A. FOUQUES

Systèmes de a-idéaux dans un demi-groupe non commutatif

Mémoires de la S. M. F., tome 15 (1968)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1968__15__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 15, 1968, 88 p.

SYSTÈMES DE a-IDÉAUX DANS UN DEMI-GROUPE NON COMMUTATIF,

par

Alfred FOUQUES (*)

-.-

TABLE DES MATIÈRES.

(*) Thèse Sc. math. Nantes, 1967.

Chapitre IV
Demi-groupes $\mathcal{A}_S$-normaux

-.-

INTRODUCTION

LORENZEN a donné, en 1939, une forme axiomatique à la théorie des idéaux sur un groupe abélien ordonné. On connait son importance pour l'étude de la divisibilité dans un corps commutatif relativement à un ordre de ce corps. K.E. AUBERT a développé, en 1957, une théorie des idéaux, les x-systèmes, sur un demi-groupe commutatif n'ayant pas nécessairement d'élément unité et n'étant pas nécessairement un semi-groupe. Appliquée au cône positif d'un groupe ordonné, la notion de x-système d'AUBERT est plus générale que celle de r-système de LORENZEN. Dans le cas non commutatif, AUBERT a proposé une axiomatique prolongeant celle qu'il avait donnée dans le cas commutatif. Mais cette dernière généralisation présente des inconvénients, par exemple l'ensemble des idéaux bilatères (au sens ordinaire) d'un anneau non commutatif ne constitue pas, en général, un x-système bilatère. L'objet du premier chapitre de ce travail est de donner une axiomatique qui prolonge au cas non commutatif la théorie (commutative) d'AUBERT, et qui soit applicable aux systèmes d'idéaux usuels (idéaux d'un demi-groupe, d'un demi-anneau, d'un anneau, ...).

Un a-système à gauche sur un demi-groupe D est défini par une application, $X \xrightarrow{\theta} \bar{X}$, de l'ensemble des complexes de D dans lui-même telle que $X \subseteq \bar{X}$; $X \subseteq \bar{Y} \Longrightarrow \bar{X} \subseteq \bar{Y}$, $\overline{\bar{X}\bar{Y}} \subseteq \overline{XDY \cup XY}$, $D\bar{X} \subseteq \bar{X}$. Une telle application est une opération de fermeture. Ayant défini l'union et la multiplication des a-idéaux, un a-système à gauche, ordonné par inclusion est un demi-anneau, un demi-groupe ordonné quasi-entier à gauche, résidué à droite, un gerbier complet (un demi-groupe réticulé, résidué à gauche si le demi-groupe D possède un élément permis à droite). C'est pourquoi les structures ordonnées et la résiduation joueront un rôle important dans la suite.

Les demi-groupes appelés "renversables d'un coté"(un demi-groupe D est renversable à gauche si $XDY \subseteq XY \cup DXY$, $\forall$ X, Y $\subseteq$ D)ont des propriétés qui, du point de vue de la théorie des a-idéaux, les rapprochent beaucoup des demi-groupes commutatifs. C'est pour les demi-groupes renversables d'un côté que la notion de x-système bilatère coincide avec la notion de a-système bilatère. Les demi-groupes multiplicatifs des anneaux sous-commutatifs, étudiés par BARBILIAN, sont renversables d'un coté.

On sait que l'étude des anneaux de DEDEKIND est facilitée par l'introduction des idéaux fractionnaires. Ceci nous a conduit (chapitre 2) à associer à un a-système $\mathcal{A}$ défini sur un demi-groupe D un a-système "S-fractionnaire" sur un demi-groupe de fractions à droite de D pour un complexe S. Nous avons été contraint d'imposer à S et à $\mathcal{A}$ un certain nombre de conditions. Pour pouvoir faire intervenir la résiduation, qui jouera un rôle important, nous nous restreindrons dans les chapitres 3 et 4 aux a-idéaux S-fractionnaires qui sont "S-réguliers".

Dans les chapitres 3 et 4, nous nous sommes proposé d'étendre les notions d'anneau de DEDEKIND et d'anneau de KRULL. Un demi-groupe unitaire D, non nécessairement commutatif, est dit $\mathcal{A}_S$-dedekindien ($\mathcal{A}$: a-système bilatère sur D, S: complexe de D) si l'ensemble des a-idéaux entiers S-réguliers est un demi-groupe de DEDEKIND (c'est-à-dire un demi-groupe ordonné entier où tout élément s'écrit d'une manière unique sous la forme d'un produit fini d'éléments maximaux deux à deux permutables). Cette définition généralise celle d'un anneau de DEDEKIND. Un demi-groupe unitaire D, non nécessairement commutatif, est dit $\mathcal{A}_S$-normal si l'équivalence d'ARTIN, $\mathfrak{a}$, dans l'ensemble des a-idéaux S-réguliers, r($\mathcal{A}_S$), est régulière pour la multiplication et si le demi-groupe-quotient r($\mathcal{A}_S$)/$\mathfrak{a}$ est un demi-groupe de DEDEKIND. Si D est le demi-groupe multiplicatif d'un anneau intègre, $\mathcal{A}$ le a-système formé par les idéaux de l'anneau, S l'ensemble des éléments non nuls de l'anneau, D est $\mathcal{A}_S$-normal si, et seulement si, l'anneau considéré est un anneau de KRULL. La définition d'un demi-groupe $\mathcal{A}_S$-normal généralise également celle de la S-normalité donnée par GUERINDON dans le cas des anneaux commutatifs. Ceci nous a amené à établir certains résultats concernant les demi-groupes réticulés et résidués, en particulier à établir des conditions assurant la permutabilité des éléments maximaux dans un demi-groupe entier, à examiner les propriétés de l'équivalence d'ARTIN dans un gerbier non entier où la multiplication n'est pas supposée commutative. Nous avons obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un demi-groupe soit $\mathcal{A}_S$-dedekindien ($\mathcal{A}_S$-normal) prolongeant les conditions connues pour qu'un anneau soit un anneau de DEDEKIND (de KRULL). Des exemples de demi-groupes non commutatifs $\mathcal{A}_S$-dedekindiens ou $\mathcal{A}_S$-normaux, et des contre-exemples, terminent le chapitre 4.

La terminologie suivie dans ce travail est celle utilisée dans les "Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques" de Mme DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT.

J'adresse mes vifs remerciements à M. LESIEUR, professeur à la Faculté des Sciences d'ORSAY, rapporteur de cette thèse, et à M. GUERINDON, professeur à la Faculté des Sciences de RENNES, dont les conseils et les encouragements m'ont été précieux. Je remercie également M. BRILLOUET, doyen de la Faculté des Sciences de NANTES, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury, et M. PETRESCO, professeur à la Faculté des Sciences de NANTES qui a bien voulu me donner mon second sujet.

-:-:-:-

CHAPITRE I

Axiomatique des a-idéaux

1. Définition des a-idéaux et propriétés de fermeture.

Dans toute la suite nous désignerons par D un demi-groupe multiplicatif, par $\mathcal{P}(D)$ l'ensemble des parties de D, par $\mathcal{P}'(D)$ l'ensemble des complexes ou parties non vides de D, par X.Y ou XY l'ensemble des éléments de D de la forme xy, avec $x \in X$, $y \in Y$, X et Y étant deux complexes de D.

Les symboles $\subseteq$ et $\supseteq$ seront utilisés pour des inclusions au sens large, $\subset$ et $\supset$ étant réservés aux inclusions strictes.

Définition 1.1. Nous appellerons "a-opération à gauche" (resp. "a-opération à droite", "a-opération bilatère") une application

$$f: \; X \in \mathcal{P}'(D) \Longrightarrow \overline{X} \in \mathcal{P}'(D)$$

satisfaisant aux axiomes suivants:

(A1)	$X \subseteq \overline{X}$, $\forall \; X \in \mathcal{P}'(D)$,
(A2)	$X \subseteq \overline{Y} \Longrightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$, $\forall \; X, Y \in \mathcal{P}'(D)$
(gA3)	$D\overline{X} \subseteq \overline{X}$, $\forall \; X \in \mathcal{P}'(D)$,
	(resp. (dA3) $\overline{X}\, D \subseteq \overline{X}$, $\forall \; X \in \mathcal{P}'(D)$,
	(A3) $\overline{X}\, D \cup D\, \overline{X} \subseteq \overline{X}$, $\forall \; X \in \mathcal{P}'(D)$).
(A4)	$\overline{X}\,\overline{Y} \subseteq \overline{XDY \cup XY}$, $\forall \; X, Y \in \mathcal{P}'(D)$.

Une a-opération bilatère est à la fois une a-opération à gauche et une a-opération à droite. Si D est commutatif, les trois notions se confondent.

Définitions 1.2. f étant une a-opération à gauche définie sur D, l'image $\overline{X}$ du complexe X sera appelée le "a-idéal à gauche engendré par X". Le complexe X constitue un "générateur" du a-idéal $\overline{X}$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ des a-idéaux à gauche définis par f est un "a-système à gauche défini sur D", ou un "système de a-idéaux à gauche défini sur D".

Dans un a-système à gauche $\mathcal{A}$ un a-idéal $\overline{X}$ tel que $\overline{X}\, D \subseteq \overline{X}$ sera appelé un "a-idéal bilatère" de $\mathcal{A}$ (cf Remarque 4.5).

Remarques 1.1.

a) Le a-idéal engendré par le complexe $\{x\}$ réduit à un seul élément sera noté $\overline{x}$ au lieu de $\overline{\{x\}}$.

b) Un a-idéal à gauche est un idéal à gauche (au sens ordinaire) du demi-groupe D.

c) Le a-idéal engendré par D est égal à D. Il sera noté D.

Définitions 1.3.

a) l'application

$$X \in \mathcal{P}'(D) \xrightarrow{\theta} \overline{X} = D$$

est une a-opération bilatère. Le a-système qu'elle définit sera appelé le "a-système impropre".

b) L'application qui, au complexe X associe l'idéal à gauche $\overline{X}$ (au sens ordinaire d'idéal à gauche dans un demi-groupe) est une a-opération à gauche. Le a-système qu'elle définit sera appelé le "d-système à gauche" et $\overline{X}$ sera le "d-idéal à gauche" engendré par X.

c) Si D est le demi-groupe multiplicatif d'un anneau, l'application qui, au complexe X associe l'idéal à gauche $\overline{X}$ (au sens ordinaire d'idéal à gauche dans un anneau) est une a-opération à gauche et le a-système qu'elle définit sera appelé le "k-système à gauche". $\overline{X}$ est le "k-idéal à gauche" engendré par X.

d) On définit de même le "d-système à droite", le "d-système bilatère", le "k-système à droite", le k-système bilatère".

Remarque 1.2. Si D contient un élément unité à droite, noté e, et si X contient un élément inversible à gauche par rapport à e, $\overline{X} = D$. Par suite:

a) Si D est un groupe (pour la loi de demi-groupe) le a-système impropre (qui est également le d-système) est le seul a-système que l'on puisse définir sur D.

b) Si D est le demi-groupe multiplicatif d'un corps, le a-système impropre et le d-système bilatère(qui est également le k-système bilatère) sont les seuls a-systèmes que l'on puisse définir sur D.

Remarque 1.3. La conjonction des axiomes (A1) et (A2) est équivalente à la conjonction des axiomes (A1), (A2a) et (A2b), où

(A2a) $X \subseteq Y \Longrightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}, \ \forall X, Y \in \mathcal{P}'(D)$

(A2b) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}, \ \forall X \in \mathcal{P}'(D)$.

Une a-opération à gauche est donc une application de fermeture sur $\mathcal{P}'(D)$.

Il en résulte les conséquences suivantes:

a) $(\overline{X}_i)_{i \in I}$ étant une famille non vide de a-idéaux, dont l'intersection est non vide, $\bigcap_i \overline{X}_i$ est un a-idéal.

b) Le a-idéal engendré par le complexe X est l'intersection des a-idéaux contenant X.

c) $(X_i)_{i \in I}$ étant une famille non vide de complexes dont l'intersection est non vide $\overline{\bigcap_i X_i}$ est contenu dans $\bigcap_i \overline{X}_i$.

d) $(\bar{X}_i)_{i\in I}$ étant une famille non vide de a-idéaux

$$\bigcup_i \bar{X}_i \subseteq \overline{\bigcup_i X_i} = \overline{\bigcup_i \bar{X}_i} .$$

Définition 1.4. $(\bar{X}_i)_{i\in I}$ étant une famille non vide de a-idéaux, nous appellerons "union" de la famille $(\bar{X}_i)$, et nous noterons $\bigvee_i \bar{X}_i$, le a-idéal $\overline{\bigcup_i \bar{X}_i}$

Définition 1.5. $(\bar{X}_i)_{i\in I}$ étant une famille finie non vide de a-idéaux, nous appellerons "somme" de la famille $(\bar{X}_i)$ l'union des a-idéaux de cette famille.
Si $I = \{1, 2, \dots , n\}$ la somme de la famille $(\bar{X}_i)$ sera notée $\sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i$, ou encore $\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n$.

L'addition des a-idéaux est une opération associative, commutative, idempotente. Elle possède également les propriétés suivantes:

a) $\bar{X} \subseteq \bar{Y} \Longrightarrow \bar{X} + \bar{Z} \subseteq \bar{Y} + \bar{Z}$, $\forall \bar{Z}$,

(d'où $\bar{X} \subseteq \bar{X}'$ et $\bar{Y} \subseteq \bar{Y}' \Longrightarrow \bar{X} + \bar{Y} \subseteq \bar{X}' + \bar{Y}'$) ,

b) $\bar{X} \subseteq \bar{X} + \bar{Y}$ et $\bar{Y} \subseteq \bar{X} + \bar{Y}$,

c) $\bar{X} + \bar{Y} = \bar{Y} \Longleftrightarrow \bar{X} \subseteq \bar{Y}$,

d) $\bar{X} + (\bar{X} \cap \bar{Y}) = \bar{X}$ et $\bar{X} \cap (\bar{X} + \bar{Y}) = \bar{X}$.

Proposition 1.1. La relation d'ordre définie sur un a-système $\mathcal{A}$ par l'inclusion des a-idéaux ($\bar{X} \leq \bar{Y} \Longleftrightarrow \bar{X} \subseteq \bar{Y}$) munit $\mathcal{A}$ d'une structure de demi-treillis complet.

La borne supérieure d'une famille $(\bar{X}_i)_{i\in I}$ non vide de a-idéaux est l'union $\bigvee_i \bar{X}_i$.
Le a-idéal D est l'élément universel de ce demi-treillis.

S'il existe un élément commun à tous les a-idéaux du système (condition réalisée, en particulier, dans un a-système à gauche si D contient un élément permis à droite, cf proposition 2.6) la relation d'ordre précédente donne à $\mathcal{A}$ une structure de treillis complet.

2. Multiplication des a-idéaux et résiduation.

Proposition 2.1. Compte tenu de (A1) et (A2) l'axiome (gA3) est équivalent à l'axiome

(gA'3) $\quad D\, x \subseteq \bar{x}$, $\forall x \in D$.

Les axiomes (gA3) et (A1) impliquent (gA'3). Inversement (gA'3), (A1) et (A2) donnent

$$D\,\bar{X} = D\,(\bigcup_{x\in\bar{X}} \{x\}) = \bigcup_{x\in\bar{X}} (Dx) \subseteq \bigcup_{x\in\bar{X}} \bar{x} = \bar{X} .$$

<u>Proposition 2.2</u>. Compte tenu des axiomes (A1), (A2), (gA3), l'axiome (A4) est équivalent à l'axiome

$$\text{(A'4)} \quad \bar{X}\,\bar{Y} = \overline{XDY \cup XY}\ , \ \forall\, X, Y \in \mathcal{G}'(D)\ .$$

Les axiomes (A1), (A2), (gA3) donnent $\overline{XD\bar{Y}} \subseteq \overline{\bar{X}D\bar{Y}} \subseteq \overline{\bar{X}\bar{Y}}$ et $\overline{XY} \subseteq \overline{\bar{X}\bar{Y}}$, donc $\overline{XDY \cup XY} = \overline{XDY} + \overline{XY} \subseteq \overline{\bar{X}\bar{Y}}$. De plus (A2) et (A4) donnent $\overline{\bar{X}\bar{Y}} \subseteq \overline{XDY \cup XY}$, de sorte que (A'4) est vérifié. Inversement si (A'4) est satisfait, il en est de même de (A4) d'après (A1).

<u>Remarques 2.1</u>. Si D contient un élément unité (d'un seul côté ou bilatère) l'axiome (A4) est équivalent à chacun des axiomes suivants:

$$\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{XDY} \quad \text{ou} \quad \overline{\bar{X}\,\bar{Y}} = \overline{XDY}\ .$$

Si D est commutatif, (A4) est équivalent à chacun des axiomes

$$\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{XY} \quad \text{ou} \quad \overline{\bar{X}\,\bar{Y}} = \overline{XY}\ .$$

(voir aussi Proposition 7.3.)

<u>Définition 2.1</u>. Nous appellerons "produit" de deux a-idéaux $\bar{X}$ et $\bar{Y}$, pris dans cet ordre, et nous noterons $\bar{X}\circ\bar{Y}$, le a-idéal $\overline{\bar{X}\,\bar{Y}}$.

L'axiome (A4) s'énonce alors

$\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \bar{X}\circ\bar{Y} = \overline{XDY} + \overline{XY}$, dans le cas général ,

$\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \bar{X}\circ\bar{Y} = \overline{XDY}$, si D contient un élément unité d'un côté ou bilatère ,

$\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \bar{X}\circ\bar{Y} = \overline{XY}$, si D est commutatif.

<u>Remarque 2.2.</u> Dans un a-système à gauche $\mathcal{A}$,

a) $D\circ\bar{X} = \overline{DX} \subseteq \bar{X}$,

b) $\bar{X}\circ D = \overline{XD}$,

c) $D\circ\bar{X} = \overline{DX} = \bar{X} = D\,\bar{X}$, si D possède une unité à gauche ,

d) $\bar{X} \subseteq \bar{X}\circ D = \overline{XD}$, si D possède une unité à droite,

e) $\bar{X} + \bar{X}\circ D$ est le a-idéal bilatère engendré par $\bar{X}$ dans $\mathcal{A}$, autrement dit l'intersection des a-idéaux bilatères de $\mathcal{A}$ contenant $\bar{X}$.

<u>Proposition 2.3</u>. La multiplication des a-idéaux est une opération associative.

Les a-idéaux $\bar{X}\circ(\bar{Y}\circ\bar{Z})$ et $(\bar{X}\circ\bar{Y})\circ\bar{Z}$ sont égaux au a-idéal engendré par le complexe $XYZ \cup XDYZ \cup XYDZ \cup XDYDZ$.

La multiplication définit donc une structure de demi-groupe sur un a-système. C'est d'elle qui s'agira quand un a-système sera considéré comme demi-groupe.

Proposition 2.4. La multiplication vérifie la propriété de distributivité générale à gauche et à droite par rapport à l'union.

Les a-idéaux $\bar{X}\circ(\bigvee_i \bar{Y}_i)$ et $\bigvee_i(\bar{X}\circ\bar{Y}_i)$ sont égaux au a-idéal engendré par $\bigcup_i (XDY_i \cup XY_i)$. De même les a-idéaux $(\bigvee_i \bar{Y}_i)\circ\bar{X}$ et $\bigvee_i(\bar{Y}_i\circ\bar{X})$ sont égaux au a-idéal engendré par $\bigcup_i (Y_iDX \cup Y_iX)$.

L'addition et la multiplication des a-idéaux définissent donc sur un a-système une structure de demi-anneau.

Proposition 2.5. Un a-système à gauche $\mathcal{A}$ est un demi-groupe ordonné, quasi-entier à gauche. C'est aussi un gerbier complet. De plus, si D possède un élément permis à droite, $\mathcal{A}$ est un demi-groupe réticulé.

En effet, $\bar{X}\subseteq\bar{Y}$ implique $\bar{X}\,\bar{Z}\subseteq\bar{Y}\,\bar{Z}$ et $\bar{Z}\bar{X}\subseteq\bar{Z}\bar{Y}$, donc $\bar{X}\circ\bar{Z}\subseteq\bar{Y}\circ\bar{Z}$ et $\bar{Z}\circ\bar{X}\subseteq\bar{Z}\circ\bar{Y}$. De plus, $\bar{X}\circ\bar{Y}\subseteq\bar{D}\circ\bar{Y}\subseteq\bar{Y}$. Les propositions 1.1., 2.3. et 2.4. permettent d'achever la démonstration.

Proposition 2.6. S'il existe dans D un élément permis à droite, ω, le a-idéal $\bar{\omega}$ engendré par ω dans un a-système à gauche est tel que

a) $\bar{\omega}\subseteq\bar{X}$, $\forall\bar{X}$,
b) $\bar{X}+\bar{\omega}=\bar{X}$, $\forall\bar{X}$,
c) $\bar{X}\circ\bar{\omega}=\bar{\omega}\circ\bar{X}=\bar{\omega}$, $\forall\bar{X}$.

Proposition 2.7. Dans un a-système à gauche ou à droite

a) $\bar{X}\circ D\circ\bar{Y}=\overline{XDY}=\overline{\bar{X}\,DY}=\overline{XD\,\bar{Y}}=\overline{\bar{X}\,D\,\bar{Y}}$,
b) $\bar{X}\circ\bar{Y}\circ\bar{Z}=\overline{\bar{X}\,\bar{Y}\,\bar{Z}}$.

Dans un a-système à gauche $\overline{\bar{X}\,Y}\subseteq\bar{X}\circ\bar{Y}=\overline{X\,\bar{Y}}$.

Ce sont des conséquences de la définition 2.1. et du fait qu'une a-opération est une application de fermeture.

Proposition 2.8. Un a-système à gauche est un demi-groupe résidué à droite.

$\mathcal{A}$ étant un gerbier complet quasi-entier à gauche $\bar{X}\cdot{}^{\bullet}\bar{Y}$ existe quels que soient $\bar{X}$ et $\bar{Y}$. De plus $\bar{X}\cdot{}^{\bullet}\bar{Y}$ est l'union de l'ensemble non vide des $\bar{Z}$ tels que $\bar{Y}\circ\bar{Z}\subseteq\bar{X}$ (cf [13], p.158, th.4).

Remarque 2.3. $\bar{X}\cdot{}^{\bullet}\bar{Y}$ est contenu dans l'ensemble $E_d(\bar{X},\bar{Y})$ des x tels que $\bar{Y}\,x\subseteq\bar{X}$. Mais l'égalité n'a pas nécessairement lieu (cf remarque 3.3. chapitre 2).
De façon précise il y a équivalence entre les trois propriétés

a) $\bar{X}\cdot{}^{\bullet}\bar{Y}=E_d(\bar{X},\bar{Y})$,
b) $\bar{Y}\,x\subseteq\bar{X}\Longrightarrow\bar{Y}\,\bar{x}\subseteq\bar{X}$,
c) $\bar{Y}\,x\subseteq\bar{X}\Longrightarrow\bar{Y}\,Dx\subseteq\bar{X}$.

(voir aussi proposition 5.4.).

Remarque 2.4. Un a-système à gauche n'est pas nécessairement résidué à gauche (cf Remarque 3.3. chapitre 2). De façon précise:

Proposition 2.9. Un a-système à gauche est résidué à gauche si, et seulement si, quels que soient $\bar{X}$ et $\bar{Y}$, il existe au moins un élément $x \in D$ tel que $x\,\bar{Y} \subseteq \bar{X}$. Le résiduel $\bar{X}^{\cdot}.\bar{Y}$ est alors égal à l'ensemble $E_g\,(\bar{X},\bar{Y})$ des $x \in D$ tels que $x\,\bar{Y} \subseteq \bar{X}$.

La condition est nécessaire: Si $\bar{X}^{\cdot}.\bar{Y}$ existe, tout x de $\bar{X}^{\cdot}.\bar{Y}$ est tel que $x\,\bar{Y} \subseteq \bar{X}$.

La condition est suffisante: Etant donnés $\bar{X}$ et $\bar{Y}$, supposons l'existence de $x \in D$ tel que $x\,\bar{Y} \subseteq \bar{X}$. Alors $\bar{x}\circ\bar{Y} = \overline{x\,\bar{Y}} \subseteq \bar{X}$. Comme de plus un a-système à gauche est un gerbier complet $\bar{X}^{\cdot}.\bar{Y}$ existe quels que soient $\bar{X}$ et $\bar{Y}$. Le résiduel $\bar{X}^{\cdot}.\bar{Y}$ est l'union de l'ensemble non vide des $\bar{Z}$ tels que $\bar{Z}\circ\bar{Y} \subseteq \bar{X}$ (cf [13] , page 158, th.4).

D'autre part $\mathcal{A}$ étant supposé résidué à gauche, $x\,\bar{Y} \subseteq \bar{X}$ implique $\bar{x}\circ\bar{Y} \subseteq \bar{X}$, soit $x \in \bar{x} \subseteq \bar{X}^{\cdot}.\bar{Y}$; nous avons $E_g(\bar{X},\bar{Y}) \subseteq \bar{X}^{\cdot}.\bar{Y}$, d'où l'égalité, car nous avons vu que $\bar{X}^{\cdot}.\bar{Y}$ était contenu dans $E_g(\bar{X},\bar{Y})$.

Corollaires.

a) Si D contient un élément permis à droite, un a-système à gauche est résidué à gauche.

b) Un a-système bilatère est résidué à gauche et à droite. Dans un tel a-système $\bar{X}.^{\cdot}\bar{Y} = E_d(\bar{X},\bar{Y})$ et $\bar{X}^{\cdot}.\bar{Y} = E_g(\bar{X},\bar{Y})$.

Remarque 2.5. Si D contient un élément permis à droite, un a-système à gauche est un treillis complet et un demi-groupe réticulé résidué; nous avons donc:

$$\bar{X}.^{\cdot}(\bigvee_i \bar{Y}_i) = \bigcap_i(\bar{X}.^{\cdot}\bar{Y}_i) \quad \text{et} \quad \bar{X}^{\cdot}.(\bigvee_i \bar{Y}_i) = \bigcap_i(\bar{X}^{\cdot}.\bar{Y}_i).$$

Proposition 2.10. D ayant un élément permis à droite, ω , $\mathcal{A}$ étant un a-système à gauche défini sur D, distinct du a-système impropre, si l'ensemble des a-idéaux distincts de $\bar{\omega}$ est un demi-groupe vérifiant la règle de simplification à droite, le a-système $\mathcal{A}$ est bilatère.

Si $\bar{X} \neq \bar{\omega}$, $\bar{Y} \neq \bar{\omega}$, $\bar{Z} = (\bar{X}\circ\bar{Y})^{\cdot}.\bar{Y}$, nous avons $\bar{X}\circ\bar{Y} = \bar{Z}\circ\bar{Y}$, comme $\bar{X}\circ\bar{Y}$ est distinct de $\bar{\omega}$, il en est de même de $\bar{Z}$, de sorte que $\bar{Z} = \bar{X}$. Or, tout résiduel à gauche est un a-idéal bilatère de $\mathcal{A}$, $\bar{X}$ est donc bilatère et $\mathcal{A}$ est un a-système bilatère.

Par exemple, si D est le demi-groupe multiplicatif d'un anneau non commutatif, l'ensemble des k-idéaux à gauche distincts de l'idéal nul ne constitue pas un semi-groupe s'il existe un k-idéal à gauche non bilatère.

3. a-systèmes de caractère fini.

Définition 3.1. Un a-système est dit de "caractère fini" si

$$\bar{X} = \bigcup_{Y \in \mathfrak{F}(X)} \bar{Y} , \quad \forall \ X \in \mathcal{G}'(D) \quad ,$$

$\mathfrak{F}(X)$ désignant l'ensemble des complexes finis de X.

Remarque 3.1. $\mathcal{A}$ étant un a-système de caractère fini, si $x \in \bigvee_{i \in I} \bar{X}_i$, il existe une partie finie J de I telle que $x \in \bigvee_{i \in J} \bar{X}_i$.

Proposition 3.1. Un a-système est de caractère fini si, et seulement si, l'ensemble des a-idéaux forme une famille $\bigcup$-inductive.

La démonstration, indépendante de (A4), peut se faire comme dans [4], p. 10 th.6

Proposition 3.2. Si D contient un élément permis à droite, un a-système à gauche sur D, de caractère fini, est un treillis faiblement $\bigcap$-continu, autrement dit, si $(\bar{Y}_i)_{i \in I}$ est une chaîne croissante de a-idéaux

$$\bar{X} \cap (\bigvee_i \bar{Y}_i) = \bigvee_i (\bar{X} \cap \bar{Y}_i) \ .$$

C'est une conséquence de la proposition 3.1. et de la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion en théorie des ensembles.

Proposition 3.3. Si $\mathcal{A}$ est un a-système de caractère fini, distinct du a-système impropre, $\bar{A}$ un a-idéal de $\mathcal{A}$ admettant un générateur fini, $\bar{A}$ n'étant pas minimal dans $\mathcal{A}$, tout a-idéal appartenant à l'ensemble $\mathcal{B}$ des a-idéaux strictement contenus dans $\bar{A}$ est contenu dans un élément maximal de $\mathcal{B}$.

Il suffit d'appliquer le théorème de Zorn, $\mathcal{B}$ étant inductif puisque $\mathcal{A}$ forme une famille $\bigcup$-inductive.

En particulier, si $\mathcal{A}$ est de caractère fini, distinct du a-système impropre et si D , considéré comme a-idéal, admet un générateur fini, tout a-idéal distinct de D est contenu dans un a-idéal maximal (en appelant "a-idéal maximal" un élément maximal de l'ensemble des a-idéaux distincts de D).

Proposition 3.4. Si $\mathcal{A}$ est un treillis modulaire, $\bar{M}$ un a-idéal maximal ne contenant pas le a-idéal $\bar{A}$, le a-idéal $\bar{A} \cap \bar{M}$ est maximal dans l'ensemble des a-idéaux strictement contenus dans $\bar{A}$.

S'il existait un a-idéal $\bar{X}$ tel que $\bar{A} \cap \bar{M} \subset \bar{X} \subset \bar{A}$, la modularité de $\mathcal{A}$ donnerait $\bar{A} \cap (\bar{X} + \bar{M}) = \bar{X} + (\bar{A} \cap \bar{M})$, autrement dit $\bar{A} = \bar{X}$, d'où contradiction.

Proposition 3.5. Dans un a-système à gauche les conditions suivantes sont équivalentes:

a) condition de chaîne ascendante (CA): toute chaîne de a-idéaux strictement croissante est nécessairement finie,

b) condition maximale (CM): tout ensemble non vide de a-idéaux contient au moins un élément maximal,

c) conditions de caractère fini et de la base finie (CF et BF): le a-système est de caractère fini et tout a-idéal admet un générateur fini.

(CA) et (CM) sont équivalentes: c'est une propriété des ensembles ordonnés.

(CA) $\Longrightarrow$ (CF et BF): Si $X \in \mathcal{G}'(D)$, on peut former une chaîne strictement croissante de a-idéaux de la façon suivante: $\bar{X}_1=\bar{x}_1$, où $x_1 \in X$; si $\bar{X}_1 \neq \bar{X}$, $\bar{X}_2=\overline{\{x_1,x_2\}}$, où $x_2 \in X$, $x_2 \notin \bar{X}_1$; si $\bar{X}_2 \neq \bar{X}$, $\bar{X}_3 = \overline{\{x_1,x_2,x_3\}}$ où $x_3 \in X$, $x_3 \notin \bar{X}_2$, et ainsi de suite. Si (CA) est vérifiée, la chaîne est finie, $\bar{X}$ admet un générateur fini, d'où (BF). De plus le a-système est de caractère fini puisque $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \subseteq X$.

(CF et BF) $\Longrightarrow$ (CA): soit $\bar{X}_1 \subset \bar{X}_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$ une chaîne strictement croissante de a-idéaux. Si (CF) est vérifiée, $\mathcal{A}$ est $\bigcup$-inductif, donc $\bar{X} = X$ en posant $X = \bigcup_n \bar{X}_n$. De plus le fait que $\bar{X}$ admette un générateur fini implique que la chaîne est finie.

<u>Définition 3.2.</u> Un a-système à gauche $\mathcal{A}$ qui satisfait aux conditions équivalentes (CA), (CM), (CF et BF) sera dit "<u>nœthérien</u>". Nous dirons aussi que D est "<u>$\mathcal{A}$-nœthérien</u>" .

Cette définition est moins restrictive que celle choisie par AUBERT (cf [4] p.25) dans le cas des x-systèmes.

<u>Définition 3.3.</u> Un a-idéal est dit "fini" s'il admet un générateur fini.

La somme de deux a-idéaux finis est un a-idéal fini.

<u>Remarques 3.2.</u>

a) Un a-idéal d'un a-système de caractère fini n'est pas nécessairement fini. Par exemple si D est le demi-groupe multiplicatif d'un anneau le k-système à gauche est de caractère fini (cf Proposition 6.1) mais n'est pas nécessairement nœthérien.

b) Un a-système où tout a-idéal est fini n'est pas nécessairement de caractère fini, donc pas nécessairement nœthérien. Par exemple, 0 et a étant deux éléments distincts d'un ensemble infini D muni d'une structure de demi-groupe en posant xy = 0, $\forall x, y \in D$, l'application

$$X \in \mathcal{G}'(D) \xrightarrow{\quad\theta\quad} \bar{X} = \begin{cases} X \cup \{0\}, \text{ si } X \text{ est fini et si } a \notin X, \\ D, \text{ si } X \text{ est infini ou si } a \in X, \end{cases}$$

définit sur D un a-système dans lequel tout a-idéal est fini mais qui n'est pas de caractère fini. De façon précise nous avons:

<u>Proposition 3.6.</u> Un a-système où tout a-idéal est fini est de caractère fini si,

et seulement si, de tout générateur d'un a-idéal on peut extraire un générateur fini de cet a-idéal.

La condition est évidemment suffisante. Pour établir qu'elle est nécessaire, il suffit de remarquer que (CF et BF) implique (CA) et que le raisonnement de la proposition 3.5. (pour établir que (CA) $\Longrightarrow$ (CF et BF)) montre que de tout générateur on peut extraire un générateur fini.

4. L'ensemble des a-systèmes définis sur un demi-groupe D.

Dans ce paragraphe, nous ferons intervenir plusieurs a-systèmes. Nous noterons $X_a, X_b, \dots ; X_i, \dots$ les a-idéaux engendrés par le complexe X dans les a-systèmes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... ; $\mathcal{A}_i$, ... La notation $\mathcal{A}[+, o]$ signifie que l'addition et la multiplication dans le a-système $\mathcal{A}$ sont notées respectivement + et o.

<u>Définition 4.1</u>. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant deux a-systèmes définis sur D, $\mathcal{A}$ est dit "<u>plus fin</u>" que $\mathcal{B}$, ou $\mathcal{B}$ est dit "<u>moins fin</u>" que $\mathcal{A}$, si $X_a \subseteq X_b$ pour tout complexe X.

Le d-système à gauche et le a-système impropre sont respectivement le plus fin et le moins fin des a-systèmes à gauche que l'on puisse définir sur D.

Un a-système à gauche n'est pas nécessairement de caractère fini (cf remarque 3. 2b.). Comme le a-système impropre et le d-système à gauche sont de caractère fini, un a-système moins fin ou plus fin qu'un a-système de caractère fini n'est pas nécessairement de caractère fini.

Un a-système moins fin qu'un a-système nœthérien est nœthérien.

<u>Proposition 4.1</u>. Pour que $\mathcal{A}$ soit plus fin que $\mathcal{B}$ il faut et il suffit que $(X_b)_a = X_b$, autrement dit que $\mathcal{B}$ soit contenu dans $\mathcal{A}$.
(cf [17] , p. 18)

<u>Corollaire</u>. Un a-système moins fin qu'un a-système à gauche et qu'un a-système à droite est un a-système bilatère. En particulier un a-système moins fin qu'un a-système bilatère est bilatère.

<u>Proposition 4.2</u>. Si $\mathcal{A}$ est plus fin que $\mathcal{B}$, $X_a = Y_a$ implique $X_b = Y_b$.
(cf [17] , p. 18).

<u>Proposition 4.3</u>. Si $\mathcal{A}$ est plus fin que $\mathcal{B}$ et si tout a-idéal de $\mathcal{A}$ est fini, il en est de même de tout a-idéal de $\mathcal{B}$.

X_b étant un a-idéal de $\mathcal{B}$ il existe un complexe fini Y tel que $X_b = Y_a$. Alors $Y \subseteq X_b$ donne $Y_b \subseteq X_b$, mais $\mathcal{A}$ étant plus fin que $\mathcal{B}$, $X_b = Y_a \subseteq Y_b$, donc $X_b = Y_b$ et X_b est fini.

<u>Remarque 4.1</u>. Si $\mathcal{A}[+, o]$ est plus fin que $\mathcal{B}[\mathrm{T}, *]$ nous avons

$$X_b + Y_b \subseteq X_b \top Y_b \quad \text{et} \quad X_b \circ Y_b \subseteq X_b * Y_b ,$$

les égalités pouvant avoir lieu ou non. Il en résulte que si $\mathcal{A}$ est plus fin que $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ n'est pas nécessairement un sous-demi-treillis de $\mathcal{A}$.

<u>Théorème 4.1</u>. L'ensemble T_g des a-systèmes à gauche que l'on peut définir sur D, ordonné par la relation

$$\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \text{ est plus fin que } \mathcal{B},$$

est un treillis complet. Le a-système impropre en est l'élément universel, le d-système à gauche en est l'élément nul.

Pour démontrer ce théorème, il suffit, puisque T_g contient un élément universel, de montrer que T_g est un $\cap$-demi-treillis complet (cf [13], p. 35).

Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille non vide de a-systèmes à gauche sur D, le a-idéal engendré par X dans $\mathcal{A}_i$ étant noté X_i, et soit f l'application:

$$f: \; X \in \mathcal{G}'(D) \xrightarrow{\quad 0 \quad} \bar{X} \bigcap_{i\in I} X_i \; .$$

Cette application est une a-opération à gauche. En effet:

(A1) $X \subseteq X_i$, $\forall i$ implique $X \subseteq \bar{X}$

(A2) $X \subseteq \bar{Y}$ implique successivement $X \subseteq Y_i$, $\forall i$, puis $X_i \subseteq Y_i$, $\forall i$, et enfin $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$.

