MÉMOIRES DE LA S. M. F.

RICHARD BECKER

# Deux relations d'équivalence sur un espace $L^1$

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 35 (1973), p. 57-80
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1973__35__57_0>

Bull. Soc. math. France
Mémoire 35, 1973, p. 57-80.



# DEUX RELATIONS D'EQUIVALENCE SUR UN ESPACE $L^1$.

par Richard BECKER.

Ce travail a fait l'objet, en grande partie, de deux exposés au "Séminaire d'Initiation à l'Analyse" de Monsieur CHOQUET (Séances des 11 et 18 Mars 1971) à qui je tiens à renouveler ici mes remerciements les plus respectueux. (cf: [1]).

## I. PRELIMINAIRES.

### I.1. INTRODUCTION.

GARLING (cf:[2]) a étudié les "Espaces de KÖTHE" (cf:[3]), "symétriques", c'est à dire, au fond, stables par la relation d'équivalence induite, sur l'ensemble des suites, par la permutation des termes.

Le point de départ de ce travail est une tentative pour trouver l'analogue de cette relation d'équivalence, lorsque $R^N$ est remplacé par l'ensemble $M$ des (classes de) fonctions mesurables, sur la tribu $T$ des (classes d')ensembles dx-mesurables de $[0,1]$.

### I.2. PREMIERES DEFINITIONS.

C'est dans ce but qu'on introduit les trois relations d'équivalence suivantes sur $M$ :

#### I.2.1. Définition.

On dit que deux fonctions $f,g \in M$ sont "équivalentes", et on note $fEg$, lorsque : $\forall k \in \overline{R}$, on a : $m(x:f(x) \geqslant k) = m(y:g(y) \geqslant k)$. ($m$ désigne la mesure de Lebesgue d'un ensemble dx-mesurable, contenu dans $[0,1]$)

#### I.2.2. Défitinion.

On dit que deux fonctions $f,g \in M$ sont "fortement équivalentes", et on note $fFg$, lorsqu'il existe une "transformation presque biunivoque" de $[0,1]$ en lui-même, conservant la mesure, (ou un automorphisme de T, cf:[5] Satz 1) qui les échange.

I.2.3. Définition.

On dit que deux fonctions $f,g \in M$ sont "dyadiquement équivalentes", et on note fDg, lorsqu'il existe un automorphisme dyadique de T qui les échange.(cf:1.4.2.).

Il sera également commode d'utiliser la notation suivante :

I.2.4. Définition.

Si $f \in M$ est dans $L^1$,(dx-intégrable), on pose :

$$S_f(t) = \sup_{\substack{e \\ m(e)=t}} \int_e |f(u)|\,du. \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

1.3. PLAN

Dans II, on étudie et on compare les relations d'équivalence précédentes, en utilisant le fait que T est "homogène" dans le sens de [4].

Dans III, on associe, à tout $f \in L^1$, un sous-ensemble $B_f$ de $L^1$, convexe et faiblement compact, contenant f, ayant certaines propriétés de minimalité et de stabilité à l'égard des relations d'équivalence précédentes. On étudie la géométrie de $B_f$; les résultats concernent principalement l'ensemble $\mathcal{E}(B_f)$ des points extrémaux de $B_f$.

Dans IV, on étudie certains espaces de Banach ($B_f$ est la boule unité de l'un deux) ainsi qu'une dualité entre certains sous-espaces vectoriels de $L^1$, associés aux relations d'équivalence étudiées. Cette dernière étude repose finalement sur une propriété "d'équi-intégrabilité forte" qui peut s'interpréter comme un renforcement de la condition d'équi-intégrabilité au sens de DUNFORD-PETTIS.(cf:[6], pages 109 à 113).

I.4. NOTATIONS ET RAPPELS.

I.4.1.

$L^1_+$, $L^\infty$, $L^\infty_+$,désignent respectivement l'ensemble des(classes de) fonctions intégrables $\geqslant 0$, mesurables bornées, mesurables bornées $\geqslant 0$, sur $[0,1]$ muni de la mesure dx.

I.4.2.

