_0$ un opérateur linéaire ω -hamiltonien, alors son énergie H est Gâteaux-différentiable sur \mathcal{D} pour la topologie de \mathcal{B}_0 .

Preuve. - D'après la proposition 1, H est Fréchet-différentiable sur \mathcal{D} pour la topologie de \mathcal{B}_1 et comme celle-ci est plus forte que celle de \mathcal{B}_0 sur \mathcal{D} et que $i_A \omega(x) = \tilde{\omega}(A.x) \in \mathcal{B}_0$, H reste Gâteaux-différentiable pour \mathcal{B}_0 avec la même différentielle.

PROPOSITION 2 (Principe de conservation de l'énergie). - Soit $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ un opérateur linéaire hamiltonien. Si l'énergie H de A est continue sur \mathcal{B} , c'est une intégrale première de A (i.e. H reste constant au cours de tout mouvement dans \mathcal{V} , tangent à A au sens de \mathcal{B}).

Preuve. - Ceci résulte de la règle de dérivation des applications composées, compte tenu de (prop. 1, iii), compte tenu du fait (qui résulte du précédent corollaire) que H est Fréchet-différentiable pour la topologie de \mathcal{B} si, et seulement si, elle est continue pour cette topologie.

Exemple hilbertien. - Soit B un opérateur antisymétrique partiellement défini sur un espace de Hilbert réel \mathcal{H}_0 . Alors, l'opérateur :

$$\begin{bmatrix} 0 & I_{\mathcal{H}_0} \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

est antisymétrique par rapport à la 2-forme canonique de $\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0$ et l'énergie de cet opérateur est :

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{2} (\|y\|^2 - \langle Bx | x \rangle).$$

On peut affirmer cet exemple en considérant une chaîne hilbertienne de densité $\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0$, en supposant que B est défini sur \mathcal{H}_2 . Alors, la restriction à $\mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1$ de l'opérateur précédent est antisymétrique par rapport à la structure

symplectique faible induite sur $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_0$ par la 2-forme canonique de $\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0$. C'est exactement ce qui se passe pour :

L'équation des ondes d'une particule libre. - Considérons, pour tout entier $s \geq 0$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ des fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dont toutes les dérivées distributionnelles jusqu'à l'ordre s sont de carré intégrable. Le laplacien Δ est un opérateur linéaire continu de H^{s+1} dans H^{s-1} et, en intégrant par parties on obtient, pour tout couple (f, g) de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle \Delta f, g \rangle_s = - \langle \nabla f, \nabla g \rangle_s = \langle f, \Delta g \rangle_s ;$$

comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ cette double identité reste vraie dans H^{s+1} , ce qui assure que $\Delta : H^{s+1} \rightarrow H^{s-1}$ est symétrique et que l'opérateur hamiltonien :

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix} : H^{s+1} \times H^s \times H^s \times H^{s-1}$$

admet pour énergie :

$$(f, g) \longmapsto \frac{1}{2} (\|\nabla f\|_{s-1}^2 + \|g\|_{s-1}^2)$$

laquelle est évidemment continue sur $H^s \times H^{s-1}$.

Cette façon de voir les choses permet d'obtenir tout de suite le principe de conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} \left(\int f^2 + m^2 \int f^2 + \int \|\nabla f\|^2 \right)$$

le long de toute solution $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$ de l'équation de Klein-Gordon pour une particule libre de masse m :

$$\ddot{y} = \Delta y - m^2 y.$$

2.2. ADJONCTION SYMPLECTIQUE. - Soit $\omega : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme symplectique faible. On peut entreprendre, par rapport à ω , une théorie de l'adjonction analogue à celle qu'on fait sur les espaces hilbertiens.

Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}_A \rightarrow \mathcal{B}$ étant donné sur un sous-espace dense de \mathcal{B} , on considère l'ensemble des couples $(x, \dot{x}) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ tels que, pour tout $y \in \mathcal{D}_A$:

$$\omega(x, A.y) + \omega(\dot{x}, y) = 0 ;$$

c'est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ fonctionnel en x .