(gA3) $D\,\bar{X} = D.(\bigcap X_i) \subseteq \bigcap (DX_i) \subseteq \bigcap X_i = \bar{X}$.

(A4) $\bar{X}\,\bar{Y} = (\bigcap X_i)(\bigcap Y_i) \subseteq \bigcap (X_i Y_i)$, or $X_j Y_j \subseteq (XDY \cup XY)_j$ implique $\bigcap X_i Y_i \subseteq (XDY \cup XY)_j$, $\forall j$, et par suite

$$\bigcap_i X_i Y_i \subseteq \bigcap_j (XDY \cup XY)_j = \overline{XDY \cup XY} ,$$

donc $\bar{X}\bar{Y} \subseteq \overline{XDY \cup XY}$.

Le a-système à gauche $\mathcal{A}$ défini par cette a-opération est plus fin que chaque $\mathcal{A}_i$ puisque $\bar{X} \subseteq X_i$, $\forall i$. D'autre part, si $\mathcal{B}$ est un a-système à gauche plus fin que chaque $\mathcal{A}_i$, X_b est contenu dans chaque X_i, donc dans $\bar{X}$ et $\mathcal{B}$ est plus fin que $\mathcal{A}$. T_g est bien un $\cap$-demi-treillis complet, et par suite un treillis complet.

<u>Remarque 4.2</u>. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant deux a-systèmes à gauche sur D, posons

$$X_{(1)} = X_a \;, \quad X_{(2n)} = \left[X_{(2n-1)}\right]_b \;\text{ et }\; X_{(2n+1)} = \left[X_{(2n)}\right]_a \quad \text{pour } n \geq 1,$$

$\bar{X} = \bigcup_{n\geq 1} X_{(n)}$. L'application: $X \in \mathcal{G}'(D) \xrightarrow{\;0\;} \bar{X}$ est une a-opération à gauche et le a-système qu'elle définit est le plus fin des a-systèmes à gauche moins fins que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. C'est donc la borne supérieure de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans le treillis T_g (cf [4], p. 16).

Il en résulte en particulier que $X_a = X_b$ implique $\bar{X} = X_a = X_b$.

Remarques 4.3.

a) un raisonnement analogue montre que les ensembles T_d et T des a-systèmes à droite et des a-systèmes bilatères que l'on peut définir sur D sont des treillis complets.

b) Si $T_d \vee T_g$ désigne l'ensemble des a-systèmes tels que $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, où $\mathcal{A} \in T_d$ et $\mathcal{B} \in T_g$, le corollaire de la proposition 4.1. montre que $T_d \vee T_g = T$.

c) T est un sous-treillis complet de T_d et de T_g .

Théorème 4.2. L'ensemble F_g des a-systèmes à gauche de caractère fini que l'on peut définir sur D, ordonné par la relation

$$\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \text{ plus fin que } \mathcal{B},$$

est un treillis complet. Le a-système impropre en est l'élément universel, le d-système à gauche en est l'élément nul.

Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille non vide de a-systèmes à gauche de caractère fini. Il suffit pour démontrer le théorème, d'établir que le a-système $\mathcal{A}$, où $\bar{X} = \bigcap_{i \in I} X_i$, défini au théorème 4.1. est de caractère fini. Si$(\overline{X^j})$ est une chaîne croissante de a-idéaux de $\mathcal{A}$, nous avons, en effet, $\bigcup_j \overline{X^j} = \bigcup_j (\bigcap_i (X^j)_i) = \bigcap_i (\bigcup_j (X^j)_i)$. Comme les $\mathcal{A}_i$ sont de caractère fini $\bigcup_j (X^j)_i$ est un a-idéal de $\mathcal{A}_i$, donc de $\mathcal{A}$, $\forall$ i, et par suite $\bigcup_j(\overline{X^j})$ est un a-idéal de $\mathcal{A}$, ce qui montre que $\mathcal{A}$ est de caractère fini.

Proposition 4.4. $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ étant une famille non vide de a-systèmes à gauche de caractère fini définis sur D, X un complexe de D, U l'ensemble des suites $u = (u_1, u_2, \dots , u_n, \dots)$ définies dans I, si à toute suite $u \in U$ nous associons le complexe $u(X)$ défini par

$$u(X) = \bigsqcup_{n \geq 1} u_n(X) \ , \text{ où } u_1(X) = X_{u_1} \ , \ u_n(X) = \left[u_{n-1}(X)\right]_{u_n} \quad \text{pour } n \geq 1$$

(Y_{u_n} désignant le a-idéal engendré par Y dans $\mathcal{A}_{u_n}$), l'application

$$X \in \mathcal{P}'(D) \xrightarrow{\ \theta\ } \breve{X} = \bigsqcup_{u \in U} u(X)$$

est une a-opération à gauche et le a-système qu'elle définit est la borne supérieure des $\mathcal{A}_i$ dans les treillis T_g et F_g .

Cette proposition généralise dans le cas des a-systèmes de caractère fini la remarque 4.2.

(A1): $X \subseteq u_n(X)$, $\forall n$, $\forall u$ implique $X \subseteq u(X)$, $\forall u$ donc $X \subseteq \breve{X}$.

(A2a): $X \subseteq Y$ implique $u_n(X) \subseteq u_n(Y)$, $\forall n$, $\forall u$, donc $u(X) \subseteq u(Y)$, $\forall u$, et enfin $\breve{X} \subseteq \breve{Y}$.

(A2b): Soit $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ un complexe fini de $\breve{X}$. Il existe une suite

$u^j \in U$ et un entier n_j tel que $y_j \in u^j_{n_j}(X)$. Si v est une suite de U commençant par

$$u_1^1, u_2^1, \dots, u_{n_1}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2}^2, \dots, u_{n_p}^p, i,$$

nous avons $y_j \in v_q(X)$, $\forall$ j, où $q = n_1 + n_2 + \dots + n_p + 1$, et $Y \subseteq v_q(X)$, donc $Y_i \subseteq [v_q(X)]_i = v_q(X) \subseteq \overset{\frown}{X}$. Mais $\mathcal{A}_i$ étant de caractère fini $(\overset{\frown}{X})_i = \bigcup_{Y \in \mathcal{F}(\overset{\frown}{X})} Y_i$, de sorte que $(\overset{\frown}{X})_i \subseteq \overset{\frown}{X}$ et $(\overset{\frown}{X})_i = \overset{\frown}{X}$. Ceci ayant lieu pour tout i de I implique successivement $u_n(\overset{\frown}{X}) = \overset{\frown}{X}$, $\forall n$, $\forall u$, $u(\overset{\frown}{X}) = \overset{\frown}{X}$, $\forall u$ et $\overset{\frown}{X}^{\frown} = \overset{\frown}{X}$.

(gA3): Si $x \in \overset{\frown}{X}$, il existe une suite $u \in U$ et un entier n tel que $x \in u_n(X)$, d'où $Dx \subseteq D.u_n(X) \subseteq u_n(X) \subseteq \overset{\frown}{X}$, et $D\overset{\frown}{X} \subseteq \overset{\frown}{X}$.

(A4): Si $x \in \overset{\frown}{X}$ et $y \in \overset{\frown}{Y}$, il existe deux suites u et v de U et deux entiers m et n tels que $x \in u_m(X)$ et $y \in v_n(Y)$. Si w est une suite de U dont les m+n premiers termes sont $u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n$, ceci implique $x \in w_{m+n}(X)$ et $y \in w_{m+n}(Y)$, donc

$$xy \in w_{m+n}(X).w_{m+n}(Y) \subseteq w_{m+n}(XDY \cup XY) \subseteq \overset{\frown}{XDY \cup XY},$$

et finalement $\overset{\frown}{X}\overset{\frown}{Y} \subseteq \overset{\frown}{XDY \cup XY}$.

L'application $X \xrightarrow{\;\theta\;} \overset{\frown}{X}$ est bien une a-opération à gauche. Le a-système $\mathcal{B}$ qu'elle définit est moins fin que chaque $\mathcal{A}_i$ car $X_i \subseteq \overset{\frown}{X}$, $\forall i$. Si $\mathcal{C}$ est un a-système à gauche moins fin que chaque $\mathcal{A}_i$, $X_i \subseteq X_c$ (X_c étant le a-idéal engendré par X dans $\mathcal{C}$) pour tout $i \in I$ implique $u_n(X) \subseteq X_c$, $\forall n$, $\forall u$, puis $u(X) \subseteq X_c$, $\forall u$, et finalement $\overset{\frown}{X} \subseteq X_c$. $\mathcal{B}$ est donc bien la borne supérieure de la famille $(\mathcal{A}_i)$ dans le treillis T_g.

Enfin $\mathcal{B}$ est un a-système de caractère fini. Si $(\overset{\frown}{X^n})$ est une chaîne croissante de a-idéaux de $\mathcal{B}$, c'est aussi une chaîne croissante de a-idéaux de $\mathcal{A}_i$, donc $\bigcup_n \overset{\frown}{X^n}$ est un a-idéal de $\mathcal{A}_i$, et ceci quel que soit i, par suite c'est un a-idéal de $\mathcal{B}$, ce qui montre que $\mathcal{B}$ est de caractère fini et que $\mathcal{B}$ est aussi la borne supérieure de la famille $(\mathcal{A}_i)$ dans le treillis F_g.

<u>Remarque 4.4</u>. $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ étant une famille non-vide de a-systèmes à gauche de caractère fini, la démonstration précédente montre que, s'il existe un complexe X tel que $X = X_i$, $\forall$ i, ce complexe est tel que $X = \overset{\frown}{X}$. Comme un a-idéal de $\mathcal{B}$ est un a-idéal de chaque $\mathcal{A}_i$, il s' ensuit que nous pouvons définir $\mathcal{B}$ comme le a-système à gauche défini par l'application $X \xrightarrow{\;\theta\;} \overset{\frown}{X} = \bigcap_{Y \in \varepsilon(X)} Y$, $\varepsilon(X)$ étant l'ensemble des complexes Y de D tels que $X \subseteq Y = Y_i$ quel que soit $i \in I$.

<u>Théorème 4.3</u>. Le treillis F_g est un sous-treillis complet du treillis T_g.

Ceci résulte des démonstrations faites pour le théorème 4.2. et la proposition 4.4.

<u>Proposition 4.5</u>. L'ensemble des a-systèmes à gauche nœthériens définis sur D

forme un treillis qui est un sous-treillis de F_g. C'est aussi un demi-treillis complet.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux a-systèmes noethériens définis sur D, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ les bornes supérieure et inférieure de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans le treillis F_g (ou dans le treillis T_g), $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ est noethérien puisque moins fin que $\mathcal{A}$. De plus si $\bar{X}$ est le a-idéal de $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ engendré par X, $\bar{X}$ est égal à $X_a \cap X_b$. Or, de X nous pouvons extraire (proposition 3.6.) deux complexes finis Y et Z tels que $Y_a = X_a$, $Z_b = X_b$. Nous avons alors $(Y \cup Z)_a = X_a$ et $(Y \cup Z)_b = X_b$, d'où $\overline{Y \cup Z} = \bar{X}$ et tout a-idéal de $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ est fini. Comme un tel a-système est de caractère fini, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ est noethérien.

<u>Définition 4.2</u>. $\mathcal{A}$ étant un a-système à gauche, nous appellerons "<u>a-système bilatère associé à $\mathcal{A}$</u>" le plus fin des a-systèmes bilatères moins fins que $\mathcal{A}$.

<u>Proposition 4.6</u>. Si $\mathcal{B}[\top, *]$ est le a-système bilatère associé au a-système à gauche $\mathcal{A}\ [+, \circ]$, nous avons

a) $X_b = X_a + X_a \circ D = (X \cup XD)_a$,

b) $X_b \top Y_b = X_b + Y_b$ et $X_b * Y_b = X_b \circ Y_b$.

($\mathcal{B}$ est un sous-demi-treillis de $\mathcal{A}$, un sous-treillis si D contient un élément permis à droite).

a) L'application: $X \xrightarrow{\theta} X_b = X_a + X_a \circ D$ est une application bilatère. La vérification des axiomes (A1), (A2), (A3) est immédiate, celle de (A4) se fait en remarquant que:

$$X_bY_b = (X_a + X_a \circ D)(Y_a + Y_a \circ D) \subseteq (X_a + X_a \circ D) \circ (Y_a + Y_a \circ D) =$$

$$= X_a \circ Y_a + X_a \circ Y_a \circ D = (XDY \cup XY)_a + (XDY \cup XY)_a \circ D = (XDY \cup XY)_b.$$

b) Le a-système $\mathcal{B}$ défini par cette application est moins fin que $\mathcal{A}$. De plus, si $\mathcal{C}$ est un a-système bilatère moins fin que $\mathcal{A}$, nous avons, en notant X_c le a-idéal engendré par X dans $\mathcal{C}$, $X_a \subseteq X_c$, d'où $X_aD \subseteq X_cD \subseteq X_c$, de sorte que $X_b = (X \cup XD)_a \subseteq X_c$ et $\mathcal{C}$ est moins fin que $\mathcal{B}$. Ainsi $\mathcal{B}$ est le a-système bilatère associé à $\mathcal{A}$.

c) $X_b \top Y_b = (X \cup Y)_b = \{(X \cup Y) \cup [(X \cup Y)D]\}_a =$
$= (X \cup XD)_a + (Y \cup YD)_a = X_b + Y_b$.

De plus $X_b * Y_b = (XDY)_b + (XY)_b = (XDY)_a + (XDY)_a \circ D + (XY)_a + (XY)_a \circ D =$
$= X_a \circ Y_a + X_a \circ Y_a \circ D = X_b \circ Y_b$.

<u>Remarques 4.5</u>. Pour qu'un a-idéal d'un a-système à gauche $\mathcal{A}$ soit bilatère (cf définition 1.2.) il faut et il suffit qu'il appartienne au a-système bilatère associé à $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ est le d-système à gauche, le a-système bilatère associé à $\mathcal{A}$ n'est autre que le d-système bilatère. Si D est le demi-groupe multiplicatif d'un anneau, le a-système bilatère associé au k-système à gauche n'est autre que le k-système bilatère.

Proposition 4.7. (L) étant un a-système à gauche défini sur un demi-groupe D contenant un élément permis à droite et $(\mathcal{C})$ le a-système bilatère associé, si (L) vérifie la condition de chaîne ascendante ou la condition de chaîne descendante affaiblie, ou si $(\mathcal{C})$ vérifie la condition de chaînes finies, (L) est une $(\mathcal{C})$-algèbre de LESIEUR et CROISOT.

Les conditions (A), (B), (C),(D) de [19], p.81, ou [20], p. 25, sont en effet réalisées.

(voir aussi propositions 5.6. et 5.7.).

5. Demi-groupes renversables à gauche.

Dans ce paragraphe nous allons définir une classe particulière de demi-groupes présentant de l'intérêt du point de vue des a-systèmes d'idéaux.

Définition 5.1. Un demi-groupe D sera dit "renversable à gauche" si

$$xDy \subseteq \{xy\} \cup Dxy \quad , \forall x, y \in D.$$

Il revient au même de dire que D est renversable à gauche si, et seulement si

$$XDY \subseteq XY \cup DXY \ , \ \forall X,Y \in \mathcal{P}'(D).$$

On définirait de même un demi-groupe renversable à droite. Par exemple:

a) Un demi-groupe commutatif est renversable à droite et à gauche.

b) Un demi-groupe tel que $Dx \subseteq xD$, $\forall x \in D$, est renversable à droite. (si D est le demi-groupe multiplicatif d'un anneau sous-commutatif, c'est-à-dire d'un anneau tel que ba= ax admette au moins une solution dans D, quels que soient a et b dans D, (cf [5] , p.39 , ou [9] , p. 566), D est renversable à droite car $Dx \subseteq xD$, $\forall x \in D$).

c) Un antisemigroupe à droite (demi-groupe dans lequel $xy = x$, $\forall x,y$) ou un antisemigroupe à gauche ($xy = y$, $\forall x,y$) est renversable à gauche et à droite.

d) Un demi-groupe globalement idempotent ($D.D = D$), rectangulaire (au sens de KIMURA) est renversable à gauche et à droite car dans un tel demi-groupe $xyz = xz$, $\forall x,y,z$ (cf [18] , p. 14.05).

e) Le cône positif d'un groupe ordonné est un demi-groupe renversable à gauche et à droite (cf paragraphe 4. chapitre 2).

Remarques 5.1.

a) Si D possède un élément unité, D est renversable à gauche si, et seulement si, $aD \subseteq DaD = Da$, $\forall a \in D$.

b) Si D possède un élément unité, D est renversable à gauche et à droite si, et seulement si, $Da = aD = DaD$, $\forall\, a \in D$.

Proposition 5.1. D possèdant un élément unité à droite, e, il y a équivalence entre

a) D est renversable à gauche,

b) tout a-système à gauche est bilatère,

c) le d-système à gauche est bilatère.

a) $\Longrightarrow$ b): En prenant $Y = \{e\}$, la condition de renversabilité à gauche donne $XD \subseteq X \cup DX$, et par suite $\bar{X}_\circ D = \overline{XD} \subseteq \overline{X \cup DX} = \bar{X}$.

b) $\Longrightarrow$ c): résultat trivial.

c) $\Longrightarrow$ a): Si le d-système à gauche est bilatère, nous avons $(X \cup DX)D \subseteq X \cup DX$, d'où $XDY \subseteq (X \cup DX)DY \subseteq (X \cup DX)Y = XY \cup DXY$.

Remarque 5.2. Si D possède un élément unité à gauche, nous avons les implications b) $\Longrightarrow$ c) $\Longrightarrow$ a) , (si le d-idéal à gauche engendré par X est bilatère, DXD est contenu dans DX, d'où $XDY \subseteq DXDY \subseteq DXY$, et c) implique a)). En prenant pour D un antisemigroupe à gauche, on voit que a) n'implique pas nécessairement b).

Remarque 5.3. Si D est le demi-groupe multiplicatif d'un anneau unitaire, les propriétés de la proposition 5.1. sont encore équivalentes à

d) le k-système à gauche est bilatère.

Proposition 5.2. D étant un demi-groupe quelconque, $X \overset{\theta}{\Longrightarrow} \bar{X}$ une application de fermeture définie sur $\mathcal{G}(D)$ telle que $\bar{\emptyset} = \emptyset$, il y a équivalence entre les quatre propriétés

(B1) $X\,\bar{Y} \subseteq \overline{XY}$, $\forall\, X, Y \in \mathcal{G}'(D)$,

(B2) $E_g(\bar{X},\bar{Y}) = E_g(\bar{X},Y)$, $\forall\, X,Y \in \mathcal{G}'(D)$,

(B3) $\overline{E_d(X,Y)} \subseteq E_d(\bar{X},Y)$, $\forall\, X,Y \in \mathcal{G}'(D)$,

(B4) $\overline{E_d(\bar{X},Y)} = E_d(\bar{X},Y)$, $\forall\, X, Y \in \mathcal{G}'(D)$.

Il y a également équivalence entre les quatre propriétés

(C1) $\bar{X}Y \subseteq \overline{XY}$, $\forall\, X,Y \in \mathcal{G}'(D)$,

(C2) $E_d(\bar{X},\bar{Y}) = E_d(\bar{X},Y)$, $\forall\, X,Y \in \mathcal{G}'(D)$,

(C3) $\overline{E_g(X,Y)} \subseteq E_g(\bar{X},Y)$, $\forall\, X,Y \in \mathcal{G}'(D)$,

(C4) $\overline{E_g(\bar{X},Y)} = E_g(\bar{X},Y)$, $\forall\, X,Y \in \mathcal{G}'(D)$.

(Les ensembles $E_g(X,Y)$ et $E_d(X,Y)$ ont été définis dans la proposition 2.9. et dans la remarque 2.3.).

Il suffit de démontrer l'équivalence des quatre propriétés (B).

(B1) $\Longrightarrow$ (B2): Nous avons $E_g(\bar{X},\bar{Y}) \subseteq E_g(\bar{X},Y) = Z$. Si $Z = \emptyset$, (B2) est vérifiée. Si $Z \neq \emptyset$, nous avons $ZY \subseteq \bar{X}$, $Z\bar{Y} \subseteq \overline{ZY} \subseteq \bar{X}$, $Z \subseteq E_g(\bar{X},\bar{Y})$ d'où l'égalité (B2).

(B2) $\Longrightarrow$ (B3): $Z = E_d(X,Y) \neq \emptyset$ implique successivement $YZ \subseteq X$, $YZ \subseteq \bar{X}$, $Y \subseteq E_g(\bar{X},Z) = E_g(\bar{X},\bar{Z})$, $Y\,\bar{Z} \subseteq \bar{X}$ et enfin $\overline{E_d(X,Y)} \subseteq E_d(\bar{X},Y)$.

Si $Z = \emptyset$, (B3) est vérifiée car, par hypothèse, $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

(B3) $\Longrightarrow$ (B4): $E_d(\bar{X},Y) \subseteq \overline{E_d(\bar{X},Y)} \subseteq E_d(\bar{\bar{X}},Y) = E_d(\bar{X},Y)$.

(B4) $\Longrightarrow$ (B1): $XY \subseteq \overline{XY}$ implique $Y \subseteq E_d(\overline{XY},X)$, donc

$$\bar{Y} \subseteq \overline{E_d(\overline{XY},X)} = E_d(\overline{XY},X) \text{ , d'où } X\,\bar{Y} \subseteq \overline{XY} .$$

<u>Remarque 5.4</u>. Si l'on suppose en outre que l'application de fermeture est une a-opération à gauche, $\bar{X}.'\bar{Y}$ est contenu dans $E_d(\bar{X},\bar{Y})$ (cf remarque 2.3.), et si de plus D contient un élément permis à droite, $\bar{X}'.\bar{Y}$ est égal à $E_g(\bar{X},\bar{Y})$ (cf proposition 2.9.).

Si D est commutatif, on retrouve le théorème 3 de [4], p. 7.

<u>Proposition 5.3</u>. Il y a équivalence entre

a) D est renversable à gauche,

b) Dans tout a-système à gauche sur D, $\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{XY}$, $\forall X, Y \in \mathcal{P}'(D)$,

c) Dans le d-système à gauche sur D, $\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{XY}$, $\forall X, Y \in \mathcal{P}'(D)$,

d) Tout a-système à gauche sur D possède l'une des propriétés (B) et l'une des propriétés (C) de la proposition 5.2.,

e) Le d-système à gauche sur D possède l'une des propriétés (B) et l'une des propriétés (C) de la proposition 5.2..

(En considérant que $\emptyset$ engendre un a-idéal à $\emptyset$).

Nous utiliserons le

<u>Lemme 5.1.</u> En supposant seulement que l'application $X \longmapsto \bar{X}$ est une application de fermeture, il y a équivalence entre

a) $\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{XY}$,

b) $X\,\bar{Y} \subseteq \overline{XY}$ et $\bar{X}\,Y \subseteq \overline{XY}$.

Il suffit de vérifier que b) implique a). $X\,\bar{Y} \subseteq \overline{XY}$ implique $\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{\bar{X}\,Y}$, donc $\overline{\bar{X}\,\bar{Y}} \subseteq \overline{\bar{X}\,Y} \subseteq \overline{\bar{X}\,\bar{Y}}$, soit $\overline{\bar{X}\,\bar{Y}} = \overline{\bar{X}\,Y}$, d'où $\overline{XY} \subseteq \overline{\bar{X}\,\bar{Y}} = \overline{\bar{X}\,Y} \subseteq \overline{XY}$, et par suite $\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{XY} = \overline{\bar{X}\,\bar{Y}}$.

<u>Démonstration de la proposition 5.3</u>.

a) $\Longrightarrow$ b) car nous avons $\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{XDY \cup XY} \subseteq \overline{DXY \cup XY} = \overline{XY}$

b) $\Longrightarrow$ c): évident

c) $\Longrightarrow$ a): $\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{XY}$ implique $\bar{X}_\circ\bar{Y} = \overline{XY}$ (= $\overline{XDY} + \overline{XY}$) , donc $\overline{XDY} \subseteq \overline{XY}$, soit $XDY \subseteq \overline{XY} = XY \cup DXY$

a) $\Longrightarrow$ d): car a) implique b) qui implique (B1) et (C1).

d) $\Longrightarrow$ e): évident

e) $\longrightarrow$ a) : les conditions (B1) et (C1) impliquent c), d'après le lemme 5.1. donc a).

<u>Proposition 5.4</u>. Si D possède un élément unité à gauche il y a équivalence entre

a) D est renversable à gauche,

b) $\bar{X}.'\bar{Y} = E_d(\bar{X},\bar{Y})$ dans tout a-système à gauche sur D,

c) $\bar{\bar{X}}.'\bar{Y} = E_d(\bar{X},\bar{Y})$ dans le d-système à gauche sur D.

a) $\longrightarrow$ b) d'après la remarque 2.3. car $\bar{Y}\, x \subseteq \bar{X}$ implique $\bar{Y}\,\bar{x} \subseteq \overline{Yx} \subseteq \overline{\bar{Y}\,x} \subseteq \bar{X}$.

b) $\longrightarrow$ c) : évident.

c) $\longrightarrow$ a) : D ayant un élément unité à gauche, $DYx = \bar{Y}\,x = \overline{Yx}$, c) implique alors (cf remarque 2.3.) $\bar{Y}\,Dx \subseteq \overline{Yx}$, d'où $YDx \subseteq DYDx \subseteq DYx$.

Les implications a) $\longrightarrow$ b) $\longrightarrow$ c) n'exigent pas l'existence d'un élément unité à gauche dans D.

<u>Proposition 5.5</u>. E étant un sous-demi-groupe d'un demi-groupe D renversable à gauche, $\mathcal{A}(X \longmapsto \bar{X})$ un a-système à gauche sur D, l'application qui, au complexe X de E associe le complexe $\overset{\frown}{X} = \bar{X} \cap E$ est une a-opération à gauche sur E.

La vérification des axiomes (A1), (A2),(gA3) se fait sans difficulté. Celle de (A4) résulte de ce que

$$\overset{\frown}{X}\,\overset{\frown}{Y} = (\bar{X} \cap E)(\bar{Y} \cap E) \subseteq \bar{X}\,\bar{Y} \cap E \subseteq \overline{XY} \cap E = \overset{\frown}{\overline{XEY \cup XY}}\ ,$$

car $\overline{XY} \subseteq \overline{XEY \cup XY} \subseteq \overline{XDY \cup XY} = \overline{XY}$.

Le a-système ainsi défini sera appelé l'<u>"empreinte"</u> ou la <u>"trace"</u> de $\mathcal{A}$ sur E. Si D n'est pas renversable à gauche, la proposition 5.5. n'est pas nécessairement valable, même si E est un a-idéal de $\mathcal{A}$.

<u>Proposition 5.6</u>. $\mathcal{C}$ désignant le d-système bilatère défini sur un demi-groupe unitaire D, renversable à droite, si l'ensemble des résiduels à gauche et l'ensemble des résiduels à droite de tout d-idéal bilatère vérifient la condition de chaîne ascendante (axiome (D) des ($\mathcal{C}$)-algèbres de LESIEUR et CROISOT), $\mathcal{C}$ est une ($\mathcal{C}$)-algèbre dans laquelle les notions d'idéal primaire (à droite), d'idéal secondaire (à droite) et d'idéal tertiaire (à droite) coïncident.

$\bar{X}'$ et $\bar{B}$ étant deux d-idéaux bilatères tels que $\bar{X}' \subseteq \bar{a}_\circ\bar{B}$, soit X l'ensemble des $x \in \bar{B}$ tels que $ax \in \bar{X}'$, X est tel que $aX = \bar{X}'$ car $\bar{a}_\circ\bar{B} = DaDBD = aDBD = a\bar{B}$ et $\bar{X}' \subseteq a\bar{B}$. Nous avons donc $\bar{a}_\circ\bar{X} = \overline{aX} = \bar{X}'$ avec $\bar{X} \subseteq \bar{B}$. Ceci montre que tout d-idéal bilatère de la forme $\bar{a}$ est L-principal au sens de LESIEUR et CROISOT (cf [19] , p. 107) . Tout d-idéal bilatère étant union de d-idéaux L-principaux, et $\mathcal{C}$ étant distributif, donc en particulier semi-modulaire, chaque d-idéal tertiaire à droite est primaire à droite (cf [19] , p. 108).

Il en résulte que tout d-idéal bilatère de D, peut être décomposé, d'une manière unique, sous forme d'une intersection d'un nombre fini de d-idéaux primaires à droite (bilatères).

Proposition 5.7. $\mathcal{C}$ désignant le k-système bilatère défini sur un anneau unitaire D, si le demi-groupe multiplicatif de D est renversable à droite et si l'ensemble des résiduels à droite et l'ensemble des résiduels à gauche de tout k-idéal bilatère vérifient la condition de chaîne ascendante, $\mathcal{C}$ est une ($\mathcal{C}$)-algèbre dans laquelle les notions d'idéal primaire (à droite), d'idéal secondaire (à droite) et d'idéal tertiaire (à droite) coïncident.

Démonstration analogue à celle de la proposition précédente.

Remarque 5.5. $\mathcal{A}$ étant un a-système à gauche défini sur un demi-groupe D renversable à gauche

a) la relation $x \leqslant y \longleftrightarrow \bar{y} \subseteq \bar{x}$ est une relation de pré-ordre sur D compatible avec la structure de demi-groupe de D. (cf aussi exemple 6.4.).

b) le produit de deux a-idéaux finis est un a-idéal fini.

6. Exemples de a-systèmes.

Exemple 6.1. D étant un ensemble muni de deux lois partout définies, l'une notée multiplicativement, l'autre notée &, ces deux lois satisfaisant aux conditions

(1) $(ab)c = a(bc)$, $\forall$ a, b, c $\in$ D,

(2) $a(b \,\&\, c) = (ab) \,\&\, (ac)$, $\forall$ a, b, c $\in$ D,

(3) $(b \,\&\, c)a = (ba) \,\&\, (ca)$, $\forall$ a, b, c $\in$ D,

l'application qui, au complexe X de D associe la partie stable pour la loi & engendrée par le complexe $P(X) = X \cup DX$ est une a-opération à gauche.

La vérification des axiomes (A1), (A2), (gA3), (A4) se fait en tenant compte des remarques suivantes:

a) La partie stable pour la loi &, s(A), engendrée par le complexe A, est égale à $\bigcup_{i \geqslant 0} A_i$, où $A_0 = A$, et pour $i \geqslant 1$,

$$A_i = \{x \in D \mid x = a_1 \,\&\, a_2 \,\&\, \dots \,\&\, a_{n_i} \ , \ n_i \geqslant 1 \ , \ a_j \in A_{i-1}\} \ .$$

(la loi & n'étant pas supposée associative, les expressions telles que $a_1 \,\&\, a_2 \,\&\, \dots \,\&\, a_p$ sont définies par récurrence:

$$a_1 \,\&\, a_2 \,\&\, \dots \,\&\, a_p = (a_1 \,\&\, a_2 \dots \,\&\, a_{p-1}) \,\&\, a_p \quad).$$

b) A et B étant deux complexes de D, les complexes A_p et B_q, d'indices p et q, définis dans l'alinéa précédent sont tels que $A_p B_q \subseteq (AB)_{p+q}$. (démonstration par récurrence sur p et q).

c) $P(X).P(Y) = P(XDY \cup XY)$.

Si la loi & est supposée associative, s(A) est l'ensemble des éléments de D de la forme a_1 & a_2 & ... & a_n , où $a_i \in A$, $n \geq 1$. Si la loi & est associative et commutative, $s(A \cup B)$ = s(A) & s(B).

<u>Exemple 6.1a</u>. D étant un groupoïde contenant un élément idempotent, a, la loi du groupoïde étant notée &, nous pouvons définir sur D une multiplication en posant $xy = a$, $\forall$ x, y $\in$ D. Les conditions (1) , (2) et (3) sont satisfaites et le a-idéal $\bar{X}$ engendré par X est la partie stable pour la loi & du groupoïde engendrée par le complexe $X \cup \{a\}$.

<u>Exemple 6.1b</u>. D étant un demi-groupe multiplicatif, la multiplication et la loi & définie par x & y = y , $\forall$ x, y $\in$ D, vérifient les conditions (1), (2) et (3). Le a-idéal engendré par X dans le a-système que nous venons de définir est égal à $X \cup DX$. Ce a-système n'est autre que le d-système à gauche.

<u>Exemple 6.1c</u>. D étant un groupe pour une loi notée $\top$(l'élément neutre étant noté e, le symétrique de a étant noté a'), les conditions (1), (2), (3) sont satisfaites en prenant comme multiplication la loi $xy = e$, $\forall$ x, y et comme loi &, la loi x & y = $x \top y'$. Le a-idéal engendré par X dans le a-système étudié est le sous-groupe (pour la loi $\top$) du groupe D engendré par X.

<u>Exemple 6.1d</u>. D étant un demi-anneau, autrement dit la loi & étant en outre supposée associative, le a-idéal à gauche engendré par X dans le a-système précédent n'est autre que l'idéal à gauche (au sens idéal à gauche dans un demi-anneau, cf [1] , p. 24.03) engendré par X.

<u>Exemple 6.1e</u>. D étant le demi-groupe multiplicatif d'un anneau, prenons comme loi & la loi x & y = x - y , $\forall$x, y $\in$ D , la multiplication étant celle de l'anneau nous obtenons un a-système à gauche qui n'est autre que le k-système à gauche.

<u>Exemple 6.1f.</u> D étant le demi-groupe multiplicatif d'un anneau, prenons l'addition comme loi &, la multiplication étant celle de l'anneau. Les conditions (1) à (3) sont vérifiées. Le a-idéal engendré par X dans le a-système obtenu est la partie stable pour l'addition engendrée par $X \cup DX$.

Si D contient un élément unité, ce a-système coïncide avec celui de l'exemple 6.1e.

<u>Exemple 6.1g</u>. D étant un treillis distributif, prenons comme multiplication la loi $xy = x \wedge y$ et comme loi & la loi x & y = $x \vee y$. Dans le a-système obtenu, le a-idéal engendré par X n'est autre que l'idéal engendré par X au sens idéal dans un treillis.

<u>Proposition 6.1</u>. Les a-systèmes définis dans l'exemple 6.1. et ses cas particuliers sont de caractère fini.

Soit $\bar{X}$ un a-idéal du a-système de l'exemple 6.1. Pour tout a de $X \cup DX$, il existe un complexe fini Y contenu dans X, tel que $a \in \bar{Y}$ ($Y = \{a\}$ si $a \in X$, $Y = \{b\}$ si $a = db$, avec $b \in X$). De plus, en reprenant les notations de l'exemple 6.1., si pour tout a de $(X \cup DX)_i$, il existe un complexe fini Y ($Y \subseteq X$) tel que $a \in \bar{Y}$, il en est de même pour tout b de $(X \cup DX)_{i+1}$, car b est de la forme a_1 & ... & a_n , où les a_i appartiennent à $(X \cup DX)_i$, et $b \in \bar{Y}$, Y étant le complexe $Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_n$ contenu dans X, Y_j un complexe fini contenu dans X tel que $a_j \in \bar{Y}_j$. Ainsi pour tout $i \geqslant 0$, et tout $a \in (X \cup DX)_i$ il existe un complexe fini Y contenu dans X, tel que $a \in \bar{Y}$. Ceci montre, puisque $\bar{X} = \bigcup_{i \geqslant 0} (X \cup DX)_i$ que le a-système considéré est de caractère fini.

Remarque 6.1. Le a-système de l'exemple 6.1. est modulaire si (D ayant un zéro),

a) $\bar{X} + \bar{Y} = \bar{X}$ & $\bar{Y}$,

b) x & $y \in \bar{X}$ et $x \in \bar{X}$ impliquent $y \in \bar{X}$.

La condition a) est satisfaite si la loi & est associative et commutative, car alors $s(A \cup B) = s(A)$ & $s(B)$. Cette condition a) est équivalente à la condition

a') $\forall x', x'' \in \bar{X}$, $\forall y'$, $y'' \in \bar{Y}$, les éléments (x' & y') & (x" & y"), (x' & y') & (y" & x"), x', y' peuvent se mettre sous la forme x & y, avec $x \in \bar{X}$, $y \in \bar{Y}$.

On retrouve ainsi le fait que les sous-groupes d'un groupe abélien ou les idéaux à gauche d'un anneau forment des treillis modulaires.

Remarque 6.2. Un a-système (quelconque) est distributif si l'une des conditions suivantes est réalisée: (D ayant un élément permis à droite)

$$\bar{X} + \bar{Y} = \bar{X} \cup \bar{Y} \quad , \text{ ou } \bar{X}.\bar{Y} = \bar{X} \cap \bar{Y} .$$

Par exemple, le d-système à gauche est distributif, le a-système formé par les idéaux d'un treillis distributif est distributif.

Exemple 6.2. D étant le demi-groupe multiplicatif d'un anneau topologique non nécessairement commutatif, l'application qui, au complexe X associe l'adhérence de l'idéal à gauche engendré par X est une a-opération à gauche.

Exemple 6.3. $\mathcal{A}$ étant un a-système à gauche défini sur un demi-groupe D contenant un élément permis à droite, nous poserons les définitions suivantes:

Un "a-idéal quasi-premier" est un a-idéal $\bar{P}$ tel que $\bar{X}.\bar{Y} \subseteq \bar{P}$ implique $\bar{X} \subseteq \bar{P}$ ou $\bar{Y} \subseteq \bar{P}$.

Un "a-idéal premier" est un a-idéal bilatère quasi-premier.

Le "QP-Radical de $\bar{X}$" est l'intersection des a-idéaux quasi-premiers contenant $\bar{X}$. Il sera noté QP-Rad($\bar{X}$).

Le "P-radical de $\bar{X}$" est l'intersection des a-idéaux premiers contenant $\bar{X}$. Il sera noté P-Rad($\bar{X}$).

Nous supposerons que le a-système bilatère $\mathcal{B}$ associé à $\mathcal{A}$ est de caractère fini (condition réalisée si $\mathcal{A}$ est de caractère fini).

L'application f: $X \in \mathcal{G}'(D) \xRightarrow{f} \breve{X} =$ P-Rad($\bar{X}$) est une a-opération bilatère sur D.

