

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-PAUL BRASSELET

Une généralisation de la formule de Riemann-Hurwitz

Mémoires de la S. M. F., tome 38 (1974), p. 99-106

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__99_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE GENERALISATION DE LA FORMULE DE RIEMANN-HURWITZ.

par Jean-Paul BRASSELET

Soient X et Y deux variétés analytiques complexes et f une application holomorphe de X dans Y . L'étude des relations existant entre les invariants des variétés X et Y et ceux de l'application f a fait l'objet d'un article de Chern [3] : certaines de ces relations sont obtenues comme généralisation de la formule de Plücker (par exemple, Pohl [5]), d'autres par application du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch (entre autres, Porteous [6]), une troisième méthode, développée par M.H. Schwartz [7], consiste à utiliser le cadre de la théorie de l'obstruction. Cette dernière méthode permet d'obtenir une généralisation de la formule de Riemann-Hurwitz dans les hypothèses suivantes :

Les variétés X et Y sont de dimensions complexes respectives n et $n+v$ ($v > 0$), X' est une sous-variété analytique complexe de X de codimension 1 et $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe telle que les restrictions de f à X' et à $X-X'$ soient des immersions.

On note TX et TY les fibrés tangents à X et Y , f^*TY le fibré image réciproque de TY et $g : TX \rightarrow f^*TY$ le morphisme induit par l'application linéaire tangente de f .

Il existe alors un unique sous-fibré E de f^*TY , de rang n et tel que $g(TX) \subset E$ [5]. On donne au paragraphe 4 (formule IV), une relation entre les classes de Chern des fibrés E , TX et TX' et l'ordre de multiplicité de f le long de X' , (voir définition au § 4). Ceci permet d'énoncer un théorème de non existence d'applications satisfaisant aux hypothèses précédentes.

On trouvera dans [2] les démonstrations détaillées des principaux résultats des paragraphes 4 et 5.

I - Formule de Riemann-Hurwitz.

1.1. Soient X et Y deux surfaces de Riemann (variétés analytiques complexes de dimension un). Si X est compacte, et si $f : X \rightarrow Y$ est une application holomorphe non constante, f admet un nombre fini de points singuliers $\{a_i\}$ avec degré topologique local $m(a_i)$ [voir ci-dessous].

La formule de Riemann-Hurwitz peut s'énoncer comme suit :

Les classes de Chern des fibrés TX , TY et f^*TY satisfont à la relation :

$$(I) \quad c_1(f^*TY) = f^*c_1(TY) = c_1(TX) + \sum_i (m(a_i) - 1)[X]$$

où $[X]$ désigne la classe fondamentale de cohomologie de X .

1.2. Définition du degré topologique local : Pour des coordonnées locales z et ζ définies au voisinage des points a_i et $f(a_i)$ respectivement et nulles en ces points, le degré topologique local de f au point a_i est l'entier $m(a_i)$ tel que :

$$\zeta = f(z) = z^{m(a_i)} h(z) \quad \text{avec} \quad h(0) \neq 0.$$

II - Première généralisation [1].

2.1. X est une surface de Riemann compacte et Y une variété analytique complexe de dimension $v+1$. Soit f une application holomorphe non constante de X dans Y , elle admet donc un nombre fini de points singuliers $\{a_i\}$.

On note $g : TX \rightarrow f^*TY$ l'application induite par l'application linéaire tangente $Tf : TX \rightarrow TY$. Il existe un sous-fibré holomorphe E , de rang un, de f^*TY et tel que $g(TX) \subset E$, il est unique à isomorphisme près.

2.2. Le degré topologique local est classiquement défini comme suit :

Soient z (resp. $\zeta_1, \dots, \zeta_{v+1}$) des coordonnées locales définies au voisinage du point x (resp. $f(x)$) et nulles en x (resp. $f(x)$). On a :

$$\zeta_j = f_j(z) = z^j h_j(z) \quad \text{avec} \quad h_j(0) \neq 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, v+1$$

On appelle degré topologique local de f en x , l'entier

$$m(x) = \inf_j m_j.$$

2.3. Dans ces conditions, on peut énoncer :

THEOREME. Les classes de Chern des fibrés E et TX sont liées par la relation :

$$(II) \quad c_1(E) = c_1(TX) + \sum_i (m(a_i) - 1)[X].$$

La méthode de démonstration est voisine de celle de la formule de Riemann-Hurwitz (cf. [1]).