L'opérateur $A^\omega : \mathcal{D}_{A^\omega} \rightarrow \mathcal{B}$ ainsi défini s'appelle l'adjoint de A par rapport à ω (ou l'adjoint symplectique de A lorsqu'on ne juge pas utile de rappeler ω).

Cette étude prend un aspect plus géométrique lorsqu'on munit $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ de la forme symplectique Ω définie par :

$$\begin{bmatrix} 0 & \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega} & 0 \end{bmatrix} ;$$

le graphe de A^ω est alors l'orthogonal de celui de A par rapport à Ω .

Notons que A est ω -hamiltonien si, et seulement si, $A \subset A^\omega$. Lorsque $A = A^\omega$, on dit que A est *symplectiquement auto-adjoint* (skew-adjoint chez [3]). Ceci a lieu si, et seulement si, le graphe de A est bisotrope pour Ω . Il est donc clair que tout opérateur symplectiquement auto-adjoint est fermé et que tout opérateur hamiltonien est fermable.

La symétrie canonique $(x, y) \mapsto (y, x)$ de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ préserve évidemment la forme Ω , on peut affirmer que, pour tout opérateur linéaire injectif A, à image dense, défini sur un sous-espace dense de \mathcal{B} :

$$(A^{-1})^\omega = (A^\omega)^{-1}.$$

Notons que, lorsque A est antisymétrique par rapport à ω , il suffit que son image soit dense pour qu'il soit injectif.

De ces deux dernières remarques on déduit que :

PROPOSITION. - *Tout opérateur linéaire surjectif $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$, ω -antisymétrique est bijectif et symplectiquement auto-adjoint. De plus $A^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ est continu.*

(La dernière assertion résulte du théorème du graphe fermé).

Exemple canonique. - Soit $\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0$ une chaîne de densité hilbertienne. Sur $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_0$ muni de la structure symplectique faible induite par la structure symplectique forte canonique de $\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0$ on a, pour tout opérateur linéaire $B : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_0$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{bmatrix}^\omega = \begin{bmatrix} 0 & I \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$$

On peut donc affirmer que, sur $H^s \times H^{s-1}$ l'opérateur des ondes (pour une parti-

cule de masse m) :

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 I & 0 \end{bmatrix} : H^{s+1} \times H^s \rightarrow H^s \times H^{s-1}$$

est symplectiquement auto-adjoint, compte tenu du fait bien connu que $\Delta : H^{s+1} \rightarrow H^{s-1}$ est auto-adjoint sur l'espace de Hilbert H^{s-1} .

2.3. FLOTS HAMILTONIENS. - Etant donné un champ de vecteurs $A : \mathcal{D} \rightarrow T\mathcal{B}$ sur une partie \mathcal{D} d'une variété banachique \mathcal{B} , rappelons qu'un *flot global* (de classe C^0) pour A sur \mathcal{B} consiste en un groupe F_t à un paramètre d'homéomorphismes de \mathcal{B} laissant \mathcal{D} invariante, tel que, en tout $x \in \mathcal{D}$, $F_t(x)$ soit une fonction de t dérivable en 0 et que :

$$\dot{F}_0(x) = A(x)$$

Dans ces conditions, $F_t(x)$ est une fonction dérivable de t et :

$$\dot{F}_t(x) = A.F_t(x) \quad ; \quad x \in \mathcal{D}$$

A fortiori, le champ de vecteurs A est intégrable ; on dit même dans ce cas qu'il est *globalement intégrable*.

Si \mathcal{B} est un espace de Banach et $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ un opérateur linéaire admettant un flot global *linéaire* F_t , alors A commute avec tous les F_t ; c'est ce qui se passe notamment pour un opérateur hamiltonien A .

PROPOSITION. - Soient (B, ω) un espace de Banach symplectique et $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ un opérateur linéaire hamiltonien admettant un flot global F_t sur \mathcal{B} . Alors

- i) Les F_t sont linéaires et préservent sur \mathcal{D} la forme ω et l'énergie de A .
- ii) F_t est un groupe à un paramètre fortement continu dont le générateur infinitésimal est identique à la fermeture de A .
- iii) A est essentiellement ω -auto-adjoint (i.e. la fermeture \bar{A} de A est un opérateur ω -auto-adjoint).