La vérification des axiomes (A1), (A2), (A3) est immédiate. Celle de (A4) repose sur les lemmes suivants:

Lemme 6.1. P-Rad($\bar{X}$) = P-Rad($\bar{X} + \bar{X}_\circ D$), autrement dit le P-radical de $\bar{X}$ est égal au P-radical du a-idéal bilatère engendré par $\bar{X}$ dans $\mathcal{A}$.

Lemme 6.2. Si $\bar{X}$ est bilatère, P-Rad($\bar{X}$) est l'ensemble des $x \in D$ tels que tout m-système contenant x rencontre $\bar{X}$ (l'expression "m-système" est prise ici au sens de MAC COY (cf [22] ,p. 826) et désigne un complexe M tel que, si $a \in M$, $b \in M$, il existe $d \in D$ tel que $adb \in M$.
(Démonstration analogue à celle de [20] ,p.10).

Lemme 6.3. P-Rad($\bar{X}$) $\circ$ P-Rad($\bar{Y}$) $\subseteq$ P-Rad($\bar{X}_\circ\bar{Y}$).
(Ceci peut s'établir au moyen des deux lemmes précédents).

La vérification de (A4) est alors immédiate, $\overbrace{XDY \cup XY}$ étant égal à P-Rad($\bar{X}_\circ\bar{Y}$).
Le a-système obtenu sera appelé le "a-système radical associé à $\mathcal{A}$". Le a-système radical associé à $\mathcal{A}$ est le même que celui associé au a-système bilatère associé au a-système $\mathcal{A}$.

Remarque 6.3. Relativement aux opérations définies sur les a-idéaux du système $\mathcal{A}$ le P-Radical et le QP-Radical possèdent les propriétés suivantes:

a) P-Rad($\bar{X}'.D$) = QP-Rad($\bar{X}'.D$) $\subseteq$ QP-Rad($\bar{X}$) $\subseteq$ P-Rad($\bar{X}$) ,

b) P-Rad ($\bigsqcup_I \bar{X}_i$)= P-Rad ($\overline{\bigsqcup_I \text{P-Rad}(\bar{X}_i)}$),

c) P-Rad($\bar{X} \cap \bar{Y}$) $\subseteq$ P-Rad($\bar{X}$) $\cap$ P-Rad($\bar{Y}$) = P-Rad($\bar{X}_\circ\bar{Y}$),

d) Si le a-idéal $\bar{X}$ est bilatère
P-Rad($\bar{X}'.D$) = QP-Rad($\bar{X}'.D$) = QP-Rad($\bar{X}$) = P-Rad($\bar{X}$),

e) Si les a-idéaux $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ sont bilatères
P-Rad($\bar{X} \cap \bar{Y}$) = P-Rad($\bar{X}$) $\cap$ P-Rad($\bar{Y}$) = P-Rad($\bar{X}_\circ\bar{Y}$).

Proposition 6.2. Le a-système radical associé à un a-système $\mathcal{A}$ est un treillis distributif.

Si $*$ est le symbole de la multiplication des a-idéaux dans le a-système radical, nous avons

$$\breve{X} * \breve{Y} = \text{P-Rad}(\bar{X}_\circ\bar{Y}) = \text{P-Rad}(\bar{X}) \cap \text{P-Rad}(\bar{Y}) = \breve{X} \cap \breve{Y} .$$

L'une des conditions de la remarque 6.2. étant réalisée les a-idéaux d'un a-système radical forment un treillis distributif.

<u>Proposition 6.3</u>. Le a-système radical associé à $\mathcal{A}$ est de caractère fini. Il est noethérien si $\mathfrak{A}$ est noethérien.

La démonstration utilisera le lemme suivant qui peut s'établir comme dans [20], p.II):

<u>Lemme 6.4</u>. Pour que $\bar{X}=\text{P-Rad}(\bar{X})$, il faut et il suffit que $\bar{Z}^{\circ n}\subseteq \bar{X}$ implique $\bar{Z}\subseteq\bar{X}$ ($\bar{X}$ et $\bar{Z}$ étant supposés bilatères, $\bar{Z}^{\circ n}$ désignant le produit de n a-idéaux égaux à $\bar{Z}$).

Soit $(\tilde{X}_i)$ une chaîne croissante de a-idéaux du a-système radical associé à $\mathcal{A}$. $\bar{Z}^{\circ n}\subseteq\overline{\bigcup_i \tilde{X}_i}$, où $\bar{Z}\in\mathfrak{A}$, implique, $\mathfrak{A}$ étant de caractère fini, $\bar{Z}^{\circ n}\subseteq\bigcup_i \tilde{X}_i$. Il existe donc un indice, j par exemple, tel que $\bar{Z}^{\circ n}\subseteq\tilde{X}_j=\text{P-Rad}(\bar{X}_j)$ et le lemme montre que $\bar{Z}$ est contenu dans $\tilde{X}_j$. Ainsi $\bar{Z}$ est contenu dans $\overline{\bigcup_i \tilde{X}_i}$, le lemme montre que $\overline{\bigcup_i \tilde{X}_i}$, qui est égal à $\widetilde{\bigcup_i X_i}$, est égal à son P-Radical, de sorte que $\widetilde{\bigcup_i \tilde{X}_i}=\bigcup_i \tilde{X}_i$, et le a-système radical est de caractère fini.

Si $\mathfrak{A}$ est noethérien, il en est de même du a-système radical puisque ce dernier est moins fin que $\mathfrak{A}$.

--

<u>Exemple 6.4</u>. $\mathcal{R}$ étant une relation d'équivalence sur D, compatible avec la structure de demi-groupe de D, c'est-à-dire telle que:

$$x\,\mathcal{R}\,x' \text{ et } y\,\mathcal{R}\,y' \Longrightarrow xy\,\mathcal{R}\,x'y'$$

l'application qui au complexe X de D associe la partie $\bar{X}$ saturée pour $\mathcal{R}$ engendrée par $X\cup DX$ est une a-opération à gauche. Le a-système qu'elle définit est le "<u>a-système à gauche associé à $\mathcal{R}$</u>" .

La vérification des axiomes est immédiate. Le a-système à gauche associé à l'égalité est le d-système à gauche. Le a-système associé à la relation universelle est le a-système impropre. Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont deux relations d'équivalence sur D, compatibles avec la structure de demi-groupe de D, si $\mathcal{R}$ est plus fine que $\mathcal{S}$, le a-système à gauche associé à $\mathcal{R}$ est plus fin que celui associé à $\mathcal{S}$.

Si D est le demi-groupe multiplicatif d'un anneau, A un idéal bilatère de l'anneau, la relation: $x\,\mathcal{R}\,y \Longleftrightarrow x-y\in A$ est une relation d'équivalence compatible avec la structure de demi-groupe multiplicatif de D.

Le a-idéal du a-système à gauche associé à $\mathcal{R}$ est formé par l'ensemble des éléments de la forme x + a, ou de la forme dx + a, où $x\in X$, $d\in D$, $a\in A$.

Dans le cas général il y a équivalence entre:

a) $\bar{x}=\bar{y}$,

b) $x\,\mathcal{R}\,y$, ou, il existe u et v dans D tels que $x\,\mathcal{R}\,uy$ et $y\,\mathcal{R}\,vx$.

Proposition 6.4. D étant renversable à gauche et $\mathcal{A}(X \xrightarrow{\theta} \bar{X})$ un a-système à gauche sur D, la relation: $x \mathcal{R} y \longleftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$, est une relation d'équivalence sur D compatible avec la structure de demi-groupe de D, et le a-système à gauche $(X \xrightarrow{\theta} \breve{X})$ associé à $\mathcal{R}$ est plus fin que le a-système $\mathcal{A}$.

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec la structure de demi-groupe de D car $x \mathcal{R} y$ et $x' \mathcal{R} y'$ impliquent $\bar{x} = \bar{y}$, $\bar{x}' = \bar{y}'$,d'où $\bar{x} \circ \bar{y} = \bar{x}' \circ \bar{y}'$, soit, D étant renversable à gauche, $\overline{xx'} = \overline{yy'}$, et finalement $xx' \mathcal{R}\, yy'$.

D'autre part, $\breve{X}$ est l'ensemble des $z \in D$ tels que $\bar{z} = \bar{y}$, où $y \in X' = X \cup DX$. Comme $y \in X'$ implique $\bar{y} \subseteq \bar{X}$, nous avons $\breve{X} = \bigcup_{y \in X'} \bar{y} \subseteq \bar{X}$, et le a-système à gauche associé à $\mathcal{R}$ est plus fin que le a-système $\mathcal{A}$. Pour que l'égalité ait lieu, il faut et il suffit que $\bar{X} = \bigcup_{y \in X'} \bar{y}$, autrement dit que $\bar{X} = \bigcup_{x \in X} \bar{x}$, car $y = dx$ entraîne $y \in \bar{x}$. Cette égalité a lieu si $\mathcal{A}$ est le a-système impropre ou si $\mathcal{A}$ est le d-système à gauche.

Exemple 6.5. $\mathcal{A}$ étant un a-système à gauche défini sur D et A un idéal bilatère de $\mathcal{A}$, l'application qui, au complexe X de D associe le complexe $\breve{X} = \bar{X} + A$ (+ étant le symbole de l'addition dans $\mathcal{A}$) , est une a-opération à gauche sur D. Le a-système qu'elle définit est le "a-système-quotient"de $\mathcal{A}$ par A. Il sera noté $\mathcal{A}/A$

Si + et $\circ$ (resp. $\top$ et $*$) sont les symboles de l'addition et de la multiplication dans $\mathcal{A}$ (resp. dans $\mathcal{A}/_A$), nous avons

$$\breve{X} \top \breve{Y} = \breve{X} + \breve{Y} \qquad \text{et} \qquad \breve{X} * \breve{Y} = \breve{X} \circ \breve{Y} + A.$$

Si $\mathcal{A}$ est de caractère fini (resp. noethérien) $\mathcal{A}/_A$ est de caractère fini (resp. noethérien).

7. Comparaison avec d'autres définitions de systèmes d'idéaux.

7.A. Comparaison avec les x-systèmes de K. E. AUBERT.

K.E. AUBERT a défini (cf. [3] , p. 6.0I, ou [4] , p. 4), en supposant le demi-groupe D commutatif, la notion de x-systèmes d'idéaux en prenant comme axiomes:

(I) $A \subseteq A_x$

(2) $A \subseteq B_x \Longrightarrow A_x \subseteq B_x$,

(3') $A.B_x \subseteq B_x$,

(3") $A.B_x \subseteq (AB)_x$.

Dans le cas où D n'est pas supposé commutatif, AUBERT a proposé (cf. [3], p. 6.0I ou [4], p. 38) de définir les x-idéaux à gauche en remplaçant l'axiome (3") par l'axiome

(g3") $B_xA \quad (BA)_x$.

La proposition suivante précise les relations entre a-systèmes bilatères et x-systèmes bilatères:

Proposition 7.1. Tout x-système bilatère est un a-système bilatère. Si D est renversable d'un côté (cf. définition 5.1.) les notions de a-système bilatère et de x-système bilatère coincident. En particulier si D est commutatif, les notions de a-système et de x-système coincident.

Les axiomes (1) et (2) sont les mêmes que (AI) et (A2). (3') et l'axiome $B_x A \subseteq B_x$ sont équivalents à (A3). Enfin (g3") et l'axiome (d3") $B.A_x \subseteq (BA)_x$ impliquent (lemme 5.1.) $B_x A_x \subseteq (BA)_x$, donc impliquent (A4).

Si D est renversable d'un côté, (A4) s'énonçant $\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{XY}$ (cf. proposition 5.3.) il y a équivalence entre a-systèmes bilatères et x-systèmes bilatères.

En général, la notion de a-système bilatère est plus faible que la notion de x-système bilatère. Par exemple l'ensemble des idéaux bilatères (au sens ordinaire) d'un anneau non commutatif constitue un a-système bilatère mais non , en général, un x-système bilatère.

Par contre, il n'y a pas, en général, de relation entre a-système à gauche et x-système à gauche. Toutefois, si D est renversable à gauche un a-système à gauche est un x-système à gauche car $\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{XY}$ implique $\bar{X}\,Y \subseteq \overline{XY}$ (lemme 5.1.).

Notons enfin que dans un x-système à gauche, la multiplication des x-idéaux n'est pas nécessairement associative, car nous avons seulement

$$(A_x \circ B_x) \circ C_x = [A\ B_x\ C_x]_x \subseteq [A(B\ C_x)_x]_x = A_x \circ (B_x \circ C_x).$$

7B. Comparaison avec le système d'axiomes de LESIEUR et CROISOT.

Dans le cas non commutatif, LESIEUR et CROISOT ont proposé (cf [19], p. 85) de remplacer l'axiome (g3") d'AUBERT par l'axiome plus faible

$$\text{(A)}\quad \bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{X\,\bar{Y}}\ .$$

Ces auteurs avaient en vue d'obtenir un exemple de ($\mathcal{C}$)-algèbre. L'axiome (A) convient alors, mais il présente des inconvénients pour l'étude des systèmes d'idéaux: si nous supposons vérifiés les axiomes (AI), (A2), (gA3) et (A), et si nous définissons toujours la multiplication en posant $\bar{X} \circ \bar{Y} = \overline{\bar{X}\,\bar{Y}}$, cette multiplication n'est pas nécessairement associative, la distributivité à gauche de la multiplication par rapport à l'union n'est pas nécessairement vérifiée. De façon précise, on peut établir la

Proposition 7.2. Si dans la définition d'un a-système à gauche, l'axiome (A4) est remplacé par l'axiome (A),

a) pour que la multiplication soit associative, il faut et il suffit que l'on ait en outre

$\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{\bar{X}\,Y}$, si Y est de la forme $Y = \bar{U}\,\bar{V}$,

b) les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

i) la multiplication est distributive par rapport à l'union,

ii) le groupoide formé par les idéaux est résidué à droite,

iii) $\bar{X}\,\bar{Y} \subseteq \overline{\bar{X}\,Y}$, si Y est de la forme $Y = \bigsqcup_{i} \bar{Y}_i$.

L'axiome (A4) semble donc préférable à l'axiome (g3") d'AUBERT ainsi qu'à l'axiome (A) de LESIEUR et CROISOT. Notons que l'axiome (A) est vérifié dans un a-système à gauche car $\bar{X}\,\bar{Y} = \bar{X}\,\bar{\bar{Y}} \subseteq \overline{XD\,\bar{\bar{Y}}} + \overline{X\,\bar{\bar{Y}}} = \overline{X\,\bar{Y}}$.

7C. Comparaison avec les r-systèmes de LORENZEN.

Les r-systèmes d'idéaux de LORENZEN, définis sur un groupe ordonné filtrant sont en fait des systèmes d' "idéaux fractionnaires". Aussi la comparaison entre les r-systèmes de LORENZEN sur les groupes ordonnés filtrants et les a-systèmes sera faite au paragraphe 4 du chapitre II, lorsque nous aurons défini les a-systèmes S-fractionnaires.

CHAPITRE II

a-Idéaux S-Fractionnaires.

1. Préliminaires.

Etant donnés un a-système à gauche $\mathcal{A}$ sur D et un demi-groupe D(S) de fractions à droite de D relativement à un complexe S, nous allons prolonger $\mathcal{A}$ de manière à obtenir un système de a-idéaux "S-fractionnaires" sur D(S). Ce prolongement généralisera la définition classique des idéaux fractionnaires d'un anneau intègre.

Rappelons tout d'abord, brièvement, la définition d'un demi-groupe de fractions à droite d'un demi-groupe D relativement à un complexe S.

S étant un complexe tel que

(LI) S est multiplicativement fermé,

(L2) Tout élément de S est simplifiable à gauche et à droite,

(L3) $a \in D$ et $s \in S \Longrightarrow \exists a' \in D$ et $s' \in S$, tels que $as' = sa'$,

la relation $\mathcal{R}$ définie dans $D \times S$ par

$$(a,s)\,\mathcal{R}\,(b,t) \Longleftrightarrow \exists u \in D \text{ et } v \in D \text{ tels que } \begin{cases} au = bv, \\ su = tv \in S, \end{cases}$$

est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient $D \times S\,/\mathcal{R}$, que nous noterons D(S), peut être muni d'une structure de demi-groupe unitaire en posant $Cl(a,s).Cl(b,t) = Cl(ad,tu)$, où d et u sont tels que $d \in D$, $u \in S$, $sd = bu$, $Cl(a,s)$ désignant la classe d'équivalence du couple (a,s). L'élément unité du demi-groupe D(S) est $Cl(s,s)$.

L'application $g: a \in D \Longrightarrow g(a) = Cl(as,s) \in D(S)$ est un homomorphisme injectif de D dans D(S). De plus g(s) est inversible dans D(S), quel que soit $s \in S$, et pour tout $\alpha \in D(S)$, il existe $a \in D$, $s \in S$ telsque $\alpha = g(a)[g(s)]^{-1} = Cl(a,s)$. L'élément $Cl(a,s)$ sera noté a/s ou as^{-1} et D(S) est le demi-groupe des fractions à droite de D relativement à S.

D sera identifié au sous-demi-groupe g(D) de D(S) au moyen de l'isomorphisme g de D sur g(D).

Si D est le demi-groupe multiplicatif d'un anneau (que nous désignerons également par D), D(S) peut être muni d'une structure d'anneau prologeant celle de D en posant $a/s + b/t = (ad + bu)/tu$, où d et u sont tels que $d \in D$, $u \in S$, $sd = tu$. L'application g est alors un homomorphisme injectif de la structure d'anneau de D dans celle de D(S).

$\mathcal{A}$ étant un a-système à gauche, un complexe "S-fractionnaire" ou "S-minoré" étant un complexe de la forme Xs^{-1} ($X \subseteq D$, $s \in S$) nous ferons notre prolongement du a-système $\mathcal{A}$ de façon à satisfaire, en particulier, aux conditions suivantes:

1) Le a-idéal S-fractionnaire engendré par le complexe S-fractionnaire Xs^{-1} est le complexe $\bar{X}\ s^{-1}$,

2) Le complexe $\bar{X}\ s^{-1}\ \bar{Y}\ t^{-1}$ est S-fractionnaire,

3) Le produit des a-idéaux S-fractionnaires $\bar{X}s^{-1}$ et $\bar{Y}t^{-1}$ est le a-idéal $\bar{Z}\ u^{-1}$, si $\bar{X}\ s^{-1}\bar{Y}\ t^{-1} = Z\ u^{-1}$,

4) La multiplication des a-idéaux S-fractionnaires est associative.

Pour atteindre le but proposé, il nous faudra imposer à $\mathcal{A}$ et à S, outre les conditions (LI), (L2), (L3), d'autres conditions que nous allons préciser.

a) Comme $Xt^{-1} = Xs(ts)^{-1}$, nous devons avoir $\bar{X}\ t^{-1} = \overline{Xs}\ (ts)^{-1}$, or $\bar{X}\ t^{-1} = \bar{X}\ s(ts)^{-1}$, il nous faut donc la condition

(A) $\overline{Xs} = \bar{X}s\ ,\ \forall s \in S, \forall X \in \mathcal{G}'(D)$.

b) D'autre part $Xs^{-1} = Yt^{-1}$ doit impliquer $\bar{X}\ s^{-1} = \bar{Y}\ t^{-1}$. Or il existe $u \in S$ et $d \in D$, tels que $su = td$. Les égalités $Xs^{-1} = Yt^{-1}$ et $\bar{X}s^{-1} = \bar{Y}t^{-1}$ étant équivalentes à $Xu = Yd$ et $\bar{X}u = \bar{Y}d$, il faut que $\overline{Yd} = \bar{Y}d$, puisque $\overline{Xu} = \bar{X}u$ d'après (A). Ceci sera réalisé, d'après (A), si nous savons que d appartient à S. Nous introduirons donc la condition

(B) $sd \in S$ et $s \in S \Longrightarrow d \in S$,

ou la condition plus faible

(B') $s \in S$ et $t \in S \Longrightarrow$ il existe $u, v \in S$ tels que $su = tv$.

Ceci étant, $Xs^{-1} = Yt^{-1}$ implique $\bar{X}s^{-1} = \bar{Y}t^{-1}$.

c) Etant donnés deux a-idéaux S-fractionnaires $\bar{X}s^{-1}$ et $\bar{Y}t^{-1}$, nous voulons l'existence de $u \in S$ tel que $\bar{X}s^{-1}\ \bar{Y}t^{-1}u \subseteq D$. Ceci sera vérifié si nous avons:

(C) $s \in S$ et $\bar{X} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \exists\ u \in S,\ Z \subseteq D$ tels que $\bar{X}u = sZ$, ou la condition plus forte

(C') $s \in S$ et $\bar{X} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \exists\ u \in S,\ \bar{Z} \in \mathcal{A}$ tels que $\bar{X}u = s\bar{Z}$, car, (C) étant satisfaite, il existe $v \in S$, $Z \subseteq D$ tels que $\bar{Y}v = sZ$ et, en prenant u égal à tv, nous aurons $\bar{X}\ s^{-1}\ \bar{Y}\ t^{-1}u = \bar{X}\ Z \subseteq D$.

Les conditions (A), (B'), (C) étant vérifiées, si $F = \bar{X}\ s^{-1}\ \bar{Y}\ t^{-1}$ et si u et v sont deux éléments de S tels que $Fu = U \subseteq D$, $Fv = V \subseteq D$, la relation $F = Uu^{-1} = Vv^{-1}$ entraîne $\bar{U}\ u^{-1} = \bar{V}\ v^{-1}$, et le a-idéal S-fractionnaire $\bar{U}\ u^{-1}$ sera, par définition, le produit des a-idéaux $\bar{X}\ s^{-1}$ et $\bar{Y}\ t^{-1}$.

d) Nous voulons également que cette multiplication des a-idéaux S-fractionnaires soit associative. Soient $\bar{X}\ s^{-1}$, $\bar{Y}\ t^{-1}$, $\bar{Z}\ u^{-1}$ trois a-idéaux S-fractionnaires et supposons satisfaites les conditions (A), (B) ou (B'), et (C'). Nous avons:

$$\left[(\bar{X}\ \ s^{-1})\circ(\bar{Y}\ t^{-1})\right]\circ(\bar{Z}\ u^{-1}) = \bar{X}\circ\bar{V}\circ\bar{A}\ (uw)^{-1}\ ,$$

avec $v, w, \bar{V}, \bar{A}$ tels que $v \in S$, $w \in S$, $\bar{Y}\ v = s\ \bar{V}$ et $\bar{Z}\ w = tv\ \bar{A}$.

$$(\bar{X}\, s^{-1})\circ \left[(\bar{Y}\, t^{-1})\circ(\bar{Z}\, u^{-1})\right] = \bar{X}\circ\bar{C}\ (uxy)^{-1} ,$$

avec x, y, $\bar{B}$, $\bar{C}$ tels que $x \in S$, $y \in S$, $\bar{Z}x = t\bar{B}$ et $\bar{Y}\circ\bar{B}y = s\bar{C}$.

Comme $tv\,\bar{A}\,a = \bar{Z}\,wa = \bar{Z}\,xyb = t\,\bar{B}\,yb$, a et b étant deux éléments de S tels que $wa = xyb$, nous avons $v\,\bar{A}\,a = \bar{B}\,yb$, et par suite

$$s\,\bar{V}\,\bar{A}\,a = \bar{Y}\,v\,\bar{A}\,a = \bar{Y}\,\bar{B}\,yb \subseteq \bar{Y}\circ\bar{B}\,yb = s\,\bar{C}\,b ,$$

donc $\bar{V}\,\bar{A}\,a \subseteq \bar{C}\,b\ (= \overline{Cb})$, d'où $\bar{V}\circ\bar{A}\,a \subseteq \bar{C}\,b$, ce qui entraîne

$$\left[(\bar{X}\,s^{-1})\circ(\bar{Y}\,t^{-1})\right]\circ(\bar{Z}\,u^{-1}) \subseteq (\bar{X}\,s^{-1})\circ\left[(\bar{Y}\,t^{-1})\circ(\bar{Z}\,u^{-1})\right].$$

Nous avons seulement une inclusion alors que nous voulions une égalité. la condition (C'), jointe à (A) et à (B) ou (B') étant insuffisante pour assurer l'associativité de la multiplication il en est de même, a fortiori, de la condition plus faible (C).

Si nous supposons, en outre, que:

$$\text{(D)}\quad s\,\bar{X} = \overline{sX}\ ,\ \forall s \in S,\ \forall X \in \mathcal{P}'(D),$$

l'égalité $s\,\bar{V}\,\bar{A}\,a = \bar{Y}\,\bar{B}\,yb$ donne alors $s\,\bar{V}\circ\bar{A}\,a = \bar{Y}\circ\bar{B}\,yb$, d'où $\bar{V}\circ\bar{A}\,a = \bar{C}\,b$ et l'égalité a lieu.

Remarquons enfin que si (A), (B) ou (B') et (D) sont satisfaites, et si $Ds = sD$ quel que soit $s \in S$ (cette dernière condition est une conséquence de (A) et (D) si le demi-groupe contient un élément unité, e: prendre $X = \{e\}$), (C') est également satisfaite car il existe alors $X' \subseteq D$ tel que $\bar{X}\,s = s\,X'$ et

$$s\,X' = \bar{X}\,s = \bar{\bar{X}}\,s = \overline{\bar{X}\,s} = \overline{s\,X'} = s\,\overline{X'} ,$$

d'où $X' = \overline{X'}$.

En résumé, nous formulerons sur S et $\mathcal{A}$ les hypothèses suivantes, que nous appellerons les six "<u>conditions (S)</u>":

(SI) S est un sous-demi-groupe de D,

(S2) tout élément de S est simplifiable à gauche et à droite.

(S3) $Ds = sD\ ,\ \forall s \in S$,

(S4) $s \in S$ et $d \notin S \Longrightarrow sd \notin S$ et $ds \notin S$,

(S5) $s\,\bar{X} = \overline{sX}\ ,\ \forall s \in S\ ,\ \forall X \in \mathcal{P}'(D)$,

(S6) $\bar{X}\,s = \overline{Xs}\ ,\ \forall s \in S,\ \forall X \in \mathcal{P}'(D)$.

les conditions (SI), (S2), (S5) et (S6) sont identiques à (LI), (L2), (A) et (D). (S3) implique (L3), (S4) contient(B) et une condition supplémentaire qui nous sera utile par la suite. Ces conditions ne sont pas nécessairement indépendantes: par exemple, si D est unitaire, (S3) est une conséquence de (S5) et (S6).

<u>Proposition 1.1.</u> Un complexe S qui vérifie (S3) et (S4) est réversible à gauche et à droite.

Si $s \in S$, $t \in S$ il existe $d \in D$ tel que $st = td$. Comme $t \in S$ et comme $td = st \in S$, (S4) implique $d \in S$, et S est réversible à gauche.
On verrait de même que S est réversible à droite.

Proposition 1.2. L'ensemble des éléments $s \in D$ qui satisfont aux conditions (S3) et (S2), s'il n'est pas vide, satisfait aux conditions (SI) et (S4). Il est de plus réversible à gauche et à droite.

Cet ensemble S étant supposé non vide, il en est de même de l'ensemble S' des éléments s vérifiant (S2) et de l'ensemble S" des éléments s vérifiant (S3), et $S = S' \cap S''$.

a) S vérifie (SI): soient s et t deux éléments de S". Si $d \in D$, il existe d' et d" dans D tels que $ds = sd'$, $d't = td''$, de sorte que $dst = sd't = std''$, et $Dst \subseteq stD$. On verrait de même que $stD \subseteq Dst$, d'où $stD = Dst$. Ainsi $s \in S''$ et $t \in S''$ impliquent $st \in S''$. S" vérifie (SI); comme il en est de même de S', S vérifie (SI).

b) S vérifie (S4): soient s et d tels que $s \in S$, $ds \in S$. Alors $dDs = dsD = Dds$, d'où $dD = Dd$ et $d \in S''$. D'autre part $ad = bd$ entraîne $ads = bds$, d'où $a = b$, et d est simplifiable à droite. Enfin $da = db$ entraîne $das = dbs$, et comme il existe a' et b' dans D tels que $as = sa'$ et $bs = sb'$, nous avons $dsa' = dsb'$, d'où $a' = b'$, ce qui donne $a = b$ et d est simplifiable à gauche. Par suite $d \in S$. Il en résulte que $s \in S$ et $d \notin S$ entraînent $ds \notin S$. De même $s \in S$ et $d \notin S$ entraînent $sd \notin S$.

Proposition 1.3. Les a-systèmes à gauche définis dans l'exemple 6.1 du 1er chapitre et ses cas particuliers sont tels que $s\,\bar{X} = \overline{sX}$ et $\bar{X}\,s = \overline{Xs}$, si s est tel que $sD = Ds$.

En reprenant les notations de l'exemple 6.1. du 1er Chapitre, nous avons $P(sX) = sX \cup DsX = sX \cup sDX$ et $P(Xs) = Xs \cup DXs$. La distributivité de la multiplication par rapport à la loi & montre que $[P(Xs)]_i = [P(X)]_i s$ et que $[P(sX)]_i = s\,[(P(X)]_i$, d'où $\overline{Xs} = \bar{X}\,s$ et $\overline{sX} = s\,\bar{X}$.

La propriété est encore valable si le a-système considéré est bilatère, c'est-à-dire si, au lieu de prendre P(X) égal à $X \cup DX$, on prend P(X) égal à $X \cup DX \cup XD \cup DXD$.

Remarque 1.1. Si D est un anneau intègre et $\mathcal{A}$ le k-système, S l'ensemble des éléments non nuls de D, D(S) le corps des fractions de D, les conditions (S) sont satisfaites et les a-idéaux S-fractionnaires au sens de ce paragraphe 1. ne sont autres que les idéaux fractionnaires de D au sens habituel.

2. a-idéaux S-fractionnaires.

Nous supposerons dans la suite de ce chapitre que le a-système à gauche $\mathcal{A}$ et le complexe S vérifient les six conditions (S) du paragraphe 1.

Définition 2.1. Un complexe X de D(S) sera dit "S-fractionnaire" ou "S-minoré" s'il existe $s \in S$ tel que $Xs \subseteq D$. Un complexe de D sera dit "entier". Un complexe entier est S-fractionnaire.

Proposition 2.1. Un complexe X de L(S) est S-fractionnaire si, et seulement si, il existe $s \in S$ tel que $sX \subseteq D$.

X étant S-fractionnaire, il existe $s \in S$ tel que $Xs = X' \subseteq D$. Or, d'après (S3), il existe $X'' \subseteq D$ tel que $sX' = X''s$, d'où $sX = X'' \subseteq D$. La condition est donc nécessaire. On voit de même qu'elle est suffisante.

Remarques 2.1.

a) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant n complexes S-fractionnaires il existe un élement $s \in S$ tel que $X_i s \subseteq D$, $\forall i \in [I, n]$.

Il existe en effet $s_i \in S$ tel que $X_i s_i \subseteq D$, et comme S est réversible à gauche, il existe des $t_i \in S$ tels que $s_1 t_1 = s_2 t_2 = \ldots = s_n t_n = s$ (cf. [12], p.85) et $X_i s \subseteq D$, $\forall i$. Cet élément s est aussi tel que $sX_i \subseteq D$, $\forall i$. Il en résulte que si $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ est une famille finie non vide de complexes S-fractionnaires, $\bigcup_i X_i$ est S-fractionnaire.

b) Tout complexe contenu dans un complexe S-fractionnaire est S-fractionnaire. En particulier l'intersection d'une famille quelconque non vide de complexes S-fractionnaires est un complexe S-fractionnaire si elle est non vide.

c) Le produit de deux complexes S-fractionnaires (au sens produit de deux complexes) est S-fractionnaire , d'après le choix des conditions (S).

Définition 2.2. Nous appellerons "a-idéal S-fractionnaire engendré par le complexe S-fractionnaire $X = X' s^{-1}$" le complexe $\hat{X} = \overline{X'} s^{-1}$.

L'ensemble des a-idéaux S-fractionnaires sera noté $\mathcal{A}_S$ et sera appelé le "a-système S-fractionnaire associé à $\mathcal{A}$ et à S".

Remarques 2.2.

a) L'égalité $X's^{-1} = Y't^{-1}$ implique $\overline{X'}s^{-1} = \overline{Y'}t^{-1}$ d'après le choix des conditions (S).

b) Un a-idéal S-fractionnaire est un complexe S-fractionnaire.

c) Si $X \subseteq D$, on peut écrire $X = Xss^{-1}$, d'où $\hat{X} = \overline{Xs}\, s^{-1} = \bar{X}$, et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_S$. Un a-idéal S-fractionnaire contenu dans D sera appelé un "a-idéal entier".

d) X étant S-fractionnaire, il existe $s \in S$, $X' \subseteq D$ et $X'' \subseteq D$ tels que $X = X's^{-1} = s^{-1}X''$, alors $\hat{X} = \overline{X'}s^{-1} = s^{-1}\,\overline{X''}$.

e) Si D est unitaire, $s \in S$ implique $\hat{s} = \bar{s} = Ds = sD$ et $\widehat{s^{-1}} = Ds^{-1} = s^{-1}D$. $s \in S$ et $t \in S$ impliquent $\widehat{st} = \overline{st} = \bar{s} \circ \bar{t} = Dst = stD$.

f) Si $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_n$ sont n a-idéaux S-fractionnaires il existe $s \in S$ et des complexes $X'_1 , X'_2 , \ldots , X'_n$ de D tels que $\hat{X}_i = \overline{X'_i}\, s^{-1}$, $\forall i$.

Proposition 2.2. Les a-idéaux S-fractionnaires possèdent les propriétés suivantes, valables quel que soit $s \in S$, quels que soient les complexes S-fractionnaires X et Y:

a) $\widehat{sX} = s\hat{X}$, $\widehat{Xs} = \hat{X}s$, $\widehat{s^{-1}X} = s^{-1}\hat{X}$, $\widehat{Xs^{-1}} = \hat{X}s^{-1}$,

b) $X \subseteq \hat{X}$,

c) $X \subseteq \hat{Y} \Longrightarrow \hat{X} \subseteq \hat{Y}$,

(donc $X \subseteq Y \Longrightarrow \hat{X} \subseteq \hat{Y}$, $\hat{\hat{X}} = \hat{X}$),

d) $D\hat{X} \subseteq \hat{X}$,

e) $\hat{X}\hat{Y} \subseteq \widehat{XDY \cup XY}$.

Les démonstrations sont immédiates, par exemple pour e): $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ pouvant s'écrire respectivement $\hat{X} = s^{-1}\overline{X''}$ et $\hat{Y} = \overline{Y'}\,t^{-1}$ nous avons

$$s\,\hat{X}\,\hat{Y}\,t = \widehat{sX}\,\widehat{Yt} = \overline{X''}\,\overline{Y'} \subseteq \overline{X''DY' \cup X''Y'} = s\,\widehat{XDY \cup XY}\,t \ , \quad \text{d'où e).}$$

Si $\mathcal{A}$ est un a-système bilatère, la propriété d) peut être remplacée par la suivante plus précise:

d') $D\hat{X} \cup \hat{X}D \subseteq \hat{X}$

Remarque 2.3. L'application $X \Longrightarrow \hat{X}$ est une application de fermeture dans l'ensemble des complexes S-fractionnaires. Cet ensemble n'est pas, en général, un treillis complet pour la réunion et l'intersection. Nous avons néanmoins les propriétés suivantes:

a) $(\hat{X}_i)_{i \in I}$ étant une famille non vide de a-idéaux S-fractionnaires dont l'intersection est non vide, $\bigcap_i \hat{X}_i$ est un a-idéal S-fractionnaire.

b) le a-idéal S-fractionnaire engendré par le complexe S-fractionnaire X, est l'intersection des a-idéaux S-fractionnaires contenant X.

c) $(X_i)_{i \in I}$ étant une famille de complexes S-fractionnaires dont l'intersection est non vide, $\widehat{\bigcap_i X_i} \subseteq \bigcap_i \hat{X}_i$.

d) $(\hat{X}_i)_{i \in I}$ étant une famille non vide de a-idéaux S-fractionnaires $\bigcup_i \hat{X}_i \subseteq \widehat{\bigcup_i X_i} = \widehat{\bigcup_i \hat{X}_i}$, si $\bigcup_i \hat{X}_i$ est un complexe S-fractionnaire.

Définition 2.3. $(\hat{X}_i)_{i \in I}$ étant une famille finie non vide de a-idéaux S-fractionnaires, nous appellerons "somme" de ces a-idéaux le a-idéal S-fractionnaire $\widehat{\bigcup \hat{X}_i}$. Si $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, on le notera $\hat{X}_1 + \hat{X}_2 + \ldots + \hat{X}_n$.

Cette définition est justifiée par le fait qu'une réunion finie de complexes S-fractionnaires est elle-même S-fractionnaire. Si les $\hat{X}_i$ sont des a-idéaux entiers leur somme au sens ci-dessus coïncide avec leur somme dans $\mathcal{A}$. C'est pourquoi nous utiliserons le même symbole pour noter l'addition dans $\mathcal{A}$ et celle dans $\mathcal{A}_S$.

Si $\hat{X}_i = \overline{X'_i}\,s^{-1}$, $\sum_i \hat{X}_i = (\sum_i \overline{X'_i})\,s^{-1}$. D'autre part l'addition dans $\mathcal{A}_s$ possède les propriétés signalées pour l'addition dans $\mathcal{A}$ (cf. définition 1.5. chapitre I.)

Si $(\hat{X}_i)_{i\in I}$ est une famille <u>infinie</u> de a-idéaux S-fractionnaires et si $\bigcup_i \hat{X}_i$ est un complexe S-fractionnaire, nous pouvons définir l'"<u>union</u>" des $\hat{X}_i$ comme étant le a-idéal S-fractionnaire $\bigvee_i \hat{X}_i = \widehat{\bigcup_i \hat{X}_i}$.

<u>Définition 2.4.</u> Le produit, $\hat{X}\circ\hat{Y}$, de deux a-idéaux **S-fractionnaires** $\hat{X}$ et $\hat{Y}$, pris dans cet ordre, est le a-idéal $\widehat{\hat{X}\,\hat{Y}}$.

Le produit au sens ci-dessus de deux a-idéaux entiers coïncide avec leur produit dans $\mathcal{A}$. La multiplication dans $\mathcal{A}$ et celle dans $\mathcal{A}_S$ peuvent donc être notées avec le même symbole.

