MÉMOIRES DE LA S. M. F.

A. THOMAS

Dimension de Hausdorff

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 161-167
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__161_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France
Mémoire 37, 1974, p. 161-167

DIMENSION DE HAUSDORFF

par

A. THOMAS

(Travail fait en commun avec J.M. DUMONT)

-:-:-:-

Rappel de la définition.

E étant une partie d'un espace métrique, à $s \geq 0$ et $\epsilon > 0$ on associe $m_s^\epsilon(E)$, borne inférieure des $\sum_i d(\Omega_i)^s$ ($d(\Omega_i)$ = diamètre de Ω_i), étendue à tous les recouvrements ouverts $(\Omega_i)_i$ de E vérifiant $d(\Omega_i) \leq \epsilon$ pour tout i, et on définit la s-mesure de Hausdorff m_s par

$$m_s(E) = \sup_{\epsilon>0} m_s^\epsilon(E) = \lim_{\epsilon\to 0} m_s^\epsilon(E) \quad ;$$

la dimension de Hausdorff de E est

$$H - \dim E = \inf\{s/ms(E) = 0\} = \sup\{s/m_s(E) = +\infty\} \ .$$

Si l'espace topologique est un intervalle de $\mathbb{R}$, m_1 est la mesure extérieure de Lebesgue, donc $H - \dim E \leq 1$ pour tout E.

I. - Calcul de la dimension de Hausdorff d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Soit $E \subset \mathbb{R}$, soit $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de recouvrements de E par des intervalles quelconques. On suppose :

1°) que chaque recouvrement est disjoint ;

2°) que chaque intervalle de $\mathcal{J}_n$ est inclus dans un intervalle de $\mathcal{J}_{n-1}$;

3°) que si d_n est le diamètre du plus grand intervalle de $\mathcal{J}_n$, $d_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

On en déduit que, pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, x appartient à un intervalle unique de $\mathcal{J}_n$, qu'on note $I_n(x)$. On note $E(\mathcal{J})$ l'intersection des $\mathcal{J}_n$, qui contient E.

THEOREME I. -

(1) Soit m une mesure extérieure sur $E(\mathcal{J})$, si $m(E) \neq 0$ la dimension de E est supérieure ou égale à tout s tel que

$$\forall x \in E \ , \quad \liminf_{n\to+\infty} \frac{d(I_n(x))^s}{m(I_n(x))}\left(\frac{d(I_n(x))}{d(I_{n-1}(x))}\right)^{1-s} > 0 \ .$$

(2) Soit $\tilde{m}$ une mesure intérieure finie sur $E(\mathcal{J})$, la dimension de E est inférieure ou égale à tout s tel que

$$\forall x \in E \ , \quad \liminf_{n\to+\infty} \frac{d(I_n(x))^s}{m(I_n(x))} < +\infty \ .$$

Application. - Etant donné $p \in \,]0,1[$, soit E_p l'ensemble des $x \in [0,1[$ tels que dans leur développement binaire $(\varepsilon_n)_n$, la densité de $\varepsilon_n = 0$ soit égale à p . On prend pour $\mathcal{J}_n$ l'ensemble des $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ pour $k \in \{0,1,\dots,2^n-1\}$ d'où $E(\mathcal{J}) = [0,1[$; on munit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (donc $[0,1[)$ de la probabilité P produit des probabilités sur $\{0,1\}$ définies par $\pi(0) = p$ et $\pi(1) = 1-p$ (P se prolonge évidemment en mesure intérieure et en mesure extérieure) ; on sait alors que $P((\varepsilon_n)_n$ équiréparti pour $\pi) = 1$, c'est-à-dire $P(E_p) = 1$, on peut donc appliquer le théorème qui donne

$$H - \dim E_p = \frac{p \log p + (1-p)\log(1-p)}{\log 2} \ .$$

II. - 1er cas particulier.

Etant donné une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers, avec $g_n \geq 1$, et $g_n \neq 1$ pour une infinité de n , soit ε l'application de $[0,1[$ dans

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \{0,1,\dots,g_n-1\} = \prod_{n=0}^{+\infty} G_n$$

qui à x associe son développement en base $(g_n)_n$, c'est-à-dire l'unique suite $(\varepsilon_n)_n \in \prod_n G_n$ telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{g_0 g_1 \dots g_n}$.