Preuve :

- i) L'identité $\omega(F_t.x, F_t.y) = \omega(x, y)$ s'obtient par dérivation par rapport à t , compte tenu de la continuité de ω et de ce que A est ω -antisymétrique ; la linéarité des F_t résulte alors de l'identité $\omega(F_t.x, y) = \omega(x, F_{-t}.y)$.

La préservation de l'énergie s'obtient elle aussi par dérivation par rapport à t , compte tenu de la commutativité de A et de F_t .

ii) Ceci est une propriété générale valable pour tout opérateur linéaire

$B : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ admettant sur \mathcal{B} un flot global linéaire ([3], p. 53-54 ; remarque 4).

iii) De la formule évidente :

$$F_t \cdot x = x + \int_0^t A F_s(x) \cdot ds \quad ; \quad x \in \mathcal{D}$$

on déduit aisément que le générateur infinitésimal d'un groupe à 1 paramètre d'automorphismes de (\mathcal{B}, ω) est symplectiquement auto-adjoint ([3], p. 31).

2.4. CAS D'UNE ENERGIE STRICTEMENT POSITIVE. - Considérons sur un espace de Hilbert réel \mathcal{H} un opérateur linéaire $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$, antisymétrique et surjectif. Alors, on sait que A est bijectif, antiadjoint et que $A^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est continu ; de la sorte : $(x, y) \mapsto \langle A^{-1} \cdot x, y \rangle$ est une forme symplectique faible qui fait de A un opérateur hamiltonien d'énergie $x \mapsto \|x\|^2$.

Examinons la réciproque de cette situation et considérons, de façon un peu plus générale, un espace de Banach symplectique (\mathcal{B}, ω) et un opérateur linéaire hamiltonien $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ dont l'énergie est *strictement positive*, i.e. il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\omega(A \cdot x, x) \geq c \|x\|^2 \quad ; \quad x \in \mathcal{D}$$

Alors, $\|x\|_2 = \omega(A \cdot x, x)^{1/2}$ est une norme préhilbertienne sur \mathcal{D} rendant continue l'injection canonique $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$, de sorte que, si on désigne par \mathcal{H} l'espace de Hilbert obtenu en complétant \mathcal{D} , on a une application linéaire canonique $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$.

PROPOSITION 1 :

i) L'application canonique $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$ est injective.

ii) L'adjoint symplectique de A est surjectif.

Preuve :

i) Il suffit de montrer que, si une suite $x_n \in \mathcal{D}$ converge vers x dans \mathcal{H} et vers 0 dans \mathcal{B} , alors $x=0$; or, sous ces hypothèses, on a, pour tout $y \in \mathcal{D}$:

$$\langle y, x \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle y, x_n \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \omega(A \cdot y, x_n) = \omega(A \cdot y, 0) = 0$$

et, puisque \mathcal{D} est dense dans \mathcal{H} , on a bien $x = 0$.

ii) Pour tout $b \in \mathcal{B}$, considérons la forme linéaire continue sur

$\mathcal{H} \subset \mathcal{B} : y \mapsto \omega(b, y)$. L'identification canonique $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ assure l'existence d'un vecteur $\dot{b} \in \mathcal{H}$ tel que :

$$\omega(b, y) + \omega(\dot{b}, A \cdot y) = 0$$

Mais alors $\dot{b} \in \mathcal{D}_{A^\omega}$ et $b = A^\omega \cdot \dot{b}$.

COROLLAIRE. - Si A est globalement intégrable, alors 0 est une valeur régulière de A .

Preuve. - Ceci résulte de ii), compte tenu de ce que, d'après (2.3., prop.), A^ω est identique à la fermeture \bar{A} de A .

Réciproquement, on a la condition suffisante que voici :

PROPOSITION 2. - Si $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ est un opérateur symplectiquement auto-adjoint à énergie continue et strictement positive sur \mathcal{B} , alors \mathcal{B} est hilbertisable par cette énergie et A est globalement intégrable.