La multiplication est telle que

a) $\hat{X}\,\hat{Y} \subseteq \hat{X}\circ\hat{Y} = \begin{cases} \widehat{XDY} + \widehat{XY}, & \text{dans le cas général,} \\ \widehat{XDY}, & \text{si D possède un élément unité,} \\ \widehat{XY}, & \text{si D est renversable à gauche.} \end{cases}$

b) $D\circ\hat{X} = \widehat{DX} \subseteq \hat{X}$,

c) $\hat{X}\circ D = \widehat{XD}$,

d) $D\circ\hat{X} = \widehat{DX} = \hat{X} = D\,\hat{X}$, si D possède une unité à gauche,

e) $\hat{X} \subseteq \hat{X}\circ D = \widehat{XD}$, si D possède une unité à droite.

La multiplication est associative d'après le choix des conditions (S). Elle est doublement distributive par rapport à l'addition (même raisonnement que dans la proposition 2.4. du Chapitre I, mais il ne s'agit pas ici de la distributivité générale). L'ensemble $\mathcal{A}_S$ est donc muni d'une structure de demi-groupe et d'une structure de demi-anneau.

<u>Remarques 2.4.</u> D étant unitaire, $\hat{X}$ un complexe S-fractionnaire, s un élément de S,

a) $\bar{s}\circ\hat{X} = s\,\hat{X}$, $\hat{X}\,s \subseteq \hat{X}\circ\bar{s}$,

b) $\bar{s}\circ\widehat{s^{-1}} = \widehat{s^{-1}}\circ\bar{s} = D$ ($\bar{s}$ est inversible dans $\mathcal{A}_S$) ,

c) $\hat{X} = \overline{X'}\,s^{-1} = s^{-1}\,\overline{X''} \Longrightarrow \hat{X} = \widehat{s^{-1}}\circ\overline{X''} \subseteq \overline{X'}\circ\widehat{s^{-1}}$.

<u>Proposition 2.3.</u> D étant unitaire, si le demi-groupe $\mathcal{A}$ est commutatif, il en est de même du demi-groupe $\mathcal{A}_S$.

Remarquons que le a-système $\mathcal{A}$ est bilatère puisque demi-groupe commutatif et que $\hat{X} = \overline{X'}\,s^{-1} = s^{-1}\,\overline{X''}$ implique ici $\overline{X'} = \overline{X''}$, car $\overline{X''}\,s = s\,\overline{X'} = \bar{s}\circ\overline{X'} = \overline{X'}\circ\bar{s} = \overline{X'}\,s$.

De plus étant donnés $\hat{X}$ et $\hat{Y}$, il existe $s \in S$ tel que $\hat{X} = \overline{X'}\,s^{-1} = s^{-1}\overline{X'}$, $\hat{Y} = \overline{Y'}s^{-1} = s^{-1}\,\overline{Y'}$ et $\bar{s}\circ\hat{X}\circ\hat{Y}\circ\bar{s} = (s\hat{X})\circ(\hat{Y}s) = \overline{X'}\circ\overline{Y'} = \overline{Y'}\circ\overline{X'} = \bar{s}\circ\hat{X}\circ\hat{Y}\circ\bar{s}$. d'où $\hat{X}\circ\hat{Y} = \hat{Y}\circ\hat{X}$, puisque $\bar{s}$ est inversible dans $\mathcal{A}_S$.

<u>Proposition 2.4.</u> $\mathcal{A}_S$ étant ordonné par inclusion (ou ce qui revient au même en posant $\hat{X} \leq \hat{Y} \Longleftrightarrow \hat{X} + \hat{Y} = \hat{Y}$) peut être considéré comme un gerbier. De plus si D possède un élément permis à droite $\mathcal{A}_S$ peut être considéré comme un demi-groupe réticulé.

C'est une conséquense des propriétés de l'addition et de la multiplication et de ce que, si D contient un élément ω permis à droite, nous avons encore:

$$\bar{\omega} \subseteq \hat{X} \ , \ \bar{\omega} + \hat{X} = \hat{X} \ , \ \bar{\omega} \circ \hat{X} = \hat{X} \circ \bar{\omega} = \bar{\omega} \ , \ \forall \hat{X} \ .$$

Proposition 2.5. Si D contient un élément permis à droite, le treillis $\mathcal{A}_S$ est conditionnellement complet.

Soit $(\hat{X}_i)_{i\in I}$ une famille non vide de a-idéaux S-fractionnaires bornée. Le complexe $Y = \bigcup_i \hat{X}_i$ est S-fractionnaire, car $\hat{X} = \bar{X}' s^{-1}$ étant un majorant de cette famille, $Ys \subseteq \hat{X} s = \bar{X}' \subseteq D$, et Y engendre un a-idéal S-fractionnaire qui est le plus petit majorant de cette famille. D'autre part $\bigcap_i \hat{X}_i$ est un a-idéal S-fractionnaire qui en est le plus grand minorant. $\mathcal{A}_S$ est donc conditionnellement complet en tant que treillis.

3. a-idéaux S-réguliers.

Le demi-groupe des a-idéaux S-fractionnaires n'est pas nécessairement résidué. POur obtenir des propriétés intéressantes, où la résiduation joue un rôle utile, nous serons conduits à considérer un sous-demi-groupe de $\mathcal{A}_S$.

Définition 3.1. Un élément r de D(S) sera appelé "S-régulier" s'il est de la forme $r = ts^{-1}$, avec $t \in S$, $s \in S$.

Proposition 3.1. r étant S-régulier, quelle que soit la façon d'écrire r sous la forme du^{-1}, avec $d \in D$, $u \in S$, d est un élément de S.

Si $ts^{-1} = du^{-1}$, avec s, t, $u \in S$, $d \in D$, il existe, S étant réversible à droite, s' et t' dans S tels que $s's = t't$, d'où $t'd = s'u$, et d appartient à S car il en est ainsi de t' et de t'd.

Proposition 3.2. Le produit de deux éléments S-réguliers est S-régulier.

st^{-1} et uv^{-1} étant S-réguliers, il existe t' et u' dans S tels que $tt' = uu'$, et $st^{-1}\,uv^{-1}$ est S-régulier comme étant égal à $(st')(vu')^{-1}$.

Définition 3.2. Un a-idéal S-fractionnaire est appelé "S-régulier" s'il contient un élément S-régulier.

L'ensemble des a-idéaux S-fractionnaires (resp. entiers) S-réguliers sera noté $r(\mathcal{A}_S)$ (resp. $r(\mathcal{A})$). Le a-idéal $\hat{X} = \overline{X'}\, s^{-1}$ étant S-régulier, tout élément S-régulier de $\hat{X}$ peut s'écrire ts^{-1}, où $t \in \overline{X'} \cap S$.

Proposition 3.3. Il y a équivalence entre:

a) $\hat{X}$ est S-régulier ,

b) $\hat{X}$ contient un élément de S,

c) $\hat{X}$ contient un élément inversible dans D(S).

(notons qu'un élément S-régulier est inversible dans D(S), mais que la réciproque est en général, inexacte).

a) $\Longleftrightarrow$ b): ts^{-1} étant un élément S-régulier de $\hat{X}$, il existe $u \in S$ tel que $ts^{-1} = s^{-1}u$, et $u \in \hat{X}$ car $D\hat{X} \subseteq \hat{X}$, donc a) $\Longrightarrow$ b). Inversement comme tout élément de S est S-régulier, b) $\Longrightarrow$ a).

b) $\Longleftrightarrow$ c): tout élément de S étant inversible dans D(S), b) $\Longrightarrow$ c). Inversement dt^{-1} étant un élément de $\hat{X}$ ayant pour inverse hu^{-1} dans D(S), il existe $k \in D$ tel que $ku = uh$, d'où $u = kdt^{-1}$ et $u \in \hat{X}$, c) $\Longrightarrow$ b).

Corollaire. Si $\overline{X'}s^{-1}$ (resp. $s^{-1}\overline{X''}$) est S-régulier, il en est de même de $\overline{X'}$ (resp. de $\overline{X''}$).

Proposition 3.4. Tout a-idéal S-fractionnaire contenant un a-idéal S-régulier est S-régulier. L'ensemble des a-idéaux S-réguliers est un treillis. Si D contient un élément permis à droite cet ensemble est un sous-treillis du treillis des a-idéaux S-fractionnaires.

La somme de deux a-idéaux S-réguliers est un a-idéal S-régulier. De plus l'intersection de deux a-idéaux S-réguliers est un a-idéal S-régulier. En effet si $\hat{X} = \overline{X'}s^{-1}$ et $\hat{Y} = \overline{Y'}s^{-1}$ sont S-réguliers, si us^{-1} et vs^{-1} sont deux éléments S-réguliers appartenant respectivement à $\hat{X}$ et $\hat{Y}$, il existe u' et v' dans S tels que $u'u = v'v$, et puisque $D\hat{X} \subseteq \hat{X}$, $D\hat{Y} \subseteq \hat{Y}$ l'élément S-régulier $r = u'us^{-1} = v'vs^{-1}$ appartient à $\hat{X} \cap \hat{Y}$.

Corollaires:

a) L'intersection d'un nombre fini de a-idéaux S-réguliers n'est jamais vide.

b) $r(\mathcal{A})$ est un sous-treillis de $r(\mathcal{A}_S)$.

Proposition 3.5. $r(\mathcal{A})$ et $r(\mathcal{A}_S)$ sont des demi-groupes réticulés.

Il suffit de montrer, compte tenu de ce qui précède, que le produit de deux a-idéaux S-réguliers est un a-idéal S-régulier. Or, si x et y sont des éléments S-réguliers de $\hat{X}$ et $\hat{Y}$, xy est un élément S-régulier appartenant à $\hat{X}\hat{Y}$, donc à $\hat{X}\circ\hat{Y}$.

Remarque 3.1. $r(\mathcal{A})$ et $r(\mathcal{A}_S)$ sont des demi-anneaux.

Proposition 3.6. $r(\mathcal{A}_S)$ est un demi-groupe résidué à droite.

Les a-idéaux $\hat{X} = \overline{X'}s^{-1}$ et $\hat{Y} = \overline{Y'}s^{-1}$ étant S-réguliers l'ensemble $\mathcal{B}$ des a-idéaux S-réguliers $\hat{Z}$ tels que $\hat{Y}\circ\hat{Z} \subseteq \hat{X}$ est non vide car, t appartenant à $\hat{X} \cap S$, $\overline{st} \in \mathcal{B}$ puisque:

$$\hat{Y}\circ\overline{st} = \widehat{\hat{Y}\,\overline{st}} = \widehat{\hat{Y}\,s\,\bar{t}} = \overline{Y'}\circ\bar{t} \subseteq \bar{t} \subseteq \hat{X}.$$

La réunion R des $\hat{Z}$ S-réguliers tels que $\hat{Y}\circ\hat{Z} \subseteq \hat{X}$ est un complexe S-fractionnaire: nous avons, si ts^{-1} est un élément S-régulier de $\hat{Y}$ et si $\hat{Z} \in \mathcal{B}$,

$$ts^{-1}\hat{Z}\,s \subseteq \hat{Y}\hat{Z}\,s \subseteq (\hat{Y}\circ\hat{Z})s \subseteq \hat{X}\,s = \overline{X'} \subseteq D,$$

et $\hat{Z}\,st \subseteq st^{-1}Dt = sD \subseteq D$. Ceci ayant lieu pour tout $\hat{Z} \in \mathcal{B}$ montre que $Rst \subseteq D$. Enfin

$\hat{R} = R$, car $\hat{R} \in \mathcal{B}$. En effet,

$$\hat{Y}\circ\hat{R} = \widehat{YDR} + \widehat{YR} = \widehat{YD(\bigcup \hat{Z})} + \widehat{Y(\bigcup \hat{Z})} = \widehat{\bigcup Y\hat{Z}} ,$$

d'où $\hat{Y}\circ\hat{R} \subseteq \hat{X}$ puisque $Y\hat{Z} \subseteq \hat{Y}\circ\hat{Z} \subseteq \hat{X}$. Ainsi $\mathcal{B}$ contient un élément maximum qui est donc le résiduel à droite $\hat{X}\,.\!\cdot\hat{Y}$ de $\hat{X}$ par $\hat{Y}$.

Remarque 3.2. $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ étant deux a-idéaux S-réguliers, nous pouvons définir deux résiduels à droite de $\bar{X}$ par $\bar{Y}$, l'un noté $\bar{X}\,.\!\cdot\bar{Y}(\mathcal{A})$ au sens de la résiduation dans $\mathcal{A}$, l'autre noté $\bar{X}\,.\!\cdot\bar{Y}$ $(r(\mathcal{A}_S))$ au sens de la résiduation dans $r(\mathcal{A}_S)$. Mais la a-idéal $\bar{X}\,.\!\cdot\bar{Y}$ $(\mathcal{A})$ est S-régulier: s appartenant à $\bar{X}\cap S$, $\bar{s}$ est contenu dans $\bar{X}\,.\!\cdot\bar{Y}$ $(\mathcal{A})$. Il en résulte que $r(\mathcal{A})$ est également un demi-groupe résidué à droite. Le résiduel à droite de $\bar{X}$ par $\bar{Y}$ dans ce demi-groupe peut être noté $\bar{X}\,.\!\cdot\bar{Y}$ $(r(\mathcal{A}))$.

Les trois résiduels ainsi définis sont liés par la relation

$$\bar{X}\,.\!\cdot\bar{Y}\ (\mathcal{A}) = \bar{X}\,.\!\cdot\bar{Y}\ (r(\mathcal{A})) \subseteq \bar{X}\,.\!\cdot\bar{Y}\ (r(\mathcal{A}_S)).$$

Proposition 3.7. Si D est unitaire, $r(\mathcal{A}_S)$ et $r(\mathcal{A})$ sont des demi-groupes résidués à gauche.

a) $r(\mathcal{A}_S)$ est résidué à gauche. L'ensemble $\mathcal{B}$ des a-idéaux S-réguliers $\hat{Z}$ tels que $\hat{Z}\circ\hat{Y} \subseteq \hat{X}$, $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ étant deux a-idéaux S-réguliers donnés, est non vide car ts^{-1} étant un élément S-régulier de $\hat{X}$, le a-idéal $\bar{t}$ appartient à $\mathcal{B}$, puisque l'on a:

$$\bar{t} \bullet \hat{Y} = Dt\,\overline{Y'}\ s^{-1} \subseteq DtDs^{-1} \subseteq \bar{t}\ s^{-1} \subseteq \hat{X} .$$

La réunion R des $\hat{Z}$ de $\mathcal{B}$ est un complexe S-fractionnaire: si us^{-1} est un élément S-régulier de $\hat{Y}$, Ru est contenu dans D. Enfin $\hat{R} = R$, puisque $\hat{R} \in \mathcal{B}$ car $\hat{R}\circ\hat{Y} \subseteq \hat{X}$. Ainsi $r(\mathcal{A}_S)$ est résidué à gauche.

b) $r(\mathcal{A})$ est résidué à gauche. L'ensemble $\mathcal{C}$ des a-idéaux entiers S-réguliers $\bar{Z}$ tels que $\bar{Z}\circ\bar{Y} \subseteq \bar{X}$, $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ étant deux a-idéaux entiers S-réguliers donnés, est non vide car $\bar{s} \in \mathcal{C}$ si $s \in \bar{X}\cap S$. Si R' est la réunion des $\bar{Z} \in \mathcal{C}$, $\bar{R}'=R'$ car $\bar{R}' \in \mathcal{C}$ puisque $\bar{R}'\circ\bar{Y} \subseteq \bar{X}$. Ainsi $r(\mathcal{A})$ est résidué à gauche.

Remarques 3.3.

a) $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ étant deux a-idéaux entiers S-réguliers, entre les résiduels $\bar{X}\cdot.\bar{Y}$ $(r(\mathcal{A}))$ défini en b), et $\bar{X}\cdot.\bar{Y}$ $(r(\mathcal{A}_S))$ défini en a) dans la proposition 3.7, nous avons l'inclusion

$$\bar{X}\cdot.\bar{Y}\ (r(\mathcal{A})) \subseteq \bar{X}\cdot.\bar{Y}(r(\mathcal{A}_S)) \ ..$$

b) Notons que $\mathcal{A}$ n'est pas nécessairement résidué à gauche. Par exemple D étant le demi-groupe défini sur $\{a, b, c, d, e\}$ par la loi

	a	b	c	d	e
a	a	b	a	a	a
b	a	b	b	b	b
c	a	b	c	d	e
d	a	b	d	e	c
e	a	b	e	c	d

(demi-groupe 2095 de [26]), $\mathcal{A}$ étant le d-système à gauche, le résiduel à gauche de $\bar{a}$ par $\bar{b}$ n'existe pas. En prenant $S = \{c, d, e\}$, les six conditions (S) sont satisfaites, $r(\mathcal{A})$ et $r(\mathcal{A}_S)$ se réduisent à $\{D\}$, car c est élément unité de D et d et e sont inversibles dans D.

Remarquons aussi (cf remarque 2.3. chapitre I) que nous avons:

$$\bar{a}.^{\bullet}\bar{a} = \bar{a} = \{a\} \subset E_d(\bar{a}, \bar{a}) = \{a, c, d, e\}.$$

__Proposition 3.8__. Si D est unitaire et si $r(\mathcal{A})$ est un demi-groupe commutatif, il en est de même du demi-groupe $r(\mathcal{A}_S)$

Même raisonnement que dans la proposition 2.3.

__Proposition 3.9__. Si $\mathcal{A}$ est bilatère, ou si D est unitaire lorsque $\mathcal{A}$ est seulement un a-système à gauche, le demi-groupe $r(\mathcal{A}_S)$ est conditionnellement complet en tant que gerbier.

On démontre comme dans la proposition 2.5. que $r(\mathcal{A}_S)$ est conditionnellement complet en tant que demi-treillis. De plus si l'une des expressions $\bigvee \hat{X}_i$, $\bigvee(\hat{X}_i \circ \hat{Y})$, $\bigvee(\hat{Y} \circ \hat{X}_i)$ a un sens, il en est de même des deux autres (si $\hat{X} = \bigvee \hat{X}_i$, $\hat{X}\circ\hat{Y}$ et $\hat{Y}\circ\hat{X}$ sont des majorants des familles $(\hat{X}_i \circ \hat{Y})_i$ et $(\hat{Y}\circ\hat{X}_i)_i$; si $\hat{Z} = \bigvee(\hat{X}_i \circ \hat{Y})$, $\hat{Z}^{\bullet}.\hat{Y}$ est un majorant de la famille $(\hat{X}_i)_i$; si $\hat{Z} = \bigvee(\hat{Y}\circ\hat{Y}_i)$, $\hat{Z}.^{\bullet}\hat{Y}$ est un majorant de la famille $(\hat{X}_i)_i$). De plus quand ces expressions ont un sens, elles constituent des a-idéaux S-réguliers et enfin les égalités

$$(\bigvee \hat{X}_i) \circ \hat{Y} = \bigvee(\hat{X}_i \circ \hat{Y}) \quad \text{et} \quad \hat{Y} \circ (\bigvee \hat{X}_i) = \bigvee(\hat{Y} \circ \hat{X}_i)$$

ont lieu chaque fois que l'une des expressions qui y figurent a un sens.

__Remarque 3.4__. Nous avons supposé que $\mathcal{A}$ était un a-système à gauche. Si $\mathcal{A}$ est un a-système à droite et S un complexe de D vérifiant les six conditions (S), D(S) le demi-groupe des fractions à droite de D relativement à S (qui peut aussi être considéré comme le demi-groupe des fractions à gauche de D relativement à S), tout ce qui a été écrit aux paragraphes 2 et 3 est encore valable, avec quelques modifications évidentes dans les énoncés de la remarque d) de la proposition 2.4., des remarques b), c), d), e) de la définition 2.4. des remarques a) et c) de la remarque 2.4. Dans la proposition 3.6. et la remarque 3.2. (resp. dans la proposition 3.7.), il faut remplacer les résiduels à droite (resp. à gauche) par des résiduels à gauche (resp. à droite). Enfin les propositions 3.3. et 3.4. sont encore valables mais avec quelques modifications dans leurs démonstrations.

4. Comparaison avec les r-systèmes de LORENZEN.

Rappelons les définitions et résultats suivants:

a) G étant un groupe ordonné dont e est l'élément unité, on appelle "__cône positif__" de G l'ensemble des $x \in G$ tels que $x \geqslant e$.

b) Un demi-groupe arbitraire D est le cône positif d'un certain groupe ordonné G si, et seulement si.

1) Tout élément de D est simplifiable à gauche et à droite dans D.

2) D contient un élément unité e.

3) $ab = e(a, b \in D)$ implique $a = b = e$.

4) $aD = Da$, $\forall a \in D$.

(résultat dû à BIRKHOFF, cf [6], ou [14] , page 14.)

Le cône positif d'un groupe ordonné est donc un demi-groupe renversable à gauche et à droite.

c) Un groupe ordonné G, dont le cône positif est D, est filtrant si, et seulement si, D engendre G. (Résultat dû à CLIFFORD, cf [10], ou [14] , p. 13).

d) G étant un groupe ordonné filtrant, d'élément neutre e, de cône positif D, un r-système de LORENZEN sur G est défini (cf. [14], p. 100, voir aussi [21], p. 536) à partir d'une application de l'ensemble des parties minorées de G dans l'ensemble des parties de G satisfaisant aux conditions

$$
\begin{array}{ll}
I_1 & X \subseteq X_r \ , \\
I_2 & X \subseteq Y_r \Longrightarrow X_r \subseteq Y_r \ , \\
I_3 & (a)_r = U(a) \ , \ \forall a \in G, \\
I_4 & a\,X_r = (aX)_r \ \text{ et } \ X_r\,a = (Xa)_r \ , \ \forall a \in G.
\end{array}
$$

($U(a)$ étant l'ensemble des $x \in G$ tels que $x \geqslant a$, $U(a) = Da = aD$).

Le r-idéal engendré par D est égal à D car $D = (e)_r$ d'après I_3. Tout complexe de D est une partie minorée de G.

Nous avons alors la proposition suivante:

Proposition 4.1. D étant le cône positif d'un groupe ordonné filtrant G, il y a égalité entre l'ensemble des r-systèmes de LORENZEN définis sur G et l'ensemble des a-systèmes S-fractionnaires définis sur G à partir des a-systèmes entiers définis sur D tels que $a\bar{X} = \overline{aX}$ et $\bar{X}a = \overline{Xa}$ (ou ce qui revient au même tels que $\overline{aX} \subseteq a\bar{X}$ et $\overline{Xa} \subseteq \bar{X}a$), $\forall a \in D, \forall X \in \mathcal{S}'(D)$.

Un r-système $\mathcal{R}$ étant défini sur G, l'application

$$f: \quad X \in \mathcal{S}'(D) \Longrightarrow X_r$$

est une a-opération bilatère sur D dans laquelle $X_r a = (Xa)_r$, $aX_r = (aX)_r$.

Les axiomes (AI), (A2), (gA'3), (dA'3) sont satisfaits. D'autre part,

$$X_r Y = X_r . \big(\bigcup_{y \in Y} \{y\} \big) = \bigcup_{y \in Y} (X_r y) = \bigcup_{y \in Y} (Xy)_r \subseteq (XY)_r$$

et de même $XY_r \subseteq (XY)_r$. L'application f définit donc sur D un x-système bilatère d'AUBERT, donc un a-système bilatère. Le complexe S = D et ce a-système vérifient les conditions (S), D(D) est égal à G puisque D engendre G.

Les propriétés des a-idéaux S-fractionnaires montrent que tout a-idéal D-fractionnaire est un r-idéal de $\mathcal{R}$ et réciproquement.

Inversement, soit $\mathcal{A}$ un a-système à gauche défini sur D. Ce a-système est bilatère (cf proposition 5.1. Chapitre I). Le complexe S = D vérifie les conditions (SI), (S2), (S3), (S4). Comme D est renversable à gauche, nous avons (proposition 5.3. chapitre I) $a\bar{X} \subseteq \overline{aX}$ et $\bar{X}a \subseteq \overline{Xa}$, $\forall a \in D, \forall X \in \mathfrak{S}^{\prime}(D)$. Si nous supposons le a-système $\mathcal{A}$ tel que $\overline{aX} \subseteq a\bar{X}$, $\overline{Xa} \subseteq \bar{X}a$, les conditions (S5) et (S6) sont alors satisfaites et nous pouvons définir l'ensemble des a-idéaux D-fractionnaires, $\mathcal{A}_D$, associé à $\mathcal{A}$, en prenant S égal à D. G étant supposé filtrant, D engendre G et les propriétés des a-idéaux S-fractionnaires montrent que le a-système D-fractionnaire $\mathcal{A}_D$ est un r -système de LORENZEN sur G.

Comme nous ne nous limitons pas au cas où D(S) serait un groupe ordonné filtrant, dont D serait le cône positif (et même dans ce cas), la notion de a-système est plus générale que celle de r-système.

5. Comparaison entre les notions de a-idéal S-régulier et de D-idéal d'ASANO dans le cas des demi-groupes.

Soient D un demi-groupe unitaire, S un complexe de D vérifiant les conditions (SI), (S2), (S3), (S4), $\mathcal{A}$ le d-système à gauche sur D (les conditions (S5) et (S6) sont alors satisfaites), D(S) le demi-groupe des fractions à droite de D relativement à S. D(S) peut être considéré comme "demi-groupe-quotient" de D selon S. Nous allons comparer les notions de d-idéal S-régulier et de D-idéal au sens d'ASANO. Rappelons les définitions des notions que nous utiliserons:

a) Un "ordre" de D(S) est un sous-demi-groupe unitaire E de D(S) tel que D(S) soit demi-groupe-quotient de E selon $J \cap E$, J étant l'ensemble des éléments de D(S) inversibles dans D(S) (cf [2], p. 17 , ou [23], p. 84).

b) Un ordre E est "régulier" si, $\forall x \in D(S)$, il existe des éléments a et b de E inversibles dans D(S), tels que $xEa \subseteq E$, $bEx \subseteq E$ (cf.[2],p.19, ou[23],p. 87).

c) Un ordre E est "maximal" si tout ordre F contenant E, pour lequel il existe des éléments a, b, a', b' de D(S) inversibles dans D(S) tels que $aFb \subseteq E$ et $a'Eb' \subseteq F$, est égal à E (cf [2], p. 18, ou [23], p. 86).

d) E étant un ordre de D(S), un "E-idéal à gauche" de D(S) est un sous-ensemble A de D(S) contenant un élément inversible dans D(S), tel que $EA \subseteq A$, et tel qu'il existe un élement $a \in D(S)$, inversible dans D(S), satisfaisant à $Aa \subseteq E$ (cf [2], p. 17, ou [23], p. 84).

Remarque 5.1. D est un ordre régulier de D(S).

D est un ordre de D(S) car D est un sous-demi-groupe unitaire de D(S), et D(S) peut être considéré comme le demi-groupe-quotient de D selon $J \cap D$, J désignant l'ensemble des éléments de D(S) inversibles dans D(S). De plus, $\forall ds^{-1} \in D(S)$, les relations $ds^{-1}Ds = dD \subseteq D$ et $sDds^{-1} = Dd' \subseteq D$ (où d' est tel que sd = d's) montrent que l'ordre D est régulier.

Proposition 5.1. L'ensemble des D-idéaux à gauche (au sens d'ASANO) de D(S) coïncide avec l'ensemble des d-idéaux à gauche S-réguliers de D(S).

a) Un D-idéal à gauche de D(S) est un d-idéal à gauche S-régulier. Soit A un D-idéal à gauche de D(S). Il existe un élément ds^{-1} inversible dans D(S) tel que $Ads^{-1} \subseteq D$. Posons $Ads^{-1} = B$ et désignons par $d't^{-1}$ l'inverse de d dans D(S). Nous avons alors $A = Bsd't^{-1}$, avec $B \subseteq D$, $d' \in D$. Si $C = Bsd'$, alors $A = Ct^{-1}$, avec $C \subseteq D$. Un D-idéal à gauche est donc un complexe S-fractionnaire. Comme de plus $DA \subseteq A$ implique $DC \subseteq C$, C est un d-idéal à gauche de D et A est un d-idéal S-fractionnaire. Ce d-idéal est S-régulier puisqu'il contient (par définition d'un D-idéal) un élément inversible dans D(S).

b) Un d-idéal à gauche S-régulier est un D-idéal à gauche de D(S). La vérification est immédiate.

Remarque 5.2. ASANO a défini l'ordre à gauche $\hat{X}_g$ d'un D-idéal à gauche $\hat{X}$ comme l'ensemble des $x \in D(S)$ tels que $x\,\hat{X} \subseteq \hat{X}$ et a montré que cet ordre à gauche était un D-idéal à gauche (d'où notre notation $\hat{X}_g$) et un ordre contenant D, équivalent à D (en ce sens qu'il existe a, b, a', b' inversibles dans D(S) tels que $a\hat{X}_g b \subseteq D$ et $a'Db' \subseteq \hat{X}_g$). On vérifie facilement que $\hat{X}_g = \hat{X}^{\cdot}.\hat{X}$ (il s'agit du résiduel dans $r(\mathscr{S}_S)$).

Remarque 5.3. L'ordre à droite X_d d'un D-idéal à gauche $\hat{X}$ est l'ensemble des $x \in D(S)$ tels que $\hat{X}\,x \subseteq \hat{X}$. C'est un complexe S-fractionnaire, contenant un élément inversible dans D(S), mais ce n'est pas, en général, un d-idéal à gauche (ou à droite) S-fractionnaire.

Si $\hat{X}$ est un D-idéal bilatère, l'ordre à droite X_d de $\hat{X}$ est un d-idéal bilatère S-régulier contenant D, et $X_d = \hat{X}.{}^{\cdot}\hat{X}$.

Remarque 5.4. $\mathscr{B}$ étant le d-système bilatère sur D, $\hat{X}$ un d-idéal bilatère S-régulier, nous pouvons définir deux résiduels à droite de $\hat{X}$ par $\hat{X}$, suivant que l'on considère $\hat{X}$ comme élément de $r(\mathscr{S}_S)$ ou comme élément de $r(\mathscr{B}_S)$. Ces deux résiduels sont égaux. Il en est de même des deux résiduels à gauche de $\hat{X}$ par $\hat{X}$.

Proposition 5.2. Si $\hat{X}$ est un d-idéal à gauche S-régulier contenant D, il y a équivalence entre:

a) $\hat{X}$ est un sous-demi-groupe de D(S),

b) $\hat{X}$ est un ordre de D(S),

c) $\hat{X}$ est idempotent pour la multiplication des d-idéaux S-réguliers,

d) $\hat{X} \subseteq \hat{X}^{\cdot}.\hat{X}$.

a) $\Longleftrightarrow$ b): conséquence de la définition d'un ordre car D(S) est un demi-groupe-quotient de D selon $J \cap \hat{X}$.

a) $\Longleftrightarrow$ c): Si $\hat{X}$ est un demi-groupe, $\hat{X}.\hat{X} \subseteq \hat{X}$. De plus D étant unitaire et contenu dans $\hat{X}$, nous avons $\hat{X} \subseteq \hat{X}.\hat{X}$, donc $\hat{X}.\hat{X} = \hat{X}$, autrement dit $\hat{X}\circ\hat{X} = \hat{X}$. Inversement, si $\hat{X}$ est idempotent, $\hat{X}\circ\hat{X} = \hat{X}.\hat{X} = \hat{X}$, et $\hat{X}$ est un demi-groupe.

a) $\Longleftrightarrow$ d): car $\hat{X}'.\hat{X} = \hat{X}_g$, et ASANO a montré (cf [2], p. 18) que $\hat{X} \subseteq \hat{X}_g$ était équivalent à la propriété a).

Proposition 5.3. Il y a équivalence entre:

a) D est un ordre maximal de D(S),

b) Si $\hat{X}$ est un d-idéal à gauche S-régulier contenant D et possédant l'une des propriétés équivalentes de la proposition 5.2., $\hat{X}$ est égal à D.

c) Le demi-groupe des d-idéaux bilatères S-réguliers est intégralement fermé,

d) Le demi-groupe des d-idéaux à gauche S-réguliers est intégralement fermé à gauche.

a) $\Longrightarrow$ b): Si $D \subseteq \hat{X} = \overline{X'}s^{-1}$ et si $\hat{X}$ est un ordre de D(S), $\hat{X}$ est équivalent à D, car $eDe \subseteq \hat{X}$ et $e\,\hat{X}\,s \subseteq D$ (e étant l'élément unité de D), donc $\hat{X}$ = D si D est un ordre maximal de D(S).

b) $\Longrightarrow$ c): Si $\hat{X}$ est un d-idéal bilatère S-régulier idempotent, $\hat{X}$ peut être considéré comme un d-idéal à gauche S-régulier idempotent. Si de plus $\hat{X}$ contient D, $\hat{X}$ est par hypothèse égal à D. Par suite le demi-groupe des d-idéaux bilatères S-réguliers ne possède pas d'éléments idempotents contenant strictement D, il est donc intégralement fermé.

c) $\Longleftrightarrow$ a): ASANO a montré (cf [2], p. 18) que D est un ordre maximal si, et seulement si D est l'ordre à droite et l'ordre à gauche de tout D-idéal bilatère, autrement dit a) et c) sont équivalentes.

b) $\Longleftrightarrow$ d): $r(\mathcal{A}_S)$ est résidué à gauche et possède un élement unité à gauche, D. On démontre comme dans le théorème 8 de [13], p. 162, que pour que $r(\mathcal{A}_S)$ soit intégralement fermé à gauche, il faut et il suffit qu'il n'y ait pas dans $r(\mathcal{A}_S)$ d'éléments idempotents contenant strictement D, donc b) et d) sont des propriétés équivalentes.

Remarque 5.5. $\mathcal{B}$ étant le d-système bilatère défini sur D, si D est $\mathcal{B}_S$-normal (cf définition 2.1. chapitre IV), en particulier si D est $\mathcal{B}_S$-dedekindien (cf définition 2.1. chapitre III), $r(\mathcal{B}_S)$ est intégralement fermé, et D est un ordre maximal de D(S).

CHAPITRE III

Demi-groupes $\mathcal{A}_S$-dedekindiens

Dans ce chapitre, D désignera un demi-groupe multiplicatif avec élément unité, $\mathcal{A}$ un a-système bilatère sur D, S un complexe de D contenant des éléments non inversibles dans D. Nous supposerons que S et $\mathcal{A}$ vérifient les six conditions (S) du § 1 chapitre XI. nous nous proposons d'établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que le demi-groupe r($\mathcal{A}$) des a-idéaux entiers S-réguliers soit un demi-groupe de Dedekind, ou pour que le demi-groupe r($\mathcal{A}_S$) des a-idéaux S-réguliers soit un groupe, les deux problèmes étant liés. Nous commencerons par établir quelques résultats concernant les demi-groupes réticulés ou résidués, résultats qui nous seront utiles par la suite.

1. Demi-groupes réticulés ou résidués et demi-groupes de Dedekind.

Théorème 1.1. Un demi-groupe $\mathcal{G}$

a) contenant un élément unité, noté D,

b) non entier, résidué à gauche et à droite, réticulé,

c) dans lequel tout élément premier majore un élément inversible à gauche,

d) dans lequel tout élément non entier admet un multiplicateur à droite entier,

e) dont le sous-demi-groupe entier vérifie la condition de chaîne ascendante,

est un groupe si, et seulement si,

(GI) les éléments couverts par D sont deux à deux permutables,

(G2) tout élément premier distinct de D est couvert par D,

(G3) $\mathcal{G}$ est intégralement fermé ($A^{\cdot}.A = A.^{\cdot}A = D$, $\forall A \in \mathcal{G}$).

Lorsque ces conditions sont réalisées $\mathcal{G}$ est un groupe commutatif et le sous-demi-groupe entier de $\mathcal{G}$ est un demi-groupe de Dedekind.

Les conditions sont nécessaires:

(GI): c'est une conséquence du théorème 12 de [13], p. 230.

(G2): c'est une conséquence du

Lemme 1.1. Dans un demi-groupe unitaire, demi-réticulé, résidué à droite, où tout élément est majoré par un élément couvert par D, si tout élément couvert par D est inversible, tout élément premier distinct de D est couvert par D.

Si P est premier, distinct de D, non couvert par D, il existe un élément M couvert par D tel que $P < M$. Cet élément M est inversible. Les relations $M(P.^{\cdot}M) \leqslant P < M = MD$ montrent que $P.^{\cdot}M$ est entier et, puisque P est premier, que $P.^{\cdot}M \lneq P$. D'autre part, $MM^{-1}P = P$ implique $P \leqslant M(P.^{\cdot}M)$, d'où $P = M(P.^{\cdot}M)$ et

$DP = P = M(P.^{\bullet}M) \leqslant MP$, ce qui conduit à $D \leqslant M$, d'où contradiction.

(G3): C'est une conséquence du théorème 7 de [13], p. 161.

Les conditions sont suffisantes: la démonstration se fera en généralisant celle de VAN DER WAERDEN concernant les anneaux de Dedekind (cf [27], tome 2, section 102) déja utilisée par AUBERT (cf [4], p. 30) pour les x-systèmes dans le cas commutatif. Cette démonstration utilisera les lemmes suivants:

<u>Lemme 1.2.</u> Dans un demi-groupe avec élément unité D, résidué et intégralement fermé, $D.^{\bullet}X = D^{\bullet}.X$, $\forall X$.

$$D.^{\bullet}X = (X^{\bullet}.X).^{\bullet}X = (X.^{\bullet}X)^{\bullet}.X = D^{\bullet}.X$$

<u>Lemme 1.3.</u> Dans un demi-groupe unitaire réticulé, dont le sous-demi-groupe entier vérifie la condition de chaîne ascendante, pour tout élément entier A, il existe un nombre fini d'éléments premiers $P_1, P_2, \ldots, P_n$ tels que

$$P_1P_2 \ldots P_n \leqslant A \ , \quad A \leqslant P_i \ , \ \forall i \in [1, n].$$

Démonstration analogue à celle de VAN DER WAERDEN, lemme 1, ou à celle de AUBERT, lemme 1.

<u>Démonstration du théorème</u>: les hypothèses sur $\mathfrak{A}$ et les conditions (G) impliquent que $\mathfrak{A}$ est un groupe.

a) pour tout élément premier P, distinct de D, on a $D < D.^{\bullet}P$.

