JOSEPH LE POTIER

« Vanishing theorem » pour un fibré vectoriel holomorphe positif de rang quelconque

Mémoires de la S. M. F., tome 38 (1974), p. 107-119

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__107_0>

Journées Géom. analyt. [1972. Poitiers]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 38, 1974, p. 107-119.

"VANISHING THEOREM" POUR UN FIBRE VECTORIEL HOLOMORPHE POSITIF DE RANG QUELCONQUE.

par Joseph LE POTIER

0. INTRODUCTION.

0. 1 Le principal résultat

Soit M une variété complexe compacte de dimension n et $E \to M$ un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur M. On connaît le "precise vanishing theorem" dû à KODAIRA et NAKANO [7] : si E est un fibré positif, on a alors pour la cohomologie de type (p,q) à valeurs dans E :

$$H^{p,q}(M,E) = 0 \quad \text{dès que} \quad p+q \geqslant n+1.$$

Le but de ce travail est de généraliser ce théorème au cas des fibrés de rang r quelconque ; de façon précise, le résultat que nous obtenons est le suivant :

THEOREME 1. <u>Soit</u> E <u>un fibré vectoriel holomorphe positif de rang</u> r <u>au-dessus d'une variété</u> M <u>complexe compacte de dimension</u> n . <u>Alors</u>

$$H^{p,q}(M,E) = 0 \quad \underline{\text{dès que}} \quad p+q \geqslant n+r.$$

Dans le cas où $p = n$, ce résultat était conjecturé par P.A. GRIFFITHS dans [4]. La notion de fibré positif, que nous allons maintenant rappeler, est exactement la même que celle qui est définie dans cet article.

La notion de fibré positif

Soit E un fibré vectoriel holomorphe au-dessus d'une variété complexe M, et soit une structure hermitienne sur E. Désignons par T le fibré tangent à M , $\underline{\mathrm{End}}(E)$ le fibré des endomorphismes de E , et par $\underline{A}(E)$ le $\mathbb{R}$-sous-fibré de $\underline{\mathrm{End}}(E)$ formé des endomorphismes auto-adjoints relativement à la structure hermitienne. Le fibré $\underline{\mathrm{End}}(E)$ s'identifie au complexifié de $\underline{A}(E)$, la conjugaison devenant le morphisme "adjoint" :

$$a \mapsto a^*.$$

La forme de courbure [2] de la structure hermitienne est un élément

$$\Omega \in A^{1,1}(M,\underline{A}(E)).$$

Il existe alors une et une seule forme hermitienne

$$B : T \times T \to \underline{\mathrm{End}}\ (E)$$

dont la partie imaginaire soit $-\Omega$. Soit $\hat{\Omega}$ la forme quadratique associée :

$$T \to \underline{A}\ (E)$$

dite forme quadratique de courbure.

En coordonnées, la forme de courbure associée à une structure hermitienne peut s'écrire, si $(z^1,\dots,z^n)$ sont des coordonnées au-dessus d'un ouvert U de M :

$$\Omega|U = i \sum_{\alpha,\beta} \Omega_{\alpha,\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

où les $\Omega_{\alpha,\beta} \in C^\infty(U,\underline{\mathrm{End}}(E))$ vérifient

$$\Omega^*_{\alpha,\beta} = \Omega_{\beta,\alpha}$$

La forme quadratique de courbure est donnée par :

$$\hat{\Omega}(\sum_\alpha u^\alpha\, \partial/\partial z^\alpha) = 2\sum \Omega_{\alpha,\beta} u^\alpha \bar{u}^\beta$$

DEFINITION. <u>Un fibré vectoriel holomorphe</u> E <u>au-dessus d'une variété</u> M <u>est dit positif s'il existe sur</u> E <u>une structure hermitienne dont la forme quadratique de courbure vérifie</u> :

<u>Pour tout vecteur</u> $u \in T$ <u>non nul d'origine</u> $m \in M$, <u>l'opérateur</u>

$$\hat{\Omega}(u) \in \underline{A}_m(E)$$

<u>est positif non dégénéré</u>.