On dit qu'un automorphisme $\theta$ de T est "dyadique" s'il existe un entier n et une permutation $\mu$ de $(1,2,..,2^n)$ tels que $\theta$ soit induit par la bijection $\hat{\theta}$ suivante, de $[0,1[$ sur lui-même :

$$\forall k \in (1,2,..,2^n) \;,\quad \forall x \in [\,(k-1)/2^n,\ k/2^n\,[\;,\ \hat{\theta}(x) = (\mu(k)-k)/2^n + x.$$

I.4.3.

Etant donné un ensemble convexe K, contenu dans un espace localement convexe séparé,on dit qu'une forme $l \in (E'\setminus 0)$ "expose" le point $x \in K$ si

$l(K) \subseteq [\,l(x) \rightarrow [$ ou bien si $l(K) \subseteq \,]\leftarrow l(x)]$ ; si, de plus, $l(x) \notin l(K \setminus x)$, on dit que $l$ "expose fortement" x.

## II. LES DIVERSES EQUIVALENCES ET L'APPLICATION $f \rightsquigarrow S_f$.

### II.1. PREMIERES PROPRIETES.

#### II.1.1. Proposition.

Si $f \in L^1$, la fonction $t \rightsquigarrow S_f(t)$, de $[0,1]$ dans R, est une fonction concave, continue, positive, nulle en 0.

Preuve :

Elle découle essentiellement du fait que T n'a pas d'atome :
Soient $e_1, e_2 \in T$, avec $m(e_i) = t_i$ et $S_f(t_i) \leqslant \int_{e_i} |f(u)|\,du + \varepsilon$,où $\varepsilon > 0.(i=1,2)$
on peut alors trouver $e_o \in T$ tel que :

$$m(e_o) = \frac{t_1 + t_2}{2} \quad \text{et} \quad S_f\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) + \varepsilon \geqslant \frac{S_f(t_1) + S_f(t_2)}{2} \;.$$

#### II.1.2. Proposition.

Si une suite $(g_n)$ dans $L^1$ converge dans $L^1$ vers $g_o \in L^1$, on a :

$$\forall t \in [0,1] \;:\; S_{g_n}(t) \rightarrow S_{g_o}(t) \;.$$

Preuve :

Il suffit de remarquer que si $\varphi$, $\Psi \in L^1$, on a pour tout e dx-mesurable :

$$\left| \int_e |\varphi| - \int_e |\Psi| \right| \leqslant \int_0^1 |\varphi - \Psi| \;.$$

#### II.1.3. Théorème.

Si $f \in M$, il existe une fonction $f_r \in M$, décroissante, univoquement déterminée en ses points de continuité, équivalente à f. Si, de plus, $f \in L^1_+$, on a :

$$S_f(t) = \int_0^t f_r(u)\,du.$$

Preuve :

Lorsque $f \in L^1_+$ , on vérifie que la dérivée de $S_f$ (qui existe sauf, peut-être, sur un ensemble au plus dénombrable) convient.

On passe ensuite au cas $f \geqslant 0$ et finie partout, puis au cas général.

II.2. RELATIONS ENTRE L'EQUIVALENCE ET LES EQUIVALENCES FORTES.

Si fFg on a fEg mais l'inverse est faux.

En effet, considérons la fonction $\varphi(x,y) = x$, définie sur $[0,1]\times[0,1]$ , un isomorphisme de la tribu $([0,1]^2, dxdy)$ sur T transforme $\varphi$ en $\hat{\varphi}$ :

On a alors $\hat{\varphi}E(x \rightsquigarrow x)$, mais non pas $\hat{\varphi}F(x \rightsquigarrow x)$.

De même, considérons la fonction $x \rightsquigarrow [2x]$ (classe de 2x, modulo 1) définie sur $[0,1]$

On a alors $(x \rightsquigarrow [2x])E(x \rightsquigarrow x)$, mais non pas $(x \rightsquigarrow [2x])F(x \rightsquigarrow x)$

On pourrait aussi donner des exemples faisant appel à la courbe de PEANO.

On va établir un lien entre équivalence et équivalence forte :

II.2.1. Théorème.

Pour tous fEg $\in$ M, il existe une suite $(g_n)$ dans M, telle que : $g_n$Fg et $g_n \to f$ uniformément.

Preuve :

Il suffit de remarquer que, d'après ([4], théorème 1) il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un automorphisme de T qui échange respectivement les ensembles suivants (de même mesure) :

$$(x:\ n\varepsilon \leqslant \varphi(x) < (n+1)\varepsilon)\ ,\ (x:\ \varphi(x) = -\infty)\ ,\ (x:\ \varphi(x) = +\infty),\ \text{où } \varphi = f,g.$$

On va, de façon analogue, établir un lien entre équivalence et équivalence dyadique:

II.2.2. Théorème.

