

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

A.W. KOHEN

## Sur la transformation de Fourier $p$ -adique

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 39-40 (1974), p. 123-130

<[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1974\\_\\_39-40\\_\\_123\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__39-40__123_0)>

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA TRANSFORMATION DE FOURIER  
 p-adique

A.W. KOHEN

Soit  $G$  un groupe abélien localement compact, de dimension zéro et de torsion,  $K$  un corps valué non-archimédien complet de caractéristique zéro,  $T_K$  le groupe multiplicatif des éléments de  $K$  de valeur absolue 1,  $\hat{G} = (G, T_K)$  le dual de  $G$  au sens de la théorie des groupes abéliens localement compacts. On supposera que  $G$  admet un sous-groupe ouvert compact  $H$  dont le dual  $\hat{H}$  est constitué par des homomorphismes à noyau ouvert et sépare les points de  $H$ .

Dans [2] Schikhof a montré que s'il existe une mesure de Haar à valeurs dans  $K$  sur  $G$  et sur  $\hat{G}$  alors la transformation de Fourier est un isomorphisme d'espaces de Banach de  $L^1(G, K)$  sur  $\mathcal{C}_\infty(\hat{G}, K)$ . Dans ce travail, sans supposer que  $\hat{G}$  admette une mesure à valeurs dans  $K$ , nous montrerons que la transformation de Fourier est toujours injective et nous établirons quelques propriétés de synthèse dans  $L^1(G, K)$ .

1. Sous-algèbres régulières de  $\mathcal{C}_\infty(X, K)$ .

Soit  $X$  un espace localement compact de dimension zéro,  $A, \|\cdot\|_A$  une algèbre de Banach contenue dans  $\mathcal{C}_\infty(X, K)$ . Dans ce paragraphe, nous supposons que  $A$  contient tous les idempotents de  $\mathcal{C}_\infty(X, K)$ .

Proposition 1 :

$A$  est une algèbre régulière d'espace de structure  $X$ .

Preuve : le premier point est clair en raison de l'hypothèse sur  $A$ . Soit  $\bar{A}$  le complété de  $A$  pour la norme :

$$\|\varphi\|_s = \sup_{h \in m(A)} |h(\varphi)| \quad \text{où } m(A) \text{ est l'ensemble des homomorphismes de } A \text{ dans } K ; \bar{A}$$

contient les idempotents de  $\mathcal{C}_\infty(X, K)$  et pour tout idempotent  $\varepsilon$  de  $\mathcal{C}_\infty(X, K)$  on a

$\|\xi\|_s = 1$ . Soit  $\mathcal{K}$  l'espace des fonctions localement constantes sur  $X$ ,  $\mathcal{K}$  est partout dense dans  $\mathcal{C}_\infty(X, K)$  et pour toute  $\varphi \in \mathcal{K}$  on a :  $\|\varphi\|_s \leq \|\varphi\|_\infty$ , or on a aussi  $\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_s$  pour toute  $\varphi \in \mathcal{K}$ ; comme  $\mathcal{K}$  est contenu dans  $A$ , on a :  $\bar{A} = \mathcal{C}_\infty(X, K)$ . Soit alors  $h \in m(A)$  et  $\varphi \in A$ ,  $|h(\varphi)| \leq \|\varphi\|_s = \|\varphi\|_\infty$  donc  $h$  se prolonge à  $\mathcal{C}_\infty(X, K)$ ; d'autre part toute évaluation  $\tau_x : \varphi \mapsto \varphi(x)$ ,  $x \in X$  appartient à  $m(A)$  donc  $m(A) \simeq X$ .

Proposition 2 :

Soient  $E$  un compact et  $F$  un fermé de  $X$  tels que  $E \cap F = \emptyset$  alors  $A$  contient une fonction  $\varphi$  telle que  $\varphi(E) \subset \{1\}$  et  $\varphi(F) \subset \{0\}$ .

Proposition 3 :

Soit  $\mathcal{J}$  un idéal de  $A$  et  $\varphi$  un élément de  $A$  appartenant localement à  $\mathcal{J}$  en tout point de  $X$  alors  $\varphi$  appartient à  $\mathcal{J}$ .