COROLLAIRE. Si N désigne un supplémentaire holomorphe de E dans f^*TY , on a :

$$c_1(f^*TY) = f^*c_1(TY) = c_1(TX) + c_1(N) + \sum_i (m(a_i) - 1)[X].$$

III - Deuxième généralisation [7].

3.1. On étudie maintenant le cas où X et Y ont même dimension complexe n et on suppose qu'il existe une sous-variété analytique complexe connexe X' de X telle que les restrictions de f à X' et à $X-X'$ soient des immersions.

Ces hypothèses impliquent entre autres que f est discrète.

3.2. Le degré topologique local de f en un point x est défini de la manière suivante :

Soient U et U' des ouverts, domaines de définition de cartes locales d'origines x et $f(x)$ dans X et Y respectivement.

On note B une boule ouverte de U , centrée en x , et assez petite pour que : $f(B) \subset B'$ (où B' est une boule de U' centrée en $f(x)$) et que : $B \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Le $(2n-1)$ -ème groupe d'homologie entière de $B-\{x\}$ est canoniquement isomorphe à \mathbb{Z} . L'indice de tout cycle de $B-\{x\}$ de dimension réelle $2n-1$ est donc bien défini. Soit s un tel cycle d'indice $+1$. (Par exemple, le bord orienté d'une $2n$ -boule). On appelle degré topologique local de f en x et on note $m(x)$ l'indice du cycle $f(s)$ dans $H_{2n-1}(B'-f(x))$. Celui-ci est indépendant du choix de B, B' et s , de plus :

PROPOSITION. Le degré $m(x)$ est constant le long de X' , on le note m . [8].

3.3. Pour la cohomologie des formes différentielles, on a alors :

THEOREME. (M.H. Schwartz [7]) : Les classes de Chern des fibrés TX , TX' et TY sont liées par la relation :

$$(III) \quad c_p(f^*TY) = f^*c_p(TY) = c_p(TX) + (m-1)\mu^*c_{p-1}(TX') \quad p = 1, \dots, n$$

où μ^* est le morphisme composé de l'isomorphisme de Thom-Gysin

$$H^{2(p-1)}(X') \rightarrow H^{2p}(X, X-X')$$

et de l'homomorphisme canonique $H^{2p}(X, X-X') \rightarrow H^{2p}(X)$. Dans le cas compact, μ^* coïncide avec le morphisme déduit de l'injection $i : X' \hookrightarrow X$ par commutativité du diagramme suivant (où les flèches verticales sont des isomorphismes de dualité de Poincaré) :

$$\begin{array}{ccc} H_{2(n-p)}(X') & \xrightarrow{i_*} & H_{2(n-p)}(X) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ H^{2(p-1)}(X) & \xrightarrow{\mu_*} & H^{2p}(X) \end{array}$$

3.4. Méthode de démonstration [7].

1°) On désigne par $T_r(X)$ le fibré associé à TX et de fibre type l'espace F_r des r -repères de \mathbb{C}^n , (espace fibré des r -repères tangents à X). La dimension réelle d'obstruction à la construction d'une section de $T_r(X)$ est $2p$, avec $p = n-r+1$ ($H_k(F_r) = 0$ si $k < 2p-1$ et $H_{2p-1}(F_r) \cong \mathbb{Z}$).

Pour toute triangulation (D) de X on peut donc faire la construction suivante : on se donne une section Z_{r-1} de $T_{r-1}(X)$ au-dessus du $2p$ -squelette de (D) noté $(D)^{2p}$, puis une section $Z_r = (Z_{r-1}, X_r)$ de $T_r(X)$ au-dessus de $(D)^{2p-1}$. Le champ de r -repères Z_r peut être étendu au-dessus de $(D)^{2p}$ avec des points singuliers isolés $\{a_i\}$. En ces points, le dernier vecteur X_r de Z_r n'est pas défini, mais on peut demander que le comportement du champ au voisinage de a_i soit le suivant : il existe une $2p$ -boule b_i , de bord \dot{b}_i et ne contenant que le point a_i comme singularité de Z_r , le relèvement de $\dot{b}_i - \{a_i\}$ dans $T_r(X)$ défini par Z_r est une $2p$ -sous-variété à bord formée de $Z_r(\dot{b}_i)$ et d'une sous-variété située dans la fibre au-dessus de a_i . Cette sous-variété est un $(2p-1)$ -cycle γ_i . L'indice du champ Z_r en son point singulier a_i (noté $I(Z_r, a_i)$), est par définition l'entier correspondant à la classe de γ_i dans $H_{2p-1}(T_r(X)|_{a_i})$.

