

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

HUBERT DELANGE

Sur les suites de Farey

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 39-47

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__39_0

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES SUITES DE FAREY

par

Hubert DELANGE

-:-:-:-

1. La suite de Farey d'ordre N est la suite des fractions irréductibles de dénominateur $\leq N$ appartenant à l'intervalle fermé $[0,1]$, rangées par ordre croissant. (Les nombres 0 et 1 y figurent sous les formes $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$).

Ces fractions étant au nombre de $1+\phi(N)$, où $\phi(N) = \sum_{n=1}^N \varphi(n)$, nous écrirons cette suite sous la forme

$$X_0^{(N)}, X_1^{(N)}, \dots, X_{\phi(N)}^{(N)}$$

(avec donc $X_0^{(N)} = 0$ et $X_{\phi(N)}^{(N)} = 1$).

On peut se proposer d'étudier la distribution asymptotique, pour N tendant vers $+\infty$, des longueurs des $\phi(N)$ intervalles $[X_{r-1}^{(N)}, X_r^{(N)}]$, autrement dit des nombres $\ell_r^{(N)} = X_r^{(N)} - X_{r-1}^{(N)}$, où $r = 1, 2, \dots, \phi(N)$.

On sait que, lorsque N tend vers $+\infty$, $\phi(N) \sim \frac{3}{\pi^2} N^2$. Comme $\sum_{r=1}^{\phi(N)} \ell_r^{(N)} = 1$, la moyenne arithmétique des nombres $\ell_r^{(N)}$ est équivalente à $\frac{1}{\phi(N)} \sim \frac{\pi^2}{3N^2}$. Il est donc naturel d'étudier plutôt la distribution asymptotique des nombres $N^2 \ell_r^{(N)}$.

Cette étude a été faite par R.R. Hall [1], qui a montré que ces nombres ont une distribution limite continue.

Ceci veut dire qu'il existe une fonction réelle σ continue et croissante sur \mathbb{R} , avec

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sigma(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = 1,$$

telle que, σ_N étant la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\sigma_N(t) = \phi(N)^{-1} \times \text{nombre des } r \text{ tels que } N^2 \ell_r^{(N)} \leq t,$$

pour tout t réel, $\sigma_N(t)$ tend vers $\sigma(t)$ quand N tend vers $+\infty$.

On a :

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 1, \\ 2(1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \log t) & \text{pour } 1 < t \leq 4, \\ 2(1 - \frac{1}{t} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{t}} + \frac{2}{t} \log(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{t}})) & \text{pour } t > 4. \end{cases} \quad (1)$$

R.R. Hall donne, de plus, une estimation de la différence $\sigma_N(t) - \sigma(t)$, mais nous laissons ici cette question de côté.

Notre but est de montrer que l'on a la même distribution limite si l'on considère seulement les intervalles $[X_{r-1}^{(N)}, X_r^{(N)}]$ contenus dans un intervalle donné I quelconque contenu dans l'intervalle fermé $[0, 1]$, ou, ce qui revient au même, ceux dont l'extrémité gauche appartient à $]a, b]$, où $0 \leq a < b \leq 1$ (2).

Nous établirons le résultat suivant :

THEOREME. - Etant donné a et b réels satisfaisant à $0 \leq a < b \leq 1$, soit $\nu(a, b; N)$ le nombre des $r \geq 1$ tels que $a < X_{r-1}^{(N)} \leq b$, et soit $\sigma_{N, a, b}$ la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\sigma_{N, a, b}(t) = \nu(a, b; N)^{-1} \times \text{nombre des } r \geq 1 \text{ tels que } a < X_{r-1}^{(N)} \leq b \text{ et } N^2 \varrho_r^{(N)} \leq t. \\ (N \text{ étant assez grand pour que } \nu(a, b; N) > 0).$$

Pour tout t réel, $\sigma_{N, a, b}(t)$ tend vers $\sigma(t)$ quand N tend vers $+\infty$, où σ est la fonction indiquée plus haut (3).