P contient un élément A inversible à gauche, donc tel que $(D^{\bullet}.A)A = D$, et l'on démontre comme dans VAN DER WAERDEN (lemme 3) ou dans AUBERT (lemme 2) l'existence d'éléments premiers $P_2, \ldots, P_n$ tels que $PB \leqslant A \leqslant P$, avec $B = P_2P_3 \ldots P_n \nleqslant A$. Si $B = D$, nous avons $P = A$, d'où $(D^{\bullet}.P)P = D$ si $D.^{\bullet}P$ était égal à D, ceci entraînerait $P = D$, d'où contradiction, donc $D < D.^{\bullet}P$. Si $B \neq D$, la formule $X(Y^{\bullet}.Z) \leqslant (XY)^{\bullet}.Z$ (cf [24], p. 328) donne $PB(D^{\bullet}.A) \leqslant (PBD)^{\bullet}.A = (PB)^{\bullet}.A \leqslant A^{\bullet}.A = D$ et $B(D^{\bullet}.A) \leqslant D.^{\bullet}P$, d'où $B \leqslant (D.^{\bullet}P)A$. Comme $B \nleqslant A$, $D.^{\bullet}P$ est distinct de D, donc encore $D < D.^{\bullet}P$.

b) Tout élément premier est inversible.

On démontre comme dans AUBERT (lemme 3) que $D.^{\bullet}P$, qui est égal à $D^{\bullet}.P$, est l'inverse de P.

c) Tout élément entier de $\mathfrak{A}$ est inversible, et le sous-demi-groupe entier de $\mathfrak{A}$ est un demi-groupe de Dedekind.

Raisonnement analogue à celui de VAN DER WAERDEN, théorèmes 2 et 3.

d) $\mathfrak{A}$ est un groupe

Si $F \in \mathfrak{A}$, F admet un multiplicateur à droite entier G, par hypothèse, comme FG et G sont inversibles, puisque entiers, il en est de même de F.

<u>Proposition 1.1.</u> Dans un demi-groupe entier, résidué à droite, $\mathfrak{A}$, dont D est

l'élément unité, entre les conditions

(C1) à droite $A \leqslant B \Longrightarrow \exists C$ tel que $A = BC$,

(C'1) à droite $A \leqslant B \Longrightarrow B(A.^{\cdot}B) = A$,

(C2) à droite $A \leqslant B < D \Longrightarrow A < A.^{\cdot}B$,

(Φ) à droite $A \leqslant B < D \Longrightarrow \exists C$ tel que $A < C$ et $A = BC$,

nous avons les relations

a) (C1) à droite $\Longleftrightarrow$(C'1) à droite

b) (Φ) à droite $\Longleftrightarrow$(C1) à droite et (C2) à droite,

c) (C1) à droite et la règle de simplification à droite impliquent (C2) à droite, donc (Φ) à droite.

Les démonstrations sont immédiates. Notons que (C1) à droite et (Φ) à droite ont un sens dans un groupoïde ordonné entier, ce sont les conditions (Φ') à droite et (Φ) à droite de [13], p. 219 et 221. On a une proposition analogue pour un demi-groupe entier résidué à gauche.

Proposition 1.2. Dans un demi-groupe réticulé avec élément unité D, tout élément couvert par D est premier.

C'est le théorème 8 de [13], p. 143.

Proposition 1.3. Dans un demi-groupe entier, résidué à droite, où tout élément distinct de l'élément unité D est majoré par un élément maximal, vérifiant (C2) à droite, tout élément premier distinct de D est maximal.

Si P est premier, distinct de D, non maximal, il existe un élément maximal M tel que $P < M$. Nous avons $M(P.^{\cdot}M) \leqslant P$ avec P premier, donc $P.^{\cdot}M \leqslant P$, en contradiction avec l'inégalité $P < P.^{\cdot}M$ donnée par (C2) à droite.

Nous savons (cf [13], p. 219) que dans un gerbier entier satisfaisant à la condition (C1) d'un côte et à la règle de simplification de l'autre, les éléments maximaux sont permutables. Nous allons indiquer d'autres conditions qui, jointes à l' une des conditions (C1), assurent la permutabilité des éléments maximaux.

Proposition 1.4. Dans un demi-groupe entier, réticulé , résidué à droite, vérifiant (C1) à droite, les éléments maximaux sont deux à deux permutables.

M et N étant deux éléments maximaux distincts, la relation $NM \leqslant M$ implique $M.^{\cdot}N = M$ et la relation $MN \leqslant M$ entraîne $MN.^{\cdot}N \leqslant M.^{\cdot}N = M$, d'où $N(MN.^{\cdot}N) \leqslant NM$. Or, (C'1) à droite, équivalente à (C1) à droite, donne $N(MN.^{\cdot}N) = MN$, de sorte que $MN \leqslant NM$, et par suite $MN = NM$ puisque M et N jouent le même rôle.

Proposition 1.5. Dans un demi-groupe entier, réticulé, où tout élément distinct de l'élément unité D est majoré par un élément maximal, vérifiant la condition (C1) d'un côté, les éléments maximaux sont deux à deux permutables.

Supposons, par exemple, (C1) à droite vérifiée. M et N étant deux éléments maximaux distincts, il existe un élément A tel que $M \wedge N = MA$. Cet élément étant distinct de D est majoré par un élément maximal P, d'où $MN \leqslant M \wedge N = MA \leqslant MP \leqslant P$. Comme P est premier, M, N, P maximaux, ceci entraîne $M = P$ ou $N = P$.

Si $M = P$ nous avons $MN \leqslant M \wedge N \leqslant M^2$, et $M^2 = MN \vee M^2 = M(N \vee M) = MD = M$. Il existe, (C1) à droite étant vérifiée, un élément B tel que $A = MB$ car $A \leqslant P = M$, d'où $M \wedge N = MA = M^2B = MB = A$. Il en résulte successivement $A \leqslant N$, $MA \leqslant MN$, $MN \leqslant M \wedge N = MA \leqslant MN$, $NM \leqslant M \wedge N = MN$.

Si $N = P$, $MN \leqslant M \wedge N = MA \leqslant MN$, et nous avons encore $NM \leqslant M \wedge N = MN$.

Comme M et N jouent le même rôle, $MN = NM = M \wedge N$.

Madame DUBREIL-JACOTIN a montré (cf [13], p.224, théorème 8) que "la condition nécessaire et suffisante pour qu'un gerbier entier T, dont les éléments maximaux sont deux à deux permutables, soit un demi-groupe ordonné de Dedekind, est que T satisfasse à la condition (Φ) d'un côté et à la condition de chaîne ascendante". La proposition 1.5. montre que dans cet énoncé on peut supprimer l'hypothèse "les éléments maximaux sont deux à deux permutables" à condition de remplacer le gerbier (qui est un demi-groupe demi-réticulé) par un demi-groupe réticulé. De façon précise nous avons le

<u>Théorème 1.2</u>. Un demi-groupe entier $\mathfrak{A}$ est un demi-groupe de Dedekind si, et seulement si,

a) $\mathfrak{A}$ est réticulé,

b) $\mathfrak{A}$ vérifie la condition (Φ) d'un côté,

c) $\mathfrak{A}$ vérifie la condition de chaîne ascendante.

Les conditions sont nécessaires (cf [13], p. 224, théorèmes 7 et 8). Elles sont suffisantes car les éléments maximaux sont deux à deux permutables en vertu de la proposition 1.5.

<u>Théorème 1.3</u>. Un demi-groupe entier $\mathfrak{A}$ est un demi-groupe de Dedekind si, et seulement si,

a) $\mathfrak{A}$ est réticulé,

b) $\mathfrak{A}$ vérifie la condition (C1) d'un côté,

c) tout élément distinct de l'élément unité est le produit d'un nombre fini d'éléments maximaux.

Les conditions sont nécessaires. Elles sont suffisantes car les éléments maximaux sont deux à deux permutables d'après la proposition 1.5. De plus la décomposition d'un élément distinct de l'élément unité en produit d'éléments maximaux est unique (théorème d'unicité de [13], p. 221). Remarquons que la condition (C1) d'un côté est plus faible que la condition (Φ) d'un côté.

<u>Remarque 1.1</u>. Un demi-groupe entier ayant les propriétés a) et c) du théorème 1.3,

n'est pas nécessairement un demi-groupe de Dedekind. Par exemple le demi-groupe $\mathfrak{D}$ engendré par trois éléments D, M, N tels que

$$M^2 = M \ , \ N^2 = N \ , \ XD = DX = X \ , \forall X \in \mathfrak{D} \ ,$$

ordonné en posant

$$MN < M < D \ , \quad MN < N < D \ ,$$

$$(MN)^{n+1} < M(NM)^n < (NM)^n < (MN)^n \qquad \text{pour } n \geq 1,$$

$$(MN)^{n+1} < (NM)^n N < (NM)^n < (MN)^n \qquad \text{pour } n \geq 1,$$

est un demi-groupe possédant les propriétés a) et c), mais n'est pas un demi-groupe de Dedekind puisque les éléments maximaux, M et N, ne sont pas permutables.

Toutefois un demi-groupe entier ayant les propriétés a) et c) du théorème 1.3. est tel que

d) tout élément premier distinct de l'élément unité est maximal,

e) M et N étant deux éléments maximaux l'une au moins des inégalités $MN \leq NM$, $NM \leq MN$ est vérifiée,

f) les inégalités $MN < X \leq NM$ impliquent l'existence de deux entiers p et q, strictement positifs, tels que $X = N^p M^q$.

2. Demi-groupes $\mathcal{A}_S$ dedekindiens.

Nous allons appliquer les résultats du paragraphe 1. en prenant comme demi-groupe $\mathfrak{D}$ le demi-groupe $r(\mathcal{A}_S)$ des a-idéaux S-réguliers, ou le demi-groupe $r(\mathcal{A})$ des a-idéaux entiers S-réguliers.

Définition 2.1. D sera dit "$\mathcal{A}_S$- dédekindien" si $r(\mathcal{A})$ est un demi-groupe de Dedekind.

Définitions 2.2.

a) Un "a-idéal S-régulier premier" est un a-idéal entier $\bar{P}$, S-régulier, tel que $\bar{X} \circ \bar{Y} \subseteq \bar{P}$ implique $\bar{X} \subseteq \bar{P}$ ou $\bar{Y} \subseteq \bar{P}$, $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ étant des a-idéaux S-réguliers entiers.

Un a-idéal entier qui est un a-idéal premier de $\mathcal{A}$ et qui est S-régulier est un a-idéal S-régulier premier. Inversement $\bar{P}$ étant S-régulier premier est un a-idéal premier dans $\mathcal{A}$, car $\bar{X} \circ \bar{Y} \subseteq \bar{P}$ ($\bar{X}$ et $\bar{Y}$ entiers mais non nécessairement S-réguliers) implique $(\bar{X} + \bar{P}) \circ (\bar{Y} + \bar{P}) \subseteq \bar{P}$, d'où, $\bar{X} + \bar{P}$ et $\bar{Y} + \bar{P}$ étant S-réguliers et $\bar{P}$ S-régulier premier, $\bar{X} + \bar{P} \subseteq \bar{P}$ ou $\bar{Y} + \bar{P} \subseteq \bar{P}$ et finalement $\bar{X} \subseteq \bar{P}$ ou $\bar{Y} \subseteq \bar{P}$, et $\bar{P}$ est bien un a-idéal premier de $\mathcal{A}$.

b) Un "a-idéal S-régulier maximal"(ou "couvert par D") est un élément maximal de l'ensemble des a-idéaux entiers S-réguliers distincts de D.

Remarque 2.1. L'existence des a-idéaux S-réguliers maximaux est assurée si $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition de chaîne ascendante, ou si le a-système est de caractère fini (proposition 4.3. du chapitre I) car nous avons supposé que S contenait des éléments non inversibles dans D (s étant un élément de S non inversible dans D, $\bar{s}$ = Ds est S-régulier et distinct de D).

Pour que les a-idéaux S-réguliers maximaux soient deux à deux permutables, il suffit, d'après les propositions 1.4. ou 1.5. que $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition (C1) d'un côté.

Théorème 2.1. Lorsque $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition de chaîne ascendante, le demi-groupe $r(\mathcal{A}_S)$ est un groupe si, et seulement si,

(G1) les a-idéaux S-réguliers maximaux sont deux à deux permutables,

(G2) tout a-idéal S-régulier premier, distinct de D, est maximal,

(G3) $r(\mathcal{A}_S)$ est intégralement fermé.

Lorsque ces conditions sont satisfaites $r(\mathcal{A}_S)$ est un groupe commutatif et D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien.

Il suffit d'appliquer le théorème 1.1. Les conditions a), b), c) et d) sont vérifiées: pour g il suffit de remarquer que si $s \in S \cap \bar{P}$, $\bar{P}$ étant S-régulier premier, $\bar{P}$ majore le a-idéal $\bar{s}$ inversible dans $r(\mathcal{A}_S)$, pour d) il suffit de remarquer que $\hat{X} \circ \bar{s} = \bar{X'} \subseteq D$, si $\hat{X} = \bar{X'} s^{-1}$.

Théorème 2.2. D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien si, et seulement si,

a) $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition (C1) d'un côté,

b) tout a-idéal S-régulier entier distinct de D est un produit de a-idéaux S-réguliers maximaux.

Il suffit d'appliquer le théorème 1.3. à $\mathcal{B} = r(\mathcal{A})$.

Théorème 2.3. D est $\mathcal{A}_S$-dédekindien si, et seulement si,

a) $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition (Φ) d'un côté,

b) $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition de chaîne ascendante.

Il suffit d'appliquer le théorème 1.2. à $\mathcal{B} = r(\mathcal{A})$.

Théorème 2.4. D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien si, et seulement si,

a) $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition de chaîne ascendante,

b) $r(\mathcal{A}_S)$ est un groupe.

Ces conditions sont nécessaires: Un a-idéal S-régulier maximal $\bar{M}$ est premier et contient un élément s de S. Par suite $\bar{M}$ figure dans la décomposition de $\bar{s}$ en produit de a-idéaux S-réguliers maximaux: $\bar{s} = \bar{M} \circ \bar{Z}$ (où $\bar{Z}$ est un produit de a-idéaux S-réguliers maximaux), d'où $\bar{M} \circ \bar{Z} \circ \widehat{s^{-1}} = D$. Ceci montre que $\bar{M}$ est inversible dans $r(\mathcal{A}_S)$ puisque, $r(\mathcal{A})$ étant commutatif, il en est de même de $r(\mathcal{A}_S)$. Ainsi, tout a-idéal S-régulier maximal est inversible. Si $\hat{X} = \bar{X'} s^{-1}$ est un a-idéal S-régulier, $\hat{X}$ est inversible dans $r(\mathcal{A}_S)$ puisque $\hat{X} = \bar{X'} \circ \widehat{s^{-1}}$, $\bar{X'}$ étant un produit de a-idéaux inversibles et $\widehat{s^{-1}}$ étant inversible. $r(\mathcal{A}_S)$ est bien un groupe. Nous savons en outre qu'un demi-groupe de Dedekind vérifie la condition de chaîne ascendante.

Ces conditions sont suffisantes d'après le théorème II de [13], p.230.

Théorème 2.5. Si $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition de chaîne ascendante, il y a équivalence entre

a) $r(\mathcal{A}_S)$ est un groupe,

b) $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition (C1) d'un côté et la règle de simplification du même côté.

a) $\Longrightarrow$ b): C'est une conséquence des théorèmes 2.4. et 2.2.

b) $\Longrightarrow$ a): $r(\mathcal{A})$ est un demi-groupe de Dedekind d'après la proposition 1.1.c) et le théorème 2.3. et $r(\mathcal{A}_S)$ est un groupe d'après le théorème 2.4.

Si D est le demi-groupe multiplicatif d'un anneau intègre, $\mathcal{A}$ le k-système défini sur D, S l'ensemble des éléments non nuls de D, pour que $r(\mathcal{A})$, qui est l'ensemble des idéaux non nuls de l'anneau, soit un demi-groupe de Dedekind, il faut et il suffit (cf [II], p. 32) que tout idéal entier non nul et distinct de D soit un produit d'idéaux premiers. La démonstration de COHEN ne semble pas s'étendre au cas d'un anneau non commutatif, et a fortiori au cas plus général où nous nous plaçons. Toutefois, si nous supposons vérifiées la condition (C1) d'un côté et une autre condition (soit (C2) du même côté, soit (C1) de l'autre côté, soit que tout a-idéal S-régulier maximal est inversible dans $r(\mathcal{A}_S)$) le résultat est encore valable. Ceci fait l'objet des trois théorèmes suivants:

Théorème 2.6. D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien si, et seulement si,

a) tout a-idéal S-régulier entier est un produit de a-idéaux S-réguliers premiers,

b) $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition (Φ) d'un côté.

Les conditions sont nécessaires. Elles suffisent car les a-idéaux S-réguliers premiers distincts de D sont alors maximaux et il suffit d'appliquer le théorème 2.2.

Théorème 2.7. D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien si, et seulement si,

a) tout a-idéal S-régulier entier est un produit de a-idéaux S-réguliers premiers,

b) $r(\mathcal{A})$ vérifie les conditions (C1) à droite et (C1) à gauche.

Ces conditions sont nécessaires. Elles suffisent:

a) les a-idéaux S-réguliers premiers sont deux à deux permutables. $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ étant deux a-idéaux S-réguliers premiers, et $.^{\cdot}$ le symbole de la résiduation à droite dans $r(\mathcal{A})$ (ou dans $\mathcal{A}$, mais non dans $r(\mathcal{A}_S)$), les relations $\bar{P}\circ\bar{Q} \subseteq \bar{Q}$ et $\bar{Q}\circ[(\bar{P}\circ\bar{Q}).^{\cdot}Q] \subseteq \bar{Q}\circ[\bar{P}.^{\cdot}\bar{Q}]$ et la condition (C1) à droite, équivalente à (C'I) à droite donnent $\bar{P}\circ\bar{Q} \subseteq \bar{Q}\circ[\bar{P}.^{\cdot}\bar{Q}]$. Mais $\bar{P}.^{\cdot}\bar{Q} = \bar{R}_1 \circ \dots \circ \bar{R}_n$, où les $\bar{R}_i$ sont S-réguliers premiers, et $\bar{Q}\circ[\bar{P}.^{\cdot}\bar{Q}] \subseteq \bar{P}$ donne $\bar{Q}\circ\bar{R}_1\circ \dots \circ\bar{R}_n \subseteq \bar{P}$.

Si $\bar{Q} \not\subseteq \bar{P}$, il existe alors un indice i tel que $\bar{R}_i \subseteq \bar{P}$ et nous avons

$$\bar{R}_i \subseteq \bar{P} \subseteq \bar{P}.\cdot\bar{Q} = \bar{R}_1 \circ \ldots \circ \bar{R}_n \subseteq \bar{R}_i \subseteq \bar{P} \quad ,$$

de sorte que $\bar{P}.\cdot\bar{Q} = \bar{P}$ et la relation $\bar{P}\circ\bar{Q} \subseteq \bar{Q}\circ[\bar{P}.\cdot\bar{Q}]$ établie précédemment donne $\bar{P}\circ\bar{Q} \subseteq \bar{Q}\circ\bar{P}$. Ainsi $\bar{Q} \not\subseteq \bar{P}$ et $\bar{P} \not\subseteq \bar{Q}$ impliquent $\bar{P}\circ\bar{Q} = \bar{Q}\circ\bar{P}$.

Si $\bar{P} \subset \bar{Q}$, nous avons $\bar{Q} \not\subseteq \bar{P}$, donc $\bar{P}\circ\bar{Q} \subseteq \bar{Q}\circ\bar{P}$. La condition (C1) à gauche entraîne l'existence de $\bar{X}$ tel que $\bar{P} = \bar{X}\circ\bar{Q}$ et $\bar{P}$ est de la forme $\bar{V}_1\circ \ldots\circ \bar{V}_m\circ \bar{Q}$, où les $\bar{V}_i$ sont S-réguliers premiers. Comme $\bar{Q} \not\subseteq \bar{P}$, il existe un indice j tel que

$$\bar{V}_j \subseteq \bar{P} = \bar{V}_1\circ \ldots\circ \bar{V}_m \circ \bar{Q} \subseteq \bar{V}_j \text{ , d'où } \bar{P} \subseteq \bar{P}\circ\bar{Q} \subseteq \bar{P} \text{ et } \bar{P} = \bar{P}\circ\bar{Q} \subseteq \bar{Q}\circ\bar{P} \subseteq \bar{P}.$$

Nous avons alors $\bar{P}\circ\bar{Q} = \bar{Q}\circ\bar{P}$.

b) Les demi-groupes $r(\mathcal{A})$ et $r(\mathcal{A}_S)$ sont donc commutatifs.

c) $r(\mathcal{A}_S)$ est un groupe. $\bar{P}$ étant un a-idéal S-régulier premier, contient un élément s de S. Le a-idéal $\bar{s}$ peut s'écrire $\bar{s} = \bar{P}_1\circ \ldots \circ \bar{P}_h$, où les $\bar{P}_i$ sont S-réguliers premiers. Comme $\bar{s}$ est inversible dans le demi-groupe commutatif $r(\mathcal{A}_S)$ les a-idéaux $\bar{P}_i$ sont inversibles dans $r(\mathcal{A}_S)$. De plus $\bar{P}_1\circ \ldots \circ\bar{P}_h \subseteq \bar{P}$ implique l'existence d'un indice i tel que $\bar{P}_i \subseteq \bar{P}$. Si $\bar{P} = \bar{P}_i$, $\bar{P}$ est inversible. Sinon, l'inclusion $\bar{P}_i \subset \bar{P}$ implique, d'après l'alinéa a), $\bar{P}_i = \bar{P}_i\circ\bar{P}$ et $\bar{P} = D$ puisque $\bar{P}_i$ est inversible. Comme tout a-idéal S-régulier premier est inversible, il en est de même de tout a-idéal S-régulier entier et de tout a-idéal S-régulier.

d) D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien. Si $\bar{P}$ est S-régulier premier distinct de D, $\bar{P}$ est maximal car $\bar{P} \subset \bar{Q}$ implique $\bar{P} = \bar{P}\circ\bar{Q}$ (alinéa a)), d'où $\bar{Q} = D$ puisque $r(\mathcal{A}_S)$ est un groupe. Le théorème 2.2. permet d'achever la démonstration.

<u>Théorème 2.8.</u> $\mathcal{A}$ étant de caractère fini ou $r(\mathcal{A})$ vérifiant la condition de chaîne ascendante, D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien si, et seulement si,

a) tout a-idéal S-régulier entier est un produit de a-idéaux S-réguliers premiers,

b) $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition (C1) d'un côté,

c) tout a-idéal S-régulier maximal est inversible dans $r(\mathcal{A}_S)$.

Ces conditions sont suffisantes d'après le théorème 2.2. car tout a-idéal S-régulier entier, distinct de D, est contenu dans un a-idéal S-régulier maximal et tout a-idéal S-régulier premier distinct de D est S-régulier maximal d'après le lemme 1.1.

On sait (cf [II], p. 33) qu'un anneau intègre est un anneau de Dedekind si, et seulement si, tout idéal premier non nul est inversible dans l'ensemble des idéaux fractionnaires. Nous avons ici le

<u>Théorème 2.9.</u> D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien, si et seulement si,

a) $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition (C1) d'un côté,

b) $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition de chaîne ascendante,

c) tout a-idéal S-régulier est inversible dans $r(\mathcal{A}_S)$.

Ces conditions sont suffisantes: le lemme 1.1. montre que tout a-idéal S-régulier premier est S-régulier maximal. De plus tout a-idéal S-régulier entier est un produit de a-idéaux S-réguliers premiers (raisonnement analogue à celui de [27], tome II, p. 85). Le théorème 2.8. permet d'achever la démonstration.

Remarque 2.2. Si D est commutatif, on peut supprimer la condition b) dans l'énoncé du théorème 1.3. de sorte que dans les énoncés des théorèmes 2.2., 2.8. et 2.9. on peut supprimer respectivement les conditions a), b), a).

CHAPITRE IV.

Demi-groupes $\mathcal{A}_S$-normaux.

Nous ferons les mêmes hypothèses qu'au début du chapitre III. Nous nous proposons d'étudier l'ensemble-quotient de $r(\mathcal{A}_S)$ modulo l'équivalence d'Artin. Nous chercherons, en particulier, à quelles conditions cet ensemble-quotient est un groupe, à quelles conditions le sous-demi-groupe entier de cet ensemble-quotient (lorsque ce dernier est un demi-groupe) est un demi-groupe de Dedekind, ce qui nous conduira à étendre la S-normalité de GUERINDON. Nous commencerons dans le paragraphe 4.1. par étudier l'équivalence d'Artin dans un gerbier, non entier, où la multiplication n'est pas supposée commutative. Dans le cas où cette multiplication est commutative cf [13], p. 240 et sq.

1. Equivalence d'Artin.

Nous désignerons par G un gerbier avec élément unité D, non entier, résidué, où la multiplication n'est pas supposée commutative.

Définition 1.1. L'équivalence

$$X \equiv Y\ (\mathcal{a}) \longleftrightarrow \begin{cases} D.{}^{\cdot}X = D.{}^{\cdot}Y, \\ D^{\cdot}.X = D^{\cdot}.Y, \end{cases}$$

sera appelé "l'équivalence d'Artin". La classe de $X (X \in G)$ sera notée $Cl(X)$.

Les équivalences $A_D (X \equiv Y \Longleftrightarrow D.{}^{\cdot}X = D.{}^{\cdot}Y)$ et ${}_DA\ (X \equiv Y \Longleftrightarrow D^{\cdot}.X = D^{\cdot}.Y)$ sont des équivalences du "type A" étudiées par MOLINARO (cf [24]) et $\mathcal{a} = A_D \cap {}_DA$.

Proposition 1.1. L'équivalence d'Artin est régulière par rapport à l'union. Tout élément congru à un élément entier est entier. En particulier $Cl(D)$ est formée d'éléments entiers.

Les équivalences A_D et ${}_DA$ sont en effet régulières par rapport à l'union (cf [24] p. 330). Enfin $X \leq D$ et $X \equiv Y(\mathcal{a})$ impliquent $Y \leq D^{\cdot}.(D.{}^{\cdot}Y) = D^{\cdot}.(D.{}^{\cdot}X) \leq D^{\cdot}.D = D$.

Si la multiplication dans le gerbier G est supposée commutative, on sait que chaque classe modulo $\mathcal{a}$ contient un élément maximum et que l'équivalence d'Artin est régulière par rapport à la multiplication. Dans le cas non commutatif les deux propositions ci-dessous donnent des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Proposition 1.2. Si G est conditionnellement complet (en tant que demi-treillis) chaque classe modulo $\mathcal{a}$ contient un élément maximum.

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$ étant les classes de $X \in G$ modulo A_D et ${}_DA$, $\mathcal{D} \cap \mathcal{G}$ admet un plus petit majorant X^* , puisque majoré par $D.{}^{\cdot}(D^{\cdot}.X)$ (ou par $D^{\cdot}.(D.{}^{\cdot}X)$). Les inégalités $X \leqslant X^* \leqslant D.{}^{\cdot}(D^{\cdot}.X)$ donnent, grâce à la convexité des classes, $X \equiv X^*\ ({}_DA)$. On a de même $X \equiv X^*\ (A_D)$, d'où $X \equiv X^*\ (\mathcal{a})$ et X^* est élément maximum de $Cl(X)$.

<u>Définitions 1.2</u>. Le gerbier G sera dit

a) "<u>Symétriquement résidué</u>" si $D.^{\cdot}(D^{\cdot}.X) = D^{\cdot}.(D.^{\cdot}X)$, $\forall X \in G$,

b) "<u>équirésidué</u>" si $D.^{\cdot}X = D^{\cdot}.X$, $\forall X \in G$.

Si G est équirésidué, on pourra écrire $D:X$ au lieu de $D.^{\cdot}X$ ou $D^{\cdot}.X$.

<u>Proposition 1.3</u>. Entre les conditions

(R1) G est intégralement fermé,

(R2) G est équirésidué,

(R3) G est symétriquement résidué,

(R4) $\forall X \in G$, il existe X' et X'' tel que $\begin{cases} D.^{\cdot}X = D^{\cdot}.X' \\ D^{\cdot}.X = D.^{\cdot}X'' \end{cases}$

(R5) $\mathfrak{a}$ est régulière (pour la multiplication) et toute classe modulo $\mathfrak{a}$ contient un élément maximum,

(R6) $\mathfrak{a}$ est régulière,

nous avons les implications

$$\begin{tikzcd} & & & (R4) \arrow[dr] & \\ (R1) \arrow[r] & (R2) \arrow[r, Rightarrow] & (R3) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (R6) \\ & & & (R5) \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

(R1) $\longrightarrow$ (R2); grâce à la formule $(A.^{\cdot}B)^{\cdot}.C = (A^{\cdot}.C).^{\cdot}B$.

(R2) $\longrightarrow$ (R3), démontration immédiate.

(R3) $\longrightarrow$ (R4), $D.^{\cdot}X = D.^{\cdot}\left[D^{\cdot}.(D.^{\cdot}X)\right] = D^{\cdot}.\left[D.^{\cdot}(D.^{\cdot}X)\right]$, il suffit de prendre $X' = D.^{\cdot}(D.^{\cdot}X)$. On voit de même qu'on peut prendre $X'' = D^{\cdot}.(D^{\cdot}.X)$.

(R3) $\Longrightarrow$ (R5), car (R3) est une condition nécessaire et suffisante pour que $A_D = {}_DA$.

(R4) $\Longrightarrow$ (R6), nous nous appuierons sur le

<u>Lemme 1.1</u>. Pour que A_D soit régulière à gauche, il faut et il suffit que, pour tout $X \in G$, il existe $Z \in G$ tel que $D.^{\cdot}X = D^{\cdot}.Z$, autrement dit que l'ensemble des résiduels à droite de D soit contenu dans l'ensemble des résiduels à gauche de D.

La condition est nécessaire: Si $Y = D.^{\cdot}X$ et si $Y' \equiv Y(A_D)$, nous avons, A_D étant régulière à gauche, $XY \equiv XY'$ (A_D), d'où

$$D \leqslant Y.^{\cdot}Y = (D.^{\cdot}X).^{\cdot}Y = D.^{\cdot}(XY) = D.^{\cdot}(XY') = (D.^{\cdot}X).^{\cdot}Y' = Y.^{\cdot}Y'$$

et $$Y' = Y'D \leqslant Y'(Y.^{\cdot}Y') \leqslant Y.$$

Ainsi $D.^{\cdot}X$ est maximum dans sa classe modulo A_D, donc $D.^{\cdot}X = D^{\cdot}.\left[D.^{\cdot}(D.^{\cdot}X)\right]$ et nous pouvons prendre $Z = D.^{\cdot}(D.^{\cdot}X)$.

La condition est suffisante: Si $Y \equiv Y'(A_D)$, nous avons

$D.^{\cdot}(XY) = (D.^{\cdot}X).^{\cdot}Y = (D^{\cdot}.Z).^{\cdot}Y = (D.^{\cdot}Y)^{\cdot}.Z = (D.^{\cdot}Y')^{\cdot}.Z = (D^{\cdot}.Z).^{\cdot}Y' = (D.^{\cdot}X).^{\cdot}Y' =$
$= D.^{\cdot}(XY')$, et A_D est régulière à gauche.

Comme A_D(resp. ${}_DA$) est régulière à droite (resp. à gauche) (cf [24]), (R4) donne une condition nécessaire et suffisante pour que A_D et ${}_DA$ soient régulières des deux côtés, donc une condition suffisante pour que $\mathcal{A}$ soit régulière.

Remarques 1.1.

a) Si G est conditionnellement complet (en tant que demi-treillis), (R5) et (R6) sont équivalentes.

b) Si G est commutatif, (R2) est satisfaite , donc (R3), (R4), (R5) et (R6) également.

c) (R2) est équivalente à la condition

(R'2) $XY \leqslant D \Longrightarrow YX \leqslant D$.

d) (R3) est équivalente à la condition

(R'3) $D.^{\cdot}X \leqslant D.^{\cdot}Y \Longleftrightarrow D^{\cdot}.X \leqslant D^{\cdot}.Y$.

e) (R1) est équivalente à la condition: G est un demi-groupe $\mathcal{A}$-nomal d'élément bimaximum D, cf [25] , p. 3.14).

Remarque 1.2. Si $\mathcal{A}$ est régulière, on démontre, comme dans le cas commutatif, que toute équivalence régulière par rapport à la multiplication et à l'union, telle que la classe de D soit formée d'éléments entiers, est plus fine que l'équivalence d'Artin. Une telle équivalence est fortement régulière supérieurement (cf [13], p.179 théorème 4).

Proposition 1.4. Il y a équivalence entre

a) G est symétriquement résidué et $\mathcal{A}$ est l'égalité,

b) $\forall$ X, il existe Y et Z tels que $X = D^{\cdot}.Y = D.^{\cdot}Z$.

a) implique $X = D.^{\cdot}(D^{\cdot}.X) = D^{\cdot}.(D.^{\cdot}X)$, donc b). Inversement b) donne $X = D.^{\cdot}(D^{\cdot}.X) = D^{\cdot}.(D.^{\cdot}X)$ et $X \equiv X'$ entraîne alors $X = X'$.

Proposition 1.5. Il y a équivalence entre

a) $\mathcal{A}$ est simplifiable des deux côtés,

b) G est intégralement fermé,

c) $\mathcal{A}$ est régulière et $G/\mathcal{A}$ est un groupe.

a) $\Longrightarrow$ b): $D \leqslant X^{\cdot}.X = (DX)^{\cdot}.X$ implique $DX \leqslant [(DX)^{\cdot}.X]X \leqslant DX$, donc $DX = (X^{\cdot}.X)X$, et $D \equiv X^{\cdot}.X$ si $\mathcal{A}$ est simplifiable à droite. Comme Cl(D) est formée d'éléments entiers, on en déduit $X^{\cdot}.X = D$. On verrait de même que $X.^{\cdot}X = D$.

b) $\Longrightarrow$ c): $\mathcal{A}$ est régulière (proposition 1.3.). De plus, nous avons $D^{\cdot}.[X(D.^{\cdot}X)] = D.^{\cdot}[X(D.^{\cdot}X)] = (D.^{\cdot}X).^{\cdot}(D.^{\cdot}X) = D$. On en déduit que Cl(D.˙X) est inverse à droite de Cl(X). De même Cl(D˙.X), qui est égal à Cl(D.˙X), est inverse à gauche de Cl(X), et $G/\mathcal{A}$ est un groupe.

c) $\Longrightarrow$ a): démonstration immédiate.

Remarque 1.3. Si $\mathcal{A}$ est régulière et Cl(X) inversible dans $G/\mathcal{A}$, l'inverse de Cl(X) est Cl(D.˙X) qui est alors égal à Cl(D˙.X).

Proposition 1.6. S'il existe une équivalence $\mathcal{R}$ régulière par rapport à l'union et à la multiplication, pour laquelle la classe de D est formée d'éléments entiers et telle que $G/\mathcal{R}$ soit un groupe, G est intégralement fermé et $\mathcal{R} = \mathcal{A}$.

Si $X \in G$ et si $G/\mathcal{R}$ est un groupe, il existe $X' \in G$ tel que $XX' \equiv D(\mathcal{R})$ et $X'X \equiv D(\mathcal{R})$. L'hypothèse sur Cl(D) et la convexité des classes donnent $XX' \leq X(D.^{\cdot}X) \leq D$ et $X(D.^{\cdot}X) \equiv D(\mathcal{R})$. De même $(D^{\cdot}.X)X \equiv D(\mathcal{R})$. Ceci ayant lieu pour tout X de G, nous avons

$$(D^{\cdot}.X)\left[D.^{\cdot}(D^{\cdot}.X)\right] \equiv D(\mathcal{R}) \quad \text{et} \quad \left[D^{\cdot}.(D.^{\cdot}X)\right](D.^{\cdot}X) \equiv D(\mathcal{R}),$$

d'où, $\mathcal{R}$ étant simplifiable, $X \equiv D.^{\cdot}(D^{\cdot}.X)(\mathcal{R})$ et $X \equiv D^{\cdot}.(D.^{\cdot}X)(\mathcal{R})$.

Si $Y \equiv X(\mathcal{R})$, nous avons $Y \equiv D.^{\cdot}(D^{\cdot}.X)$, d'où $(D^{\cdot}.X)Y \leq D$ et $Y \leq D.^{\cdot}(D^{\cdot}.X)$. Ainsi $D.^{\cdot}(D^{\cdot}.X)$ est maximum dans la classe de X modulo $\mathcal{R}$. On voit de même que $D^{\cdot}.(D.^{\cdot}X)$ est maximum dans cette même classe, ce qui montre que $\mathcal{A}$ est régulière, G étant symétriquement résidué.

Enfin $X \equiv Y(\mathcal{A})$ impliquant $D.^{\cdot}(D^{\cdot}.X) = D.^{\cdot}(D^{\cdot}.Y)$, donc $X \equiv Y(\mathcal{R})$, $\mathcal{A}$ est plus fine que $\mathcal{R}$ et comme $\mathcal{R}$ est elle-même plus fine que $\mathcal{A}$ nous avons bien $\mathcal{R} = \mathcal{A}$. La proposition 1.5. montre alors que G est intégralement fermé.

<u>Corollaire.</u> Si G est un groupe, $\mathcal{A}$ n'est autre que l'égalité.

<u>Proposition 1.7</u>. Il y a équivalence entre

a) $Cl(Y) = Cl(X \vee Y)$,

b) $D.^{\cdot}Y \leq D.^{\cdot}X$ et $D^{\cdot}.Y \leq D^{\cdot}.X$.

Il est immédiat que a) implique b). Inversement, $D.^{\cdot}Y \leq D.^{\cdot}X$ donne $D^{\cdot}.(D.^{\cdot}X) \leq D^{\cdot}.(D.^{\cdot}Y)$, donc $X \vee Y \leq D^{\cdot}.(D.^{\cdot}Y)$ et $D.^{\cdot}Y \leq D.^{\cdot}(X \vee Y)$, d'où $D.^{\cdot}Y = D.^{\cdot}(X \vee Y)$ puisque $Y \leq X \vee Y$ entraîne $D.^{\cdot}(X \vee Y) \leq D.^{\cdot}Y$. On montre de même que $D^{\cdot}.Y \leq D^{\cdot}.X$ implique $D^{\cdot}.(X \vee Y) = D^{\cdot}.Y$.