2°) La classe de Chern $c_p(TX)$ mesure l'obstruction à la construction d'un tel champ de r -repères Z_r , section de $T_r(X)$. Par hypothèse, les restrictions de f à X' et à $X-X'$ sont des immersions, pour que l'image de Z_r par Tf permette de calculer $c_p(f^*TY)$, c'est-à-dire n'ait pas d'autres singularités que les images des points singuliers de Z_r , il faut donc que Z_r soit tangent à X' le long de X' . Comme la dimension réelle d'obstruction à la construction d'une section de $T_r(X')$ est $2(p-1)$, nous sommes amenés à la construction suivante :

On considère une triangulation simpliciale (K) de X compatible avec la stratification $(X', X-X')$ de X et (D) une triangulation cellulaire duale construite à l'aide d'une subdivision barycentrique (Δ) de (K) . L'intersection de X' avec une $2p$ -cellule de (D) est un $2(p-1)$ -complexe de (Δ) .

On construit d'abord Z_r le long de $(D)^{2p} \cap X'$ avec des points singuliers $\{a_i\}_{i \in I}$ (voir ci-dessus) puis on l'étend par une méthode de prolongement radial dans tout $(D)^{2p}$ avec de nouveaux points singuliers $\{a_i\}_{i \in J}$ [7, § 2].

$g : TX \rightarrow f^*TY$ étant l'application définie en introduction, on a alors [8, § 15] :

$$I(g(Z_r), a_i) = I(Tf(Z_r), f(a_i)) = I(Z_r, a_i) \quad \text{si } a_i \in X-X'$$

$$I(g(Z_r), a_i) = I(\text{Tr}(Z_r), f(a_i)) = m \cdot I(Z_r, a_i) \quad \text{si } a_i \in X'.$$

3°) Considérons les formes différentielles suivantes (définies par Chern) :

Ω_r^0 est la 2p-forme différentielle définie sur Y et telle que

a) Ω_r^0 appartient à la classe obstructrice de $T_r(Y)$ pour la cohomologie des formes différentielles complexes.

b) Soit π la projection de $T_r Y$ sur sa base, la 2p-forme différentielle $\Omega_r = \pi^* \Omega_r^0$ définie sur $T_r(Y)$ est exacte, on a $\Omega_r = -d\Pi_r$ et la restriction de Π_r à toute fibre appartient à la classe fondamentale.

Les formes transposées $f^* \Pi_r$ et $f^* \Omega_r$ sont définies sur l'espace pseudo-fibré $T_r(X)$ des r-repères tangents à X' (resp. $X-X'$) le long de X' (resp. $X-X'$). Soit D_α une 2p-cellule de (D) , pour tout point a_i , point singulier de Z_r dans D_α , on note encore b_i une 2p-boule de D_α et ne contenant que le point a_i comme singularité de Z_r . La formule (III) s'obtient en écrivant la formule de Stokes pour les formes $f^* \Pi_r$ et $f^* \Omega_r$ et pour le relèvement par Z_r de $D_\alpha - \bigcup_i b_i$ [7, p. 418].

IV - Cas général [2].

4.1. On se place maintenant dans le cas où la dimension complexe de Y , $(n+v)$ est supérieure à celle de X , (n) . Soit X' une sous-variété analytique complexe connexe de X de dimension $n-1$ et $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe telle que les restrictions de f à X' et à $X-X'$ soient des immersions.

PROPOSITION [5]. Il existe un sous-fibré holomorphe E de rang n de f^*TY tel que $g(TX) \subset E$. E est déterminé de façon unique, on le munit du morphisme holomorphe $\Phi : TX \rightarrow E$ induit par g .