Nous commencerons par reprendre la démonstration du résultat de R.R. Hall, en adoptant une méthode qui éclaire les choses en montrant que, pour $t > 1$, $\sigma(t)$ est simplement le double de la mesure d'un certain sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , mais qui ne fournit pas l'évaluation de la différence $\sigma_N(t) - \sigma(t)$.

Il est entendu que, dans tout ce qui suit, m et n désigneront toujours des entiers > 0 , ainsi que d au §4.2.

2. Rappelons d'abord que la démonstration de R.R. Hall est basée sur le lemme élémentaire suivant :

LEMME. - Soit \mathcal{J}_N l'ensemble des intervalles $[X_{r-1}^{(N)}, X_r^{(N)}]$, où $r=1, 2, \dots, \mathfrak{s}(N)$. Considérons l'application de \mathcal{J}_N dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ définie de la façon suivante :

Si $X_{r-1}^{(N)}$ et $X_r^{(N)}$ sont les fractions irréductibles $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$, on fait

correspondre à l'intervalle $[X_{r-1}^{(N)}, X_r^{(N)}]$ le couple $[k, k']$.

Cette application est une bijection de \mathcal{J}_N sur l'ensemble \mathcal{O}_N des couples $[m, n]$ tels que

$$(m, n) = 1 \quad , \quad m \leq N \quad , \quad n \leq N \quad \text{et} \quad m+n > N \quad .$$

La démonstration de ce lemme est immédiate. On a une application dans \mathcal{O}_N car $k \leq N$, $k' \leq N$, et on sait que $k+k' > N$ et $kh' - hk' = 1$, ce qui entraîne $(k, k') = 1$.

Deux intervalles différents ne peuvent avoir la même image, car, étant donné k et $k' \in \mathbb{N}^*$ tels que $(k, k') = 1$, il existe un seul entier h' tel que

$$kh' \equiv 1 \pmod{k'} \quad \text{et} \quad 0 < h' \leq k' \quad .$$

D'autre part, étant donné $k \in \mathbb{N}^*$ et $\leq N$, chacun des couples $[m, n] \in \mathcal{O}_N$ tels que $m = k$ est l'image d'un élément de \mathcal{J}_N . En effet, \mathcal{J}_N contient exactement $\varphi(k)$ intervalles auxquels correspond un couple dont le premier élément est k , puisqu'il y a dans l'intervalle $[0, 1[$ exactement $\varphi(k)$ fractions irréductibles de dénominateur k . Il y a aussi dans \mathcal{O}_N exactement $\varphi(k)$ couples $[m, n]$ tels que $m = k$, que l'on obtient en donnant à n toutes les valeurs satisfaisant à $N-k < n \leq N$ et $(k, n) = 1$.

3. Conjointement à ce lemme, on utilise le fait que, si $X_{r-1}^{(N)}$ et $X_r^{(N)}$ sont les fractions irréductibles $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$, la relation $kh' - hk' = 1$ donne $\ell_r^{(N)} = \frac{1}{kk'}$.

On voit ainsi que, pour $t > 1$, le nombre des r tels que $N^2 \ell_r^{(N)} \leq t$ est égal au nombre des éléments de \mathcal{O}_N pour lesquels $mn \geq N^2/t$, c'est-à-dire au nombre des couples $[m, n] \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$(m, n) = 1 \quad , \quad m \leq N \quad , \quad n \leq N \quad , \quad m+n > N \quad \text{et} \quad mn \geq N^2/t \quad .$$

4. C'est à partir d'ici que notre méthode se différencie de celle de R.R. Hall, par l'introduction d'une notion de densité d'un sous-ensemble de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

4.1. Soit E une partie de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Etant donné x et y réels > 0 , désignons par $\eta(E ; x, y)$ le nombre des couples $[m, n] \in E$ tels que $m \leq x$ et $n \leq y$.

4.1.1. Nous disons que E possède la densité δ si $\frac{1}{xy} \eta(E ; x, y)$

tend vers δ quand x et y tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre.

Nous disons que E possède la "densité au sens faible" δ si $\frac{1}{xy} \eta(E; x, y)$ tend vers δ lorsque x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe, quel que soit ce rapport.