Preuve : on se ramène de façon évidente à  $X$  compact,  $\mathcal{J}$  est encore un idéal dans l'algèbre augmentée de l'unité. On peut alors trouver  $g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  appartenant à  $\mathcal{J}$  et  $W_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  des ouverts compacts tels que  $\varphi = g$  sur  $W_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $X = \bigcup_1^n W_i$ . En posant  $V_1 = W_1$  et  $V_i = \left( \bigcup_1^{i-1} V_i \right) \cap \left( \bigcup_{i+1}^n W_j \right)$  pour  $i \geq 2$ , on obtient des ouverts compacts vérifiant :  $V_i \cap V_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $\bigcup_1^n V_i = X$  et  $\varphi = g_i$  sur  $V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Soit  $\epsilon_i$  la fonction caractéristique de  $V_i$ ; on a

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi \epsilon_i \quad \text{et} \quad \varphi \epsilon_i = g_i \epsilon_i \in \mathcal{J}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{donc} \quad \varphi \in \mathcal{J}.$$

## 2. Injectivité de la transformation de Fourier.

Proposition 4 :

Si  $G$  est compact et si  $K$  contient les racines  $[G:H]$ -ièmes de l'unité pour tout sous-groupe ouvert compact  $H$  alors  $\hat{G}$  sépare les points de  $G$ .

Preuve : soit  $x \in G$ ,  $x \neq e$  ( $e$  : élément unité de  $G$ ); il existe un sous-groupe ouvert compact  $H$  tel que  $x \notin H$ . Posons :

$$\varepsilon_H = \sum_{\gamma \in G/H} \frac{\gamma}{[G:H]}$$

et soit l'application canonique  $\pi : G \longrightarrow G/H$  ;  $\varepsilon_H \circ \pi$  est la fonction caractéristique de  $H$  donc  $\varepsilon_H \circ \pi(x) = 0$  ; il existe un élément  $\gamma \in G/H$  tel que  $\gamma \circ \pi(x) \neq 1$  or  $\gamma \circ \pi \in \hat{G}$  ce qui montre la proposition.

Rappelons que l'espace des classes de fonctions intégrables sur un groupe localement compact est en fait un espace de fonctions : c'est l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini avec la norme de la convergence uniforme à une constante près. Dans le cas d'un groupe compact  $G$ ,  $\hat{G}$  est discret [2], alors :

$L^1(\hat{G}, K) = \{ \varphi : \hat{G} \longrightarrow K, \lim \varphi(\gamma) = 0 \}$  et la transformée de Fourier d'un élément  $\varphi \in L^1(\hat{G}, K)$  est :  $\varphi^\wedge(x) = \sum_{\gamma \in \hat{G}} \varphi(\gamma) \gamma(x)$ .

Dans le théorème suivant, nous allons donner l'analogue de la formule d'inversion pour un groupe compact  $G$  sans mesure de Haar à valeur dans  $K$ . Posons :

$L^1_0(\hat{G}, K) = \{ \varphi : \hat{G} \longrightarrow K, \lim \varphi(\gamma) \text{ord}(\gamma)^{-1} = 0 \}$  ;  $L^1_0(\hat{G}, K)$  est une sous-algèbre de  $L^1(\hat{G}, K)$  et on a :

Théorème 1 :

Soit  $\varphi \in L^1_0(\hat{G}, K)$ , alors :

$$\varphi(\gamma) = \lim_H \frac{1}{[G:H]} \sum_{i=0}^{[G:H]-1} \hat{\varphi}(x_i) \gamma^{-1}(x_i) \quad \gamma \in \hat{G}$$

où  $\{x_i\}$   $i = 0, 1, \dots, [G:H]-1$ , est un système de représentants de  $G$  mod.  $H$  et  $H$  parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de  $G$ .

Preuve : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un sous-groupe ouvert compact de  $G$  tel que

$$|\varphi(\gamma) \text{ord}(\gamma)^{-1}| < \varepsilon \text{ pour tout } \gamma \notin H^\perp ; \text{ or pour } \gamma \notin H^\perp \text{ on a : } |\text{ord}(\gamma)| \leq [G:H],$$

