

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-MARC DESHOUILLERS

Répartition des nombres premiers de la forme $[n^c]$

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 49-52

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__49_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPARTITION DES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $[n^c]$

par

Jean-Marc DESHOUILERS

--:--:--

Soit c un nombre réel non-entier supérieur à 1 ; on note $\pi_c(x)$ le nombre d'entiers n inférieurs à x tels que $[n^c]$ soit un nombre premier. Nous nous proposons de montrer la vraisemblance de la relation (*) :

$$(*) \quad \pi_c(x) \sim \frac{x}{c \log x} \quad \text{lorsque } x \text{ tend vers l'infini.}$$

1. - Résultats antérieurs.

A notre connaissance, les seuls résultats connus concernant $\pi_c(x)$ sont celui de I.I. Pyateskii-Šapiro qui a démontré en 1953 (cf. [3]) la validité de (*) lorsque c est inférieur à $\frac{12}{11}$, et celui de G.A. Kolesnik qui a démontré en 1967 (cf. [2]) que la relation (*) a encore lieu lorsque c est inférieur à $\frac{10}{9}$.

2. - Répartition des nombres $[n^c]$ dans les progressions arithmétiques.

Appelons $N_c(x ; k, \ell)$ le nombre d'entiers n inférieurs ou égaux à x tels que $[n^c]$ soit congru à ℓ modulo k . On trouvera dans [1] un certain nombre de résultats concernant l'évaluation de $N_c(x ; k, \ell)$, en particulier :

PROPOSITION 1. - Posons :

$$R_c(x ; k) = \sup_{\ell} \sup_{y \leq x} |N_c(y ; k, \ell) - \frac{y}{k}|.$$

Pour tout nombre réel c_0 non entier supérieur à 1, et tout nombre réel positif A , il existe deux nombres réels B et K_0 , un voisinage $\mathcal{V}(c_0)$, tels que l'on ait, pour tout réel c de $\mathcal{V}(c_0)$:

$$\sum_{k \leq x^{\sigma(\log x)^{-B}}} R_{c,k}(x) < K_0 \frac{x}{(\log x)^A}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{cases} 2[c_0+2] & \text{pour } 1 < c_0 < 12 \\ 3c_0^2(\log c_0+15) & \text{pour } c_0 \text{ supérieur à } 12. \end{cases}$$

où

3. - Justification heuristique de la relation (*) .

Le théorème des nombres premiers implique que la probabilité heuristique pour un nombre n d'être premier est $\frac{1}{\log n}$.

La proposition 1 signifie que les nombres $[n^c]$ se répartissent harmonieusement dans les différentes progressions arithmétiques ; on peut raisonnablement penser que la probabilité heuristique pour le nombre $[n^c]$ d'être premier est $\frac{1}{c \log n}$, et il est donc vraisemblable que l'on ait :

$$\pi_c(x) \sim \sum_{n \leq x} \frac{1}{c \log x} \sim \frac{x}{c \log x} .$$

4. - Majoration de $\pi_c(x)$.

L'article de H.E. Richert (cf. [4]) montre que l'on peut appliquer la méthode du crible de Selberg pour obtenir une majoration du nombre de nombres premiers contenus dans une suite finie donnée \mathcal{A} , à partir du moment où l'on sait avec suffisamment de précision comment les éléments de \mathcal{A} se répartissent dans certaines progressions arithmétiques. En particulier, de la proposition 1, on peut déduire le résultat suivant :

THEOREME 1. - Pour tout nombre réel c_0 non entier, supérieur à 1 , il existe un voisinage de c_0 , $\mathcal{V}(c_0)$, et une constante $K(c_0)$ tels que pour tout nombre réel c appartenant à $\mathcal{V}(c_0)$ et tout nombre réel x supérieur à 2 , on ait :

$$\pi_c(x) \leq K(c_0) \frac{x}{c \log x} .$$

5. - Nombres presque-premiers de la forme $[n^c]$.

En appliquant maintenant la méthode de Selberg dite de la "borne inférieure", on obtient à partir de la proposition 1 :

THEOREME 2. - Pour tout nombre réel c non entier supérieur à 1 , il existe un entier r_c (on peut prendre $r_c = [5c^3 \log c]$ si c est supérieur à 12) tel qu'il existe une infinité d'entiers $[n^c]$ ayant au plus r_c facteurs premiers.

6. - Estimation en moyenne de $\pi_c(x)$.

Soient c_1 et c_2 ($c_1 < c_2$) deux nombres réels supérieurs à 1 ; on constate aisément que l'on peut écrire :

$$\int_{c_1}^{c_2} \pi_c(x) dc = \sum_{n \leq x} \sum_{p \text{ premier}} \int_{c_1}^{c_2} \varphi_{p,n}(c) dc ,$$

$$\text{où } \varphi_{p,n}(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq n^c < p+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut alors sans grande difficulté estimer l'intégrale ; on obtient l'évaluation suivante, qui nous indique que la relation (*) est satisfaite en moyenne.

THEOREME 3. - Il existe une constante L ne dépendant que des nombres réels c_1 et c_2 telle que :

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} \pi_c(x) dc - \frac{x}{\log x} \log \frac{c_2}{c_1} \right| \leq L \frac{x}{(\log x)^2} .$$

7. - Estimation "presque partout" de $\pi_c(x)$.

Si l'on connaissait l'équivalence de $\int_{c_1}^{c_2} \pi_c^2(x) dc$ et $(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}) \frac{x^2}{(\log x)^2}$ lorsque x tend vers l'infini, on pourrait montrer que pour presque tout c (au sens de la mesure de Lebesgue sur $[1, +\infty[$), la relation (*) est valide.

En combinant les théorèmes 3 et 1, nous n'avons pu parvenir qu'au résultat plus faible suivant, analogue au théorème de Čebyšev.

THEOREME 4. - Pour presque tout c (au sens de la mesure de Lebesgue sur $[1, +\infty[$), il existe trois constantes positives k_c , K_c et x_c telles que pour tout x supérieur à x_c , on ait :

$$k_c \frac{x}{\log x} < \pi_c(x) < K_c \frac{x}{\log x} .$$

Notons que les constantes k_c et x_c sont totalement ineffectives, (on ne connaît aucun nombre réel $c > \frac{10}{9}$ tel que $\pi_c(x)$ tende vers l'infini avec x), tandis que la constante K_c est effectivement calculable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.M. DESHOUILERS. - Sur la répartition des nombres $[n^c]$ dans les progressions arithmétiques. C.R.A.S. t.277, (1973), 647-650.
- [2] G.A. KOLESNIK. - Distribution des nombres premiers de la forme $[n^c]$. Math. Notes 1967 - Trad. de Mat. Zametki (1967), 117-128.
- [3] I.I. PYATESKII-ŠAPIRO. - Sur la répartition des nombres premiers de la forme $[f(n)]$ (en russe). Mat. Sbornik 33 (1953), 559-566.
- [4] H.E. RICHERT. - Selberg's sieve with weights. Mathematika 16 (1969), 1-22.

-:-:-:-

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
17, rue Descartes
75005 PARIS

et

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la libération
33405 TALENCE