L'ensemble-quotient $G/\mathcal{A}$ (le demi-groupe-quotient, si $\mathcal{A}$ est régulière), sera ordonné en posant

$$Cl(X) \leq Cl(Y) \iff Cl(Y) = Cl(X \vee Y) .$$

<u>Remarques 1.4</u>.

a) Si G est symétriquement résidué, la remarque 1.1.d) et la proposition précédente donnent

$$Cl(X) \leq Cl(Y) \iff D.^{\cdot}Y \leq D.^{\cdot}X \iff D^{\cdot}.Y \leq D^{\cdot}.X .$$

b) $X \leq Y$ implique $Cl(X) \leq Cl(Y)$, mais $Cl(X) \leq Cl(Y)$ implique seulement $X \leq D.^{\cdot}(D^{\cdot}.Y)$ et $X \leq D^{\cdot}.(D.^{\cdot}Y)$.

c) Si chaque classe contient un élément maximum, $Cl(X) \leq Cl(Y)$ implique $X^* \leq Y^*$, X^* et Y^* étant des éléments maxima de Cl(X) et Cl(Y).

d) Il y a équivalence entre les quatre propriétés: X est entier, $Cl(X) \leq Cl(D)$, $Cl(D) \leq Cl(D.^{\cdot}X)$, $Cl(D) \leq Cl(D^{\cdot}.X)$.

<u>Proposition 1.8</u>. Si (R4) est vérifiée, la relation d'ordre de $G/\mathcal{A}$ est compati-

ble avec la structure de demi-groupe de $G/\mathfrak{a}$.

Supposons $Cl(X) \leqslant Cl(Y)$ et $Cl(X') \leqslant Cl(Y')$. Il existe d'après (R4) Z tel que $D^{\cdot}.Z = D.^{\cdot}X$, ce qui donne

$$D.^{\cdot}(YY') = (D.^{\cdot}Y).^{\cdot}Y' \leqslant (D.^{\cdot}X).^{\cdot}Y' = (D^{\cdot}.Z).^{\cdot}Y' = (D.^{\cdot}Y')^{\cdot}.Z \leqslant (D.^{\cdot}X')^{\cdot}.Z =$$
$$= (D^{\cdot}.Z).^{\cdot}X' = (D.^{\cdot}X).^{\cdot}X' = D.^{\cdot}(XX') \ .$$

De même, $D.^{\cdot}Z' = D^{\cdot}.X$ implique $D^{\cdot}.(YY') \leqslant D^{\cdot}.(XX')$.

Proposition 1.9. Si (R5) est vérifiée, la relation d'ordre sur $G/\mathfrak{a}$ est compatible avec la structure de demi-groupe de $G/\mathfrak{a}$.

$Cl(X) \leqslant Cl(Y)$ implique $X \leqslant Y^*$, d'où $XZ \leqslant Y^*Z$, $ZX \leqslant ZY^*$ et par suite $Cl(X)Cl(Z) \leqslant Cl(Y)Cl(Z)$ et $Cl(Z)Cl(X) \leqslant Cl(Z)Cl(Y)$.

Proposition 1.10. Si G est intégralement fermé, il y a équivalence entre

a) $X \equiv Y(\mathfrak{a})$,

b) $X^{\cdot}.Y \equiv D(\mathfrak{a})$ et $Y^{\cdot}.X \equiv D(\mathfrak{a})$,

c) $X.^{\cdot}Y \equiv D(\mathfrak{a})$ et $Y.^{\cdot}X \equiv D(\mathfrak{a})$,

d) il existe D' et D" congrus à D tels que $D'X = YD''$.

a) $\Longrightarrow$ b): $G/\mathfrak{a}$ étant un groupe (proposition 1.5.) $X \equiv Y$ implique $D^{\cdot}.X \equiv D^{\cdot}.Y$. Les relations $(D^{\cdot}.X)(X^{\cdot}.Y) \leqslant D^{\cdot}.Y$ et $X(D^{\cdot}.Y) \leqslant X^{\cdot}.Y$ (cf [24] , formules 10' et 9') donnent alors $Cl(X^{\cdot}.Y) \leqslant Cl(D)$ et $Cl(D) \leqslant Cl(X^{\cdot}.Y)$, d'où $X^{\cdot}.Y \equiv D$. On démontre de même la relation $Y^{\cdot}.X \equiv D$.

b) $\Longrightarrow$ a): $X^{\cdot}.Y \equiv D$ implique $(X^{\cdot}.Y)Y \equiv Y$, d'où $Cl(Y) \leqslant Cl(X)$ car $(X^{\cdot}.Y)Y \leqslant X$. De même $Y^{\cdot}.X \equiv D$ implique $Cl(X) \leqslant Cl(Y)$, et par suite $X \equiv Y(\mathfrak{a})$.

c) $\Longleftrightarrow$ a): raisonnement analogue.

a) $\Longleftrightarrow$ d): Si $D' = Y(D.^{\cdot}Y)$ et $D'' = (D.^{\cdot}X)X$, D' et D" sont congrus à D et $YD''=D'X$. Donc a) $\Longrightarrow$ d). La réciproque est immédiate.

Proposition 1.11. Si (R5) est vérifiée, toute classe première distincte de Cl(D) a pour élément maximum un élément premier de G.

Raisonnement analogue à celui de [13], p. 245.

Proposition 1.12. G étant intégralement fermé, si une classe distincte de Cl(D) contient un élément premier, cet élément est maximum dans sa classe. La classe d'un élément premier de G non congru à D est une classe première.

Raisonnement analogue à celui de [13], p.245.

Proposition 1.13. Si G est intégralement fermé, le sous-demi-groupe entier de $G/\mathfrak{a}$ vérifie les conditions (Φ) à droite et (Φ) à gauche.

Si $Cl(X) \leqslant Cl(Y) < Cl(D)$, $Z = (D.^{\cdot}Y)X$ est tel que $Cl(X) < Cl(Z)$, $Cl(X)=Cl(Y)Cl(Z)$. De même (Φ) à gauche est satisfaite.

Proposition 1.14. Si G est réticulé et si (R5) est vérifiée, le demi-groupe $G/\mathfrak{a}$

est réticulé.

Deux éléments Cl(X) et Cl(Y) admettent un plus petit majorant égal à Cl($X \vee Y$) et un plus grand minorant égal à Cl($X^* \wedge Y^*$). De plus $\mathcal{a}$ étant régulière pour l'union et la multiplication et G étant réticulé, la multiplication dans G/$\mathcal{a}$ est distributive par rapport à l'union.

Remarque 1.5. Si G est réticulé et (R6) vérifiée, G/$\mathcal{a}$ est un gerbier.

Proposition 1.15. Si (R5) est vérifiée, le demi-groupe G/$\mathcal{a}$ est résidué.

G/$\mathcal{a}$ est un demi-groupe ordonné (proposition 1.9.). L'élément Cl($X^{*\cdot}.Y$) (resp. Cl($X^*.{}^\cdot Y$)) est le plus grand élément de G/$\mathcal{a}$ tel que Cl(Z)Cl(Y) $\leq$ Cl(X) (resp. Cl(Y)Cl(Z) $\leq$ Cl(X)).

Corollaire. Si (R5) est vérifiée, $Y \equiv Y'$ implique $X^*.{}^\cdot Y \equiv X^*.{}^\cdot Y'$ et $X^{*\cdot}.Y \equiv X^{*\cdot}.Y'$.

Proposition 1.16. Si $\mathcal{a}$ est régulière et G/$\mathcal{a}$ un demi-groupe ordonné, G/$\mathcal{a}$ est complètement entier fermé si, et seulement si, G est complètement entier fermé.

En effet, "Cl(XY) = Cl(X)Cl(Y) et X $\leq$ D" équivaut à "Cl(X) $\leq$ Cl(D)" .

Proposition 1.17. Si $\mathcal{a}$ est régulière, G réticulé et conditionnellement complet en tant que gerbier, G/$\mathcal{a}$ est conditionnellement complet en tant que gerbier.

Soit $[Cl(X_i)]_{i\in I}$ une famille non vide d'éléments de G/$\mathcal{a}$ majorée par Cl(X). Il existe (proposition 1.2.) un élément maximum X^* dans Cl(X), cet élément majore la famille (X_i) qui admet donc un plus petit majorant M, et Cl(M) majore la famille $[Cl(X_i)]_i$. Comme M $\leq X^*$ nous avons Cl(M) $\leq$ Cl(X) et G/$\mathcal{a}$ est conditionnellement complet en tant que demi-treillis.

De plus l'utilisation de la proposition 1.2. montre que l'existence de $\bigvee_i Cl(X_i)$ est équivalente à l'existence de $\bigvee_i X_i$, et que, si $\bigvee_i X_i$ existe, $\bigvee_i Cl(X_i) = Cl(\bigvee_i X_i)$. Le fait que G est conditionnellement complet en tant que gerbier entraîne ensuite

$$Cl(Y).\left[\bigvee_i Cl(X_i)\right] = \bigvee_i \left[Cl(Y).Cl(X_i)\right] ,$$
$$\left[\bigvee_i Cl(X_i)\right].\ Cl(Y) = \bigvee_i \left[Cl(X_i).Cl(Y)\right] ,$$

chaque fois que les expressions qui y figurent ont un sens.

Proposition 1.18. Si G est réticulé et intégralement fermé, pour que le sous-demi-groupe entier G/$\mathcal{a}$ soit un demi-groupe de Dedekind, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition de chaîne ascendante.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante car G/$\mathcal{a}$ est un groupe, réticulé, commutatif, vérifiant la condition (Φ) à droite (cf proposition 1.5., proposition 1.14. théorème 12 de [13] ,p. 230, proposition 1.13.).

2. Demi-groupes $\mathcal{A}_S$-normaux.

Nous allons utiliser les résultats du paragraphe 1. et ceux du paragraphe 1. du chapitre III, en prenant comme gerbier G, le gerbier $r(\mathcal{A}_S)$ qui est en fait un demi-groupe réticulé.

Remarque 2.1. Si l'équivalence d'Artin, $\mathfrak{a}$, dans $r(\mathcal{A}_S)$ est régulière

a) toute classe contient un élément maximum (proposition 1.2.)

b) $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est un demi-groupe ordonné (proposition 1.9), réticulé (proposition 1.14), résidué (proposition 1.15), conditionnellement complet en tant que gerbier (proposition 1.17).

c) toute classe première distincte de Cl(D) a pour élément maximum un a-idéal S-régulier premier (proposition 1.11.).

Proposition 2.1. Il y a équivalence entre

a) $r(\mathcal{A}_S)$ est intégralement fermé,

b) $r(\mathcal{A}_S)$ est complètement entier fermé,

c) $\mathfrak{a}$ est régulière et $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est intégralement fermé,

d) $\mathfrak{a}$ est régulière et $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est complètement entier fermé.

(Un demi-groupe unitaire, ordonné, est dit complètement entier fermé à gauche si un élément et toutes ses puissances admettent un multiplicateur commun à gauche, cet élément est entier). C'est une conséquence des résultats du paragraphe 1. et du théorème 10 de [13], p. 165.

Définition 2.1. D sera dit "$\mathcal{A}_S$-normal" si l'équivalence d'Artin est régulière dans $r(\mathcal{A}_S)$ et si le sous-demi-groupe entier de $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est un demi-groupe de Dedekind.

Si D est le demi-groupe multiplicatif d'un anneau commutatif, $\mathcal{A}$ le k-système, la définition ci-dessus coincide avec celle de GUERINDON (cf [15], p. 509). Si $\bar{X}$ est un idéal entier S-régulier, nous imposons à $\bar{X}$ d'être congru à un produit d'idéaux entiers S-réguliers $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n$, où $Cl(\bar{X}_i)$ est une classe couverte par Cl(D). Une telle classe est une classe première et a pour élément maximum un a-idéal S-régulier premier. GUERINDON impose aux classes de contenir un a-idéal S-régulier premier, mais alors $r(\mathcal{A}_S)$ est complètement entier fermé (cf [15], p. 509) donc intégralement fermé et toute classe distincte de Cl(D) qui contient un a-idéal S-régulier premier est une classe première (proposition 1.12) donc couverte par Cl(D) (cf [13] p. 221, théorème 4) car le sous-demi-groupe entier de $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ satisfait à la condition (Φ) des deux côtés.

Théorème 2.1. Lorsque $\mathfrak{a}$ est régulière et lorsque $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$ vérifie la condition de chaîne ascendante, le demi-groupe $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est un groupe si et seulement si,

(G1) les classes couvertes par Cl(D) sont deux à deux permutables, (G2) toute classe première distincte de Cl(D) est couverte par Cl(D),

(G3) $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est intégralement fermé.

Lorsque ces conditions sont réalisées $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est un groupe commutatif et D est $\mathcal{A}_S$-normal.

Il suffit d'appliquer le théorème 1.1. du chapitre III, les hypothèses a), b), c) et d) étant satisfaites. Pour b): si s est un élément de S non inversible dans D, $Cl(D.\cdot\bar{s})$ contient strictement Cl(D) et $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est non entier. Pour c): si $Cl(\bar{P})$ est une classe première, $Cl(\bar{P})$ majore $Cl(\bar{s})$ qui est inversible dans $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$, s appartenant à $S\cap\bar{P}$. Pour d): si $\hat{X} = \bar{X}'s^{-1}$ alors $Cl(\hat{X})Cl(\bar{s}) = Cl(\bar{X}') \subseteq Cl(D)$.

<u>Théorème 2.2</u>. D est $\mathcal{A}_S$-normal si et seulement si,

a) $r(\mathcal{A}_S)$ est intégralement fermé,

b) $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$ vérifie la condition de chaîne ascendante.

Ces conditions impliquent que $\mathfrak{a}$ est régulière et $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ intégralement fermé. Par suite $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$ vérifie la condition (Φ) des deux côtés et $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$ est réticulé. Il suffit alors d'appliquer le théorème 1.2. du chapitre III à $\mathcal{B}=r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$.

<u>Théorème 2.3</u>. $\mathfrak{a}$ étant régulière, D est $\mathcal{A}_S$-normal si, et seulement si,

a) $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$ vérifie la condition de chaîne ascendante,

b) $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est un groupe.

Raisonnement analogue à celui du théorème 2.4. chapitre III.

<u>Théorème 2.4</u>. $\mathfrak{a}$ étant régulière, D est $\mathcal{A}_S$-normal si, et seulement si,

a) toute classe entière est un produit de classes premières,

b) $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$ vérifie la condition (Φ) d'un côté, ou les conditions (C1) à droite et (C1) à gauche.

Raisonnement analogue à ceux des théorèmes 2.6. et 2.7. du chapitre III.

On peut également, en supposant $\mathfrak{a}$ régulière, énoncer des théorèmes analogues aux théorèmes 2.2., 2.3., 2.5., et 2.8. du chapitre III.

<u>Proposition 2.2</u>. Si tout a-idéal entier S-régulier, distinct de D, est contenu dans un a-idéal couvert par D et si $r(\mathcal{A}_S)$ est intégralement fermé, il y a équivalence entre

a) $\mathfrak{a}$ est l'égalité,

b) si $\bar{M}$ est un a-idéal S-régulier couvert par D, D: $\bar{M}$ couvre D,

c) tout a-idéal S-régulier couvert par D est un résiduel de D,

d) tout a-idéal S-régulier premier distinct de D n'est pas congru à D,

e) $\hat{X} \equiv D(\mathfrak{a})$ implique $\hat{X} = D$.

a) $\Longrightarrow$ b): $\bar{M}$ étant couvert par D, $\bar{M} \equiv D:(D:\bar{M})$ implique $\bar{M} = D:(D:\bar{M})$ donc $D \subset D:\bar{M}$. De plus $D \subset \hat{X} \subsetneq D:\bar{M}$ implique $\bar{M} \subsetneq D:\hat{X} \subseteq D$ et par suite $D:\hat{X} = \bar{M} = D:(D:\bar{M})$, car $\hat{X} \neq D$.

Ainsi $\hat{X} = D:\bar{M}$ et $D:\bar{M}$ couvre D.

b) $\Longrightarrow$c): si D couvre $\bar{M}$, $D:\bar{M}$ couvre D, donc $\bar{M}$ n'est pas congru à D et $\bar{M}$ étant maximum dans sa classe, $\bar{M} = D:(D:\bar{M})$, $\bar{M}$ est bien un résiduel de D.

c)$\Longrightarrow$d): $\bar{P}$ étant un a-idéal S-régulier premier distinct de D, il existe un a-idéal $\bar{M}$ couvert par D contenant $\bar{P}$. Puisque $\bar{M}$ est un résiduel de D, $\bar{M}$ est égal à $D:(D:\bar{M})$ et $\bar{M}$ n'est pas congru à D et par suite il en est de même de $\bar{P}$.

d)$\Longrightarrow$e): Si $\hat{X} \equiv D$, $\hat{X} \neq D$, il existe un a-idéal $\bar{M}$ couvert par D tel que $\hat{X} \subseteq \bar{M}$. Cet a-idéal est premier et congru à D d'après la convexité des classes en contradiction avec l'hypothèse d). Donc $\hat{X} \equiv D$ implique $\hat{X} = D$.

e)$\Longrightarrow$a): $\hat{X} \equiv \hat{Y}$ implique (proposition 1.10) $\hat{X}'.\hat{Y} \equiv D$, donc $\hat{X}'.\hat{Y} = D$ et par suite $\hat{Y} \subseteq \hat{X}$, donc $\hat{Y} = \hat{X}$, car $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ jouent le même rôle.

<u>Remarque 2.2</u>. Avec les hypothèses de la proposition précédente, on peut montrer que chacune des conditions équivalentes a) à e) implique

f) $\hat{Z}$ couvre D implique D couvre $D:\hat{Z}$.

<u>Théorème 2.5</u>. Il y a équivalence entre

a) D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien,

b) D est $\mathcal{A}_S$-normal et $\mathfrak{a}$ est l'égalité.

a)$\Longrightarrow$b): $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition de chaîne ascendante et $r(\mathcal{A}_S)$ est un groupe (théorème 2.4. chapitre III), $r(\mathcal{A}_S)$ est donc intégralement fermé et $\mathfrak{a}$ est l'égalité (proposition 1.6) , d'où D est $\mathcal{A}_S$-normal.

<u>Proposition 2.3</u>. Si D est $\mathcal{A}_S$-normal et $\bar{M}$ un a-idéal S-régulier entier non congru à D, il y a équivalence entre

a) $Cl(\bar{M})$ est couvert par $Cl(D)$ et $\bar{M}$ est maximum dans sa classe,

b) $\bar{M}$ est premier,

c) $\bar{M}$ est premier et minimal dans l'ensemble des a-idéaux S-réguliers premiers.

a)$\Longrightarrow$b): c'est une conséquence de la proposition 1.11.

b)$\Longrightarrow$a): $Cl(\bar{M})$ peut s'écrire $Cl(\bar{M}) = Cl(\bar{M}_1)Cl(\bar{M}_2) \ldots Cl(\bar{M}_n)$, où $Cl(\bar{M}_1)$, ..., $Cl(\bar{M}_n)$ sont des éléments de $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ couverts par $Cl(D)$. Comme $r(\mathcal{A}_S)$ est intégralement fermé, $Cl(\bar{M})$ est une classe première et $\bar{M}$ est maximum dans sa classe. Il existe un indice i tel que $Cl(\bar{M}_i) \leqslant Cl(\bar{M})$, d'où $Cl(\bar{M})$ est couvert par $Cl(D)$.

b)$\Longrightarrow$c): Soit $\bar{P}$ un a-idéal S-régulier premier contenu dans $\bar{M}$. Nous avons $Cl(\bar{P}) \leqslant Cl(\bar{M})$, d'où $Cl(\bar{P}) = Cl(\bar{M})$ et $\bar{P} = \bar{M}$, car a) est vérifiée.

<u>Proposition 2.4</u>. Si $r(\mathcal{A}_S)$ est intégralement fermé et si $\bar{M}$ est un a-idéal S-régulier couvert par D, il y a équivalence entre

a) $\bar{M}$ est inversible dans $r(\mathcal{A}_S)$,

b) $\bar{M}$ n'est pas congru à D.

Si $\bar{M}$ est inversible, son inverse est $D:\bar{M}$ et $D:\bar{M}$ est différent de D. Inversement,

$\bar{M} \not\equiv D$ implique $D \subset D:\bar{M}$ et $\bar{M} = \bar{M}\circ D \subseteq \bar{M}\circ(D:\bar{M}) \subseteq D$, donc $\bar{M}\circ(D:\bar{M}) = D$, car $\bar{M}\circ(D:\bar{M}) = \bar{M}$ impliquerait $D:\bar{M} \subseteq \bar{M}:\bar{M} = D$. On verrait de même que $(D:\bar{M})\circ\bar{M} = D$, et $\bar{M}$ est inversible dans $r(\mathcal{A}_S)$.

Proposition 2.5. $\mathcal{A}$ étant de caractère fini, si D est $\mathcal{A}_S$-normal et si $r(\mathcal{A})$ contient un seul a-idéal maximal $\bar{M}$, il y a équivalence entre

a) $\bar{M}$ est inversible dans $r(\mathcal{A}_S)$,

b) $\bar{M}$ est le seul a-idéal premier de $r(\mathcal{A})$ distinct de D.

Les propositions 2.3. et 2.4. montrent que a) implique b). Inversement si $Cl(\bar{Q})$ est un élément maximal de $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$ (il en existe, car $Cl(\bar{s})$ est strictement contenu dans $Cl(D)$ si s est un élément de S non inversible dans D), $\bar{P} = D:(D:\bar{Q})$ est l'élément maximum de $Cl(\bar{Q})$, donc premier et par suite $\bar{P} = \bar{M}$. La proposition 2.4. montre que $\bar{M}$ est inversible.

Proposition 2.6. Si D est $\mathcal{A}_S$-normal

a) $D:(\hat{X}\circ\hat{Y}) \equiv (D:\hat{X})\circ(D:\hat{Y})$,

b) $\hat{X}^{\cdot}.\hat{Y} \equiv \hat{X}\circ(D:\hat{Y})$,

c) $\hat{X}^{\cdot}.\hat{Y} \equiv \hat{X}.^{\cdot}\hat{Y}$,

d) $\hat{X} \equiv \hat{X}'$ et $\hat{Y} \equiv \hat{Y}' \Longrightarrow \hat{X}^{\cdot}.\hat{Y} \equiv \hat{X}'^{\cdot}.\hat{Y}'$ et $\hat{X}.^{\cdot}\hat{Y} \equiv \hat{X}'.^{\cdot}\hat{Y}'$.

$r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est un groupe, et $Cl(\hat{X})Cl(\hat{Y})$ et $Cl(\hat{X}\circ\hat{Y})$ étant égaux, il en est de même de leurs inverses, d'où a). La relation (cf [24], formule 9') $\hat{X}\circ(D:\hat{Y}) \subseteq (\hat{X}\circ D)^{\cdot}.\hat{Y} = \hat{X}^{\cdot}.\hat{Y}$ donne $\hat{X}\circ(D:\hat{Y})\circ\hat{Y} \subseteq (\hat{X}^{\cdot}.\hat{Y})\circ\hat{Y} \subseteq \hat{X}$, et par suite, compte tenu de ce que $Cl(D:\hat{Y})$ est l'inverse de $Cl(\hat{Y})$, $Cl(\hat{X}^{\cdot}.\hat{Y})Cl(\hat{Y}) = Cl(\hat{X})$, donc $Cl(\hat{X}^{\cdot}.\hat{Y}) = Cl(\hat{X})Cl(D:\hat{Y})$, d'où b). La propriété c) se démontre d'une manière analogue. Enfin $\hat{X} \equiv \hat{X}'$ et $\hat{Y} \equiv \hat{Y}'$ donnent $D:\hat{Y} = D:\hat{Y}'$, puis $\hat{X}\circ(D:\hat{Y}) \equiv \hat{X}'\circ(D:\hat{Y}')$, d'où $\hat{X}^{\cdot}.\hat{Y} \equiv \hat{X}'^{\cdot}.\hat{Y}'$ et $\hat{X}.^{\cdot}\hat{Y} \equiv \hat{X}'.^{\cdot}\hat{Y}'$.

Remarque 2.3. Si $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$ est commutatif, il en est de même de $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ car tout élément de $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est de la forme $Cl(\bar{X})[Cl(\bar{s})]^{-1}$, où $Cl(\bar{X})$ et $Cl(\bar{s})$ appartiennent à $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$.

Définition 2.2. Soient A un demi-anneau avec élément unité noté e, Γ un groupe commutatif totalement ordonné noté additivement, Γ_∞ le demi-groupe obtenu en adjoignant à Γ un élément noté $+\infty$ et en posant

$$a \leqslant +\infty\ ,\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty\ ,\ a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty\ ,\ \forall a \in \Gamma,$$

nous appellerons "valuation sur A" une application v de A dans Γ_∞ satisfaisant aux axiomes:

(V1) $v(xy) = v(x) + v(y)$, $\forall\, x, y \in A$,

(V2) $v(x) = v(y) \Longrightarrow v(x+y) \geqslant \inf[v(x), v(y)]$,

$v(x) \neq v(y) \Longrightarrow v(x+y) = \inf[v(x), v(y)]$,

(V3) $v(e) = 0$,

(V4) $v(\omega) = +\infty$, si A contient un élément ω tel que $a\omega = \omega$, ou tel que $\omega a = \omega$, $\forall\, a \in A$.

Remarques 2.4.

a) $v(xy) = v(yx)$, $\forall x,y \in A$.

b) si x est inversible à droite (resp. à gauche) et si x^{-1} est l'inverse à droite (resp. à gauche) de x, $v(x^{-1}) = -v(x)$

c) $x + y = y$ implique $v(y) \leqslant v(x)$.

d) l'ensemble des $x \in A$ tels que $v(x) \geqslant 0$ est un sous-demi-anneau unitaire B de A. Il sera appelé le "demi-anneau de la valuation".

e) si A est un anneau, toute valuation de A considéré comme anneau (au sens valuation dans un anneau) est une valuation de A considéré comme demi-anneau (au sens ci-dessus) et réciproquement.

Théorème 2.6. D est $\mathcal{A}_S$-normal si et seulement si, il existe une famille $(v_i)_{i \in I}$ de valuations sur le demi-anneau $r(\mathcal{A}_S)$, à valeurs dans le groupe additif de l'anneau Z des entiers rationnels, satisfaisant aux conditions:

(K1) l'image de $r(\mathcal{A}_S)$ par v_i est Z, $\forall i$,

(K2) $\bigcap_i B_i = r(\mathcal{A})$, B_i étant le demi-anneau de la valuation v_i,

(K3) $\forall \hat{X} \in r(\mathcal{A}_S)$, l'ensemble des indices i tels que $v_i(\hat{X}) \neq 0$ est fini,

(K4) $\forall i \in I$, $\exists \hat{X} \in r(\mathcal{A}_S)$ tel que $v_i(\hat{X}) = 1$, $v_j(\hat{X}) = 0$ si $j \neq i$.

Les axiomes (K1), (K2), (K3) ci-dessus correspondent aux axiomes (AK_I), (AK_{II}), (AK_{III}) utilisés par BOURBAKI (cf. [8] , p. 6) pour définir les anneaux de Krull au moyen des valuations sur un anneau.

Les conditions sont nécessaires:

a) Définition de $v_i(\hat{X})$.

D étant $\mathcal{A}_S$-normal, soit $[Cl(\bar{M}_i)]_{i \in I}$ la famille des éléments maximaux de $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$.

Si $\hat{X} \equiv D$, nous poserons $v_i(\hat{X}) = 0$, $\forall i \in I$.

Si $\hat{X} \not\equiv D$, $\hat{X}$ entier, il existe des entiers $a_i \geqslant 0$, définis d'une façon unique, tels que
$$Cl(\hat{X}) = \prod_i [Cl(\bar{M}_i)]^{a_i}$$
, avec la convention: $[Cl(\bar{M}_i)]^0$ est égal à $Cl(D)$.

Nous poserons $v_i(\hat{X}) = a_i$, $\forall i \in I$.

On peut remarquer que, si $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont entiers, $\hat{X} \equiv \hat{Y}$ équivaut à $v_i(\hat{X}) = v_i(\hat{Y})$ pour tout i.

Si $\hat{X} \in r(\mathcal{A}_S)$, $\hat{X}$ peut s'écrire sous plusieurs formes équivalentes, si
$$\hat{X} = \overline{X'}s^{-1} = s^{-1}\overline{X''} = \overline{Y'}t^{-1} ,$$
nous avons $s\overline{Y'} = \overline{X''}\,t$, d'où $\bar{s}\circ\overline{Y'} = \overline{X''}\circ\bar{t}$, et comme $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$ est un demi-groupe de Dedekind et un semi-groupe,
$$v_i(\bar{s}) + v_i(\overline{Y'}) = v_i(\overline{X''}) + v_i(\bar{t}),$$
donc, $v_i(\overline{X''}) - v_i(\bar{s}) = v_i(\overline{Y'}) - v_i(\bar{t})$,

donc, $v_i(\overline{X''}) - v_i(\bar{s}) = v_i(\overline{Y'}) - v_i(\bar{t})$,

ce qui est par suite encore égal à $v_i(\overline{X'}) - v_i(\bar{s})$. Nous poserons alors $v_i(\hat{X}) = v_i(\overline{X'}) - v_i(\bar{s})$, et ceci pour tout i de I.

b) Les v_i ainsi définis sont des valuations sur $r(\mathcal{A}_S)$.

L'axiome (V3) est satisfait d'après la définition de $v_i(D)$.

Il en est de même de (V4) puisqu'il n'y a pas d'éléments ω , $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ étant un groupe.

L'axiome (V1) est satisfait: $\hat{X} = s^{-1}\overline{X''}$ et $\hat{Y} = \overline{Y'}t^{-1}$ impliquent $\hat{X}\circ\hat{Y} = s^{-1}(\overline{X''} \circ \overline{Y'})t^{-1}$. Or, il existe $\bar{Z}$ tel que

$$s^{-1}\overline{X''} \circ \overline{Y'} = \bar{Z}\, s^{-1} \text{ , d'où } \hat{X}\circ\hat{Y} = \bar{Z}(ts)^{-1},$$

de sorte que:

$$v_i(\hat{X}\circ\hat{Y}) = v_i(\bar{Z}) - v_i(\overline{ts}) = v_i(\overline{X''}\circ \overline{Y'}) - v_i(\bar{t}\circ \bar{s}) =$$

$$= v_i(\overline{X''}) + v_i(\overline{Y'}) - v_i(\bar{t}) - v_i(\bar{s}) = v_i(\hat{X}) + v_i(\hat{Y}).$$

Enfin l'axiome (V2) est satisfait: l'indice i étant fixé, si $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont entiers, nous avons

$$Cl(\hat{X}) = \left[Cl(\bar{M}_i)\right]^{a_i} . Cl(\overline{X'}) \quad \text{et} \quad Cl(\hat{Y}) = \left[Cl(\bar{M}_i)\right]^{b_i} . Cl(\overline{Y'})$$

où $\overline{X}'$ et $\overline{Y}'$ sont deux a-idéaux entiers tels que $v_i(\overline{X'}) = v_i(\overline{Y'}) = 0$.

En supposant $a_i \leqslant b_i$ et en posant $c_i = b_i - a_i$, nous en tirons, $\mathfrak{a}$ étant régulière pour l'addition,

$$Cl(\hat{X} + \hat{Y}) = \left[Cl(\bar{M}_i)\right]^{a_i} . Cl(\bar{Z}), \text{ où } \bar{Z} = \bar{X}' + (\bar{M}_i)^{\circ c_i} \circ \bar{Y}' .$$

Si $a_i = b_i$, c'est-à-dire si $v_i(\hat{X}) = v_i(\hat{Y})$, nous avons bien l'inégalité

$$v_i(\hat{X} + \hat{Y}) \geqslant \inf\left[v_i(\hat{X}), v_i(\hat{Y})\right].$$

Si $a_i \neq b_i$, nous avons $\overline{X'} \not\subseteq \bar{M}_i$ car $v_i(\overline{X'}) = 0$ et car $Cl(\bar{M}_i)$ est une classe première, donc a fortiori $\bar{Z} \not\subseteq \bar{M}_i$, ce qui entraîne $v_i(\bar{Z}) = 0$ et par suite

$$v_i(\hat{X} + \hat{Y}) = \inf\left[v_i(\hat{X}) , v_i(\hat{Y})\right].$$

L'axiome (V2) étant vérifié dans le cas des a-idéaux entiers l'est dans le cas général, car, $\hat{X} = \overline{X'}s^{-1}$ et $\hat{Y} = \overline{Y'}s^{-1}$ impliquent $v_i(\hat{X}+\hat{Y}) = v_i(\overline{X'} + \overline{Y'}) - v_i(\bar{s})$.

c) Les axiomes (K1), (K2), (K3), (K4) sont satisfaits.

(K1): $v_i(\bar{M}_i^{\circ n}) = n$ et $v_i(D: \bar{M}_i^{\circ n}) = -n$ si $n > 0$, $v_i(D) = 0$.

(K3): c'est une conséquence de la définition de $v_i(\hat{X})$.

(K4): i étant fixé, $v_i(\bar{M}_i) = 1$ et $v_j(\bar{M}_i) = 0$ si $j \neq i$.

(K2): B étant l'intersection des demi-anneaux des valuations v_i, $\hat{X} = \bar{X}'s^{-1}$ où $v_i(\bar{X}') = a_i$, $v_i(\bar{s}) = b_i$, donne $v_i(\hat{X}) = a_i - b_i$.

Si $\hat{X} \in B$, les $a_i - b_i$ sont positifs ou nuls. Si $a_i = b_i$, $\forall$ i, alors $\bar{X}' \equiv \bar{s}$, donc $\hat{X} \equiv D$ et $\hat{X} \in r(\mathcal{A})$. Si les $a_i - b_i$ ne sont pas tous nuls, soit $\bar{Z}$ le a-idéal produit (dans un ordre arbitraire) des $\bar{M}_i^{\circ(a_i-b_i)}$, où $a_i \neq b_i$. Alors $\bar{Z}\circ\bar{s} \equiv \bar{X}'$, d'où $\bar{Z} \equiv \hat{X}$ et $\hat{X} \in r(\mathcal{A})$. Ainsi B est contenu dans $r(\mathcal{A})$.

Comme la définition des v_i montre que $r(\mathcal{A})$ est contenu dans B, nous avons bien

$B = r(\mathcal{A})$.

Les conditions sont <u>suffisantes</u>:

Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille de valuations sur le demi-anneau $r(\mathcal{A}_S)$ vérifiant les axiomes (K1), (K2), (K3) et (K4). Ce dernier axiome montre l'existence de $\hat{M}_i$ tel que:

$$v_i(\hat{M}_i) = 1 \;, \quad v_j(\hat{M}_i) = 0 \quad \text{si} \quad j \neq i.$$

a) $D.{}^{\cdot}\hat{M}_i$ et $D^{\cdot}.\hat{M}_i$ sont distincts de D.

(K2) montre que $\hat{M}_i \in r(\mathcal{A})$, d'où $D \subseteq D.{}^{\cdot}\hat{M}_i$. Il existe, d'après (K1), un a-idéal $\hat{M}'_i$ tel que $v_i(\hat{M}'_i) = -1$.

Si $v_j(\hat{M}'_i) = a$, avec $a < 0$, le a-idéal $\hat{N}_i = \hat{M}'_i \circ (\hat{M}_j)^{\circ b}$ (en posant $b = -a$) est tel que:

$$v_j(\hat{N}_i) = 0, \quad \text{et } v_k(\hat{N}_i) = v_k(\hat{M}'_i) \quad \text{si } k \neq j \;.$$

Comme il y a au plus un nombre fini d'indices j pour lesquels $v_j(\hat{M}'_i)$ est non nul, nous pouvons supposer $\hat{M}'_i$ tel que $v_j(\hat{M}'_i) \geqslant 0$ pour $j \neq i$.

L'axiome (K2) montre alors que $\hat{M}_i \circ \hat{M}'_i$ est contenu dans D, d'où $\hat{M}'_i \subseteq D.{}^{\cdot}\hat{M}_i$ et, d'après la remarque 3.2c, $v_j(D.{}^{\cdot}\hat{M}_i) \leqslant v_j(\hat{M}'_i)$, $\forall\, j$.

Il en résulte $v_i(D.{}^{\cdot}\hat{M}_i) \leqslant -1$, donc $D.{}^{\cdot}\hat{M}_i \neq D$.

Un raisonnement analogue permet de voir que $D^{\cdot}.\hat{M}_i$ est distinct de D.

b) $v_j(D.{}^{\cdot}\hat{M}_i) = -1$ si $j = i$, $v_j(D.{}^{\cdot}\hat{M}_i) = 0$ si $j \neq i$.

$\hat{M}_i \circ (D.{}^{\cdot}\hat{M}_i) \subseteq D$ donne $v_j(\hat{M}_i) + v_j(D.{}^{\cdot}\hat{M}_i) \geqslant 0, \forall\, j$, soit

$$-v_j(\hat{M}_i) \leqslant v_j(D.{}^{\cdot}\hat{M}_i) \leqslant 0 \;, \quad \forall\, j \;,$$

puisque $D \subset D.{}^{\cdot}\hat{M}_i$ donne $v_j(D.{}^{\cdot}\hat{M}_i) \leqslant v_j(D) = 0, \forall\, j$. Nous avons alors,

$$v_j(D.{}^{\cdot}\hat{M}_i) = 0 \;, \text{ pour } j \neq i, \quad \text{et } v_i(D.{}^{\cdot}\hat{M}_i) = 0 \text{ ou } -1.$$

Comme $v_i(D.{}^{\cdot}\hat{M}_i) = 0$ impliquerait $D.{}^{\cdot}\hat{M}_i \subseteq D$, en contradiction avec ce qui a été établi en a), nous avons $v_i(D.{}^{\cdot}\hat{M}_i) = -1$.

On a un résultat analogue en ce qui concerne $D^{\cdot}.\hat{M}_i$.