Lorsque le fibré E est de rang 1, cette notion de fibré positif coïncide avec celle qui a été donnée par KODAIRA.

<u>Exemples</u>. a) Soit $M = P_n(\mathbf{C}) = P(\mathbf{C}^{n+1})$ l'espace projectif des hyperplans de $\mathbf{C}^{n+1}$, et soit Q le fibré de rang 1 canonique sur $P_n(\mathbf{C})$, quotient du fibré trivial $P_n(\mathbf{C}) \times \mathbf{C}^{n+1}$: pour $h \in P_n(\mathbf{C})$ on a :

$$Q_h = \mathbf{C}^{n+1}/h$$

La structure hermitienne triviale sur le fibré $P_n(\mathbf{C}) \times \mathbf{C}^{n+1}$ induit une décomposition en somme directe (C^∞) de fibrés vectoriels :

$$P_n(\mathbf{C}) \times \mathbf{C}^{n+1} = S \oplus Q$$

On peut alors vérifier que la structure hermitienne induite sur Q a sa forme quadratique de courbure positive.

La cohomologie $H^{p,q}(P_n,Q)$ est bien connue :

$$H^{p,q}(P_n,Q) \simeq \begin{cases} \mathbb{C}^{n+1} & \text{si } p=q=0 \\ 0 & \text{si } (p,q) \neq (0,0) \end{cases}$$

C'est un résultat dû à KODAIRA, SERRE et FRENKEL dans le cas où $p = 0$; à BOTT dans le cas où $p > 0$ [1].

b) Le fibré tangent $T = T(P_n(\mathbb{C}))$ à $P_n(\mathbb{C})$ est positif. Le théorème 1 montre que l'on a :

$$H^{n,n}(P_n,T) = 0$$

Le théorème de dualité de SERRE permet d'obtenir dans cet exemple un résultat plus précis : en effet

$$\begin{aligned}(H^{n,q}(P_n,T))^* &\simeq H^{0,n-q}(P_n,T^*) \\ &\simeq H^{1,n-q}(P_n,\mathbb{C})\end{aligned}$$

et donc :

$$H^{n,q}(P_n,T) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq n-1 \\ \mathbb{C} & \text{si } q = n-1 \end{cases}$$

On voit que $H^{n,n-1}(P_n,T) \neq 0$: ainsi on ne peut espérer améliorer le théorème 1 en abaissant le nombre $n+r$ au-delà duquel la cohomologie s'annule. Cet exemple est dû à GRIFFITHS.

c) Le fibré normal de toute variété complexe plongée dans l'espace projectif est positif : ainsi nous disposons de beaucoup d'exemples de fibrés positifs de rang > 1 .

0. 2 <u>Le théorème d'isomorphisme</u> : <u>réduction au cas d'un fibré de rang 1</u>.

Soit E un fibré vectoriel holomorphe au-dessus d'une variété complexe M , et soit $P(E)$ le fibré en espaces projectifs associé à E de la manière suivante : le fibré de $P(E)$ au-dessus du point $m \in M$ est l'espace projectif $P(E_m)$ des hyperplans de E_m . Soit $\Pi : P(E) \to M$ la projection canonique et $\Pi^* E$ l'image réciproque de E par Π .

Sur chaque fibré $P(E_m)$, nous avons un fibré vectoriel de rang 1 canonique, Q_m , quotient du fibré trivial $P(E_m) \times E_m$, décrit dans l'exemple a). $Q = \bigcup_{m\in M} Q_m$ peut alors être muni d'une structure naturelle d'espace fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur $P(E)$, quotient du fibré $\Pi^* E$.