THEOREME. Les classes de Chern de TX , TX' et E sont liées par la relation :

$$(IV) \quad c_p(E) = c_p(TX) + (m-1) \mu^* c_{p-1}(TX') \quad p = 1, \dots, n$$

où m est défini ci-dessous (4.3) et μ^* est le morphisme défini en 3.2.

4.2. Avant de définir l'ordre de multiplicité locale, on démontre une propriété du cône tangent :

L'application f est discrète, donc localement propre : pour tout point x de X il existe un couple (U, U') de voisinages de x et $f(x)$ respectivement tels que la restriction de f à U soit une application propre dans U' . (Par la suite, on supposera U et U' inclus dans des domaines de définition de cartes

locales de X et Y respectivement et on les identifiera à des ouverts de \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^{n+v}).

D'après le théorème de Remmert, $f(U)$ est un sous-ensemble analytique de U' . En tout point $\xi = f(x)$ de $f(U)$ le cône tangent $C(f(U), f(x))$, noté $C(\xi)$, est défini comme l'ensemble des vecteurs limites de $\lambda_1(\xi_1 - \xi)$ où $\{\xi_1\}$ est une suite de points de $f(U)$ tendant vers $\xi = f(x)$ et $\{\lambda_1\}$ une suite de nombres complexes [9].

Le cône tangent $\Omega(\xi)$ est un ensemble analytique complexe de dimension n [9]. De plus :

PROPRIÉTÉ. L'ensemble des v -plans complexes de \mathbb{C}^{n+v} tels que $C(\xi) \cap Q = \{\xi\}$ est non vide et son image canonique dans la grassmannienne des v -plans complexes de \mathbb{C}^{n+v} est connexe par arcs. (*).

Principe de démonstration :

La première assertion a été démontrée par Whitney [9]. On donne ici le principe d'une démonstration de la seconde : l'espace vectoriel tangent à Y en ξ étant identifié à \mathbb{C}^{n+v} , on note $C^*(\xi)$ l'image canonique de $C(\xi)$ dans l'espace projectif complexe $P(\mathbb{C}^{n+v})$.

Le résultat est évident si $v = 1$. En effet $C^*(\xi)$ est un sous-ensemble analytique complexe de codimension 1 de $P(\mathbb{C}^{n+v})$ [9].

Sinon, pour toute droite Δ du cône, l'ensemble des v -plans complexes qui contiennent Δ est isomorphe à G_{v-1}^n (grassmannienne des $(v-1)$ -plans complexes de \mathbb{C}^{n+v-1}). Si $V_j^*(j=1, \dots, n+v)$ désigne l'image dans $P(\mathbb{C}^{n+v})$ des droites du cône non orthogonales au j -ème axe de coordonnées de \mathbb{C}^{n+v} , on construit une application holomorphe $k_j : V_j^* \times G_{v-1}^n \rightarrow G_v^n$ dont l'image est l'ensemble des v -plans complexes contenant une droite de V_j^* . Comme $C^*(\xi) \times G_{v-1}^n$ (recouvert par les $V_j^* \times G_{v-1}^n$) est un ensemble analytique complexe de dimension $nv-1$, que G_v^n est un espace de Baire et que les k_j sont holomorphes, on démontre que la réunion des $k_j(V_j^* \times G_{v-1}^n)$ est de complémentaire connexe dans G_v^n .

4.3. Ordre de multiplicité locale m .

Soit comme précédemment (3.2.), B une $2n$ -boule de U centrée en x et telle que :

- (i) $f(B) \subset B'$ (où B' est une $2(n+v)$ -boule ouverte de U').

(*) Mme M.H. Schwartz m'a fait remarquer qu'elle est également dense et connexe dans la grassmannienne. Nous ne nous en servons pas ici.

$$(ii) \quad B \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\} .$$

Si s est un $(2n-1)$ -cycle de $B-\{x\}$ d'indice $+1$, $f(s)$ est un $(2n-1)$ -cycle de $B'-\{f(x)\}$. On peut construire s dans une boule assez petite pour que $f(s)$ soit dans $\mathbb{C}^{n+v}-Q$. Cet espace admet pour rétract $\mathbb{C}^n-\{0\}$ et son $(2n-1)$ -ème groupe d'homologie entière est canoniquement isomorphe à \mathbb{Z} . L'indice de $f(s)$ dans $H_{2n-1}(\mathbb{C}^{n+v}-Q)$ est alors bien défini, on le note $m_Q(x)$. Il ne dépend pas du choix de B, B' et s . A l'aide de la propriété précédente du cône tangent (4.2.), on démontre la :

PROPOSITION. $m_Q(x)$ ne dépend pas de Q tel que $C(\xi) \cap Q = \{\xi\}$.