Il en résulte que, quel que soit l'entier rationnel n, il existe un a-idéal $\hat{X}_i$ tel que:

$$v_i(\hat{X}_i) = n \quad , \quad v_j(\hat{X}_i) = 0 \qquad \text{si} \quad j \neq i \;.$$

c) $v_i(D.{}^{\cdot}\hat{X}) = v_i(D^{\cdot}.\hat{X}) = -v_i(\hat{X})$, $\forall\, \hat{X} \in r(\mathcal{A}_S), \forall\, i \in I$.

$\hat{X} \circ (D.{}^{\cdot}\hat{X}) \subseteq D$ implique $v_i(\hat{X}) + v_i(D.{}^{\cdot}\hat{X}) \geqslant 0, \forall\, i$. Or, il existe $\hat{Y}$ tel que $v_i(\hat{X} \circ \hat{Y}) = 0$, $\forall\, i$ (si $v_i(\hat{X}) = 0, \forall\, i$, il suffit de prendre $\hat{Y} = D$, sinon, $\{1, 2, \ldots, p\}$ étant l'ensemble fini des indices j tels que $v_j(\hat{X}) \neq 0$, il suffit de prendre $\hat{Y}$ égal à $\hat{X}_1 \circ \hat{X}_2 \circ \ldots \circ \hat{X}_n$, où $\hat{X}_j$ est tel que $v_k(\hat{X}_j) = 0$ si $k \neq j$ et $v_j(\hat{X}_j) = -v_i(\hat{X})$).

Nous avons donc $\hat{X} \circ \hat{Y} \subseteq D$, d'où $\hat{Y} \subseteq D.{}^{\cdot}\hat{X}$, et ,

$$- v_i(\hat{X}) \leqslant v_i(D.\cdot\hat{X}) \leqslant v_i(\hat{Y}) = - v_i(\hat{X}) \quad , \forall\, i\,.$$

Ainsi, $v_i(D.\cdot\hat{X}) = -v_i(\hat{X})$, $\forall\, \hat{X} \in r(\mathcal{A}_S)$, $\forall\, i \in I$.

On démontre de même que:

$$v_i(D^{\cdot}.\hat{X}) = -v_i(\hat{X}) \quad , \forall\, \hat{X} \in r(\mathcal{A}_S) \quad \text{et} \quad \forall\, i \in I.$$

d) $v_i(\hat{X}) = v_i(\hat{Y})$, $\forall\, i \in I \iff \hat{X} \equiv \hat{Y}(\mathcal{a})$.

$v_i(\hat{X}) = v_i(\hat{Y})$, $\forall\, i$ implique

$$v_i\left[\hat{X}\circ(D.\cdot\hat{Y})\right] = 0 \;, \forall\, i\;,$$

donc, $\hat{X}\circ(D.\cdot\hat{Y}) \subseteq D$, soit $D.\cdot\hat{Y} \subseteq D.\cdot\hat{X}$, et par suite $D.\cdot\hat{X} = D.\cdot\hat{Y}$, $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ jouant le même rôle. Un raisonnement analogue montre que l'on a aussi $D^{\cdot}.\hat{X} = D^{\cdot}.\hat{Y}$.

Ainsi $\hat{X} \equiv \hat{Y}(\mathcal{a})$. La réciproque est une conséquence de c).

e) D est $\mathcal{A}_S$-normal.

Les résultats obtenus en c) et d) montrent que $r(\mathcal{A}_S)$ est équirésidué ($\hat{X}\circ(D^{\cdot}.\hat{X}) \subseteq D$ donne $D^{\cdot}.\hat{X} \subseteq D.\cdot\hat{X}$, de même $(D.\cdot\hat{X})\circ\hat{X} \subseteq D$ donne $D.\cdot\hat{X} \subseteq D^{\cdot}.\hat{X}$, d'où $D.\cdot\hat{X} = D^{\cdot}.\hat{X}$). Ainsi l'équivalence d'Artin dans $r(\mathcal{A}_S)$ est régulière.

Si $\hat{X} \in r(\mathcal{A})$, posons $v_i(\hat{X}) = a_i$. Si les a_i sont tous nuls, $v_i(\hat{X}) = v_i(D)$, $\forall\, i$, donc $\hat{X} \equiv D$. Dans le cas contraire, si $\{1, 2, \ldots, p\}$ est l'ensemble (fini) des i tels que $a_i \neq 0$ (alors $a_i > 0$), nous avons pour tout i,

$$v_i(\hat{X}) = v_i(\bar{M}_1^{\circ a_1} \circ \ldots \circ \bar{M}_p^{\circ a_p})$$

donc, $\bar{M}_1^{\circ a_1} \circ \ldots \circ \bar{M}_p^{\circ a_p} \equiv \hat{X}$.

Cette décomposition est unique d'après d). De plus $Cl(\bar{M}_i)$ est couvert par $Cl(D)$: si $M_i \subseteq M \subseteq D$, nous avons $v_j(D) \leqslant v_j(\bar{M}) \leqslant v_j(\bar{M}_i)$, $\forall\, j$, d'où $v_j(\bar{M}) = 0$ si $j \neq i$. Si $v_i(\bar{M}) = 0$, $\bar{M}$ est congru à D, si $v_i(\bar{M}) = 1$, $\bar{M}$ est congru à $\bar{M}_i$. Ainsi D est $\mathcal{A}_S$-normal.

<u>Définitions 2.3</u>.

a) D étant $\mathcal{A}_S$-normal , les valuations v_i définies dans le théorème 2.6. seront appelées les <u>"valuations essentielles"</u> de $r(\mathcal{A}_S)$.

b) D étant $\mathcal{A}_S$-normal, $(v_i)_{i\in I}$ la famille des valuations essentielles de $r(\mathcal{A}_S)$, il existe pour chaque i un a-idéal S-régulier $\bar{M}_i$, maximum dans sa classe modulo $\mathcal{a}$, tel que $v_i(\bar{M}_i) = 1$, $v_j(\bar{M}_i) = 0$ si $j \neq i$. Cet a-idéal est S-régulier premier. Il sera appelé le <u>"a-idéal associé à la valuation essentielle v_i"</u>.

3. Demi-groupes intégralement $\mathcal{A}_S$-clos.

Nous appellerons "cas classique" le cas où D est le demi-groupe multiplicatif d'un anneau commutatif, intègre, noté également D, où $S = D - \{0\}$ et où $\mathcal{A}$ est le k-système sur D. D(S) est alors le corps K des fractions de l'anneau D, $r(\mathcal{A}_S)$ est l'ensemble des idéaux fractionnaires non nuls de l'anneau D.

Nous ferons intervenir, dans le cas général, des a-idéaux S-réguliers de la forme $\hat{x}$, avec $x = ts^{-1}$, t, s $\in$ S. Un tel a-idéal est égal à Dx, ou encore à xD. De plus, il est inversible dans $r(\mathcal{A}_S)$ et son inverse peut s'écrire sous l'une des formes $D^{\cdot}.\hat{x}$, $D.^{\cdot}\hat{x}$, $\widehat{st^{-1}}$, Dst^{-1} , $st^{-1}D$. Nous avons $\hat{x} = D^{\cdot}.(D.^{\cdot}\hat{x}) = D.^{\cdot}(D^{\cdot}.\hat{x})$, $\hat{x}^{\circ p} = \widehat{x^p}$, $\forall$ p entier strictement positif.

Définition 3.1. Nous utiliserons dans certaines questions, en le précisant explicitement, l'hypothèse suivante, appelée "hypothèse (H)" :

$$\bar{\bar{X}} = \bigvee_{x \in S \cap \bar{X}} \bar{x} \quad , \forall \bar{X} \in r(\mathcal{A}).$$

qui peut encore s'énoncer sous la forme équivalente:

$$\bar{X} = \overline{\bar{X} \cap S} \ , \ \forall \bar{X} \in r(\mathcal{A}).$$

Si D est un demi-groupe unitaire avec zéro (resp. sans zéro), renversable à droite et à gauche, dans lequel tout élément distinct de zéro (resp. tout élément) est simplifiable à gauche et à droite, nous pouvons prendre S égal à $D - \{0\}$ (resp. égal à D). $D(S) - \{0\}$ (resp. D(S)) est alors un groupe. L'hypothèse (H) est vérifiée En particulier, elle l'est dans le cas classique.

Remarque 3.1. L'hypothèse (H) étant vérifiée, $r(\mathcal{A}_S)$ est équirésidué.

$$\hat{X} = \bar{X}' s^{-1} \text{ implique } \hat{X} = (\bigvee_{x \in S \cap \bar{X}'} \bar{x})\, s^{-1} = \bigvee_{x \in S \cap \bar{X}'} \widehat{xs^{-1}} ,$$

d'où $D.^{\cdot}\hat{X} = D.^{\cdot}(\bigvee \widehat{xs^{-1}}) = \bigcap (D.^{\cdot}\widehat{xs^{-1}}) = \bigcap \widehat{sx^{-1}} = \bigcap (D^{\cdot}.\widehat{xs^{-1}}) = D^{\cdot}.(\bigvee \widehat{xs^{-1}}) =$
$= D^{\cdot}.\hat{X}$.

L'équivalence d'Artin dans $r(\mathcal{A}_S)$ est donc régulière quand l'hypothèse (H) est vérifiée.

Proposition 3.1: L'hypothèse (H) étant vérifiée, il y a équivalence entre

a) $Cl(\hat{X}) \leqslant Cl(\hat{Y})$,

b) $\hat{Y} \subseteq \hat{z} \Longrightarrow \hat{X} \subseteq \hat{z}$.

($\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont des a-idéaux S-réguliers, z un élément S-régulier).

Remarquons que, quel que soit le a-idéal S-fractionnaire $\hat{Y}$, il existe un élément S-régulier z tel que $\hat{Y} \subseteq \hat{z}$: si $\hat{Y} = \bar{Y}' s^{-1}$, il suffit de prendre z égal à s^{-1}.

a) $\Longrightarrow$ b): $Cl(\hat{X}) \leqslant Cl(\hat{Y})$ et $\hat{Y} \subseteq \hat{z}$ impliquent $D.^{\cdot}\hat{z} \subseteq D.^{\cdot}\hat{Y} \subseteq D.^{\cdot}\hat{X}$, donc $\hat{X} \subseteq D^{\cdot}.(D.^{\cdot}\hat{X}) \subseteq D^{\cdot}.(D.^{\cdot}\hat{z}) = \hat{z}$.

b) $\Longrightarrow$ a): $D.^{\cdot}\hat{Y}$ est de la forme $\bar{Z}s^{-1}$. L'hypothèse (H) permet d'écrire $\bar{Z} = \underset{z \in S \cap \bar{Z}}{\bigvee} \bar{z}$, de sorte que $D.^{\cdot}\hat{Y} = (\bigvee \bar{z})\, s^{-1} = \bigvee \widehat{zs^{-1}}$, d'où $\hat{Y} \subseteq D^{\cdot}.(D.^{\cdot}\hat{Y}) = D^{\cdot}.\left[\bigvee \widehat{zs^{-1}}\right] = \bigcap (D^{\cdot}.\widehat{zs^{-1}}) = \bigcap \widehat{sz^{-1}}$. Comme b) est vérifiée, $\hat{Y} \subseteq \widehat{sz^{-1}}$ implique $\hat{X} \subseteq \widehat{sz^{-1}}$, d'où $\hat{X} \subseteq \bigcap \widehat{sz^{-1}} = D^{\cdot}.(D.^{\cdot}\hat{Y})$, et par suite $D.^{\cdot}\hat{Y} = D.^{\cdot}\left[D^{\cdot}.(D.^{\cdot}\hat{Y})\right] \subseteq D.^{\cdot}\hat{X}$. Un raisonnement analogue montre que l'on a $D^{\cdot}.\hat{Y} \subseteq D^{\cdot}.\hat{X}$, ce qui entraîne $Cl(\hat{X}) \leqslant Cl(\hat{Y})$.

Notons que l'hypothèse (H) n'a pas été utilisée pour établir que b) était une conséquence de a), et que, lorsque (H) n'est pas vérifiée, il est possible que b) implique a) ou que b) n'implique pas a) (cf paragraphe 4.E.).

Corollaire. L'hypothèse (H) étant vérifiée, il y a équivalence entre

a) $\hat{X} \equiv \hat{Y} \quad (\mathcal{A})$,

b) $\hat{X} \subseteq \hat{z} \Longleftrightarrow \hat{Y} \subseteq \hat{z}$.

($\hat{X}$ et $\hat{Y}$ étant des a-idéaux S-réguliers, z un élément S-régulier).

Remarque 3.2. Ce corollaire montre que, dans le cas classique, $\hat{X}$ étant un idéal fractionnaire non nul, il y a équivalence entre les notions de classe d'équivalence de $\hat{X}$ modulo l'équivalence d'Artin, et de "diviseur" au sens de BOURBAKI. Il y a de même équivalence entre: $\hat{X}$ est maximum dans sa classe modulo $\mathcal{A}$ et $\hat{X}$ est un "idéal divisoriel" au sens de BOURBAKI.

Définition 3.2. D sera dit "complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S)" si pour tout élément x S-régulier pour lequel il existe un a-idéal $\hat{X}$, contenant D, tel que $\hat{x}^{\circ n} \subseteq \hat{X}$ quel que soit l'entier n strictement positif, on a $x \in D$.

Dans le cas classique: pour que l'anneau D soit complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans K, il faut et il suffit qu'il soit complètement intégralement clos au sens de BOURBAKI (cf [7], p. 20).

Théorème 3.1. L'hypothèse (H) étant vérifiée, il y a équivalence entre

a) D est complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S),

b) $r(\mathcal{A}_S)/\mathcal{A}$ est un groupe.

a) $\Longrightarrow$ b): Si nous montrons l'équivalence suivante, z étant S-régulier et $\hat{X}$ un a-idéal S-régulier, $\hat{X}\circ(D.^{\cdot}\hat{X}) \subseteq \hat{z} \Longleftrightarrow D \subseteq \hat{z}$, nous aurons (corollaire de la proposition 3.1.) $\hat{X}\circ(D.^{\cdot}\hat{X}) \equiv D$, ainsi $Cl(\hat{X})$ sera inversible quel que soit $\hat{X}$ S-régulier et $r(\mathcal{A}_S)/\mathcal{A}$ sera bien un groupe.

Il est clair que $D \subseteq \hat{z}$ implique $\hat{X}\circ(D.^{\cdot}\hat{X}) \subseteq \hat{z}$. Inversement, supposons $\hat{X}\circ(D.^{\cdot}\hat{X}) \subseteq \hat{z}$, et soit y un élément S-régulier tel que $\hat{X} \subseteq \hat{y}$. Nous avons $D.^{\cdot}\hat{y} \subseteq D.^{\cdot}\hat{X}$, puis $\hat{X}\circ(D.^{\cdot}\hat{y}) \subseteq \hat{X}\circ(D.^{\cdot}\hat{X}) \subseteq \hat{z}$, d'où $\widehat{z^{-1}} \circ \hat{X} \subseteq \hat{y}$. Ainsi $\hat{X} \subseteq \hat{y}$ implique $\widehat{z^{-1}}\circ\hat{X} \subseteq \hat{y}$, et par suite $\widehat{z^{-1}}^{\circ n}\circ\hat{X} \subseteq \hat{y}$, $\forall n > 0$. La proposition 3.1. montre que ceci entraîne $Cl(\widehat{z^{-1}}^{\circ n}\circ\hat{X}) \leqslant Cl(\hat{X})$, $\forall n > 0$. Nous pouvons supposer $\hat{X}$ maximum dans sa classe modulo $\mathfrak{a}$, alors $\widehat{z^{-1}}^{\circ n}\circ\hat{X} \subseteq \hat{X}$, $\forall n > 0$. Ainsi $\widehat{z^{-1}}^{\circ n} \subseteq \hat{X}^{\cdot}.\hat{X}$, $\forall n > 0$. Comme $D \subseteq \hat{X}^{\cdot}.\hat{X}$ et comme D est complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S), ceci montre que nous avons $z^{-1} \in D$, $\widehat{z^{-1}} \subseteq D$ et $D \subseteq \hat{z}$. Ainsi $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est bien un groupe.

b) $\Longrightarrow$ a): Soit x un élément S-régulier pour lequel il existe un a-idéal $\hat{X}$, contenant D, tel que $\hat{x}^{\circ n} \subseteq \hat{X}$, $\forall n > 0$. Posons $Z = \bigcup_{n \geqslant 1} \hat{x}^{\circ n}$. Z étant contenu dans $\hat{X}$ est un complexe S-fractionnaire et nous pouvons considérer le a-idéal $\hat{Z}$ qui est S-régulier. Alors $\hat{x}\circ\hat{Z} = \widehat{x.Z} \subseteq \hat{Z}$ donc $Cl(\hat{x}).\ Cl(\hat{Z}) \leqslant Cl(\hat{Z})$. Comme $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est un groupe (ordonné) ceci implique $Cl(\hat{x}) \leqslant Cl(D)$, donc $x \in D$ et a) est vérifiée.

Dans le cas classique, on obtient le théorème 1 de BOURBAKI (cf [8],p. 5).

Remarques 3.3.

a) L'hypothèse (H) n'intervient pas pour démontrer que b) implique a). Il en résulte que si D est $\mathcal{A}_S$-normal, D est complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S). C'est ainsi que l'anneau D de Birkhoff-Witt (cf paragraphe 4.E.) est complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S) bien que l'hypothèse (H) ne soit pas satisfaite puisque le k-idéal S-régulier $\bar{Y}$ n'est pas l'union des $\bar{y}$ où $y \in S \cap \bar{Y}$.

b) Par contre si (H) n'est pas vérifiée, D peut être complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S) sans que $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ soit un groupe (cf paragraphe 4.D.).

Théorème 3.2. L'hypothèse (H) étant vérifiée, D est $\mathcal{A}_S$-normal si, et seulement si,

a) D est complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S),

b) $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$ vérifie la condition de chaîne ascendante.

Il suffit d'utiliser les théorèmes 3.1. et 2.3.

Dans le cas classique, le théorème ci-dessus n'est autre que le théorème 2 de BOURBAKI (cf [8],p. 7). Il y a donc équivalence dans le cas classique entre

a) D est un anneau de Krull,

b) D est $\mathcal{A}_S$-normal.

Dans le cas classique l'axiome (K4) du théorème 2.6. est donc une conséquence des axiomes (K1), (K2), (K3). La question se pose de savoir s'il en est encore de même dans le cas général.

Définition 3.3.

a) Un élément S-régulier, x, de D(S) sera dit "$\mathcal{A}_S$-entier sur D" s'il existe un entier n strictement positif tel que

$$\hat{x}^{\circ n} \subseteq D + \sum_{i=1}^{n-1} \hat{x}^{\circ i} .$$

Les éléments S-réguliers de D, c'est-à-dire les éléments de S, sont $\mathcal{A}_S$-entiers sur D.

b) D sera dit "intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S)" si tout élément S-régulier de D(S) qui est $\mathcal{A}_S$-entier sur D appartient à D.

Ces définitions prolongent les définitions classiques.

<u>Proposition 3.2</u>. Si D est complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S), D est intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S).

x étant un élément S-régulier de D(S) $\mathcal{A}_S$-entier sur D, il existe un entier $n>0$ tel que $\hat{x}^{\circ n} \subseteq D + \sum_{i=1}^{n-1} \hat{x}^{\circ i}$ $(= \hat{X})$. Nous avons alors $D \subseteq \hat{X}$ et $\hat{x}^{\circ p} \subseteq \hat{X}, \forall p > 0$, d'où $x \in D$ puisque D est complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S). D est intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S).

<u>Proposition 3.3</u>. Si D est intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S) et si $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition de chaîne ascendante, D est complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S).

Soit x un élément S-régulier pour lequel il existe un a-idéal $\hat{X}$, contenant D, tel que $\hat{x}^{\circ n} \subseteq \hat{X}$, $\forall n > 0$. Si $\hat{X} = \bar{X}'s^{-1}$ nous avons $\hat{x}^{\circ n} \circ \bar{s} \subseteq \bar{X}', \forall n > 0$, et $\bar{s} \subseteq \bar{X}'$. Posons $\hat{y}_0 = \bar{s}$, $\hat{y}_n = \bar{s} + \sum_{i=1}^{n-1} \hat{x}^{\circ i} \circ \bar{s}$, pour $n \geqslant 1$. Puisque $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition de chaîne ascendante l'ensemble des $\hat{y}_i$ $(i \geqslant 0)$ contient au moins un élément maximal , $\hat{y}_p$. Or, $m \leqslant n$ implique $\hat{y}_m \subseteq \hat{y}_n$, l'élément maximal $\hat{y}_p$ est donc maximum, ce qui nous donne en particulier $\hat{y}_{p+1} = \hat{y}_p$, ce qui implique: $\hat{x}^{\circ(p+1)} \subseteq D + \sum_{i=1}^{p} \hat{x}^{\circ i}$. Cette relation exprime que x est $\mathcal{A}_S$-entier sur D, donc que x appartient à D puisque D est intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S). Ainsi D est complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S).

Dans le cas classique les propositions 3.2. et 3.3. redonnent des résultats connus.

<u>Théorème 3.3.</u> (H) étant satisfaite et $r(\mathcal{A})$ vérifiant la condition de chaîne ascendante, D est $\mathcal{A}_S$-normal si, et seulement si, D est intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S).

C'est une conséquence du théorème 3.2. et de la proposition 3.3. L'hypothèse (H) n'est pas nécessaire (cf paragraphe 4.E.). Il en est de même de la condition de chaîne ascendante concernant $r(\mathcal{A})$ puisqu'il existe des anneaux de Krull non noethériens.

<u>Théorème 3.4</u>. $\mathcal{A}$ étant le d-système bilatère sur D, T un complexe de S vérifiant dans D les six conditions (S), si $sT = Ts, \forall s \in S$,

a) le complexe $U = S.T^{-1}$ et le d-système bilatère $\mathcal{B}$ défini sur D(T) vérifient dans D(T) les six conditions (S) (et D(S) peut être considéré comme le demi-groupe des fractions de D(T) relativement à U),

b) si D est intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S), D(T) est intégralement $\mathcal{B}_U$-clos dans D(S).

La propriété a) résulte de ce que S et T vérifient dans D les conditions (S) et de la condition: $sT = Ts$, $\forall s \in S$ (utile pour établir la relation $uD(T) = D(T)u$, $\forall u \in U$). La propriété b) se démontrera en utilisant le

Lemme 3.1. $x^n t$ ($n > 1$) étant un élément de D(S) défini à partir d'un élément S-régulier $x = vs^{-1}$ et d'un élément t de S, il existe $u_n \in S$ tel que $u_n x^n t = (xt)^n$.

a) Si $a \in S$, il existe $b \in S$ tel que $xa = bx$.

Les conditions (S3) et (S4) assurent l'existence de $w \in S$ tel que $as = sw$, et de $b \in S$ tel que $vw = bv$, ce qui donne

$$xa = vs^{-1}a = vws^{-1} = bvs^{-1} = bx .$$

b) Comme $t \in S$, l'alinéa précédent montre l'existence de $u_2 \in S$ tel que $xt = u_2 x$. Alors $u_2 x^2 t = (xt)^2$. S'il existe $u_{p-1} \in S$ tel que $u_{p-1}x^{p-1}t = (xt)^{p-1}$, l'alinéa a) montre l'existence de $u_p \in S$, tel que $x(tu_{p-1}) = u_p x$, d'où $u_p x^p t = xtu_{p-1}x^{p-1}t = (xt)(xt)^{p-1} = (xt)^p$. La propriété est donc valable quel que soit l'entier n ($n > 1$).

Démonstration de b): x étant un élément U-régulier de D(S) (de la forme $x = uv^{-1}$ avec $u \in U$, $v \in U$) est un élément S-régulier de D(S) (de la forme $x = st^{-1}$, avec $s \in S$, $t \in S$). Le d-idéal engendré par x dans $r(\mathcal{A}_S)$ sera noté $\hat{x}$ et $\hat{x} = Dx = xD$. Le d-idéal engendré par x dans $r(\mathcal{B}_U)$ sera noté $\check{x}$ et $\check{x} = D(T)x = xD(T)$.

Supposons x $\mathcal{B}_U$-entier sur D(T). Il existe alors un entier $n > 0$ tel que $\check{x}^{\circ n} \subseteq D(T) + \sum_{i=1}^{n-1} \check{x}^{\circ i}$, donc, $\mathcal{B}$ étant le d-système, tel que

$$\check{x}^{\circ n} \subseteq D(T) \cup \left[\sum_{i=1}^{n-1} \check{x}^{\circ i}\right] , \text{ c'est-à-dire tel que}$$

$x^n \in D(T)$ ou tel que $x^n \in D(T)x^p$ pour un certain entier p ($0 < p < n$). Il existe donc un entier m ($m > 0$) et un élément $t \in T$ tels que $x^m t \in D$. Nous pouvons trouver d'après le lemme, $u_m \in S$ tel que $u_m x^m t = (xt)^m$. Ainsi $\widehat{xt}^{\circ m} \subseteq D$, relation exprimant que xt est $\mathcal{A}_S$-entier sur D, d'où $xt \in D$, puisque D est intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S). Nous en déduisons $x \in D(T)$, ce qui établit que D(T) est intégralement $\mathcal{B}_U$-clos dans D(S).

Nous avons un théorème analogue en ce qui concerne les anneaux:

Théorème 3.5. D étant le demi-groupe multiplicatif d'un anneau, $\mathcal{A}$ le k-système bilatère sur D, T un complexe de S vérifiant dans D les six conditions (S), si $sT = Ts$, $\forall s \in S$,

a) le complexe $U = S.T^{-1}$ et le k-système bilatère $\mathcal{B}$ défini sur D(T) vérifie les six conditions (S) (et D(S) peut être considéré comme le demi-groupe multiplicatif de l'anneau des fractions de l'anneau D(T) relativement au complexe U).

b) si D est intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S), D(T) est intégralement $\mathcal{B}_U$-clos dans D(S).

la démonstration de a) se fait comme précédemment. Pour établir b) nous utiliserons les mêmes notations que dans le théorème 3.4. Si l'élément U-régulier x est $\mathcal{B}_U$-entier sur D(T), il existe un entier n ($n > 0$) tel que

$$\check{x}^{\circ n} \subseteq D(T) + \sum_{i=1}^{n-1} \check{x}^{\circ i} .$$

Comme $\mathcal{B}$ est le k-système, il existe des éléments y_o, y_1, ..., y_{n-1} de D(T) tels que: $x^n = y_o + xy_1 + \ldots + x^{n-1}y_{n-1}$.
T étant réversible à gauche, nous pouvons supposer les y_i de la forme $d_i t^{-1}$, où $d_i \in D$, $t \in T$. Ainsi $x^n t = d_o + xd_1 + \ldots + x^{n-1}d_{n-1}$. Or, (lemme 3.1.) il existe $u_n \in S$ tel que $u_n x^n t = (xt)^n$, et si $a \in S$ il existe $b \in S$, tel que $ax = xb$ (raisonnement analogue à celui de l'alinéa a) du lemme), il existe donc $v_p \in S$ tel que $u_n x^p = x^p v_p$. Nous avons donc $(xt)^n = u_n d_o + xv_1 d_1 + \ldots + x^{n-1}v_{n-1}d_{n-1}$, ce qui implique $\hat{xt}^{\circ n} \subseteq D + \hat{x} + \ldots + \hat{x}^{\circ(n-1)}$, autrement dit xt est $\mathcal{A}_S$-entier sur D, et $xt \in D$, puisque D est intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S). Ainsi $x \in D(T)$ et D(T) est intégralement $\mathcal{B}_U$-clos dans D(S).

<u>Théorème 3.6</u>. D étant le demi-groupe multiplicatif d'un anneau, $\mathcal{A}$ le k-système bilatère sur D, $\bar{P}$ un k-idéal S-régulier premier, si $T = S-\bar{P}$ est non vide et tel que $sT = Ts$, $\forall s \in S$, et si l'hypothèse (H) est satisfaite dans D par S et $\mathcal{A}$,

a) D(T) contient un seul k-idéal U-régulier maximal, lequel est égal à $\bar{P}$.D(T). L'anneau D(T) sera alors dit "<u>U-local</u>",

b) l'hypothèse (H) est vérifiée dans D(T) par $U = S.T^{-1}$ et le k-système bilatère $\mathcal{B}$ défini sur D(T),

c) si $r(\mathcal{B})$ vérifie la condition de chaîne ascendante, et si D est $\mathcal{A}_S$-normal, l'anneau U-local D(T) est $\mathcal{B}_U$-normal.

Remarquons tout d'abord que S vérifiant les conditions (S) et $\bar{P}$ étant premier, T vérifie les conditions (S) dans D de sorte que le théorème 3.5. est applicable.

On vérifie facilement que $\bar{P}$.D(T) est un k-idéal U-régulier de D(T), distinct de D(T) puisque l'élément unité de D(T) n'appartient pas à ce k-idéal. D'autre part, si $\check{X}$ est un k-idéal U-régulier entier de D(T), distinct de D(T), $\check{X} \cap D$ est alors un k-idéal S-régulier de D, ne rencontrant pas T, et tel que $\check{X} = (\check{X} \cap D)T^{-1}$. Par suite $(\check{X} \cap D) \cap S \subseteq \bar{P} \cap S$, d'où, l'hypothèse (H) étant vérifiée dans D, $\check{X} \cap D \subseteq \bar{P}$ et $\check{X} \subseteq \bar{P}.T^{-1} = \bar{P}.D(T)$. $\bar{P}$.D(T) est donc le seul k-idéal U-régulier maximal de D(T).

$\check{X}$ étant un k-idéal U-régulier entier de D(T), $dt^{-1} \in \check{X}$ ($d \in D$, $t \in T$) implique $d \in \check{X} \cap D$. Comme (H) est vérifiée <u>dans D par S</u> et $\mathcal{A}$, et comme $\check{X} \cap D$ est un k-idéal S-régulier de D, il en résulte $d \in \overline{(\check{X} \cap D) \cap S}$, soit $d \in \overline{\check{X} \cap S}$, de sorte que $dt^{-1} \in \widehat{\check{X} \cap U}\, t^{-1} \subseteq \widehat{X \cap U}$, puisque $\overline{\check{X} \cap S} \subseteq \widehat{\check{X} \cap S} \subseteq \widehat{\check{X} \cap U}$. Nous avons donc $\check{X} \subseteq \widehat{\check{X} \cap U}$, d'où $\check{X} = \widehat{\check{X} \cap U}$ et l'hypothèse (H) est vérifiée dans D(T) par U et $\mathcal{B}$.

D étant $\mathcal{A}_S$-normal est complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S), donc intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S), et par suite D(T) est intégralement $\mathcal{B}_U$-clos dans D(S) (théorème 3.5.). Comme (H) est vérifiée dans D(T) par U et $\mathcal{B}$, et comme r($\mathcal{B}$) vérifie la condition de chaîne ascendante, D(T) est $\mathcal{B}_U$-normal (théorème 3.3.).

Remarques 3.4.

a) Nous avons un théorème analogue en prenant pour D un demi-groupe quelconque, pour $\mathcal{A}$ le d-système bilatère sur D, pour $\bar{P}$ un d-idéal S-régulier premier.

b) Comme $T = S-\bar{P}$ la condition $sT = Ts$, $\forall s \in S$ est toujours vérifiée si $s \in T$, si bien qu'il suffit d'imposer $sT = Ts$, $\forall s \in S \cap \bar{P}$.

c) r($\mathcal{B}$) vérifie la condition de chaîne ascendante si l'ensemble des k-idéaux entiers S-réguliers de D, ne rencontrant pas T, vérifie la condition de chaîne ascendante.

Proposition 3.4. D étant $\mathcal{A}_S$-normal, $(v_i)_{i\in I}$ la famille des valuations essentielles de r($\mathcal{A}_S$), B_i le demi-anneau de la valuation v_i, T un complexe de S vérifiant les conditions (S1) et (S4), J l'ensemble des $i \in I$ tels que $v_i(\bar{t}) = 0$, $\forall t \in T$. Alors $D(T) = \bigcap_{i \in J} \varepsilon(B_i)$, en posant $\varepsilon(B_i) = \bigcup_{\hat{X} \in B_i} \hat{X}$, D(T) étant le demi-groupe des fractions de D relativement à T.

Remarquons que T satisfait aux six conditions (S). Posons $\varepsilon = \bigcap_{i \in J} \varepsilon(B_i)$.

a) $D(T) \subseteq \varepsilon$. xt^{-1} appartenant à D(T), il existe un a-idéal S-régulier contenant xt^{-1} , par exemple $\widehat{t^{-1}} = Dt^{-1}$. Si $i \in J$, $v_i(\bar{t}) = 0$, d'où $v_i(\widehat{t^{-1}}) = 0$ et $\widehat{t^{-1}} \in B_i$, par suite $xt^{-1} \in \varepsilon(B_i)$, $\forall i \in J$, d'où $xt^{-1} \in \varepsilon$ et $D(T) \subseteq \varepsilon$.

b) $\varepsilon \subseteq D(T)$. Si $xs^{-1} \in \varepsilon$ nous pouvons supposer, si D contient un élément zéro, $xs^{-1} \neq 0$ (car $xs^{-1} = 0$ implique $xs^{-1} \in D(T)$). Soit $\hat{X}$ l'intersection de l'ensemble non vide (il contient $\widehat{s^{-1}}$) des a-idéaux S-réguliers contenant xs^{-1}. Comme $xs^{-1} \in \varepsilon(B_i)$, en supposant $i \in J$, il existe un a-idéal S-régulier $\hat{X}_i \in B_i$ tel que $xs^{-1} \in \hat{X}_i$. Nous avons alors $\hat{X} \subseteq \hat{X}_i$, ce qui entraîne $\hat{X} \in B_i$ et par suite $\hat{X} \subseteq \varepsilon(B_i)$. Soit K l'ensemble des $k \in I$ tels que $v_k(\hat{X}) < 0$. Si $k \in K$, $\hat{X}$ n'appartient pas à B_k, d'où $\hat{X} \not\subseteq \varepsilon(B_k)$ et $k \notin J$. Il existe donc $t_k \in T$ tel que $v_k(\bar{t}_k) > 0$, et un entier n_k ($n_k > 0$) tel que $v_k[\hat{X} \circ (\bar{t}_k)^{\circ n_k}] \geqslant 0$. L'ensemble K étant fini d'après (K3), rangeons les $(t_k)^{n_k}$, où k parcourt K, dans un ordre déterminé et considérons leur produit u. Ce produit dépend de l'ordre choisi, mais $v_i(\bar{u})$ en est indépendant, $\forall i \in I$, car, s' et s" étant deux éléments de S, $v_i(\overline{s's''}) = v_i(\bar{s}' \circ \bar{s}'') = v_i(\bar{s}') + v_i(\bar{s}'')$. Nous avons alors $v_i(\hat{X} \circ \bar{u}) \geqslant 0$, $\forall i \in I$, ce qui implique $\hat{X} \circ \bar{u} \subseteq D$. Si $\bar{X}' = \hat{X} \circ \bar{u}$, $\hat{X}$ est égal à $\bar{X}'u^{-1}$, et comme $u \in T$, $\hat{X}$ est contenu dans D(T), d'où $xs^{-1} \in D(T)$ et $\varepsilon \subseteq D(T)$.

Nous avons donc bien $D(T) = \bigcap_{i \in J} \varepsilon(B_i)$.

Proposition 3.5. L'hypothèse (H) étant vérifiée, D étant $\mathcal{A}_S$-normal, $D(S-\bar{M}_q)$ est égal à $\varepsilon(B_q)$ si $S-\bar{M}_q$ est non vide, $\bar{M}_q$ étant le a-idéal associé à la valuation essentielle v_q.

Pour le démontrer, il suffit de montrer que $J = \{q\}$, J étant l'ensemble des $i \in I$, tels que $v_i(\bar{t}) = 0$, $\forall\, t \in S - \bar{M}_q$. Soit $t \in S - \bar{M}_q$, $\bar{t}$ est congru modulo $\mathfrak{a}$ à un produit de la forme $\bar{M}_1^{\circ n_1} \circ \dots \circ \bar{M}_p^{\circ n_p}$, et comme $t \notin \bar{M}_q$, $\bar{M}_q$ ne figure pas dans l'ensemble $\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_p$, d'où $v_q(\bar{t}) = 0$ et $q \in J$. D'autre part $i \neq q$ entraîne $\bar{M}_i \not\subseteq \bar{M}_q$ et par suite, l'hypothèse (H) étant vérifiée, $\bar{M}_i \cap S \not\subseteq \bar{M}_q \cap S$. Il existe donc un élément t tel que $t \in \bar{M}_i \cap S$, $t \notin \bar{M}_q \cap S$. Nous avons alors $v_i(\bar{t}) > 0$, d'où $i \notin J$. Ainsi $J = \{q\}$ et la proposition 3.4. montre que $D(S-\bar{M}_q) = \varepsilon(B_q)$.

<u>Proposition 3.6</u>. S contenant l'élément unité de D, l'hypothèse (H) étant satisfaite et D étant $\mathcal{A}_S$-normal, tout a-idéal S-régulier premier contient un a-idéal S-régulier premier non congru à D.

S contenant l'élément unité de D, $S - \bar{A}$ est non vide quel que soit le a-idéal $\bar{A}$ distinct de D. D'autre part, il suffit de démontrer la proposition en supposant que le a-idéal S-régulier premier $\bar{P}$ est distinct de D puisque S contient des éléments non inversibles dans D. Soient $(v_i)_{i\in I}$ la famille des valuations essentielles de $r(\mathcal{A}_S)$, J l'ensemble des $i \in I$ tels que $v_i(\bar{t}) = 0$, $\forall\, t \in S-\bar{P}$, $\bar{M}_q$ le a-idéal associé à la valuation essentielle v_q, où $q \in J$. Nous avons

$$\bigcap_{i \in J} \varepsilon(B_i) = D(S - \bar{P}) \subseteq \varepsilon(B_q) = D(S - \bar{M}_q).$$

Si $p \in S - \bar{P}$, il existe donc $a \in D$, $m \in S - \bar{M}_q$ tels que $p^{-1} = am^{-1}$, c'est-à-dire tels que $m = pa$, ce qui montre que $p \notin \bar{M}_q$ car $m \notin \bar{M}_q$ et par suite que $S-\bar{P} \subseteq S-\bar{M}_q$, d'où $S \cap \bar{M}_q \subseteq S \cap \bar{P}$ et, l'hypothèse (H) étant vérifiée, $\bar{M}_q \subseteq \bar{P}$, ce qui démontre la proposition.