Il est clair que, si E possède la densité δ , il possède aussi la densité au sens faible δ (alors que l'inverse n'a pas lieu).

C'est la notion de densité au sens faible qui nous sera utile ici.

4.1.2. $\eta(E; x, y)$ est le nombre des éléments de l'intersection de E avec l'ensemble des couples $[\xi, \eta]$ de nombres réels tels que $0 \leq \xi \leq x$ et $0 \leq \eta \leq y$.

On peut considérer, plus généralement, une partie A quelconque de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, et désigner par $\eta(E; A)$ le nombre des éléments de $E \cap A$.

Etant donné $\lambda > 0$, nous désignons par λA , comme il est usuel, l'image de A par l'application $[\xi, \eta] \rightarrow [\lambda\xi, \lambda\eta]$.

On voit que, si E possède la densité au sens faible δ , pour toute partie A de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ mesurable au sens de Jordan, $\frac{1}{\lambda} \eta(E; \lambda A)$ tend vers $\delta \mu(A)$ quand λ tend vers $+\infty$ ($\mu(A)$ étant la mesure de Jordan de A).

Il est clair que ceci a lieu quand A est l'ensemble des couples $[\xi, \eta]$ tels que $0 \leq \xi \leq \alpha$ et $0 \leq \eta \leq \beta$, où α et $\beta > 0$, car alors

$$\frac{1}{\lambda} \eta(E; \lambda A) = \frac{1}{\lambda^2} \eta(E; \lambda\alpha, \lambda\beta) = \alpha\beta \frac{1}{(\lambda\alpha)(\lambda\beta)} \eta(E; \lambda\alpha, \lambda\beta).$$

On passe de là au cas général par un raisonnement bien connu. ⁽⁴⁾

4.1.3. On déduit immédiatement de ce qui précède que, lorsque E possède une densité au sens faible strictement positive, si A et B sont des parties de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ mesurables au sens de Jordan, avec $\mu(B) > 0$, le rapport $\eta(E; \lambda A) / \eta(E; \lambda B)$ est défini pour $\lambda > 0$ assez grand et tend vers $\mu(A) / \mu(B)$ quand λ tend vers $+\infty$.

4.2. Dans tout ce qui suit, nous désignerons par \mathcal{E} l'ensemble des couples $[m, n] \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $(m, n) = 1$.

On voit très facilement, et il est bien connu, que \mathcal{E} possède une densité

té égale à $\frac{6}{\pi^2}$.

En effet, en remarquant que

$$\sum_{\substack{d/m \\ d/n}} \mu(d) = \sum_{d/(m,n)} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } (m,n) = 1, \\ 0 & \text{si } (m,n) > 1, \end{cases}$$

on voit que l'on a pour x et $y > 0$

$$\begin{aligned} \eta(\mathcal{E} ; x, y) &= \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} \left(\sum_{d/m} \mu(d) \right) = \sum_{d \leq \text{Inf}(x, y)} \mu(d) \left[\frac{x}{d} \right] \left[\frac{y}{d} \right] \\ &= xy \sum_{d \leq \text{Inf}(x, y)} \frac{\mu(d)}{d^2} + o((x+y) \sum_{d \leq \text{Inf}(x, y)} \frac{1}{d}). \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{xy} \eta(\mathcal{E} ; x, y) = \sum_{d \leq \text{Inf}(x, y)} \frac{\mu(d)}{d^2} + o\left(\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \log \text{Inf}(x, y)\right) \quad (x, y \rightarrow +\infty),$$

ce qui montre que $\frac{1}{xy} \eta(\mathcal{E} ; x, y)$ tend vers $\sum_1^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}$ quand x et y tendent vers $+\infty$.

4.3. Ce qui précède donne immédiatement le résultat de R.R. Hall cité plus haut.

En effet, d'après ce que l'on a vu au §3, pour $t > 1$, le nombre des r tels que $N_r^2 \ell_r^{(N)} \leq t$ est égal à $\eta(\mathcal{E} ; NA_t)$, où A_t est l'ensemble des couples $[x, y] \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tels que

$$x \leq 1, \quad y \leq 1, \quad x+y > 1 \quad \text{et} \quad xy \geq \frac{1}{t}.$$

$\mathfrak{g}(N)$, nombre des éléments de l'ensemble \mathcal{J}_N , qui est en bijection avec l'ensemble \mathcal{A}_N , est égal à $\eta(\mathcal{E} ; NB)$, où B est l'ensemble des couples $[x, y] \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tels que

$$x \leq 1, \quad y \leq 1 \quad \text{et} \quad x+y > 1.$$

On a donc, pour $t > 1$, $\sigma_N(t) = \eta(\mathcal{E} ; NA_t) / \eta(\mathcal{E} ; NB)$. B est mesurable au sens de Jordan, ainsi que A_t pour tout $t > 1$, et on a $\mu(B) = \frac{1}{2}$.

Donc, pour tout $t > 1$, quand N tend vers $+\infty$, $\sigma_N(t)$ tend vers $\mu(A_t) / \mu(B) = 2\mu(A_t)$.

5. Pour établir le résultat que nous avons annoncé, nous utilisons encore la bijection de \mathcal{J}_N sur \mathcal{Q}_N indiquée par le lemme du §2, mais il nous faut maintenant sélectionner parmi les éléments de \mathcal{Q}_N ceux qui correspondent à des intervalles dont l'extrémité gauche appartient à $]a, b]$.

5.1. Définissons une fonction f sur l'ensemble \mathcal{E} par $f(m, n) = \frac{n'}{m}$, où n' est l'entier déterminé par les conditions $nn' \equiv -1 \pmod{m}$ et $0 \leq n' < m$. Notons en passant que l'on a $0 \leq f(m, n) < 1$, avec $f(m, n) = 0$ seulement si $m = 1$, et que la fonction $n \mapsto f(m, n)$, où m est fixé, est périodique de période m .

On voit que l'élément de \mathcal{J}_N qui correspond par la bijection considérée à l'élément $[m, n]$ de \mathcal{Q}_N est un intervalle d'extrémité gauche $f(m, n)$.

En effet, si les extrémités d'un intervalle appartenant à \mathcal{J}_N sont les fractions irréductibles $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$, on sait que

$$kh' - hk' = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq h < k.$$

L'élément correspondant de \mathcal{Q}_N est le couple $[k, k']$. Si c'est $[m, n]$, on a $k = m$, $k' = n$, et par suite $nh = mh' - 1$, d'où $nh \equiv -1 \pmod{m}$, et $0 \leq h < m$, de sorte que h est égal à l'entier n' considéré ci-dessus. Alors $\frac{h}{k} = \frac{n'}{m} = f(m, n)$.

5.2. Ceci montre que $\nu(a, b, N)$ est égal au nombre des couples $[m, n] \in \mathcal{Q}_N$ tels que $a < f(m, n) \leq b$, c'est-à-dire au nombre des éléments de \mathcal{E} pour lesquels

$$m \leq N, \quad n \leq N, \quad m+n > N \quad \text{et} \quad a < f(m, n) \leq b.$$

De même, le nombre des $r \geq 1$ tels que $a < X_{r-1}^{(N)} \leq b$ et $N^2 \varrho_r^{(N)} \leq t$ est égal, pour $t > 1$, au nombre des éléments de \mathcal{E} pour lesquels

$$m \leq N, \quad n \leq N, \quad m+n > N, \quad a < f(m, n) \leq b \quad \text{et} \quad mn \geq N^2/t.$$

Si l'on introduit l'ensemble $E_{a, b}$ des éléments de \mathcal{E} pour lesquels $a < f(m, n) \leq b$, on voit que ces deux nombres sont égaux respectivement à $\eta(E_{a, b}; NB)$ et $\eta(E_{a, b}; NA_t)$, où B et A_t sont les ensembles définis plus haut, de sorte que

$$\sigma_{N, a, b}(t) = \eta(E_{a, b}; NA_t) / \eta(E_{a, b}; NB).$$

Ainsi, pour obtenir le résultat annoncé, il suffit de montrer que l'ensemble

$E_{a,b}$ possède une densité au sens faible strictement positive.

En fait, nous allons prouver que cet ensemble possède la densité au sens faible $(b-a) \frac{6}{\pi^2}$.

Pour cela, il suffit de montrer que, quel que soit $\alpha \in [0,1]$, l'ensemble E_α des $[m,n] \in \mathcal{E}$ tels que $f(m,n) \leq \alpha$ a la densité faible $\frac{6}{\pi^2} \alpha$ (car $E_{a,b} = E_b \setminus E_a$ et $E_a \subset E_b$).

C'est vrai pour $\alpha = 0$ car l'ensemble E_0 se réduit à l'ensemble des couples $[m,n]$ tels que $m = 1$.

Il ne reste qu'à traiter le cas où $0 < \alpha \leq 1$.

6. Introduisons, pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, la fonction ψ_m définie sur \mathbb{R}^+ par

$$\psi_m(y) = \frac{1}{\varphi(m)} \times \text{nombre des } n \leq y \text{ tels que } (m,n) = 1 \text{ et } f(m,n) \leq \alpha.$$

On aura alors pour x et $y > 0$

$$\eta(E_\alpha; x, y) = \sum_{m \leq x} \varphi(m) \psi_m(y).$$

6.1. On voit que, pour prouver que E_α possède la densité au sens faible $\frac{6}{\pi^2} \alpha$, il suffit de montrer que, pour tout $t \in]0,1]$, $\psi_m(mt)$ tend vers αt quand m tend vers $+\infty$.

En effet, supposons ceci démontré.

Comme la même chose a évidemment lieu pour $t = 0$ et comme chaque fonction ψ_m est croissante, il y a convergence uniforme de $\psi_m(mt)$ vers αt sur $[0,1]$.

Posons donc $\psi_m(mt) = \alpha t + \epsilon_m(t)$ et $\sup_{t \in [0,1]} |\epsilon_m(t)| = \omega_m$. Ainsi, ω_m tend vers zéro quand m tend vers $+\infty$. Maintenant, si $q = \lfloor \frac{y}{m} \rfloor$, on peut écrire $y = mq + z$, avec $0 \leq z < m$. D'après la périodicité de la fonction $n \mapsto f(m,n)$, on a

$$\begin{aligned} \psi_m(y) &= q\psi_m(m) + \psi_m(z) = q(\alpha + \epsilon_m(1)) + \alpha \frac{z}{m} + \epsilon_m\left(\frac{z}{m}\right), \\ &= \alpha \frac{y}{m} + q\epsilon_m(1) + \epsilon_m\left(\frac{z}{m}\right), \\ &= \alpha \frac{y}{m} + \left[\frac{y}{m}\right] \epsilon_m(1) + \epsilon_m\left(\frac{y}{m} - \left[\frac{y}{m}\right]\right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\eta(E_\alpha; x, y) = \alpha y \sum_{m \leq x} \frac{\varphi(m)}{m} + \sum_{m \leq x} \varphi(m) \left[\frac{y}{m} \right] \varepsilon_m(1) + \sum_{m \leq x} \varphi(m) \varepsilon_m \left(\frac{y}{m} - \left[\frac{y}{m} \right] \right),$$

d'où

$$\frac{1}{xy} \eta(E_\alpha; x, y) = \alpha \frac{1}{x} \sum_{m \leq x} \frac{\varphi(m)}{m} + \frac{1}{xy} \sum_{m \leq x} \varphi(m) \left[\frac{y}{m} \right] \varepsilon_m(1) + \frac{1}{xy} \sum_{m \leq x} \varphi(m) \varepsilon_m \left(\frac{y}{m} - \left[\frac{y}{m} \right] \right).$$

Il est connu que, quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x} \sum_{m \leq x} \frac{\varphi(m)}{m}$ tend vers $\frac{6}{\pi^2}$.

Il est clair que l'on a $\left| \frac{1}{xy} \sum_{m \leq x} \varphi(m) \left[\frac{y}{m} \right] \varepsilon_m(1) \right| \leq \frac{1}{x} \sum_{m \leq x} \omega_m$, expression qui tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

Enfin $\left| \sum_{m \leq x} \varphi(m) \varepsilon_m \left(\frac{y}{m} - \left[\frac{y}{m} \right] \right) \right| \leq \sum_{m \leq x} \omega_m \varphi(m)$, expression qui est $o(x^2)$ quand x tend vers $+\infty$.

On voit ainsi que, quand x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe, $\frac{1}{xy} \eta(E_\alpha; x, y)$ tend vers $\frac{6}{\pi^2} \alpha$.

6.2. Remarquons maintenant que, d'après les définitions des fonctions f et ψ_m , pour $t \in]0, 1]$ et $m > 1$, $\psi_m(mt)$ est égal au quotient par $\varphi(m)$ du nombre des couples $[n, n'] \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$nn' \equiv -1 \pmod{m}, \quad \frac{n}{m} \leq t \quad \text{et} \quad \frac{n'}{m} \leq \alpha.$$

Ceci peut se traduire par la relation

$$\psi_m(mt) = \mu_m([0, t] \times [0, \alpha]),$$

où μ_m est la mesure sur \mathbb{R}^2 définie par

$$\mu_m = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{1 \leq n < m \\ 1 \leq n' < m \\ nn' \equiv -1 \pmod{m}}} \mu_{m, n, n'},$$

où $\mu_{m, n, n'}$ est la mesure de Dirac au point $\left[\frac{n}{m}, \frac{n'}{m} \right]$.

Ainsi, ce que nous devons montrer est que, pour tout $t \in]0, 1]$, quand m tend vers $+\infty$, $\mu_m([0, t] \times [0, \alpha])$ tend vers αt , c'est-à-dire vers la mesure de Lebesgue de $[0, t] \times [0, \alpha]$.

D'après le critère de Weyl, ceci a certainement lieu si, pour tout couple $[u, v] \in \mathbb{Z}^2$, autre que $[0, 0]$, $\int e^{(ux+vy)} d\mu_m(x, y)$ tend vers zéro quand m tend vers $+\infty$ (où $e(x) = e^{2\pi i x}$).

Mais on a $\int e(ux+vy)d\mu_m(x,y) = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{1 \leq n < m \\ 1 \leq n' < m \\ nn' \equiv -1 \pmod{m}}} e\left(\frac{un+vn'}{m}\right)$. La somme

qui figure ici est une somme de Kloosterman. On sait ⁽⁶⁾ qu'elle est de module au plus égal à $d(m)m^{1/2}(u,v,m)^{1/2}$, donc à $(u,v)^{1/2}d(m)m^{1/2}$.

Le quotient par $\varphi(m)$ tend bien vers zéro quand m tend vers $+\infty$ car, quel que soit $\epsilon > 0$, $d(m) = O(m^\epsilon)$ et $\varphi(m)$ tend vers l'infini plus vite que $m^{1-\epsilon}$.

--:--:--

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - R.R. HALL. - J. London Math. Soc.(2), 2, 1970, pp. 139-148.
 [2] - T. ESTERMANN. - Mathematika, 8, 1961, pp. 83-86.

--:--:--

NOTES

- (¹) Le résultat est trivial pour $t \leq 1$ car les $\varrho_r^{(N)}$ sont tous $> 1/N^2$ et par suite $\sigma_N(t) = 0$ pour $t \leq 1$.
- (²) Si I (fermé, ouvert, ou semi-ouvert) a comme extrémités a et b , le nombre des intervalles $[X_{r-1}^{(N)}, X_r^{(N)}]$ dont l'extrémité gauche appartient à $]a, b]$ et le nombre de ceux qui sont contenus dans I diffèrent au plus de deux unités.
- (³) Ici encore, il suffit de considérer le cas où $t > 1$.
- (⁴) En fait, on voit que la propriété indiquée est équivalente au fait que E possède la densité au sens faible δ .

--:--:--

Université de Paris Sud
 Centre d'Orsay
 Département de Mathématiques,
 Bâtiment 425

91405 - ORSAY