En cohomologie, nous aurons un morphisme "image réciproque" :

$$H^{p,q}(M,E) \to H^{p,q}(P(E)\ ,\ \Pi^* E)$$

et un morphisme induit par la projection :

$$\Pi^* E \to Q$$

d'où par composition, un morphisme :

$$H^{p,q}(M,E) \to H^{p,q}(P(E),\ Q)$$

Nous allons démontrer le résultat suivant :

THEOREME 2. Pour tout (p,q) , le morphisme canonique :

$$H^{p,q}(M,E) \to H^{p,q}(P(E),\ Q)$$

est un isomorphisme.

Le théorème 2 implique le théorème 1. En effet si M est compacte de dimension n , et si E est de rang r , $P(E)$ est une variété compacte de dimension $n+r-1$. Il suffit alors d'appliquer au fibré-quotient Q le théorème d'annulation de KODAIRA - NAKANO et d'utiliser la proposition suivante due à GRIFFITHS :

PROPOSITION 1. Si E est un fibré positif, il en est de même de Q .

Pour démontrer le théorème 2, la suite spectrale de Leray est insuffisante : elle donne ce résultat seulement dans le cas où $p = 0$ [1]. Il apparaît ainsi nécessaire d'introduire une généralisation d'une suite spectrale dûe à A. BOREL.

1. ACTION DU GROUPE DE LIE $\mathcal{G}\ell(E)$ SUR LA COHOMOLOGIE DE TYPE (p,q) A VALEURS DANS E .

1.1 Dérivées de Lie sur E

Soit E un fibré vectoriel holomorphe au-dessus d'une variété complexe M, et soit L un opérateur différentiel holomorphe d'ordre 1 de E dans E.

Son symbole $\sigma(L)$ est un élément de $\mathrm{Hom}(T^*, \underline{\mathrm{End}}\,(E))$. Remarquons que ce dernier espace contient l'espace $\mathrm{Hom}(T^*, \mathbb{C}) = \mathcal{C}(M)$, espace des champs de vecteurs holomorphes sur M.

DEFINITION. _On appelle dérivée de Lie sur_ E _un opérateur différentiel holomorphe d'ordre_ 1 _de_ E _dans_ E _dont le symbole est un champ de vecteurs sur_ M.

Si X est un champ de vecteurs holomorphe les dérivées de Lie de symbole X sont exactement les morphismes $\mathbb{C}$-linéaires de faisceaux :

$$L : \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(E)$$

vérifiant au-dessus d'un ouvert U de M :

$$L(fs) = (\theta(X)f) \,.\, s + f\, L(s)$$

pour $f \in \mathcal{O}(U)$, fonction holomorphe au-dessus de U, $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}(E))$, section de E au-dessus de U. $\theta(X)$ désigne la dérivée de Lie habituelle :

$$\theta(X) = i(X) \,.\, d$$

Exemples : a) si $E = M \times \mathbb{C}$, toute dérivée de Lie de symbole X est de la forme

$$f \to \theta(X)\, f + \lambda\, f$$

où $\lambda \in \mathcal{O}(M)$ est une fonction holomorphe sur M.

b) Plus généralement, si D est une connexion holomorphe sur E, $i(X)\, D$ est une dérivée de Lie sur E de symbole X.

c) L'espace des dérivées de Lie sur E forme une algèbre de Lie $\mathcal{L}(E)$ et le morphisme

$$\sigma : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{C}(M)$$

est un morphisme d'algèbre de Lie. Ce morphisme n'est en général ni injectif, ni surjectif. Plus précisément, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2. On a une suite exacte

$$0 \to L(E) \to \mathcal{L}(E) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}(M) \xrightarrow{\delta} H^{0,1}(M,\underline{End}(E))$$

où $L(E)$ désigne l'espace vectoriel $H^{0,0}(M,\underline{End}(E))$ des endomorphismes de E, et δ l'application

$$X \to 2\, i\, \pi\, i'(X)K$$

où $i'(X)$ désigne l'application induite en cohomologie par la partie de type $(-1,0)$ de $i(X)$, et K la classe de cohomologie $\in H^{1,1}(M,\underline{End}(E))$ de la forme de courbure d'une structure hermitienne arbitraire sur E.