donc  $|\varphi(\gamma)| < \varepsilon [G:H]$  pour tout  $\gamma \notin H^\perp$ . Soit d'autre part  $\gamma \in \hat{G}$ ,  $H$  un sous-groupe ouvert compact de  $G$  tel que  $\gamma \in H^\perp$ , alors pour tout sous-groupe ouvert compact de  $G$ ,  $U \subset H$  on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{[G:U]} \sum_0^{[G:U]-1} \hat{\varphi}(x_i) \gamma^{-1}(x_i) = \frac{1}{[G:U]} \sum_0^{[G:U]-1} \left( \sum_{\omega \in U^\perp} \varphi(\omega) \omega(x_i) \right) \gamma^{-1}(x_i) \\
& = \frac{1}{[G:U]} \sum_0^{[G:U]-1} \left( \sum_{\omega \in U^\perp} \varphi(\omega) \omega(x_i) \right) \gamma^{-1}(x_i) + \frac{1}{[G:U]} \sum_{\omega \notin U^\perp} \varphi(\omega) \sum_{i=0}^{[G:U]-1} \omega(x_i) \gamma^{-1}(x_i) \\
& = \varphi(\gamma) + \frac{1}{[G:U]} \sum_{\omega \notin U^\perp} \varphi(\omega) \sum_{i=0}^{[G:U]-1} \omega(x_i) \gamma^{-1}(x_i), \text{ par suite :} \\
& \left| \frac{1}{[G:U]} \sum_0^{[G:U]-1} \hat{\varphi}(x_i) \gamma^{-1}(x_i) - \varphi(\gamma) \right| = \left| \sum_{\omega \notin U^\perp} \frac{\varphi(\omega)}{[G:U]} \sum_{i=0}^{[G:U]-1} \omega(x_i) \gamma^{-1}(x_i) \right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

et ceci pour tout sous-groupe ouvert compact  $U \subset H$  d'où le théorème.

Théorème 2 :

La transformation de Fourier est injective sur  $L^1(G, K)$ .

Preuve :

a) G est compact :

Dans ce cas,  $\hat{G}$  est discret donc admet une mesure de Haâr à valeurs dans  $K$ . On sait, alors, que la transformation de Fourier est un isomorphisme d'espaces de Banach de  $L^1(G, K)$  sur  $\mathcal{C}_\infty(\hat{G}, K)$  [2].

b) G est discret :

$\hat{G}$  est alors compact. Soit  $\varphi \in L^1(G, K)$  telle que  $\hat{\varphi}(x) = 0$  pour tout  $x \in \hat{G}$ . Nous voulons montrer que  $\varphi = 0$ . Soit  $h$  un élément de  $L^1_0(G, K)$  ; alors pour tout sous-groupe ouvert compact  $H$  de  $\hat{G}$  et pour tout système de représentants  $\{x_i\}$  de  $\hat{G}$  mod.  $H$ , on a :

$$\sum_G \varphi(x\omega^{-1}) \frac{1}{[\hat{G}:H]} \sum_{i=0}^{[\hat{G}:H]-1} \hat{h}(x_i) \omega^{-1}(x_i) = \frac{1}{[\hat{G}:H]} \sum_{i=0}^{[\hat{G}:H]-1} \hat{h}(x_i) \hat{\varphi}(x_i) x(x_i) = 0, \text{ d'où :}$$

$$|\varphi * h(x)| = \left| \sum_G \varphi(x\omega^{-1}) h(\omega) \right| = \left| \sum_G \varphi(x\omega^{-1}) \left[ h(\omega) - \frac{1}{[\hat{G}:H]} \sum_{i=0}^{[\hat{G}:H]-1} \hat{h}(x_i) \omega^{-1}(x_i) \right] \right|$$

$$\leq \|\varphi\| \sup_{\omega} \left| h(\omega) - \frac{1}{[\hat{G}:H]} \sum_{i=0}^{[\hat{G}:H]-1} \hat{h}(x_i) \omega^{-1}(x_i) \right|.$$

D'après le théorème 1, le terme de droite tend vers 0, donc  $\varphi * h(x) = 0$  pour tout  $x \in G$ , ce qui n'est possible que si  $\varphi = 0$ .

c) G est non discret, non compact :

Dans  $L^1(G, K)$  la norme est donnée par :

$$(1) \quad \|\varphi\| = \sup_{\Omega} \left| \int_G \varphi(g) \mathcal{E}_{\Omega}(g) m(g) \right|$$

où  $m$  est la mesure de Haar sur  $G$  à valeur dans  $K$ , et où  $\Omega$  parcourt l'ensemble des ouverts compacts de  $G$  [2] ; or tout ouvert compact  $\Omega$  est réunion disjointe d'ouverts compacts de la forme  $aH$  où  $H$  est un sous-groupe ouvert compact de  $G$  et  $a \in G$ . La norme (1) peut alors s'écrire :

$$(1') \quad \|\varphi\| = \sup_{H, a} \left| \int_G \varphi(g) \mathcal{E}_{aH}(g) m(g) \right|$$

où  $H$  parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de  $G$  et  $a \in G$ .