Preuve. - La première assertion est évidente. La seconde assertion résulte de ce que A est évidemment antisymétrique pour le produit scalaire défini sur \mathcal{B} par son énergie, et qu'il est surjectif d'après (prop. 1, ii)) ; ces deux raisons font que A est anti-auto-adjoint pour cet espace de Hilbert \mathcal{B} et, par conséquent, le théorème de Stone pour les espaces de Hilbert réel assure alors que A est le générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre d'isométries linéaires de l'espace de Hilbert \mathcal{B} .

Retour à l'exemple fondamental. - L'opérateur des ondes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 I & 0 \end{bmatrix} : H^{s+1} \times H^s \rightarrow H^s \times H^{s-1}$$

pour une particule libre de masse $m > 0$ vérifie les hypothèses de cette dernière proposition du fait que, pour $x = (f, \dot{f})$, l'énergie $H(x)$ vaut :

$$H(x) = \nabla(A \cdot x, x) = \|f\|_{s-1}^2 + m^2 \|f\|_{s-1}^2 + \|\dot{f}\|_{s-1}^2,$$

ce qui donne les inégalités :

$$\inf(1, m^2) (\|f\|_s^2 + \|\dot{f}\|_{s-1}^2) \leq H(x) \leq \sup(1, m^2) (\|f\|_s^2 + \|\dot{f}\|_{s-1}^2)$$

et on retrouve au passage, en parfaite conformité avec la théorie des semi-groupes d'opérateurs, que tous les nombres strictement positifs sont des valeurs régulières du laplacien.

3. SYSTEMES HAMILTONIENS SUR LES VARIETES DE DIMENSION INFINIE.

3.1. STRUCTURES SYMPLECTIQUES FAIBLES. - Sur une variété banachique réelle \mathcal{V} une

structure symplectique faible (resp. forte) consiste en une forme différentielle de degré 2, fermée (i.e. $d\Omega = 0$) et telle que, pour tout $v \in \mathcal{V}$, $\Omega_v : T_v \mathcal{V} \times T_v \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ soit faiblement (resp. fortement) non dégénérée. Le premier exemple d'une telle structure est fourni par la 2-forme canonique d'un fibré cotangent $T^* \mathcal{W}$; cette 2-forme est obtenue par recollement compte tenu du fait que, pour tout isomorphisme $f : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ d'espaces de Banach, $f \times (f')^{-1}$ est un isomorphisme $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1' \rightarrow \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_2'$ d'espaces de Banach symplectiques. Rappelons aussi que $\Omega = -d\lambda$, λ étant la 1-forme canonique de Liouville i.e. la 1-forme sur $T^* \mathcal{W}$ caractérisée par $\omega^*(\lambda) = \omega$ pour toute 1-forme différentielle ω sur \mathcal{W} .

A partir de la 2-forme canonique Ω sur $T^* \mathcal{W}$ et d'un 2-tenseur symétrique $g : T \mathcal{W} \times T \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$, on obtient sur $T \mathcal{W}$ une forme symplectique faible (resp. forte) $\tilde{g}^* \Omega$ si g est faiblement (resp. fortement) non dégénéré.

Soit $(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1)$ un chaînon dans la catégorie des variétés, i.e. la variété \mathcal{V}_1 est une partie de la variété \mathcal{V}_0 et l'injection canonique $\mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_0$ est une quasi-immersion (cf. [1]). Si $T \mathcal{V}_1$ est une partie dense de $T \mathcal{V}_0$ (on dit alors que $(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1)$ est un chaînon de densité), alors la restriction à \mathcal{V}_1 d'une structure symplectique forte sur \mathcal{V}_0 est une structure symplectique faible. En particulier, on obtient sur la restriction de $T^* \mathcal{V}_0$ au-dessus de \mathcal{V}_1 une structure symplectique faible canonique.