Remarquons que sur n'importe quel fibré vectoriel holomorphe $i'(X)$ induit bien un morphisme en d"-cohomologie, car on peut vérifier que

$$[i'(X),d''] = 0$$

On peut construire des exemples explicites pour lesquels $\delta \neq 0$.

1.2 Le groupe de Lie $\mathcal{G}\ell(E)$.

Reprenons les notations du § 1.1 et supposons de plus M compacte. Dans ce cas le groupe Diff (M) des difféomorphismes de M possède une structure naturelle du groupe de Lie dont l'algèbre de Lie s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathcal{C}(M)$ des champs de vecteurs holomorphes sur M ;

Soit $\mathcal{G}\ell(E)$ l'ensemble des couples (α,β) où $\beta \in$ Diff (M), et α est un automorphisme de E au-dessus de β. $\mathcal{G}\ell(E)$ est un groupe.

PROPOSITION 3. Le groupe $\mathcal{G}\ell(E)$ peut être muni d'une structure naturelle de groupe de Lie opérant sur E, dont l'algèbre de Lie s'identifie à $\mathcal{L}(E)$.

DEMONSTRATION. La construction de la structure de groupe de Lie sur $\mathcal{G}\ell(E)$ se fait suivant les étapes ci-dessous :

1°) l'image Σ du morphisme de groupes

$$\mathcal{G}\ell(E) \to \text{Diff } M$$

est un sous-groupe de Lie de Diff M

2°) $\mathcal{G}\ell(E) \to \Sigma$ est un fibré principal de groupe structural $GL(E)$, groupe de Lie des automorphismes de E au-dessus de 1_M.

3°) la structure de variété ainsi obtenue sur $\mathcal{G}\ell(E)$ est compatible avec la structure de groupe.

Reste à identifier l'algèbre de Lie $L(\mathcal{G}\ell(E))$ du groupe $\mathcal{G}\ell(E)$ avec $\mathcal{L}(E)$.
Soit $u \in L(\mathcal{G}\ell(E))$ et $g_t \in \mathcal{G}\ell(E)$ défini par :

$$g_t = \exp(t\, u)$$

Posons pour s section holomorphe de E au-dessus d'un ouvert U :

$$L_u(s) = d/dt\, (g_t^* s)|_{t=0}$$

On peut vérifier que cette formule a bien un sens et définit un élément $L_u \in \mathcal{L}(E)$.

De plus $u \mapsto L_u$ est un morphisme d'algèbres de Lie rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{C}(M) \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow\wr \\ 0 & \longrightarrow & L(E) & \longrightarrow & L(\mathcal{G}\ell(E)) & \longrightarrow & L(\mathrm{Diff}\,(M)) \end{array}$$

Les lignes de ce diagramme étant exactes, ce morphisme est injectif ; pour montrer qu'il est surjectif, on doit utiliser la suite exacte de la proposition 2.

<u>Remarque</u>. En général, le morphisme canonique : $\mathcal{G}\ell(E) \to \mathrm{Diff}\ M$ n'est pas surjectif ; ceci résulte de la proposition 2.

1.3 <u>Action de</u> $\mathcal{G}\ell(E)$ <u>sur la cohomologie</u> $H^{p,q}(E)$

Dans ce paragraphe, M sera toujours supposée compacte. Soit $g = (\alpha,\beta) \in \mathcal{G}\ell(E)$: α définit donc un isomorphisme : $E \to \beta^*E$. Soit $\omega \in A^{p,q}(E)$ une forme différentielle de type (p,q) à valeurs dans E .