On va considérer des ensembles E caractérisés par le développement en base $(g_n)_n$ de leurs éléments.

Le théorème I donne le résultat suivant :

THEOREME I'. - Soit $A_n \subset G_n$ de cardinal a_n, soit $E \subset [0,1[$ tel que $\varepsilon(E)$ soit inclus dans $\prod_{n=0}^{+\infty} A_n$ et n'y soit pas négligeable pour la probabilité produit des probabilités uniformes sur A_n ; alors, si $\frac{g_n}{a_n}$ est borné, la dimension de E est égale à $\inf\{s/\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_o\ldots a_n}{(g_o\ldots g_n)^s} < +\infty\}$.

Application aux nombres non simplement normaux.

DEFINITIONS. - $(\varepsilon_n)_n \in \prod_{n=0}^{+\infty} G_n$ est dit équiréparti si pour tout I intervalle de $[0,1[$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g_n d(I\cap[\frac{\varepsilon_n}{g_n},\frac{\varepsilon_n+1}{g_n}[) \to d(I) \quad \text{quand} \quad n\to+\infty \;;$$

$x \in [0,1[$ est dit simplement normal si son développement en base $(g_n)_n$ est équiréparti.

On sait que l'ensemble des non simplement normaux est de mesure nulle, on va montrer qu'il est de dimension 1, sauf si l'ensemble $\{n\in\mathbb{N}/g_n\neq 1\}$ est de densité nulle : dans ce cas tout nombre est simplement normal.

On indexe $\{n\in\mathbb{N}/g_n\neq 1\}$ par une suite strictement croissante $(n_k)_k$; on se fixe $N\geq 1$ entier et $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$; soit J l'ensemble des n_{kN} pour $k\in\mathbb{N}$ et K son complémentaire dans $\mathbb{N}$, on applique le théorème à : $A_n = G_n$ pour $n\in K$ et $A_n = \{0,1,\ldots,[\alpha g_n]-1\}$ pour $n\in J$; et à $E_N = \{x\in[0,1[/(\varepsilon_n)_n\in\prod_n A_n$ et $(\varepsilon_n)_{n\in K}$ équiréparti$\}$, ce qui donne :

$$H-\dim E_N \geq 1+\frac{1}{N}\frac{\log(\alpha-\frac{1}{2})}{\log 2} \;;$$

or on voit facilement que l'ensemble E des non simplement normaux contient E_N pour tout N, d'où $H-\dim E = 1$.

III. - Extension du 1er cas particulier.

Soit $(g_n)_n$ une suite de réels au moins égaux à 2, on appelle développement en base $(g_n)_n$ la suite d'entiers : $\varepsilon_n = [\alpha_n]$, où α_n est une suite de réels définie par récurrence :

$\frac{\alpha_o}{g_o}$ = plus grand multiple de $\frac{1}{g_o}$ qui soit $\leq x$,

$$\frac{\alpha_o}{g_o} + \frac{\alpha_1}{g_o g_1} = \text{plus grand multiple de } \frac{1}{g_o g_1} \text{ qui soit} \le x \ ,$$

....

$$\frac{\alpha_o}{g_o} + \ldots + \frac{\alpha_n}{g_o \ldots g_n} = \text{plus grand multiple de } \frac{1}{g_o \ldots g_n} \text{ qui soit} \le x \ ,$$

.... ;

on a alors un tthéorème semblable au théorème I' :

THEOREME I". - Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de $\mathbb{Z}$, avec $A_n \subset [0, g_n - 2]$ pour $n \ge 1$, alors si $\frac{g_n}{a_n}$ est borné la dimension de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ à développement dans $\prod_{n=0}^{+\infty} A_n$ est égale à

$$\inf\{s / \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_1 \ldots a_n}{(g_1 \ldots g_n)^s} < +\infty\} \ .$$

Application aux nombres non normaux.

LEMME. - Soit $(v_n)_n$ une suite de réels strictement positifs et $\lambda = \inf_v \frac{v_n}{v_{n-1}}$, l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la suite xv_n soit contenue dans un intervalle $[0, \alpha[$ modulo 1 ($\alpha < 1$) est de dimension au moins $\frac{\log(\alpha\lambda - \alpha - 1)}{\log \lambda}$ (si $\alpha\lambda - \alpha - 1 > 0$) .