Soit  $\varphi \in L^1(G, K)$  ; si  $\varphi \neq 0$ , d'après la norme (1'), il existe  $a \in G$  et  $H$  sous-groupe ouvert compact de  $G$  tels que  $\varphi^H(a) = \int \varphi(g) \mathcal{E}_{a^{-1}H}(g) m(g) = \int \varphi(ag) m(g) \neq 0$  ;  $\varphi^H$  peut être considérée comme une fonction sur  $G/H$ . Soit  $\alpha \in H^1$ ,

$$\hat{\varphi}(\alpha) = \int \varphi(g) \alpha(g) m(g) = \sum_{G/H} \alpha(a) \int_H \varphi(ah) m(h) = \sum_{G/H} \alpha(a) \varphi^H(a) ; \text{ or}$$

$H^\perp \cong G/H^\perp$  et  $\varphi^H \neq 0$ , il existe alors  $\alpha \in G/H^\perp$  tel que  $\varphi^{H^\perp}(\alpha) \neq 0$  (cf. b)).

Posons  $\beta = \alpha \circ \pi$  où  $\pi$  est l'application canonique de  $G$  sur  $G/H^\perp$ ;  $\beta$  est un élément de  $\hat{G}$  et  $\hat{\varphi}(\beta) = \varphi^{H^\perp}(\alpha) \neq 0$ .

### 3. L'algèbre $A(\hat{G}, K)$ .

L'injectivité de la transformation de Fourier nous permet de munir  $A(\hat{G}, K) = L^1(G, K)^\wedge$  de la norme  $\|\hat{\varphi}\|_A = \|\varphi\|$ .  $A(\hat{G}, K)$  est alors isomorphe et isométrique à  $L^1(G, K)$ .

Proposition 5 :

$A(\hat{G}, K)$  contient tous les idempotents de  $\mathcal{C}_\infty(\hat{G}, K)$ .

Preuve : cf. [2].

La proposition 5 montre que  $A(\hat{G}, K)$  vérifie la condition du paragraphe 1;  $A(\hat{G}, K)$  est une algèbre régulière d'espace de structure  $\hat{G}$ . Pour de telles algèbres on a le résultat suivant :

Proposition 6 : L'ensemble vide est un ensemble de synthèse.

Proposition 7 :

S'il n'existe pas de mesure de Haâr à valeurs dans  $K$  sur  $\hat{G}$  alors  $A(\hat{G}, K) \subsetneq \mathcal{C}_\infty(\hat{G}, K)$ .

Preuve : supposons  $\hat{G}$  compact et soit  $H$  un sous-groupe ouvert compact de  $\hat{G}$ ; la fonction caractéristique de  $H$  est  $\varepsilon_H = \frac{1}{[\hat{G}:H]} \sum_{g \in H} \delta_g$ . On a :  $\|\varepsilon_H\|_A = \frac{1}{|[\hat{G}:H]|}$  donc  $\lim_{H \rightarrow \hat{G}} \|\varepsilon_H\|_A = \infty$  et  $\|\varepsilon_H\|_\infty = 1$ ; or  $A(\hat{G}, K)$  est dense dans  $\mathcal{C}_\infty(\hat{G}, K)$  donc en raison du théorème de Banach on ne peut avoir  $A(\hat{G}, K) = \mathcal{C}_\infty(\hat{G}, K)$ .

Pour  $\hat{G}$  non compact et  $H$  un sous-groupe ouvert compact de  $\hat{G}$  on a :

$A(H, K) \neq \mathcal{C}(H, K)$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{C}(H, K)$  avec  $\varphi \notin A(H, K)$  et soit  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$  pour  $x \in H$  et  $\tilde{\varphi}(x) = 0$  pour  $x \notin H$ ;  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_\infty(\hat{G}, K)$  et  $\tilde{\varphi} \notin A(\hat{G}, K)$  en raison du lemme suivant :

Lemme:

L'application  $\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\varphi}|_H$  est surjective de  $A(\hat{G}, K)$  sur  $A(H, K)$ .

En effet on a :  $\hat{\varphi}|_H = (\varphi^{H^\perp})^\wedge$  où  $\varphi^{H^\perp}(x) = \int_{H^\perp} \varphi(xh) m(h)$  et l'application  $\varphi \mapsto \varphi^{H^\perp}$  de  $L^1(G, K)$  dans  $L^1(G/H^\perp, K)$  est surjective [2].