Posons $g^*\omega = \alpha^{-1}\ \beta^*\omega$. g^* définit un isomorphisme de complexes :

$$A^{p,\cdot}(E) \to A^{p,\cdot}(E)$$

d'où en passant à la cohomologie un automorphisme $H^{p,q}(g^*)$ de $H^{p,q}(E)$

PROPOSITION 4. <u>L'homomorphisme naturel</u> :

$$\mathcal{G}\ell(E) \to G\,L(H^{p,q}(E))$$

<u>est holomorphe</u>.

<u>Démonstration</u>. Remarquons tout d'abord que si $L \in \mathcal{L}(E)$ est une dérivée de Lie sur E , L se prolonge de façon unique aux formes différentielles de types (p,q) à valeurs dans E :

$$\underline{L} : A^{p,q}(E) \to A^{p,q}(E)$$

de façon à vérifier la propriété évidente de dérivation. Ce prolongement vérifiant $[\underline{L},d''] = 0$ est un endomorphisme pour le complexe $A^{p,\cdot}(E)$; il induit donc en cohomologie un endomorphisme

$$H^{p,q}(\underline{L}) : H^{p,q}(E) \to H^{p,q}(E).$$

Pour vérifier que l'homomorphisme

$$g \to H^{p,q}(g^*)$$

est $\mathbb{C}$-dérivable, il suffit de vérifier qu'il est $\mathbb{C}$-dérivable au point $g = 1_E$. On peut démontrer facilement qu'il est $\mathbb{R}$-dérivable en ce point et de dérivée l'application linéaire :

$$\mathcal{L}(E) \to \mathrm{End}(H^{p,q}(E))$$

$$L \to H^{p,q}(\underline{L})$$

Reste à démontrer que cette application est $\mathbb{C}$-linéaire. Soit $i''(X)$ la partie de bidegré $(0,-1)$ de l'opérateur $i(X)$. Alors l'application

$$\mathcal{L}(E) \to \mathrm{End}(A^{p,\cdot}(E))$$

définie par

$$L \to \underline{L} - [i''(X), d'']$$

est $\mathbb{C}$-linéaire et l'on a

$$H^{p,q}(\underline{L}) = H^{p,q}(\underline{L} - [i''(X), d''])$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 4.

<u>Exemple</u>. Supposons M compacte Kälhérienne et $E = M \times \mathbb{C}$. Alors $\mathcal{GL}(E) = \mathbb{C}^* \times \mathrm{Diff}\ M$ et $\mathcal{L}(E) = \mathbb{C} \times \mathcal{C}(M)$. La dérivée en 1_E du morphisme $\mathcal{GL}(E) \to GL(H^{p,q}(M,\mathbb{C})$ est donnée par

$$(\lambda,X) \to \theta(X) + \lambda$$

Chaque classe $[\omega] \in H^{p,q}(M,\mathbb{C})$ admet un représentant ω harmonique. $\theta(X)\omega = di(X)\omega$ est alors de partie harmonique nulle. La dérivée précédente est donc :

$$(\lambda,X) \to ([\omega] \to \lambda[\omega])$$

Il en résulte que le morphisme : $\mathrm{Diff}\ M \to GL(H^{p,q}(M,\mathbb{C})$

$$\beta \to H^{p,q}((1,\beta)^*)$$

est de dérivée nulle et donc localement constant. Ceci peut se voir aussi [5] en utilisant l'isomorphisme : $\bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(M,\mathbb{C}) = H^r(M,\mathbb{C})$ et l'homotopie.

2. LA SUITE SPECTRALE

2.1 Notations

Considérons un diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow \Pi \\ & & S \end{array}$$

où Π désigne un fibré en variétés complexes compactes et E un fibré vectoriel holomorphe sur X. Posons pour $s \in S$, $X_s = \Pi^{-1}(s)$, $E_s = E|X_s$. Nous ferons l'hypothèse que la famille $(E_s)_{s\in S}$ est localement triviale c'est-à-dire :

Pour tout $s \in S$, il existe un voisinage ouvert U de s et un isomorphisme de fibrés :

$$E|\Pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times E_s$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E|\Pi^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times E_s \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & U & \end{array}$$

Exemple. Avec les notations du § 0, 2, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & P(E) \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

vérifie la condition de locale trivialité.