On pose $g_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}$, $A_o = \mathbb{Z}$ et $A_n = \mathbb{Z} \cap [0, \alpha g_n - \alpha - 1]$ pour $n \ne 0$; les x à développement dans $\prod_{n=0}^{+\infty} A_n$ vérifient alors $xv_n \in [0, \alpha[$ modulo 1 pour tout n, et sont de dimension au moins $\frac{\log(\alpha\lambda - \alpha - 1)}{\log \lambda}$ d'après le théorème I" .

THEOREME II. - Soit $(u_n)_n$ une suite de réels vérifiant $\liminf_{n\to+\infty} \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} > 1$ (ou telle qu'il existe une sous-suite qui ne soit pas de densité nulle et vérifie cette condition) ; alors l'ensemble des nombres non normaux pour la suite $(u_n)_n$ est de dimension 1 .

On suppose pour simplifier que $\frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} \ge \rho > 1$ pour tout n ; on fixe $N \ge 1$ entier et on applique le lemme à $v_k = |u_{kN}|$ et $\alpha = \frac{1}{N^2}$; or les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\forall k$, $xv_k \in [0, \frac{1}{N^2}[$ mod 1 ne sont pas normaux pour $(u_n)_n$, puisque l'ensemble des n tels que $xu_n \in]-\frac{1}{N^2}, \frac{1}{N^2}[$ mod 1 contient alors un ensemble de densité $\frac{1}{N}$; l'ensemble des non normaux est donc de dimension au moins

$$\frac{\log(\frac{1}{N^2}\rho^N - \frac{1}{N^2} - 1)}{\log \rho^N}$$ pour tout N , ce qui tend vers 1 quand $N \to +\infty$.

IV. - <u>2e cas particulier</u>.

Soit $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_n)_n$ une suite d'ensembles d'intervalles vérifiant les conditions 1°, 2°, 3° de la 1ère partie.

Etant donné I intervalle d'un des $\mathcal{J}_n$, soit n minimal tel que $I \in \mathcal{J}_n$, si $n \neq 1$, on note $p(I)$ l'unique intervalle de $\mathcal{J}_{n-1}$ contenant I .

THEOREME I'''. - <u>Si</u> $\frac{d(p(I))}{d(I)}$ <u>est borné pour</u> $n \in \mathbb{N}$ <u>et</u> $I \in \mathcal{J}_n$, <u>la dimension de</u> $E(\mathcal{J}) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{I\in\mathcal{J}_n} I$ <u>est comprise entre</u>

$$\sup\{s/\forall n, \forall I\in\mathcal{J}_n \ , \ d(I)^s \le \sum_{p(I')=I} d(I')^s\}$$

<u>et</u>

$$\inf\{s/\forall n, \forall I\in\mathcal{J}_n \ , \ d(I)^s \ge \sum_{p(I')=I} d(I')^s\} \ .$$

La majoration est évidente ; pour la minoration on utilise le lemme suivant:

LEMME. - <u>Etant donné une application</u> m <u>de l'ensemble des intervalles des</u> $\mathcal{J}_n$ <u>(considérés comme intervalles de</u> $E(\mathcal{J})$<u>)</u> <u>dans</u> $\mathbb{R}^+$, m <u>se prolonge en une mesure extérieure sur</u> $E(\mathcal{J})$ <u>si les deux conditions suivantes sont vérifiées</u> :

- <u>pour tout</u> $n\in\mathbb{N}$ <u>et</u> $I\in\mathcal{J}_n$, $m(I)$ <u>est compris entre</u> $\sup_{p(I')=I} m(I')$ <u>et</u> $\sum_{p(I')=I} m(I')$;
- $\sup_{I\in\mathcal{J}_n} m(I) \to 0$ <u>quand</u> $n \to +\infty$.

En particulier, étant donné $s \ge 0$, m défini par

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall I \in \mathcal{J}_n \ , \ m(I) = d(I)^s$$

se prolonge en mesure extérieure si (et seulement si)

$$d(I)^s \le \sum_{p(I')=I} d(I')^s$$

et dans ce cas, d'après le théorème I , la dimension de $E(\mathcal{J})$ est au moins égale à s si $\frac{d(p(I))}{d(I)}$ est borné.