Etant donnée une structure symplectique faible Ω sur une variété \mathcal{V} , on convient de dire qu'une fonction $H : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et un champ de vecteurs X sur \mathcal{V} , partiellement défini sur une partie dense \mathcal{D}_X de \mathcal{V} sont en *correspondance hamiltonienne* si on a sur \mathcal{D}_X :

$$i_X \Omega = dH.$$

Dans une telle correspondance, la donnée de H caractérise X et inversement la donnée de X caractérise H à une constante additive près si \mathcal{V} est connexe ; de façon précise, on a (localement) sur tout ouvert \mathcal{U} étoilé, d'un espace de Banach

$$H(x) = H(a) + \int_0^1 \langle i_X \Omega((1-t)a + tx), x - a \rangle dt$$

Mais la différence essentielle avec le cas de la dimension finie, c'est que la donnée de H n'entraîne pas l'existence de X . Lorsque X existe, il convient encore de ne pas généraliser trop vite les résultats connus en la matière en dimension finie : X peut, par exemple, n'être même pas localement intégrable. Signalons toutefois une condition suffisante d'intégrabilité locale de X ; si l'application fibrée :

$$\tilde{\Omega} : T \mathcal{V} \rightarrow T^* \mathcal{V}$$

est transversale à l'image de dH , alors l'image de X est une sous-variété de $T\mathcal{V}$ ce qui permet de faire de \mathcal{D}_X une variété immergée dans \mathcal{V} qui fait de $X : \mathcal{D}_X \rightarrow T\mathcal{V}$ un relèvement de classe C^1 ([1], § 8.6) qu'on peut donc intégrer localement.

Le formalisme hamiltonien permet de définir très simplement le "spray" géodésique d'un tenseur symétrique faiblement non dégénéré $g : T\mathcal{V} \times T\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule :

$$i_X(\tilde{g}^*\Omega) = \frac{1}{2} d\hat{g}$$

en designant par \hat{g} la forme quadratique définie par g sur $T\mathcal{V}$. Ebin et Marsden ont montré l'existence de ce spray sur la variété tangente à l'espace \mathcal{D}_μ automorphismes d'une variété compacte M munie d'un élément de volume μ .

Si H et K sont deux fonctions de classe C^1 sur (\mathcal{V}, Ω) en correspondance hamiltonienne avec respectivement deux champs de vecteurs X et Y définis sur la même partie dense \mathcal{D} de \mathcal{V} alors on peut définir sur \mathcal{D} le crochet de Poisson de H et K par :

$$\{H, K\} = \Omega(X, Y)$$

et il est alors aisé de montrer le résultat suivant qui généralise le principe de conservation de l'énergie :

PROPOSITION. - *Le long de toute intégrale c_t de X on a :*

$$\frac{d}{dt} (K \circ c_t) = \{K, H\} \circ c_t$$

(La démonstration de ([3], p. 82) reste encore valable sous les hypothèses adoptées ici).

3.2. SUR LES VARIETES DE SOBOLEV. - Soit (\mathcal{M}, g) une variété riemannienne modélée sur un espace de Hilbert (e.g. la variété $H^s(\xi)$ de sections H^s d'une submersion riemannienne ξ à base compacte de dimension $n < 2s$). Supposons de plus que deux points d'une même composante connexe de \mathcal{M} peuvent être toujours jointes par une géodésique minimisante, ce qui est justement le cas de $\mathcal{M} = H^s(\xi)$, d'après [5], alors :

LEMME. - *Soit $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 admettant un point critique a et telle que ∇dK (le hessien de K) soit uniformément strictement positif par rapport à g (i.e., il existe une constante $c > 0$ telle que, en tout point de \mathcal{M} , la forme quadratique définie par ∇dK soit supérieure à $c.g$). Alors, pour tout point x de la*

composante connexe de a , on a :

$$\frac{c}{2} d^2(a, x) + K(a) \leq K(x)$$

d étant la distance définie canoniquement sur M par la structure riemannienne g .