2.2 Cohomologie relative

Considérons la famille d'espaces vectoriels :

$$\mathbf{H}^{p,q}(E) = \bigcup_{s\in S} H^{p,q}(E_s)$$

Il résulte de l'hypothèse de locale trivialité et des considérations du § 1 que $\mathbf{H}^{p,q}(E)$ peut être muni d'une structure naturelle de fibré vectoriel holomorphe audessus de S.

Considérons d'autre part la cohomologie relative de type (p,q) à valeurs dans E. Celle-ci peut être définie de la manière suivante : soit $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ l'espace des formes de type (p,q) sur X verticales et à valeurs dans E : c'est l'espace des sections C^ω du fibré :

$$\Lambda^p \mathcal{C}^* \otimes \Lambda^q \bar{\mathcal{C}}^* \otimes E$$

où $\mathcal{C}$ est le fibré tangent vertical sur X .

On définit de manière évidente une différentielle verticale :

$$d'' : \mathcal{A}^{p,q}(E) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(E)$$

vérifiant $d''^2 = 0$, ce qui nous donne un complexe $\mathcal{A}^{p,\cdot}(E)$ dont les groupes de cohomologie sont appelés groupes de cohomologie relative à valeurs dans E , et notés $\mathcal{H}^{p,q}(E)$.

Ce sont des $C^\infty(S)$-modules. La proposition suivante donne la relation qui existe entre $\mathcal{H}^{p,q}(E)$ et $\mathbb{H}^{p,q}(E)$.

PROPOSITION 5. <u>On a des isomorphismes canoniques</u> :

$$A^{r,s}(S) \otimes_{C^\infty(S)} \mathcal{H}^{p,q}(E) \simeq A^{r,s}(S,\mathbb{H}^{p,q}(E))$$

2.3. <u>Relations entre</u> $H^{p,q}(E)$ <u>et la cohomologie de</u> S <u>à valeurs dans</u> $\mathbb{H}^{p,q}(E)$

Le but de ce paragraphe est de donner une généralisation de la suite spectrale de [5].

PROPOSITION 6. <u>Dans les notations du § 2.1 il existe pour chaque entier</u> p <u>une suite spectrale dont le terme</u> $E_2^{r,t}$ <u>est donné par</u>

$$E_2^{r,t} = \bigoplus_i H^{i,r-i}\,(S,\mathbb{H}^{p-i,t+i}(E))$$

<u>et qui a pour aboutissement, en degré</u> q , $H^{p,q}(E)$.

<u>Démonstration</u>. Considérons la filtration de $A^{p,q}(E)$ obtenue de la manière suivante

$F^r(A^{p,q}(E))$ est le sous-espace de $A^{p,q}(E)$ engendré par les formes différentielles s'écrivant

$$\sum_i \Pi^*(u_i)v_i$$

où $u_i \in A^{i,r-i}(S)$, $v_i \in A^{p-i,q-r+i}(E)$.

Cette filtration est décroissante, et le gradué associé s'écrit :

$$gr^r(A^{p,q}(E)) = \bigoplus_i A^{i,r-i}(S) \otimes_{C^\infty(S)} \mathcal{A}^{p-i,q-r+i}(E)$$

Cette filtration est compatible avec la différentielle d'' : on peut donc écrire en tant que complexes :

$$gr^r(A^{p,\cdot}(E)) = \oplus A^{i,r-i}(S) \otimes_{C^\infty(S)} \mathcal{A}^{p-i,\cdot-r+i}(E)$$