DEFINITION. On appelle ordre de multiplicité locale de f au point x , et on note $m(x)$ l'entier $m_Q(x)$ correspondant à un v -plan complexe Q tel que $C(\xi) \cap Q = \{\xi\}$.

PROPOSITION. Il existe un sous-ensemble analytique complexe strict A de V' tel que l'ordre de multiplicité locale de f soit constant le long de $X'-A$. On le note alors m .

Ce résultat se démontre à l'aide d'un théorème de K. Kending [4] affirmant que tout ensemble analytique complexe de dimension n admet une stratification telle que tout point d'une $(n-1)$ -strate possède un voisinage fibré semi-analytiquement. Ceci assure en quelque sorte une continuité du cône tangent le long de $X'-A$.

4.4. La formule (IV) s'obtient alors par une démonstration semblable à celle de M.H. Schwartz et à l'aide de lemmes destinés à prouver que celle-ci, faite pour le triplet (TX, f^*TY, g) , reste vraie pour le triplet (TX, E, ϕ) .

V - Remarques finales.

5.1. Un résultat identique pour X' non connexe s'écrit sans difficulté.

5.2. Le fait que X' soit de codimension 1 est important pour deux raisons :

- (i) Le fibré E n'existe que si X' est de dimension $n-1$ [5].
- (ii) Le résultat de Kending [4] n'est, à l'heure actuelle, démontré que pour les strates de codimension 1.

5.3. Théorème de non-existence.

Supposons donnés une variété analytique complexe X de dimension n , une sous-variété analytique complexe X' de X connexe et de codimension 1 et un entier positif m . On peut calculer

$$c(TX) + (m-1) \mu^* c(TX') .$$

Le terme de degré 0 de cette expression est 1 et son degré maximum est $2n$, l'application λ qui à toute classe de Chern fait correspondre le caractère de Chern correspondant s'étend à cet élément et on peut calculer :

$$k(X, X', m) = \text{ch}^{-1} \lambda(c(TX) + (m-1) \mu^* c(TX'))$$

où ch est l'isomorphisme "caractère de Chern".

THEOREME. Si $k(X, X', m)$ n'est pas élément positif de $K(X) \otimes R$, c'est-à-dire ne correspond à aucun fibré, il n'existe pas de triple (Y, f, A) satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) Y est une variété analytique complexe de dimension supérieure ou égale à n .

(ii) f est une application holomorphe de X dans Y dont les restrictions à X' et à $X-X'$ sont des immersions.

(iii) A est un sous-ensemble analytique strict de X' tel que l'ordre de multiplicité de f soit égal à m le long de $X'-A$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRASSELET (J.P.) . - Compte-rendu, 269, Série A, 900-903, (1969).
- [2] BRASSELET (J.P.) . - Bull. Soc. Math. Belgique, XXV, 1, 25-52 (1973).
- [3] CHERN (S.S.) . - L'enseignement mathématique 7, (1961).
- [4] KENDING (K.) . - Pacific Journal of Math., 34, n°2 (1970).
- [5] POHL (W.F.) . - Proc. of the conference on complex analysis, Minneapolis (1964).
- [6] PORTEOUS (I.R.) . - Proc. Cambridge Phil. Soc. 56, part. 2 (1960).
- [7] SCHWARTZ (M.H.) . - Bull. Soc. Math. Belgique, 19, fasc. 4 (1967).
- [8] SCHWARTZ (M.H.) . - Acta Mathematica, 91 (1954).
- [9] WHITNEY (H.) . - Ann. of Math, 81, (1965).

Texte reçu le 30/VI/1972, révisé le 14/XI/1972

Département de Mathématiques
Université de Lille I

59 VILLENEUVE D'ASCQ