Preuve. - Soit γ une géodésique minimisante de a à x telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = x$. De l'hypothèse faite sur K et de l'identité :

$$\frac{d^2}{dt^2} (K \circ \gamma) = (\nabla dK)_{\gamma_t} (\dot{\gamma}_t, \dot{\gamma}_t)$$

on déduit, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$cd^2(a, x)t \leq \frac{d}{dt} (K \circ \gamma)$$

du fait que a est un point critique de K , d'où :

$$\frac{c}{2} d^2(a, x) \leq K \circ \gamma \Big|_{t=0}^{t=1}$$

DEFINITION. - Par chaînon de Rellich riemannien nous entendrons un chaînon (M_0, M_1) de variétés riemanniennes tel que tout borné de M_1 soit relativement compact dans M_0 . C'est notamment le cas d'un chaînon $(H^s(\xi), H^{s+1}(\xi))$ constitué par une submersion riemannienne (pour le détail, voir [5]).

Notation. - $\xi : P \rightarrow S$ étant une submersion riemannienne, pour tout couple (r, s) d'entiers ≥ 0 tels que $r > s$, nous désignerons par $H^r \times H^s(\xi)$ la restriction à $H^r(\xi)$ du fibré tangent $TH^s(\xi)$. De la sorte on définit des chaînons de Rellich de densité :

$$H^{s+1} \times H^s(\xi) \rightarrow TH^s(\xi) \rightarrow H^s \times H^{s-1}(\xi),$$

ce qui fournit en particulier sur tout $H^{s+1} \times H^s(\xi)$ une structure symplectique faible à partir de la métrique riemannienne canonique de $H^s(\xi)$.

THEOREME. - Soit K (resp. V) une fonction de classe C^2 (resp. C^1) définie sur un espace $M_s = H^s \times H^{s-1}(\xi)$. On suppose que $K+V$ est en correspondance hamiltonienne avec un champ de vecteurs $X : M_{s+1} \rightarrow TM_s$ localement intégrable. Si $V \geq 0$, si K admet un point critique a et si son hessien est uniformément strictement positif par rapport à la métrique canonique de M_s , alors X est globalement intégrable sur toute la composante connexe de a .

Preuve. - Le lemme précédent assure que les trajectoires de X sont bornées dans

\mathcal{M}_{s+1} donc relativement compactes dans \mathcal{M}_s , compte tenu aussi du principe de préservation de l'énergie K+V. Mais grâce à un résultat général concernant les pseudo-groupes à un paramètre d'un espace topologique (cf. [1], par exemple), on peut dire alors que les trajectoires de X sont paramétrées de $-\infty$ à $+\infty$.

Remarque. - Ce résultat généralise le fait que l'équation de Klein-Gordon d'une particule en interaction mésonique avec le champ ambiant :

$$\ddot{\varphi} = \Delta \varphi - m^2 \varphi - k \varphi^3$$

est globalement intégrable dans les espaces H^s pour s assez grand (cf. [3], p. 96).

Pour un traitement en profondeur de l'équation de Klein-Gordon (sans interaction) sur un espace-temps stationnaire, on pourra consulter la thèse de C. MORENO [4].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BHATIA-HAJEK, *Local semi-dynamical systems* (Springer-Verlag, Lectures Notes in mathematics, 90), 1969.
- [2] BOURBAKI, *Variétés différentielles et analytiques*, Fasc. rés. I et II, Hermann 1967 et 1971.
- [3] CHERNOFF-MARSDEN, *Properties of Infinite dimensional hamiltonien systems*, (Springer-Verlag, Lecture Notes in mathematics, 425), 1974.
- [4] MORENO, *Sur les noyaux de la théorie quantique des champs sur un espace-temps courbe* (Thèse d'Etat, Université Claude-Bernard de LYON), 1975.
- [5] PENOT, *Topologie faible sur les variétés de Banach, Application aux géodésiques des variétés de Sobolev* (J. Differential Geometry 9 ; 141-168), 1974.
- [6] VHO-KHAC-KHOAN, *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles*, T. 2, Vuibert 1972.
- [7] YOSIDA, *Functional Analysis* (Springer-Verlag), 1966.
- [8] WEINSTEIN, *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds* (Advances in Math. 6, 329-346), 1971.

René OUZIOU
Université de St-Etienne
U.E.R. de Mathématiques
23, rue Dr Paul Michelon

42100 SAINT ETIENNE