Le théorème de la suite spectrale d'un complexe filtré [3] nous dit qu'il existe une suite spectrale d'aboutissement en degré q , $H^{p,q}(E)$, et dont le terme E_1 est donné par :

$$E_1^{r,t} = H^{r+t}(gr^r(A^{p,\cdot}(E)))$$

On a donc

$$E_1^{r,t} = \bigoplus_i H^{r+t}\left(A^{i,r-i}(S) \otimes_{C^\infty(S)} \mathcal{A}^{p-i,\cdot-r+i}(E)\right)$$

Or, le $C^\infty(S)$-module $A^{i,r-i}(S)$ étant projectif [6], le foncteur

$$A^{i,r-i}(S) \otimes_{C^\infty(S)} \cdot$$

est exact. On a donc :

$$E_1^{r,t} \simeq \oplus A^{i,r-i}(S) \otimes_{C^\infty(S)} \mathcal{H}^{p-i,t+i}(E)$$

et d'après la proposition 5 :

$$E_1^{r,t} \simeq \bigoplus_i A^{i,r-i}(S,\mathbb{H}^{p-i,t+i}(E))$$

Pour calculer $E_2^{r,t}$, il faut expliciter le morphisme $d_1^{r,t}$. On peut montrer qu'il est donné, sur chaque facteur de la somme directe précédente, par la différentielle d" associée au fibré vectoriel holomorphe $\mathbb{H}^{p-i,t+i}(E)$. Il en résulte :

$$E_2^{r,t} = \bigoplus_i H^{i,r-i}(S,\mathbb{H}^{p-i,t+i}(E))$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 6.

3. Démonstration du théorème 2

Reprenons la situation décrite au § 0.2 :

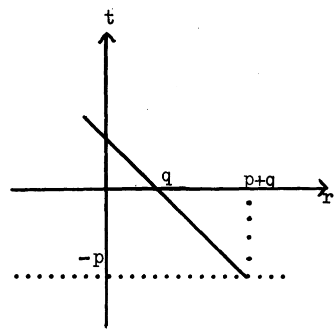
$$\begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & P(E) \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

et appliquons-lui la suite spectrale de la proposition 6. Il résulte de ce qui a été dit au § 0.1, (Exemple a)), que l'on a

$$\begin{cases} \mathbb{H}^{0,0}(Q) \simeq E \\ \mathbb{H}^{p,q}(Q) = 0 \quad \text{si} \quad (p,q) \neq (0,0). \end{cases}$$

Ainsi, pour le terme $E_2^{r,t}$ de la suite spectrale relative à l'entier p :

$$E_2^{r,t} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \neq -p \\ H^{p,r-p}(M,E) & \text{si} \quad t = -p \end{cases}$$



On voit donc que sur la diagonale $r+t = q$, le seul terme non nul correspond à $r = p+q$, $t = -p$, et on a alors :

$$E_2^{r,t} = H^{p,q}(M,E)$$

Il en résulte que morphisme canonique

$$E_2^{p+q,-p} = H^{p,q}(M,E) \to H^{p,q}(P(E),Q)$$

est un isomorphisme, ce qui démontre le théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOTT (R.) . - Homogeneous vector bundles, Ann. Math., 66 (1957), 203-248.

[2] BOTT (R.) and CHERN (S.S) . - Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections, Acta Math. 114 (1966), 71-112.

[3] GODEMENT (R.) . - Topologie Algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris (1964).

[4] GRIFFITHS (P.A.) . - Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles, Global Analysis (Paper in honor of K. Kodaira), Princeton U. Press (1970).

[5] HIRZEBRUCH (F.) . - Topological methods in algebraic geometry, Springer (1966) (Appendice by A. Borel : A spectral sequence for complex analytic bundles).

[6] HUSEMOLLER (D.) . - Fibre bundles, Mc Graw-Hill Book Company (1966).

[7] MORROW (J.) and KODAIRA (K.) . - Complex Manifolds, Holt, Rinehart and Winston Inc., New-York (1971).

(Texte reçu le 24/XI/1972

Dépt. de Mathématiques
Université de Poitiers
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS