

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ANDRÉ BLANCHARD

Les systèmes modulaires appliqués à la théorie des partitions

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 9-22

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__9_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES SYSTEMES MODULAIRES APPLIQUES A LA THEORIE DES PARTITIONS

par

André BLANCHARD

---:---:---

Hardy et Ramanujan [HR] ont obtenu une théorie des partitions très satisfaisante, perfectionnée encore par Rademacher [R]. Soit $p(n)$ le nombre de partitions sans restriction de n , c'est-à-dire le nombre de manières d'écrire $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ avec $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ (k non fixé). Une circonstance essentielle pour l'étude de la série entière

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n \quad (|x| < 1)$$

est que (pour $\text{Im}(z) > 0$)

$$f(e^{2i\pi z}) = \frac{e^{i\pi z/12}}{\eta(z)}$$

où $\eta(z)$ s'apparente aux fonctions modulaires : on a en effet les deux formules

$$\eta(z+1) = e^{i\pi/12} \cdot \eta(z)$$

$$\eta(-1/z) = \left(\frac{z}{i}\right)^{1/2} \cdot \eta(z)$$

d'où résultent des relations entre $\eta(z)$ et $\eta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$ lorsque a, b, c, d entiers avec $ad - bc = 1$. Notons que η^{24} est une véritable forme modulaire.

Les auteurs cités plus haut indiquent quelques problèmes voisins qui peuvent être étudiés par la même méthode : Hardy et Ramanujan [HR] donnent quelques développements limités : nombre de partitions de n en entiers impairs, nombre de partitions de n en entiers impairs et distincts, qui font intervenir respectivement $\frac{\eta(2z)}{\eta(z)}$ et $\frac{(\eta(2z))^2}{\eta(z)\eta(4z)}$.

Nous nous proposons de montrer ici que les mêmes idées sont applicables à un problème de partitions et de progressions arithmétiques en utilisant, en plus de la fonction η , des "systèmes modulaires" c'est-à-dire des systèmes de fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_S$, holomorphes pour $\text{Im } z > 0$, telles que les $\varphi_j(z+i)$ ainsi que les $\varphi_j(-1/z)$ soient des combinaisons linéaires de $\varphi_1(z), \dots, \varphi_S(z)$ à coefficients de formes très particulières (constantes, puissances de $\frac{z}{i}$).

Enoncé d'un problème : (P)

Soit $A \subset \mathbb{N}$ une réunion finie de progressions arithmétiques. On suppose-
ra de plus que le p.g.c.d. des éléments de A est 1. Soit $p(n;A)$ le nom-
bre de partitions de n en éléments de A , et $q(n;A)$ le nombre de partitions
de n en éléments distincts de A .

Etudier le comportement à l'infini de $p(n;A)$ et $q(n;A)$.

Dans une première partie, nous verrons que des considérations d'analyse réelle donnent sans hypothèse supplémentaire une expression simple équivalente à $\text{Log } p(n;A)$, ainsi qu'une majoration de $\text{Log } q(n;A)$.

Dans la deuxième partie, nous obtenons beaucoup plus grâce à des "systèmes modulaires", mais à condition d'introduire une nouvelle hypothèse sur A (condition de symétrie).

CHAPITRE I

On considèrera dans cette première partie la fonction

$$f_A(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n;A) \cdot x^n \quad (1)$$

définie sur l'intervalle $[0,1[$. Remarquons qu'une réunion finie de progressions arithmétiques peut toujours être considérée comme réunion de progressions de même raison.

PROPOSITION 1. - Soit A une réunion de r progressions arithmétiques de raison m et de premiers termes $v_1 < v_2 < \dots < v_r$ (distincts modulo m) avec p.g.c.d. $(v_1, \dots, v_r, m) = 1$. On a alors au voisinage de 1

$$\text{Log } f_A(x) \sim \frac{r}{m} \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{1}{1-x} \quad (2)$$

On a en effet $f_A(x) = \prod_{n \in A} \frac{1}{1-x^n}$ comme cela est exposé dans [HW] sur des cas particuliers. On a alors

$$\text{Log } f_A(x) = - \sum_{n \in A} \text{Log } (1-x^n) = \sum_{n \in A} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{x^{nq}}{q} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \cdot \frac{x^{qv_1} + \dots + x^{qv_r}}{1-x^{qm}} \dots$$

$$\dots = \frac{1}{1-x} \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \frac{x^{qv_1 + \dots + x^{qv_r}}}{1+x+\dots+x^{qm-1}} ; \quad (3)$$

or pour $x \in [0,1[$,

$$\frac{x^{qv_1 + \dots + x^{qv_r}}}{1+x+\dots+x^{qm-1}} < \frac{r \cdot x^{qv_1}}{\text{Inf}(qv_1, qm)x} < \frac{r}{q} ;$$

les termes de la série $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \cdot \frac{x^{qv_1 + \dots + x^{qv_2}}}{1+x+\dots+x^{qm-1}}$ sont donc majorés indépendamment

de x par les termes $\frac{r}{2}$ d'une série convergente, et $\frac{1}{q} \cdot \frac{x^{qv_1 + \dots + x^{qv_r}}}{1+x+\dots+x^{qm-1}}$

tend vers $\frac{r}{2m}$ quand x tend vers 1. Il s'ensuit que $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \cdot \frac{x^{qv_1 + \dots + x^{qv_r}}}{1+x+\dots+x^{qm-1}}$

tend vers $\frac{r}{m} \cdot \frac{\pi^2}{6}$ quand x tend vers 1, d'où la proposition 1.

Nous allons utiliser le lemme suivant :

LEMME. - Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $0 \leq x < 1$. On suppose $a_n \geq 0$ et $\text{Log } f(x) \sim \frac{M}{1-x}$ au voisinage de 1. On a alors $\overline{\text{Lim}} \frac{\text{Log } a_n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{M}$, et de plus il existe une suite infinie n_q vérifiant $n_{q+1}/n_q \rightarrow 1$ et $\text{Log } a_{n_q} \sim 2\sqrt{M} \cdot n_q$.

Ce lemme est un cas particulier d'un théorème figurant dans [V]. Sa démonstration, sans difficulté spéciale, est une vérification d'inégalités. Ce lemme donne d'abord les majorations :

PROPOSITION 2. - Dans les hypothèses de la proposition 1 :

$$\overline{\text{Lim}} \frac{\text{Log } p(n;A)}{\sqrt{n}} = \pi \sqrt{\frac{2r}{3m}} \quad \text{et} \quad \overline{\text{Lim}} \frac{\text{Log } q(n;A)}{\sqrt{n}} = \pi \sqrt{\frac{r}{3m}} . \quad (4)$$

Cela est immédiat pour $p(n;A)$. Pour $q(n;A)$ il suffit de remarquer que :

$$g_A(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q(n;A)x^n = \prod_{n \in A} (1+x^n) = \prod_{n \in A} \frac{1-x^{2n}}{1-x^n} = \frac{f_A(x)}{f_A(x^2)} , \quad (5)$$

d'où le comportement de $\text{Log } g_A(x)$ au voisinage de 1.

Précisons le comportement de $p(n;A)$. On a les trois lemmes suivants

qu'il suffit d'énoncer :

LEMME 2. - Si a et b sont deux entiers strictement positifs, tout multiple assez grand de leur p.g.c.d. est de la forme $xa + yb$ avec $x \geq 0$, $y \geq 0$.

LEMME 3. - Soient $v_1, \dots, v_{r+1}$ strictement positifs et premiers entre eux ; alors tout entier assez grand est de la forme $x_1 v_1 + \dots + x_{r+1} v_{r+1}$ avec les $x_j \geq 0$.

Puis en appliquant le lemme avec $v_{r+1} = v_1 + m$:

LEMME 4. - Dans les hypothèses de la proposition 1, il existe un entier N_0 tel que $n > N_0$ entraîne $p(n;A) > 0$ et $p(n_1 + n;A) \geq p(n_1;A)$.

On peut alors montrer :

PROPOSITION 3. - Dans les hypothèses de la proposition 1 :

$$\text{Log } p(n;A) \sim \pi \sqrt{\frac{2rn}{3m}} \quad (6)$$

D'après le lemme 1 en effet, on a une suite n_q telle que $n_{q+1}/n_q \rightarrow 1$ et $\text{Log } p(n_q;A) \sim n_q \sqrt{\frac{2rn_q}{3m}}$; à un entier n faisons correspondre le plus grand n_q qui soit strictement inférieur à $n - N_0$. Ce nombre n_q est alors équivalent à n , et on a $p(n;A) \geq p(n_q;A)$; d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } p(n;A)}{\sqrt{n}} \geq \pi \sqrt{\frac{2r}{3m}} \quad (7)$$

ce qui, avec la proposition 2, donne la proposition 3.

Additif à la proposition 1 (comportement de $f_A(x)$ sur les rayons du disque unité) :

PROPOSITION 4. - Dans les hypothèses de la proposition 1, soit h premier à k ; alors pour x réel tendant vers 1,

$$\text{Log } f_A(x.e^{2i\pi h/k}) \sim \frac{1}{1-x} \cdot \sum_{k|qm} \frac{e^{2i\pi q v_1 h/k} + \dots + e^{2i\pi q v_2 h/k}}{q^2 m} = \frac{\lambda_{h/k}}{1-x} \quad (8)$$

et $\lambda_{h/k} < \lambda_{0/1}$ si $k \geq 2$. De plus, $\lambda_{0/1} - \lambda_{h/k}$ est borné inférieurement.

En effet, $\text{Log } f_A(x, e^{2i\pi h/k}) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \cdot \frac{x^{q\nu_1} (e^{2i\pi q\nu_1 h/k} + \dots + x^{q\nu_r} e^{2i\pi q\nu_r h/k})}{1 - x^{qm} e^{2i\pi qmh/k}}$;

on a $\sum_{k/qm} 0(k \sum_{1}^{\infty} \frac{x^q}{q}) = 0(k \text{ Log}(1-x))$; puis on raisonne comme à la proposition 1 pour les q tels que $k|qm$. Cela étant $\lambda_{h/k} = \lambda_{0/1}$ entraîne $k|m$, puis les $e^{2i\pi\nu_1 qh/k} \dots$ tous égaux à 1, d'où $k|p.g.c.d. (\nu_1, \dots, \nu_r)$. Finalement $k|p.g.c.d. (\nu_1, \dots, \nu_r, m) = 1$.

Le dernier point est évident, car $\lambda_{h/k}$ étant une somme portant sur les q tels que qm multiple de k , on a visiblement $\lambda_{h/k} \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$.

CHAPITRE II

Dans cette partie, on utilise la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe.

1. Formules utilisées.

Formule de Jacobi : On a pour $|x| < 1$, $y \neq 0$, la formule

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+y \cdot x^{2n-1})(1+y^{-1} x^{2n-1})(1-x^{2n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^n \cdot x^{n^2} \quad (9)$$

([A], [HW], [R]).

Formule de Poisson : La dualité de Pontryagin étant réalisée sur $\mathbb{R}$ par $e^{2i\pi x^2}$, les fonctions ω et $\hat{\omega}$ définies par $\omega(x) = e^{-\pi u x^2}$ et

$\hat{\omega}(\xi) = u^{-1/2} e^{-\pi \xi^2 / u}$ sont transformées de Fourier l'une de l'autre (u étant un complexe de partie réelle strictement positive). La fonction $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi u (x+n)^2}$ qui admet 1 pour période a donc pour coefficients de Fourier $u^{-1/2} \cdot e^{-\pi n^2 / u}$, d'où la formule de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi u (x+n)^2} = u^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 / u} \cdot e^{2i\pi n x}$$

valable si $\text{Ré}(u) > 0$. On écrira plutôt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi z (x+n)^2} = \left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\pi i n^2}{z}} \cdot e^{2i\pi n x} \quad (10)$$

pourvu que $\text{Im}(z) > 0$.

Evaluations d'intégrales.

Soit $\mathcal{L}$ le chemin d'intégration représenté sur la figure dans le plan "coupé" $-\pi/2 \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$ (il est plus correct de considérer $\mathcal{L}$ comme chemin d'intégration sur la surface de Riemann de $\log z$).

On a alors

$$\int_{\mathcal{L}} (z/i)^{1/2} \exp\left(\frac{-ix}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz = 2\sqrt{2\pi x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{sh}x}{x}\right) \quad (11)$$

si $x > 0$. Par changement de variable, on a la formule utile pour la suite :

$$\int_{\mathcal{L}} (z/i)^{1/2} e^{2i\pi((\alpha-x)z + \frac{\beta}{z})} dz = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{sh}4\pi\sqrt{\beta} \cdot \sqrt{n-\alpha}}{\sqrt{n-\alpha}} \right) \quad (12)$$

(ce qui est équivalent pour $n \rightarrow \infty$ à $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{2} \cdot n} e^{4\pi\sqrt{\beta}x}$. De même, si C_- est un cercle de centre 0 parcouru dans le sens négatif on a

$$\int_{C_-} \exp\left(\frac{-ix}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz = 2\pi I_1(x) \quad (13)$$

si $x > 0$. I_1 est une fonction de Bessel modifiée. Par changement de variable on a de même :

$$\int_{C_-} e^{2i\pi((\alpha-n)z + \frac{\beta}{z})} dz = 2\pi \sqrt{\frac{\beta}{n-\alpha}} \cdot I_1(4\pi\sqrt{\beta} \cdot \sqrt{n-\alpha}) \quad (14)$$

(ce qui est équivalent pour $n \rightarrow \infty$ à $\frac{\beta^{1/4}}{\sqrt{2 \cdot n}^{3/4}} e^{4\pi\sqrt{\beta}n}$).

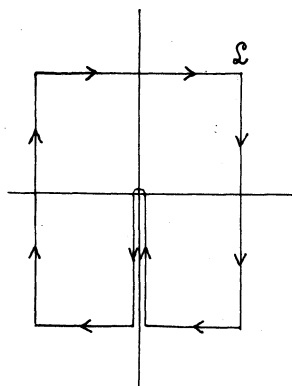
2. La condition de symétrie, et les fonctions φ_ν .

Dans ce qui suit, on supposera que A vérifie une condition de symétrie qui soit l'une des deux conditions suivantes :

1ère condition : Les premiers termes $\nu_1, \dots, \nu_r$ des r progressions de raison m dont la réunion est A vérifient :

$$\nu_1 + \nu_r = \nu_2 + \nu_{r-1} = \nu_3 + \nu_{r-2} = \dots = m.$$

2e condition : Les premiers termes $\nu_1, \dots, \nu_r$ des r progressions de raison m dont la réunion est A vérifient :



$$v_1 + v_{r-1} = v_2 + v_{r-2} = \dots = v_r = m.$$

Le rôle de ces conditions provient de ce que la formule de Jacobi donne en remplaçant x par $x^{m/2}$ et y par $-x^{m/2-v}$ ($1 \leq v \leq \frac{m}{2}$) :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^{mn-v})(1-x^{mn-(m-v)})(1-x^{mn}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{m \cdot \frac{n(n+1)}{2} - nv} \quad (15)$$

On est alors amené à poser pour $\text{Im } z > 0$:

$$\varphi_v(z) = e^{\frac{(m-2v)^2}{4m} i\pi z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{2i\pi z (m \cdot \frac{n(n+1)}{2} - nv)} \quad (16)$$

de sorte que l'on a aussi :

$$\varphi_v(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{4mi\pi z (n + \frac{m-2v}{4m})^2} - e^{4mi\pi z (n + \frac{m+2v}{4m})^2}; \quad (17)$$

les fonctions $\varphi_v(z)$ permettent alors avec $\eta(z)$, $\eta(mz)$ et $\eta(\frac{m}{2}z)$ (si m pair) d'exprimer :

$$F_A(z) = f_A(e^{2i\pi z}) = \prod_{n \in A} \frac{1}{1 - e^{2i\pi n z}} \quad (18)$$

On a en effet :

1er cas : $m \in A$, m impair ou $m/2 \in A$.

Alors

$$F_A(z) = \frac{e^{i\pi z/12}}{n(z)} \prod_{\substack{v < m/2 \\ v \notin A}} \left(\frac{\varphi_v(z)}{e^{\frac{(m-2v)^2}{4m} i\pi z}} \cdot \frac{e^{mi\pi z/12}}{\eta(mz)} \right) \quad (19)$$

2e cas : $m \notin A$, m impair ou $m/2 \in A$.

$$F_A(z) = \frac{e^{i\pi z/12}}{\eta(z)} \cdot \frac{\eta(mz)}{e^{mi\pi z/12}} \prod_{\substack{v < m/2 \\ v \notin A}} \left(\frac{\varphi_v(z)}{e^{\frac{(m-2v)^2}{4m} i\pi z}} \cdot \frac{e^{mi\pi z/12}}{\eta(mz)} \right) \quad (20)$$

3e cas : $m \in A$, $m/2 \notin A$, m pair.

$$F_A(z) = \frac{e^{i\pi z/12}}{\eta(z)} \cdot \frac{\eta(mz/2)e^{mi\pi z/24}}{\eta(mz)} \cdot \prod_{\substack{v < m/2 \\ v \notin A}} \left(\frac{\varphi_v(z)}{e^{\frac{(m-2v)^2}{4m} i\pi z}} \cdot \frac{e^{mi\pi z/12}}{\eta(mz)} \right) \quad (21)$$

4e cas : $m \notin A$, $m/2 \notin A$, m pair .

$$F_A(z) = \frac{e^{i\pi z/12}}{\eta(z)} \cdot \frac{\eta(\frac{mz}{2})}{e^{i\pi z/24}} \cdot \prod_{\substack{v < m/2 \\ v \notin A}} \left(\frac{\varphi_v(z)}{(m-2v)^2} \cdot \frac{e^{i\pi z/12}}{\eta(mz)} \right) \cdot \frac{e^{i\pi z/12}}{e^{\frac{(m-2v)^2}{4m} i\pi z}} \quad (22)$$

3. Le système modulaire.

Posons pour $\text{Im } z > 0$

$$\psi_\mu(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{4i\pi n z (n + \frac{\mu}{4m})^2} = e^{\frac{\mu^2}{4m} i\pi z} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi n z (2mn^2 + n\mu)} \quad (23)$$

μ est susceptible a priori de prendre les $4m$ valeurs modulo $4m$. Mais en fait $\psi_{-\mu} = \psi_\mu$ de sorte que l'on a ainsi que $2m+1$ fonctions distinctes, par exemple pour μ allant de 0 à $2m$.

Les fonctions ψ_μ forment un système modulaire et les fonctions φ_v sont des combinaisons linéaires des fonctions ψ_μ .

De là, nous déduisons des approximations très précises de φ_v au voisinage des points h/k . On a immédiatement :

$$\varphi_v(z) = \psi_{m-2v}(z) - \psi_{m+2v}(z) ; \quad (24)$$

on a aussi :

$$\psi_\mu(z+1) = e^{i\mu^2 \pi / 4m} \psi_\mu(z) \quad (25)$$

Enfin, la formule de Poisson (10) appliquée à ψ_μ donne

$$\psi_\mu(z) = \frac{1}{2\sqrt{m}} (i/z)^{1/2} \sum_{\rho=1}^{4m} \cos \frac{\mu\rho\pi}{2m} \psi_\rho(-1/z) ,$$

ce que nous écrivons de préférence

$$\psi_\mu(z) = (i/z)^{1/2} \left[\frac{1}{2\sqrt{m}} (\psi_0(-1/z) + (-1)^\mu \psi_{2m}(-1/z)) + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_1^{2m-1} \cos \frac{\mu\rho\pi}{2m} \psi_\rho(-1/z) \right] \quad (26)$$

LEMME 5. - Les matrices intervenant dans les formules (25) et (26) sont unitaires pour la forme $\frac{1}{2}x_0\bar{x}_0 + x_1\bar{x}_1 + \dots + x_{2m-1}\bar{x}_{2m-1} + \frac{1}{2}x_{2m}\bar{x}_{2m}$.

C'est évident pour la matrice intervenant dans la formule (25) . Pour celle qui intervient dans la formule (26) , cela résulte de son interprétation comme ma-

trice représentant la transformation de Fourier des fonctions paires sur le groupe $Z/4m$, la base utilisée étant

- ϵ_0 valant 1 en 0, et 0 ailleurs
- ϵ_μ valant $1/2$ en μ et en $4m-\mu$, 0 ailleurs (si $1 \leq \mu \leq 2m-1$)
- ϵ_{2m} valant 1 en $2m$, 0 ailleurs.

On a alors $\hat{\epsilon}_\mu(\nu) = \frac{1}{2\sqrt{m}} \sum_{\rho=1}^{4m} \epsilon_\mu(\rho) e^{-\frac{2i\pi\rho\nu}{4m}}$, d'où $\hat{\epsilon}_\mu(0) = \frac{1}{2\sqrt{m}}$, $\hat{\epsilon}_\mu(2m) = \frac{(-1)^\mu}{2\sqrt{m}}$;

et pour $\nu \notin \{0, 2m\}$ on a $\hat{\epsilon}_\mu(\nu) = \frac{\cos \frac{\pi\mu\nu}{2m}}{2\sqrt{m}}$ (cela revient à dire que

$$\hat{\epsilon}_\mu = \frac{1}{2\sqrt{m}} (\epsilon_0 + (-1)^\mu \epsilon_{2m}) + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_1^{2m-1} \cos \frac{\pi\mu\nu}{2m} \epsilon_\nu.$$

Or la base $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{2m}$ est une base de l'espace des fonctions paires, orthogonales et de carrés scalaires proportionnels à $2, 1, 1, \dots, 1, 2$.

LEMME 6. - Posons

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \psi_0(z) \\ \psi_1(z) \\ \vdots \\ \psi_{2m}(z) \end{pmatrix} \quad (27)$$

on a alors des formules

$$\Psi(z) = \left(\frac{1}{cz+d} \right)^{1/2} M \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \Psi \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) \quad (28)$$

où $M \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$ est unitaire pour la forme $\frac{1}{2} x_0 \bar{x}_0 + x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_{2m-1} \bar{x}_{2m-1} + \frac{1}{2} x_{2m} \bar{x}_{2m}$ chaque fois que a, b, c, d sont entiers avec $ad - bc = 1$.

Le groupe modulaire est en effet engendré par les transformations $z \rightarrow z+1$ et $z \rightarrow -1/z$; le lemme est alors évident par récurrence sur le nombre de transformations de ce type nécessaires pour obtenir $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$.

4. Approximations et majorations.

On a aisément des approximations des ψ_μ dans des demi-plans $\text{Im}(z) \geq \gamma$ (γ constante strictement positive quelconque). Le principe de ce qui suit est celui-ci : les transformations du groupe modulaire permettent d'en déduire des

approximations des ψ_μ dans les transformées de ce demi-plan. Or si $\gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, le demi-plan $\text{Im}(z) \geq \gamma$ contient un domaine fondamental de groupe modulaire ; ses transformées recouvrent alors tout le demi-plan $\text{Im } z > 0$. On aura donc un système d'approximations des ψ_μ (puis des φ_μ , puis de $F_A(z)$, à condition d'examiner $\eta(mz)$ utilisables partout. Soit D_∞ le demi-plan $\text{Im}(z) \geq \gamma$. On désigne par $D_{h/k}$ (h premier à k) le transformé de D_∞ par la transformation qui envoie ∞ en h/k ; alors $z \rightarrow \frac{az+b}{kz-h}$ ($ah-bk = 1$) envoie $D_{h/k}$ sur D_∞ , et $D_{h/k}$ est le disque tangent en h/k à $\mathbb{R}$ et de centre $\frac{h}{k} + \frac{i}{\gamma k}$. Si on se propose d'obtenir une première approximation de $p(n;A)$ et $q(n;A)$, il convient d'avoir des approximations des φ_ν dans $D_{0/1}$ et des majorations dans les autres $D_{h/k}$ (ainsi que des approximations de $\eta(z)$, $\eta(mz)$, $\eta(mz/2)$, mais cela est déjà connu).

Approximations dans $D_{0/1}$:

D'après (23), on a dans D_∞

$$\psi_\mu(z) = e^{\frac{\mu}{4m} i \pi z} \pmod{0 \left(\left| e^{\left(\frac{\mu}{4m} + 2 \right) i \pi z} \right| \right)} \quad (29)$$

donc dans $D_{0/1}$

$$\psi_{m-2\nu}(z) = \left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} \left[\frac{1}{2\sqrt{m}} \psi_0(-1/z) + \frac{1}{\sqrt{m}} \sin \frac{\nu\pi}{m} \psi_1(-1/z) \right] \pmod{0 \left(|z|^{-1/2} \left| e^{-\frac{i\pi}{mz}} \right| \right)} \quad (30)$$

et par suite, toujours dans $D_{0/1}$:

$$\varphi_\nu(z) = \left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} \times \frac{2 \sin \frac{\nu\pi}{m}}{\sqrt{m}} \cdot e^{-\frac{i\pi}{4mz}} \pmod{0 \left(|z|^{-1/2} \left| e^{-\frac{i\pi}{mz}} \right| \right)} \quad (31)$$

Ceci est applicable bien entendu à la fonction η . ($m = 3$, $\nu = 1$) et permet même d'avoir des approximations de $\eta(mz)$ ou $\eta(\frac{m}{2}z)$ puisque l'on peut changer la valeur de la constante γ qui fixe la grandeur des disques $D_{h/k}$.

De (31) et de (19) à (22) résultent alors les approximations de $F_A(z)$ dans $D_{0/1}$:

1er cas. $m \in A$; m impair ou $m/2 \in A$.

$$F_A(z) = \prod_{\substack{v < m/2 \\ v \notin A}} (2 \sin \frac{v\pi}{m}) \cdot \left(\frac{z}{i}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{i\pi}{12mz}\right) \cdot \exp\left(i\pi z \left(\frac{1}{12} + \sum_{\substack{v < m/2 \\ v \notin A}} \left(\frac{m}{12} - \frac{(m-2v)^2}{4m}\right)\right)\right) \\ \text{mod } 0(|z|^{1/2} \cdot |\exp(\frac{i\pi}{12mz} - \frac{3i\pi}{4mz})|) . \quad (32)$$

2e cas. $m \notin A$; m impair ou $m/2 \in A$.

$$F_A(z) = \frac{1}{\sqrt{m}} \prod_{\substack{v < m/2 \\ v \notin A}} (2 \sin \frac{v\pi}{m}) \cdot \exp\left(\frac{i\pi}{12mz}\right) \cdot \exp\left(i\pi z \left(\frac{1}{12} - \frac{m}{12} + \sum \left(\frac{m}{12} - \frac{(m-2v)^2}{4m}\right)\right)\right) \\ \text{mod } 0 \left(|e^{\frac{i\pi}{12mz} - \frac{3i\pi}{4mz}}| \right) . \quad (33)$$

3e cas. $m \in A$; m pair, $m/2 \notin A$.

$$F_A(z) = \sqrt{2} \prod_{\substack{v < m/2 \\ v \notin A}} (2 \sin \frac{v\pi}{m}) \left(\frac{z}{i}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{i\pi}{12mz}\right) \cdot \exp\left(i\pi z \left(\frac{1}{12} + \frac{m}{24} + \sum \left(\frac{m}{12} - \frac{(m-2v)^2}{4m}\right)\right)\right) \\ \text{mod } 0(|z|^{1/2} \cdot |\exp(\frac{i\pi}{12mz} - \frac{3i\pi}{4mz})|) . \quad (34)$$

4e cas. $m \notin A$; m pair, $m/2 \notin A$.

$$F_A(z) = \sqrt{\frac{2}{m}} \prod_{\substack{v < m/2 \\ v \notin A}} (2 \sin \frac{v\pi}{m}) \cdot \exp\left(\frac{i\pi}{12mz}\right) \cdot \exp\left(i\pi z \left(\frac{1}{12} - \frac{m}{24} + \sum \left(\frac{m}{12} - \frac{(m-2v)^2}{4m}\right)\right)\right) \\ \text{mod } 0(|\exp(\frac{i\pi}{12mz} - \frac{3i\pi}{4mz})|) . \quad (35)$$

Ces formules peuvent d'ailleurs se réduire à deux cas :

Cas $m \in A$.

$$F_A(z) = \prod_{\substack{v < m \\ v \notin A}} (2 \sin \frac{v\pi}{m})^{1/2} \cdot \left(\frac{z}{i}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{i\pi}{12mz}\right) \cdot \exp(+2i\pi z) \\ \text{mod } 0(|z|^{1/2} |\exp(\frac{i\pi}{12mz} - \frac{3i\pi}{4mz})|) \quad (36)$$

Cas $m \notin A$.

$$F_A(z) = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \prod_{\substack{v < m \\ v \notin A}} (2 \sin \frac{v\pi}{m})^{1/2} \cdot \exp(\frac{i r \pi}{12 m z}) \cdot \exp(2 i \pi \alpha z) \\ \text{mod } 0(|\exp(\frac{i r \pi}{12 m z} - \frac{3 i \pi}{4 m z})|) . \quad (37)$$

Majorations en dehors de $D_{0/1}$. On majore en dehors de $D_{0/1}$ en majorant dans les $D_{h/k}$ ($k \geq 2$), puisque les $D_{h/k}$ recouvrent le demi-plan $\text{Im } z > 0$. Le lemme 6 joue ici un rôle essentiel : les matrices $M(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$ de la formule (28) étant unitaires (pour une forme convenable) ont leurs coefficients majorés en module par une même constante. On a alors la possibilité d'avoir des majorations uniformes en k pour tous les disques $D_{h/k}$. L'additif à la proposition 1 va servir également à nous dispenser de certains calculs.

Dans $D_{h/k}$, on utilise la transformation $z \rightarrow \frac{az+b}{kz-h}$ qui ramène à D_∞ . On a alors avec des développements limités poussés assez loin des fonctions $\psi_\mu : F_A(z) \in O(|\sum C_n e^{-i \beta_n \pi / (z-h/k)}|)$ dans $D_{h/k}$ ou la somme des $|C_n|$ est majorée par une constante absolue C (grâce au lemme 6), les β_n dépendant de la fraction h/k . Or, si β est le plus grand des β_n tels que le développement limité de $F_A(z)$ contienne effectivement $e^{-i \beta \pi / (z-h/k)}$ ceci est l'ordre de grandeur de $F_A(z)$. L'additif à la proposition 1 montre alors que le β est majoré par un β_0 strictement inférieur à $r/12m$.

On a alors en dehors de $D_{0,1}$:

$$F_A(z) \in O(e^{\pi \beta_0 / \text{Im } z}) \quad \text{ou} \quad \beta_0 < \frac{r}{12m} .$$

5. Résultats : équivalents de $p(n;A)$ et $q(n;A)$.

Il suffit d'appliquer les formules de Cauchy

$$p(n;A) = \int_{-1/2+i\epsilon}^{1/2+i\epsilon} F_A(z) e^{-2i\pi n z} dz \\ q(n;A) = \int_{-1/2+i\epsilon}^{1/2+i\epsilon} \frac{F_A(z)}{F_A(2z)} e^{-2i\pi n z} dz$$

avec un ϵ convenable. On divise en trois parties I_1, I_2, I_3 l'intervalle d'inté-

gration I_2 étant l'intersection avec le disque $D_{0,1}$. On utilise sur I_2 l'approximation de $F_A(z)$ ou $\frac{F_A(z)}{F_A(2z)}$, tandis qu'on utilise les majorations sur I_1 et I_3 .

Cette technique élémentaire mais fastidieuse (cf. [A]) donne les résultats suivants :

Cas où $m \in A$.

$$p(n;A) \sim \prod_{\substack{0 < v < m \\ v \notin A}} (2 \sin \frac{\pi v}{m})^{1/2} \sqrt{\frac{r}{48m}} \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{\pi \sqrt{\frac{2rn}{3m}}}$$

$$q(n;A) \sim \frac{1}{4} \sqrt[4]{\frac{r}{3m}} \cdot \frac{1}{n^{3/4}} e^{\pi \sqrt{\frac{rn}{3m}}}$$

Cas où $m \notin A$.

$$p(n;A) \sim \frac{1}{\sqrt{m}} \prod_{\substack{0 < v < m \\ v \notin A}} (2 \sin \frac{\pi v}{m})^{1/2} \cdot \sqrt[4]{\frac{r}{24m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot n^{3/4}}} \cdot e^{\pi \sqrt{\frac{2rn}{3m}}}$$

$$q(n;A) \sim \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{r}{3m}} \cdot \frac{1}{n^{3/4}} \cdot e^{\pi \sqrt{\frac{rn}{3m}}}$$

Remarque : Il est clair qu'au moyen d'approximations assez précises, non seulement dans $D_{0/1}$ mais encore dans $D_{1/2}$, $D_{1/3}$, $D_{2/3}$ etc... c'est-à-dire les $D_{h/k}$ avec $k \leq K$, on aurait des développements limités de $p(n;A)$. Peut-être pourrait-on avoir même une série analogue à celle de Rachemacher ([A], [R]). De telles formules seraient des curiosités inutilisables, car d'une complication très grande.

CHAPITRE III

EN DEHORS DE LA CONDITION DE SYMETRIE, RECHERCHES ET CONJECTURES.

1. Comportement de $f_A(x)$ pour $x \in [0,1]$.

Soit $f_{v+nm}(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{v+nm})}$ avec $x = e^{2i\pi z}$; la théorie de la fonc-

tion η donne pour z imaginaire pur

$$\text{Log } f_{m+nm}(x) = \frac{i\pi}{12mz} + \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{z}{i} \right) + \frac{1}{2} \text{Log } m \pmod{0(1)}.$$

On peut poser pour tout $v \in \mathbb{N}^*$, $\text{Log } f_{v+nm}(x) = \frac{i\pi}{12mz} + \frac{1}{m} \left(v - \frac{m}{2} \right) \text{Log} \left(\frac{z}{i} \right) + C_v(z)$.

On a facilement alors $C_{v+m}(z) = C_v(z) + \text{Log } \frac{v}{m} + \text{Log}(2\pi m) \pmod{0(1)}$ et pour
 v multiple de z , $C_v(z)$ admet une limite pour z imaginaire pur tendant vers zéro. On va "interpoler" ce comportement. Pour cela on vérifie d'abord :

$$\text{Log } \frac{f_{v+nm}(x) f_{v+2+nm}(x)}{(f_{v+1+nm}(x))^2} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \frac{x^{qv} - x^{q(v+1)}}{1+x^q + \dots + x^{(m-1)q}} > 0 \quad (\text{pour } x \in [0,1]).$$

Cette convexité montre que pour tout $v \in \mathbb{N}^*$, $C_v(z)$ tend vers une limite pour $z \rightarrow 0$, laquelle s'exprime au moyen de la fonction $\text{Log } \Gamma$:

$$C_v(z) = \left(\frac{v}{m} - \frac{1}{2} \right) \text{Log } m + \left(\frac{v}{m} - 1 \right) \text{Log } 2\pi + \text{Log } \Gamma \left(\frac{v}{m} \right) \pmod{0(1)};$$

autrement dit :

$$\text{THEOREME.} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{2i\pi(v+nm)z}} \sim m^{\left(\frac{v}{m} - \frac{1}{2} \right)} \cdot (2\pi)^{\frac{v}{m} - 1} \cdot \Gamma \left(\frac{v}{m} \right) e^{\frac{i\pi}{12mz}} \cdot \left(\frac{z}{i} \right)^{\left(\frac{v}{m} - \frac{1}{2} \right)}$$

pour z imaginaire pur tendant vers zéro.

Il serait intéressant évidemment de majorer la différence des expressions ci-dessus dans $D_{0/1}$ par exemple, et de majorer le membre de gauche en dehors. Ceci suggère la conjecture : si A est réunion de r progressions de raison m et de premiers termes $v_1, \dots, v_r$ on a :

$$p(n; A) \sim m^{\sum \left(\frac{v_j}{m} - \frac{1}{2} \right)} \cdot (2\pi)^{\sum \left(\frac{v_j}{m} - 1 \right)} \cdot \prod \Gamma \left(\frac{v_j}{m} \right) \cdot \frac{\left(\frac{r}{24m} \right)^{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{v_j}{m} - \frac{1}{2} \right)}}{\sqrt{2} \cdot n^{\frac{3}{4} + \sum \left(\frac{v_j}{m} - \frac{1}{2} \right)}} \cdot e^{\pi \sqrt{\frac{2rn}{3m}}}$$

ainsi que

$$q(n; A) \sim \frac{1}{2^{\frac{3}{2} + \sum \left(\frac{v_j}{m} - \frac{1}{2} \right)}} \cdot \sqrt{\frac{r}{3m}} \cdot \frac{1}{n^{3/4}} \cdot e^{\pi \sqrt{\frac{rn}{3m}}}$$

-:-:-:-