<u>Théorème 3.7</u>. S contenant l'élément unité de D et l'hypothèse (H) étant vérifiée il y a équivalence entre

a) D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien,

b) D est $\mathcal{A}_S$-normal et tout a-idéal S-régulier premier distinct de D est maximal.

a) $\Longrightarrow$ b): c'est une conséquence des théorèmes 2.1. du chapitre III et 2.5.

b) $\Longrightarrow$ a): $\bar{P}$ étant un a-idéal S-régulier premier distinct de D contient un a-idéal S-régulier premier $\bar{M}$ non congru à D. Nous avons donc $\bar{P} = \bar{M}$ et $\bar{P}$ n'est pas congru à D. Ainsi $\mathfrak{a}$ est l'égalité (théorème 2.1.) et D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien (théorème 2.5.).

<u>Théorème 3.8</u>. S contenant l'élément unité de D, l'hypothèse (H) étant vérifiée, D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien si, et seulement si,

a) $r(\mathcal{A})$ vérifie la condition de chaîne ascendante,

b) D est intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S),

c) tout a-idéal S-régulier premier distinct de D est maximal.

Les conditions sont nécessaires d'après les théorèmes 2.4. et 2.1. du chapitre III 3.2. du chapitre IV, et la proposition 3.2. du chapitre IV. Les conditions sont suffisantes d'après la proposition 3.3. du chapitre IV et les théorèmes 3.2. et 3.7 de ce même chapitre.

<u>Théorème 3.9</u>. D étant le demi-groupe multiplicatif d'un anneau, $\mathcal{A}$ le k-système bilatère sur D, S un complexe de D vérifiant les conditions (S) et contenant l'élément unité de D, $\bar{P}$ un k-idéal S-régulier premier minimal (et distinct de D), si

a) L'hypothèse (H) est vérifiée dans D par S et $\mathcal{A}$,

b) $T = S - \bar{P}$ est tel que $st = ts$, $\forall s \in S$, $\forall t \in T$,

c) L'ensemble des k-idéaux entiers U-réguliers de D(T), où $U = S.T^{-1}$, vérifie la condition de chaîne ascendante,

d) D est $\mathcal{A}_S$-normal,

D(T) est alors $\mathcal{B}_U$-dedekindien et le groupe formé par les k-idéaux U-réguliers de D(T) est un groupe cyclique admettant $\bar{P}.D(T)$ comme générateur. ($\mathcal{B}$ étant le k-système bilatère défini sur D(T)).

Le théorème 3.6. montre que D(T) est $\mathcal{B}_U$-normal. D'autre part $\bar{P}.D(T)$ étant un k-idéal U-régulier maximal de D(T) est U-régulier premier. Nous allons montrer que $\bar{P}.D(T)$ est le seul k-idéal U-régulier premier de D(T) distinct de D(T).

Soit $\check{X}$ un k-idéal U-régulier premier de D(T), distinct de D(T). $\overline{X'} = \check{X} \cap D$ est un k-idéal S-régulier de D ne rencontrant pas T, donc contenu dans $\bar{P}$ puisque l'hypothèse (H) est vérifiée. Soient $\overline{Y'}$ et $\overline{Z'}$ deux k-idéaux S-réguliers de D tels que $\overline{Y'} \circ \overline{Z'} \subseteq \overline{X'}$. On vérifie facilement que $\check{Y} = T^{-1}\,\overline{Y'}\,T^{-1}$ et $\check{Z} = T^{-1}\,\overline{Z'}\,T^{-1}$ sont des k-idéaux U-réguliers de D(T), ce sont d'ailleurs les k-idéaux engendrés dans D(T) par $\overline{Y'}$ et $\overline{Z'}$. Soient $s^{-1}yt^{-1} \in \check{Y}$ et $u^{-1}zv^{-1} \in \check{Z}$ $(s,t,u,v \in T$, $y \in \overline{Y'}$, $z \in \overline{Z'})$. Il existe un k-idéal $\overline{Z''}$ de D tel que $\overline{Z'}ut = ut\overline{Z''}$ et un élément z'' de $\overline{Z''}$ tel que $zut = utz''$. La condition $st = ts$, $\forall s \in S$, $\forall t \in T$ implique $S \cap \overline{Z'} = S \cap \overline{Z''}$, d'où, (H) étant satisfaite, $\overline{Z'} = \overline{Z''}$ et z'' appartient à $\overline{Z'}$. Ainsi $(s^{-1}yt^{-1})(u^{-1}zv^{-1}) = s^{-1}yz''(vut)^{-1}$, avec $yz'' \in \overline{Y'}.\overline{Z'} \subseteq \overline{X'}$, de sorte que

$$(s^{-1}yt^{-1})(u^{-1}zv^{-1}) \in T^{-1}\,\overline{X'}\,T^{-1} = \check{X}.$$

Nous avons donc $\check{Y}.\check{Z} \subseteq \check{X}$, ce qui équivaut à $\check{Y} \circ \check{Z} \subseteq \check{X}$, d'où $\check{Y} \subseteq \check{X}$ ou $\check{Z} \subseteq \check{X}$ puisque $\check{X}$ est U-régulier premier, et enfin $\overline{Y'} \subseteq \overline{X'}$ ou $\overline{Z'} \subseteq \overline{X'}$ car $\overline{Y'} \subseteq \check{Y} \cap D$ et $\overline{Z'} \subseteq \check{Z} \cap D$. Ceci exprime que le k-idéal $\overline{X'}$ est S-régulier premier, et par suite égal à $\bar{P}$, ce qui entraîne $\check{X} = \bar{P}.D(T)$. Le théorème 3.7. montre alors que D(T) est $\mathcal{B}_U$-dedekindien.

Comme D(T) ne contient qu'un seul k-idéal U-régulier premier distinct de D(T), le groupe $r(\mathcal{B}_U)$ est un groupe cyclique engendré par $\bar{P}.D(T)$. Tout k-idéal entier U-régulier de D(T), distinct de D(T), est une puissance (strictement positive) de $\bar{P}.D(T)$.

<u>Remarque 3.5</u>. Le théorème est encore valable si la condition b) est remplacée par

l'ensemble des deux conditions

b') $T = S - \bar{P}$ est tel que $sT = Ts$, $\forall s \in S$,

b") $\forall b \in D$, $\forall t \in T$, il existe $u \in T$, $d \in D$ tels que $bu = tbd$.

La condition b) a été utilisée pour appliquer le théorème 3.6., ce que permet la condition b'), et pour montrer que, $\check{X}$ étant un k-idéal U-régulier premier de D(T), distinct de D(T), $\bar{X}' = \check{X} \cap D$ était un k-idéal S-régulier premier de D, ce qui permet la condition b"). En effet, supposons $aDb \subseteq \bar{X}'$ ($a \in D$, $b \in D$), et soit $t \in T$. Il existe alors $u \in T$ et $d \in D$ tels que $bu = tbd$, donc tels que $t^{-1}bu = bd$, et $aDb \subseteq \bar{X}'$ implique $aDt^{-1}bu \subseteq \bar{X}'$, puis $aDt^{-1}b \subseteq \bar{X}' u^{-1} \subseteq \check{X}$. Ceci ayant lieu pour tout t de T donne $a\, D(T)\, b \subseteq \check{X}$, d'où, $\check{X}$ étant premier, $a \in \check{X}$ ou $b \in \check{X}$ et par suite $a \in \bar{X}'$ ou $b \in \bar{X}'$, ce qui montre bien que $\bar{X}'$ est un k-idéal S-régulier premier de D.

Si D est commutatif, b), b') et b") sont toujours vérifiées.

Remarque 3.6. On a un théorème analogue en prenant pour D un demi-groupe quelconque, pour $\mathcal{A}$ le d-système bilatère sur D, pour $\bar{P}$ un d-idéal S-régulier premier minimal (et distinct de D).

4. Exemples de demi-groupes $\mathcal{A}_S$-dedekindiens ou $\mathcal{A}_S$-normaux.

4.A. Remarques préliminaires.

Les théorèmes 1.2. et 1.3. du chapitre III ont été appliqués au demi-groupe $r(\mathcal{A})$ des a-idéaux entiers S-réguliers. Ils sont bien entendu applicables au demi-groupe $\mathcal{A}$ lui-même ($\mathcal{A}$ étant supposé bilatère). C'est ainsi que le théorème 1.3. du chapitre III, permet, par exemple, d'établir que:

Si le a-système bilatère $\mathcal{A}$ est un demi-groupe de Dedekind,

a) le a-système radical associé à $\mathcal{A}$ (cf. exemple 6.3. du chapitre I) est un demi-groupe de Dedekind idempotent,

b) le a-système-quotient $\mathcal{A}/\bar{A}$, où $\bar{A} \in \mathcal{A}$, (cf. exemple 6.5. chapitre I) est un demi-groupe de Dedekind.

Dans un demi-groupe unitaire D, il existe un d-idéal bilatère maximal et un seul, il est formé par l'ensemble $\bar{M}$ des éléments inversibles ni à droite, ni à gauche. Par suite, si le d-système bilatère sur D est un demi-groupe de Dedekind, les d-idéaux bilatères sont des puissances de $\bar{M}$. Par exemple, D étant le demi-groupe avec élément unité e, engendré par deux générateurs a et b auxquels on a imposé les conditions $a^p = e$ (p entier fixé, $p \geqslant 2$) et $ba = b$, les d-idéaux bilatères sont de la forme $\bar{b}^n = \bar{b}^{\circ n}$ ($n > 0$) et le d-système bilatère est un demi-groupe de Dedekind.

4.B. Premier exemple: matrices.

D étant un demi-groupe satisfaisant aux conditions (I), (2), (3) de l'exemple

6.1. du chapitre I et aux conditions supplémentaires

(4) $(a \,\&\, b) \,\&\, c = a \,\&\, (b \,\&\, c)$, $\forall a,b,c \in D$,

(5) $\exists\, e \in D$ tel que $ea = ae = a$, $\forall a \in D$,

(6) $\exists\, 0 \in D$ tel que $0 \neq e$, $0a = a0 = 0$ et $a \,\&\, 0 = 0 \,\&\, a = a$ $\forall a \in D$,

(D est un demi-anneau avec élément unité et élément zéro), nous désignerons par D_n l'ensemble des éléments de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{, en abrégé } A = \left[a_{ij}\right] \text{, où } a_{ij} \in D, \ \forall i, j \, .$$

et nous définirons dans cet ensemble deux opérations: à $A = \left[a_{ij}\right]$ et à $B = \left[b_{ij}\right]$ l'une associe $A \,\&\, B = \left[c_{ij}\right]$, où $c_{ij} = a_{ij} \,\&\, b_{ij}$, $\forall i, j$, l'autre associe $AB = \left[d_{ij}\right]$, où $d_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} \,\&\, a_{i2}\, b_{2j} \,\&\, \dots \,\&\, a_{in}\, b_{nj}$, $\forall i, j$.

Ces deux lois définissent sur D_n une structure de demi-anneau où les conditions (1) à (6) sont vérifiées. Les éléments du demi-anneau D_n seront appelés "<u>matrices d'ordre n sur D</u>".

$\mathcal{A}$ étant le a-système bilatère sur D dans lequel $\bar{X}$ est la partie stable pour la loi & engendrée par DXD (c'est-à-dire le a-système bilatère défini dans l'exemple 6.1. du chapitre I, ou encore le a-système formé par les idéaux bilatères du demi-anneau D), X_n étant un complexe de D_n, nous désignerons par $E(X_n)$ l'ensemble des éléments des matrices de X_n, par $\overset{\frown}{X}_n$ l'ensemble des matrices dont tous les éléments appartiennent à $\overline{E(X_n)}$. L'application qui à X_n associe $\overset{\frown}{X}_n$ est une a-opération bilatère sur D_n. La vérification des axiomes (A1), (A2), (A3) est immédiate. Celle de (A4) se fait en remarquant que:

a) $E(X_n).D.E(Y_n) \subseteq E(X_n D_n Y_n)$,

b) $\overline{E(X_n)}.\overline{E(Y_n)} \subseteq \overline{E(X_n D_n Y_n)}$,

c) un a-idéal de $\mathcal{A}$ étant stable pour la loi &, les éléments de la matrice AB appartiennent à $\overline{E(X_n D_n Y_n)}$, si $A \in \overset{\frown}{X}_n$ et $B \in \overset{\frown}{Y}_n$.

Nous avons alors $\overset{\frown}{X}_n . \overset{\frown}{Y}_n \subseteq \overset{\frown}{X_n D_n Y_n}$ et (A4) est vérifiée. Le a-système bilatère $\mathcal{M}$ ainsi obtenu est le "<u>a-système bilatère de D_n associé à $\mathcal{A}$</u>".

Tout a-idéal de $\mathcal{A}$ peut s'écrire $\bar{X} = \overline{E(X_n)}$, il suffit de prendre pour X_n l'ensemble des matrices dont tous les éléments appartiennent à X.

L'application

$$f: \quad \bar{X} = \overline{E(X_n)} \in \mathcal{A} \longrightarrow f(\bar{X}) = \overset{\frown}{X}_n \in \mathcal{M}$$

est une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{M}$. De plus $\overset{\frown}{X}_n + \overset{\frown}{Y}_n$ étant l'ensemble des matrices dont tous les éléments appartiennent à $\overline{E(X_n \cup Y_n)} (= \overline{E(X_n)} + \overline{E(Y_n)})$ $f(\bar{X}) + f(\bar{Y})$ est égal à $f(\bar{X} + \bar{Y})$. D'autre part $\overset{\frown}{X}_n \circ \overset{\frown}{Y}_n$ est l'ensemble des matrices dont tous les éléments appartiennent à $\overline{E(X_n D_n Y_n)}$, autrement dit à $\overline{E(X_n)} \circ \overline{E(Y_n)}$, car

$$\overline{E(X_n D_n Y_n)} \subseteq \overline{E(X_n).D.E(Y_n)} = \overline{\overline{E(X_n)}.\overline{E(Y_n)}} \subseteq \overline{E(X_n D_n Y_n)} ,$$

$f(\bar{X} \circ \bar{Y})$ est égal à $f(\bar{X}) \circ f(\bar{Y})$. Ainsi f est un isomorphisme du demi-anneau $\mathcal{A}$ sur le demi-anneau $\mathcal{M}$. Il en résulte que, si l'ensemble des a-idéaux non nuls de $\mathcal{A}$ est un demi-groupe de Dedekind, il en est de même de l'ensemble des a-idéaux non nuls de $\mathcal{M}$.

Remarquons que:

a) ce qui précède est encore valable si $\mathcal{A}$ est remplacé par un a-système bilatère quelconque pouvu que

$$x \in \bar{X} , x' \in \bar{X} , y \in \bar{Y} , y' \in \bar{Y} \Longrightarrow xy \mathbin{\&} x'y' \in \bar{X} \circ \bar{Y} .$$

b) Si D est un anneau unitaire, $\mathcal{A}$ le k-système bilatère sur D, $\mathcal{M}$ est alors le k-système bilatère sur l'anneau D_n.

c) Si D est un demi-groupe unitaire avec zéro, dans lequel ab = 0 implique a = 0 ou b = 0, la loi $x \mathbin{\&} y = y$, si $y \neq 0$, $x \mathbin{\&} y = x$, si $y = 0$, jointe à la multiplication de D, donne à D une structure de demi-anneau où les conditions (I) à (6) sont vérifiées. Les a-idéaux du a-système bilatère $\mathcal{A}$ défini sur D, comme dans l'exemple 6.1. du chapitre I, ne sont autres que les d-idéaux bilatères de D. Par suite, si l'ensemble des d-idéaux bilatères non nuls de D est un demi-groupe de Dedekind, la construction précédente fournit, pour chaque valeur de n, un demi-anneau et un a-système sur ce demi-anneau dont l'ensemble des a-idéaux non nuls est un demi-groupe de Dedekind. La construction peut, par exemple, se faire à partir du demi-groupe défini à la fin du paragraphe 4.A. après adjonction à D d'un élément zéro.

Revenons au cas où D vérifie (I) à (6), $\mathcal{A}$ étant le a-système bilatère formé par les a-idéaux bilatères du demi-anneau D. Si S est un complexe de D vérifiant (SI), (S2),(S3) et (S4), S et $\mathcal{A}$ vérifient alors (S5) et (S6). Soit S_n l'ensemble des matrices "scalaires" $[a_{ij}]$, où $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = s$ avec $s \in S$. Les six conditions (S) sont satisfaites par le a-système $\mathcal{M}$ et le complexe S_n, ce qui permet de définir un a-système S_n-fractionnaire sur D_n. L'application f précédente est alors un isomorphisme du demi-anneau $r(\mathcal{A})$ (resp. $r(\mathcal{A}_S)$) sur le demi-anneau $r(\mathcal{M})$ (resp. $r(\mathcal{M}_{S_n})$), de sorte que si D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien ou $\mathcal{A}_S$-normal, D_n est $\mathcal{M}_{S_n}$-dedekindien ou $\mathcal{M}_{S_n}$ - normal.

Plaçons nous dans le cas particulier où D est un anneau intègre. L'hypothèse (H) est alors vérifiée dans D par le complexe $S = D - \{0\}$ et le k-système $\mathcal{A}$. De plus si $\mathcal{P}_n$ est un k-idéal premier non nul de D_n, distinct de D_n, $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des matrices dont tous les éléments appartiennent à un k-idéal premier non nul, $\bar{P}$, de D, distinct de D. Si $T_n = S_n - \mathcal{P}_n$, $U_n = S_n.T_n^{-1}$, si $\mathcal{B}$ est le k-système bilatère sur $D_n(T_n)$, $D_n(T_n)$ est alors un anneau U_n-local (cf théorème 3.6.). Si D est un anneau de Krull et si $D_n(T_n)$ est noethérien, $D_n(T_n)$ est alors $\mathcal{O}_{U_n}$-dedekindien et le groupe formé par les k-idéaux U_n-réguliers de $D_n(T_n)$ est un groupe cyclique admettant $P_n.D_n(T_n)$ comme générateur (cf. théorème 3.9.) car l'hypothèse (H) est vérifiée dans D_n par le complexe S_n et la a-système bilatère $\mathcal{M}$.

4.C. Deuxième exemple.

D étant un demi-groupe avec élément unité e, $\mathcal{A}$ un a-système bilatère sur D, de caractère fini, et S un complexe de D tels que les conditions (S) soient satisfaites. Si

a) $\forall\ \bar{X} \in r(\mathcal{A}),\ \exists\, x \in D$ tel que $\bar{X} = Dx = xD$,

b) $Dx = xD$ implique $\bar{x} = Dx$,

D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien.

$r(\mathcal{A})$ vérifie la condition de chaîne ascendante car $\mathcal{A}$ est de caractère fini et tout a-idéal S-régulier admet un générateur réduit à un seul élément (raisonnement identique à celui de la proposition 4.6. du chapitre I). De plus, la condition (Φ) à droite est satisfaite: si $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont deux a-idéaux S-réguliers liés par $\bar{A} \subsetneq \bar{B} \subset D$, il existe a et b tels que $\bar{A} = Da = aD$, $\bar{B} = Db = bD$. a est donc de la forme a = bc, et bDc = bcD. $\bar{B}$ étant S-régulier contient un élément de S de la forme db. L'égalité dbDc = dbcD implique, db étant simplifiable, Dc = cD, d'où $\bar{c} = Dc = cD$ Nous avons donc

$$\bar{B} \circ \bar{c} = \overline{DbDc} = \overline{Dbc} = \overline{Da} = \bar{A} \qquad (1)$$

Le a-idéal $\bar{c}$ est S-régulier car $\bar{A}$ l'étant $\bar{A}$ contient un élément de S qui est de la forme fa, et $fbc \in S \cap \bar{c}$. D'autre part (1) montre que $\bar{A} \subseteq \bar{c}$. Si l'égalité a lieu il existe $g \in D$, tel que c = ga = gbc. Or, $\bar{c}$ étant S-régulier, il existe $h \in D$, tel que $ch \in S$ et ch = gbch donne gb = e car ch est simplifiable. D'où $D = Dgb \subseteq Db = \bar{B}$, en contradiction avec l'hypothèse $\bar{B} \subset D$. Ainsi $\bar{A}$ est strictement contenu dans $\bar{c}$ et (Φ) à droite est vérifiée. Le théorème 2.3. du chapitre III montre alors que D est $\mathcal{A}_S$-dedekindien.

Premiere application: En prenant pour D le demi-groupe multiplicatif d'un anneau principal, pour S l'ensemble des éléments non nuls de D, pour $\mathcal{A}$ le k-système, on retrouve le résultat connu: un anneau principal est un anneau de Dedekind.

Deuxième application: Soit D l'ensemble des quaternions de la forme a + bi + cj + dk, où a, b, c, d sont tous quatre des entiers rationnels, ou sont tous quatre des fractions irréductibles, non nulles, de dénominateur égal à 2. L'addition et la multiplication des quaternions définissent sur D une structure d'anneau. Soit $\mathcal{A}$ le k-système bilatère défini sur D et soit S l'ensemble des quaternions de la forme a, où a est un entier rationnel non nul. $\mathcal{A}$ est de caractère fini et les conditions (S) sont satisfaites. De plus, pour tout k-idéal à gauche $\tilde{A}$, il existe un quaternion $q \in D$ tel que $\tilde{A} = Dq$ (cf. [16] , p. 307, théorème 374). On en déduit que pour tout k-idéal bilatère $\bar{A}$ de D, il existe un quaternion q $\in$ D tel que $\bar{A} = Dq = qD$, et la condition a) est satisfaite. Il en est de même de la condition b). Le demi-groupe multiplicatif de D est donc $\mathcal{A}_S$-dedekindien. Dans cet exemple tout k-idéal bilatère entier non nul est S-régulier, ce qui permet d'énoncer le résultat obtenu:

L'ensemble des idéaux bilatères non nuls de l'anneau formé par les quaternions a + bi + cj + dk, où a, b, c, d sont tous quatre des entiers rationnels ou tous quatre des fractions irréductibles de dénominateur 2, non nulles, est un demi-groupe de Dedekind (et un semi-groupe).

4.D. Contre-exemple: quaternions.

Soit D l'anneau des quaternions de la forme a + bi + cj + dk, où a, b, c, d sont des entiers rationnels. On peut montrer facilement que l'ensemble des quaternions s de D tels que Ds = sD est l'ensemble T des quaternions de la forme u + vi + wj + xk, où u, v, w, x satisfont à l'une des conditions

a) $|u| = |v| = |w| = |x| \neq 0$

b) deux des quatre entiers u, v, w, x sont nuls, les deux autres ayant même valeur absolue différente de zéro,

c) trois seulement des quatre entiers u,v,w,x sont nuls.

$\mathcal{A}$ étant le k-système bilatère sur D, S l'un des ensembles

$S = T$,

$S = \{q \in D \mid q = a \ , \text{ a entier non nul}\}$,

$S = \{q \in D \mid q = a \text{ ou } ai \ , \text{ a entier non nul}\}$,

$S = \{q \in D \mid q = a \text{ ou } aj \ , \text{ a entier non nul}\}$,

$S = \{q \in D \mid q = a \text{ ou } ak \ , \text{ a entier non nul}\}$,

$S = \{q \in D \mid q = a, \text{ ou } ai, \text{ ou } aj, \text{ ou } ak, \ \text{ a entier non nul}\}$,

les six conditions (S) sont satisfaites, et dans les a-systèmes S-fractionnaires obtenus tout k-idéal S-fractionnaire non nul est S-régulier.

S étant l'un quelconque des ensembles précédents, D n'est pas $\mathcal{A}_S$-dedekindien, ni même $\mathcal{A}_S$-normal, car $r(\mathcal{A}_S)$ n'est pas intégralement fermé. Si $s = 2n$ $(n > 0)$ et si $\overline{A'} = \overline{\{n(1+i+j+k), n(1-i-j-k)\}}$, le k-idéal S-fractionnaire $\hat{A} = \overline{A'}\, s^{-1}$, qui contient strictement D, est idempotent, ce qui montre bien que $r(\mathcal{A}_S)$ n'est pas intégralement fermé. L'ensemble des idéaux bilatères non nuls de l'anneau D n'est donc pas un semi-groupe (cf. [13] , p. 161, théorème 7), ce qui peut se voir directement en remarquant que $\overline{A'} \circ \overline{A'} = \bar{s} \circ \overline{A'}$, bien que $\overline{A'} \neq \bar{s}$, $\overline{A'}$ étant le k-idéal précédent et s étant toujours l'entier 2n. On peut aussi montrer que le demi-groupe $r(\mathcal{A}_S)$ est équirésidué, la démonstration peut se faire, grâce à la remarque 1.1c, en montrant que $\hat{X} \circ \hat{Y} \subsetneq D$ implique $\hat{Y} \circ \hat{X} \subsetneq D$.

En remplaçant $\mathcal{A}$ par le d-système bilatère et en prenant pour S l'un des complexes précédents, le demi-groupe multiplicatif de D n'est pas $\mathcal{A}_S$-dedekindien, ni même $\mathcal{A}_S$-normal (même raisonnement).

Signalons qu'il existe des complexes S, vérifiant les conditions (S), autres que ceux que nous avons indiqués, par exemple, l'ensemble des quaternions de la forme a, où a est un entier non nul non multiple d'un nombre premier fixé. Dans cet exemple, tout k-idéal S-fractionnaire non nul n'est pas nécessairement S-régulier.

Reprenons pour $\mathcal{A}$ le k-système bilatère et pour S l'ensemble des quaternions de la forme a, où a est un entier rationnel non nul. L'hypothèse (H) n'est pas vérifiée, mais par contre on peut s'assurer que D est complètement intégralement $\mathcal{A}_S$-clos dans D(S). Puisque $r(\mathcal{A}_S)/\mathcal{a}$ n'est pas un groupe, D n'étant pas $\mathcal{A}_S$-normal, ceci montre que dans le théorème 3.1., a) n'implique pas nécessairement b) si (H) n'est pas satisfaite.

4.E. Troisième exemple: l'anneau de Birkhoff-Witt.

Soit D l'anneau de Birkhoff-Witt formé par l'algèbre obtenue en adjoignant à un corps commutatif K les deux générateurs X et Y, non permutables, liés par XY-YX=X. $\mathcal{A}$ étant le k-système bilatère défini sur D, l'ensemble S des éléments de D de la forme X^p (p entier strictement positif) satisfait aux conditions (S).

Tout k-idéal entier $\bar{A}$, contenant un élément non nul de la forme $\sum_n a_n X^n$ ($a_n \in K$, $n > 0$) est S-régulier, car, si $\bar{A} \neq D$, un élément non nul de $\bar{A}$ de la forme $\sum_i a_i X^i$ ($a_i \in K$, $i > 0$) dont le degré, quand on le considère comme "polynôme" en X, est minimum est de la forme $a_n X^n$ ($n > 0$). On le démontre en utilisant le fait que, si $P = \sum_{i=1}^{m} a_i X^i$ appartient à $\bar{A}$, il en est de même de $Q = PY - (Y + m)P$.

Tout k-idéal entier non nul, $\bar{A}$, est S-régulier. Pour l'établir on montre que, P étant un élément non nul de $\bar{A}$, de degré n par rapport à Y quand il est écrit sous la forme $\sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j$, l'élément XP - PX, qui appartient aussi à $\bar{A}$, est non nul et qu'il est de degré par rapport à Y strictement inférieur à n quand il est écrit sous la forme précédente.

Il en résulte que tout k-idéal S-fractionnaire non nul est S-régulier. D'autre part, l'ensemble des k-idéaux S-réguliers est intégralement fermé. Pour l'établir, il suffit de montrer que cet ensemble ne contient pas d'élément idempotent contenant strictement D. Soit $\hat{A} = \overline{A'}\, s^{-1} = s^{-1}\, \overline{A''}$ ($s = X^n$, $n > 0$) un k-idéal S-régulier idempotent contenant D. Ces hypothèses impliquent $sD \subseteq \overline{A''}$, puis

$$s\,\overline{A'} = sD\,\overline{A'} \subseteq \overline{A''}.\overline{A'} \subseteq \overline{A''}\circ\overline{A'} = \widehat{sA}\circ\widehat{As} = s(\hat{A}\circ\hat{A})s = s\,\hat{A}\,s = s\,\overline{A'} ,$$

donc $\overline{A''}.\overline{A'} = s\,\overline{A'}$. Soit p le plus grand entier positif ou nul tel que tout $a' \in \overline{A'}$ puisse s'écrire sous la forme $a' = X^p \left[\sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j\right]$ ($a_{ij} \in K$). Les relations

$X^mY^n = (Y+m)^nX^m$ et $Y^nX^m = X^m(Y-m)^n$ montrent que p est aussi le plus grand entier positif ou nul tel que tout $a' \in \overline{A'}$ puisse s'écrire sous la forme
$a' = \left[\sum_{i,j} b_{ij}X^iY^j\right]X^p \quad (b_{ij} \in K)$, ou encore le plus grand entier positif ou nul tel que tout $a'' \in \overline{A''}$ puisse s'écrire sous la forme
$a'' = X^p\left[\sum_{i,j} c_{ij}\, X^i\, Y^j\right] \quad (c_{ij} \in K)$, ou sous la forme
$a'' = \left[\sum_{i,j} d_{ij}\, X^i\, Y^j\right]X^p \quad (d_{ij} \in K)$. D'autre part le produit de deux éléments de D - S est un élément de D - S. La relation $\overline{A''}.\overline{A'} = s\,\overline{A'}$ montre donc que $2p = p + n$, d'où $p = n$. Ainsi $\overline{A'}$ est de la forme $\overline{A'} = s\,B$. La condition (S5) montre que B est un k-idéal. L'inclusion $D \subsetneq \hat{A}$ donne alors $sD = Ds \subseteq \bar{A}' = s\,B$, d'où $D \subseteq B$, et par suite $D = B$, donc $\hat{A} = \bar{A}'\,s^{-1} = sDs^{-1} = D.r(\mathcal{A}_S)$ est bien intégralement fermé.

Enfin l'anneau de Birkhoff-Witt est noethérien à gauche et à droite $r(\mathcal{A})/\mathfrak{a}$ vérifie donc la condition de chaîne ascendante. Le théorème 2.2. montre alors que le demi-groupe multiplicatif de l'anneau de Birkhoff-Witt considéré est $\mathcal{A}_S$-normal.

Le demi-groupe multiplicatif de D n'est pas $\mathcal{A}_S$-dedekindien, car $\bar{X}$ est un k-idéal premier (on établit en montrant que les relations $A \notin \bar{X}$, $B \notin \bar{X}$, $ADB \subseteq \bar{X}$, où $A, B \in D$, sont incompatibles) non maximal puisque strictement contenu dans le k-idéal S-régulier $\bar{Y}$ distinct de D.

Si P est un k-idéal S-régulier premier, S - P est vide puisque S - P est un demi-groupe quand il est non vide, de sorte que P contient X. $\bar{X}$ est donc minimum dans l'ensemble des k-idéaux S-réguliers premiers et par suite $\bar{X}$ est le seul k-idéal S-régulier premier non congru à D modulo l'équivalence d'Artin. Le groupe $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est donc un groupe cyclique admettant la classe d'équivalence de $\bar{X}$ comme générateur.

Nous avons signalé (cf. remarque 3.3.a) que l'hypothèse (H) n'était pas vérifiée dans D par S et $\mathcal{A}$. Néanmoins les propriétés a) et b) de la proposition 3.1. ou de son corollaire, sont équivalentes. Soient $\hat{A}$ et $\hat{B}$ deux k-idéaux S-réguliers tels que $\hat{A} \subseteq \hat{z} \Longleftrightarrow \hat{B} \subseteq \hat{z}$, où z est un élément S-régulier de D(S), $z = X^r$, avec r entier rationnel non nul, ces k-idéaux sont tels que

$$D:\hat{z} \subseteq D:\hat{A} \Longleftrightarrow D:\hat{z} \subseteq D:\hat{B}\ .$$

Comme $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont congrus modulo $\mathfrak{a}$ à des k-idéaux de la forme $\widehat{X^p}$ ou $\widehat{X^q}$, puisque $r(\mathcal{A}_S)/\mathfrak{a}$ est un groupe cyclique admettant la classe de $\bar{X}$ comme générateur, on en déduit $\hat{A} \equiv \hat{B}\ (\mathfrak{a})$.

Soit S_p l'ensemble des éléments de D de la forme X^{np}, où p est un entier fixé strictement supérieur à 1, n un entier strictement positif. Les conditions (S) sont satisfaites par S_p et par le k-système bilatère $\mathcal{A}$ sur D. Comme $S_p \subset S$, il existe un homomorphisme (unique) f de $D(S_p)$ dans $D(S)$ tel que $g = f \circ h$, g et h étant les homomorphismes canoniques de D dans $D(S)$ et $D(S_p)$. Cet homomorphisme est ici injectif et surjectif, il constitue donc un isomorphisme de $D(S_p)$ sur $D(S)$ et nous pourrons identifier $D(S)$ et $D(S_p)$. Tout k-idéal S-fractionnaire (resp. S-régulier) est S_p-fractionnaire (resp. S_p-régulier) et réciproquement. Le demi-groupe multiplicatif de D est donc $\mathcal{A}$ S_p-normal.

L'hypothèse (H) n'est toujours pas vérifiée dans D par S_p et le k-système bilatère sur D. Mais les propriétés a) et b) de la proposition 3.1. ou de son corollaire, ne sont plus équivalentes. Nous avons

$$\widehat{X^p} \subseteq \hat{z} \Longleftrightarrow \widehat{X^{p+1}} \subseteq \hat{z} \quad ,$$

z étant un élément S_p-régulier de $D(S_p)$, c'est-à-dire de la forme X^{np}, n étant un entier rationnel non nul, bien que

$$D : \widehat{X^p} = \widehat{X^{-p}} \neq \widehat{X^{-(p+1)}} = D : \widehat{X^{p+1}} .$$

BIBLIOGRAPHIE

-=-=-

[1] , ALMEIDA-COSTA (A.). Sur la théorie générale des demi-anneaux. Séminaire DUBREIL, 1960-61, exposé n°24.

[2] , ASANO(K.) et MURATA(T.). Arithmetical ideal theory in semi-groups.J. Inst. Polytechnics, Osaka City Univ., vol 4, série A, 1953, p.9-33.

[3] , AUBERT(K.E.). Sur la théorie des x-idéaux. Séminaire DUBREIL, 1960-61, Exposé n° 6.

[4] , AUBERT(K.E.). Theory of x-ideals. Acta mathematica, vol 107, 1962, p.1-52.

[5] , BARBILIAN(D.). Teoria aritmetica a idealelor (in inele necomutative). Editura academiei republicii populare romine, 1956.

[6] , BIRKHOFF(G.). Lattice-ordered groups. Annals math, 43, 1942, p.298-331.

[7] , BOURBAKI(N.).Algèbre commutative, chapitre 5, Entiers. Hermann, 1964.

[8] , BOURBAKI(N.). Algèbre commutative, chap. 7, diviseurs. Hermann, 1965.

[9] , BUCUR(I.). Sur le théorème de décomposition de Lasker-Noether dans les anneaux subcommutatifs. Rev. Math. Pures Appliq. (Bucarest), 8, 1963 p. 565-568.

[10] , CLIFFORD(A.H.). Partially ordered Abelian groups. Annals Math., 41, 1940 p. 465-473.

[11] , COHEN(I.S.). Commutative rings with restricted minimum condition. Duke mathematical Journal, 17, 1950, p. 27-42.

[12] , DUBREIL(P.) Algèbre. Gauthiers-Villars, 1954, Cahiers Scient.XX.

[13] , Mme M.L. DUBREIL-JACOTIN, L.LESIEUR, R.CROISOT. Leçons sur la théorie des treillis, des structures algèbriques ordonnés et des treillis géométriques. Gauthier-Villars, 1953, Cahiers Scient. XXI.

[14] , FUCHS(L.). Partially ordered algebraic systems. Pergamon Press; 1963.

[15] , GUERINDON(J.). Propriétés d'irréductibilité dans les modules, théorie multiplicative, S-normalité. Bull. Soc. Math. de Fr., 85, 1957, p. 459-522.

[16] , HARDY(G.H.) et WRIGHT(E.M.). An introduction to the theory of Numbers. Oxford. Clarendon Press, 1954.

[17] , JAFFARD(P.). Les systèmes d'idéaux. Dunod, 1960.

[18] , LEFEBVRE(P.). Sur la structure des demi-groupes idempotents. Séminaire DUBREIL, 1959-60, exposé n° 14.

[19] , LESIEUR(L.) et CROISOT(R.). Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif. I. Colloque d'al-

gèbre supérieure de Bruxelles, 1956.

[20] , LESIEUR(L.) et CROISOT(R.). Algèbre noethérienne non commutative. Gauthier-Villars, 1963, Mém. Sciences Math. CLIV.

[21] , LORENZEN(P.). Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie. Math. Seit., 45, 1939, p.533-553.

[22] , MAC COY(N.H.). Prime ideals in general rings. Amer. J. Math., 71, 1948, p. 823-833.

[23] , MAURY(G.). La condition "intégralement clos" dans quelques structures algèbriques. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 78, 1961, p.31-100.

[24] , MOLINARO(I.). Demi-groupes résidutufs. J. Math. Pures Appliq. , t.XXXIX, p. 319-356, t.XL, p. 43-110.

[25] , QUERRE(J.). Equivalence de fermeture dans un demi-groupe résidutif. Séminaire DUBREIL, 1961-62, exposé n° 3.

[26] , TETSUYA(K.), HASHIMOTO(T.), AKAZAWA(T.), SHIBATA(R.), INUI(T.), TAMURA(T.). All semigroups of order at most 5. Journ. of Gakugei, Tokushima Univ., Vol VI, 1955, p. 19-39.

[27] , VAN DER WAERDEN(B.L.). Modern algebra. Ungar, 1950.

-=-=-=-

Joseph FLOCH, Maître-Imprimeur à Mayenne - 6-9-68 - n° 3076