Nous terminons par un résultat qui souligne d'une autre façon la différence entre le cas où il existe une mesure de Haâr à valeurs dans  $K$  sur  $G$  et le cas où cette mesure n'existe pas.

Théorème 3 :

On suppose  $\hat{G}$  compact et soit  $\mu$  une mesure sur  $G$  à valeurs dans  $K$ .

1) S'il existe une mesure de Haâr  $\hat{m}$  sur  $\hat{G}$  à valeurs dans  $K$  et si  $\mu = \varphi \hat{m}$  avec  $\varphi \in \mathcal{C}(\hat{G}, K)$  alors l'opérateur  $T_\mu f = \varphi * f$  est complètement continu dans  $\mathcal{C}(\hat{G}, K)$ .

2) S'il n'existe pas de mesure de Haâr à valeurs dans  $K$  sur  $\hat{G}$  alors  $T_\mu f = \mu * f$  n'est complètement continu dans  $\mathcal{C}(\hat{G}, K)$  que pour  $\mu = 0$ .

Preuve :

1) est une conséquence immédiate du théorème 5.2.10 de [2]. Montrons 2) :

$\hat{G}$  est compact, par suite  $\mathcal{C}(\hat{G}, K)$  est du type  $c(I)$  [1]; on peut donc appliquer la théorie de Riez démontrée par Serre[3] dans le cas  $p$ -adique.

Soit  $T$  un opérateur complètement continu dans  $\mathcal{C}(\hat{G}, K)$ , alors pour tout  $\lambda \in K$  on a :  $\mathcal{C}(\hat{G}, K) = N(\lambda) \oplus F(\lambda)$  où la somme est topologique,  $N(\lambda)$  et  $F(\lambda)$  stables par  $T$ ,  $N(\lambda)$  de dimension finie et  $I - \lambda T$  inversible dans  $F(\lambda)$ . De plus la projection  $P_\lambda$  sur  $N(\lambda)$  associée à la décomposition précédente est un polynôme de  $T$ .

Supposons maintenant  $T_\mu$  complètement continu; pour tout  $\lambda \in K$  la projection  $P_\lambda$  associée est une mesure sur  $\hat{G}$  et est de rang fini en tant qu'opérateur dans  $\mathcal{C}(\hat{G}, K)$ . Supposons qu'on ait déjà montré que  $P_\lambda = 0$  pour tout  $\lambda \in K$ , alors  $I - \lambda T_\mu$  est inversible dans  $\mathcal{C}(\hat{G}, K)$  pour tout  $\lambda \in K$ , ce qui n'est possible que si  $\mu = 0$ .

Le lemme suivant terminera la démonstration.

Lemme :

$P_\lambda = 0$  pour tout  $\lambda \in K$ .



Preuve : soit  $P$  une projection dans  $\mathcal{C}(\hat{G}, K)$ , l'application  $\nu : \varphi \mapsto P_\nu(\hat{e})$  est une mesure idempotente sur  $\hat{G}$ . Pour  $\hat{\varphi} = \sum_{\gamma \in G} \varphi(\gamma) \gamma$  on a :  $P_{\hat{\varphi}}(\hat{e}) = \varphi(\gamma) \alpha_\gamma$  où  $\alpha_\gamma = 0, 1$  car  $\nu$  est une mesure idempotente. Supposons  $P$  de rang fini et soit  $n$  le nombre des  $\gamma \in G$  tel que  $\alpha_\gamma = 1$  ; pour un sous-groupe ouvert compact  $H$  suffisamment petit on a :  $P_{\hat{\varphi}}(\hat{e}) = \frac{n}{[\hat{G}:H]}$ , or  $\lim_H \frac{1}{[\hat{G}:H]} = \infty$  donc  $P$  ne peut être borné dans  $\mathcal{C}(\hat{G}, K)$  si  $P \neq 0$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] van der PUT, M. Algèbres de fonctions continues p-adiques. Indagationes Math. 30, 4, 401-420, 1968.
- [2] Schikhof, W.H. Nom Archimedean Harmonic Analysis. Thesis Nijmegen, 1967.
- [3] Serre, J.P. Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach P-adiques. Publications Mathématiques I.H.E.S. n° 12, 1964.

A.W. KOHEN

Université de Rabat  
 Département de Mathématiques  
 MAROC