Application à l'équirépartition de $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On sait que pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}$ la suite θ^n est équirépartie mod 1.

THEOREME III. - L'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que θ^n ne soit pas équiréparti mod 1 est de dimension 1.

On fixe $\epsilon > 0$. On peut trouver des suites finies d'entiers :

$$N_{1,1}\ ,\ (N_{2,1},N_{2,2},\dots,N_{2,\lambda})\ ,\ \dots,\ (N_{k,1},N_{k,2},\dots,N_{k,\lambda^{k-1}})\ ,\ \dots$$

avec $\lambda = [N_{1,1}\epsilon]$ telles que chaque $[N_{k,j}^{1/k},(N_{k,j}+\epsilon)^{1/k}[$ contienne les segments $[N_{k+1,i}^{1/k+1},(N_{k+1,i}+\epsilon)^{1/k+1}[$ pour $\lambda(j-1)+1 \le i \le \lambda j$. Soit alors $\mathcal{J}_k$ l'ensemble des $[N_{k,j}^{1/k},(N_{k,j}+\epsilon)^{1/k}[$ pour $1 \le j \le \lambda^{k-1}$; d'après le théorème I''', la dimension de $E(\mathcal{J})$ est au moins égale à $\frac{\log \lambda}{\log(N_1+\epsilon)}$; or les éléments $\theta \in E(\mathcal{J})$ sont tels que pour tout n, $\theta^n \in [0,\epsilon[$ modulo 1 ; donc $E(\mathcal{J}) \subset E$ et $H-\dim E \ge \frac{\log \lambda}{\log(N_1+\epsilon)} \ge \frac{\log(N_{1,1}\epsilon-1)}{\log(N_{1,1}+\epsilon)}$ et comme on peut choisir $N_{1,1}$ arbitrairement grand, $H-\dim E = 1$.

Application aux fractions continues :

THEOREME IV. - L'ensemble E des $x \in]0,1[$ tels que la suite des coefficients a_n du développement en fraction continue soit bornée est de dimension 1.

LEMME. - Soit $M \ge 1$ entier, la dimension de $E_M = \{x\in]0,1[/\forall n,\ a_n \le M\}$ est comprise entre

$$\sup\{s/\forall\alpha \in [\tfrac{1}{M+1},1]\ ,\ \sum_{a=1}^{M} f_a(\alpha)^s \ge 1\}$$

et

$$\inf\{s/\forall\alpha \in [\tfrac{1}{M+1},1]\ ,\ \sum_{a=1}^{M} f_a(\alpha)^s \le 1\}$$

avec $f_a(\alpha) = \frac{\alpha+1}{(\alpha+a)(\alpha+a+1)}$.

On obtient ce résultat en prenant pour intervalles de $\mathcal{J}_n$ les ensembles $I_\sigma = \{x\in]0,1[/(a_1,\dots,a_n)=\sigma\}$ pour $\sigma \in \{1,\dots,M\}^n$.

Soit $s \in [0,1[$; on a

$$\sum_{a=1}^{+\infty} f_a(\alpha)^s > f_1(\alpha)^s + \sum_{a=2}^{+\infty} f_a(\alpha) = \frac{1}{(\alpha+2)^s} + \frac{\alpha+1}{\alpha+2} = f(\alpha) ,$$

soit $f(\alpha_o)$ le plus petit des $f(\alpha)$ pour $\alpha \in [0,1]$; pour tout $\alpha \in [0,1]$, $\sum_{a=1}^{+\infty} f_a(\alpha)^s \geq f(\alpha_o) > 1$, et cette série converge normalement ; donc il existe $M_s \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\alpha \in [0,1]$, $\sum_{a=1}^{M_s} f_a(\alpha)^s \geq 1$; d'où H-dim $E_{M_s} \geq s$, et, comme E contient tous les E_{M_s} pour $s \in [0,1[$, H - dim E = 1 .

-:-:-:-

Alain THOMAS
Villa Serena
Avenue du Mugel
13600 LA CIOTAT