Pour tous fEg $\in$ M, il existe une suite $(g_n)$ dans M telle que : $g_n$Dg et $g_n \to f$ presque uniformément (uniformément sur chaque $e_k$ d'une suite $e_k \in T$, telle que $m(e_k) \to 1$).

Si, de plus, $f \in L^1$ on a $g_n \to f$ dans $L^1$.

Preuve :

Il suffit de prouver que $\forall \varepsilon, \mu > 0$, on peut trouver $g_{\varepsilon,\mu}$ telle que :

$$(g_{\varepsilon,\mu})Dg \quad \text{et} \quad m(x: |f(x) - g_{\varepsilon,\mu}(x)| > \varepsilon) \leqslant \mu.$$

Pour cela on reprend la démonstration de (II.2.1.) et on observe qu'un ensemble dx-mesurable e diffère d'aussi peu que l'on veut d'un ensemble dyadique (réunion finie de segments $[k/2^n, (k+1)/2^n]$ ).

Le théorème suivant sera utile dans (III):

II.2.3. Théorème.

Si $g \in L^\infty$ et si $f \in L^1$, la borne supérieure des intégrales $\left| \int_0^1 \varphi(u) g(u) du \right|$, où $\varphi$ décrit l'ensemble $(\psi : \psi \in L^1$ et $\exists d \in T$, dyadique, tel que $\psi\, D(f-2f\times 1(d)))$, est $\int_0^1 (|f|_r)(u) \times (|g|_r)(u) du$.

Preuve :

Compte tenu de (II.2.2.), on peut voir que la borne supérieure cherchée est supérieure à : $\int_0^1 (|f|_r)(u) \times (|g|_r)(u) du$.

Montrons alors que, si $g \in L_+^\infty$ et si $f \in L_+^1$, on a : $\int_0^1 fg \leqslant \int_0^1 f_r g_r$.
D'après (II.2.1.) il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un automorphisme $T_\varepsilon$ tel que $\|g_r - T_\varepsilon(g)\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On a alors : $\int_0^1 gf = \int_0^1 (T_\varepsilon f) \times (T_\varepsilon g) \leqslant \int_0^1 (T_\varepsilon f) g_r + \varepsilon \|f\|_1$.
En effectuant une intégration"par parties" et en prenant une intégrale de STIELTJES de "droite à gauche" il vient :

$$\int_0^1 gf \leqslant \int_{1^-}^0 \left(\int_0^t T_\varepsilon f\right) dg_r(t) + \varepsilon\|f\|_1 \leqslant \int_{1^-}^0 S_f(t) dg_r(t) + \varepsilon\|f\|_1 = \int_0^1 f_r g_r + \varepsilon\|f\|_1 .$$

D'où le théorème.

## III. DEFINITION ET GEOMETRIE DE $B_f$.

### III.1. DEFINITION ET PROJECTION DE $B_f$.

III.1.1. Définition.

Pour tout $f \in L^1$, on note $B_f$ l'enveloppe convexe fermée, pour la topologie forte de $L^1$, de l'ensemble $(\varphi : \varphi \in L^1$ et $\exists d \in T$, dyadique, tel que

$\varphi D(f-2f \times 1(d)))$.

III.1.2. Théorème.

a) Pour $\varphi \in L^1$, on a : $\varphi \in B_f \Leftrightarrow S_\varphi(t) \leqslant S_f(t)$, pour tout $t \in [0,1]$.

b) $B_f$ est un convexe faiblement compact de $L^1$ et ne dépend de $f$ qu'à une équivalence près en module.

Preuve :

Si $\varphi = \sum_1^n \alpha_i f_i$ avec $\alpha_j \geqslant 0$, $\sum_1^n \alpha_k = 1$ et $|f_1| E |f|$, on a : $S_\varphi \leqslant S_f$.

Par conséquent $\varphi \in B_f \Rightarrow S_\varphi \leqslant S_f$.

Si $g \in L^\infty$, on a $g \in (B_f)^0$, pour la dualité $6(L^1, L^\infty)$, ssi, d'après (II.2.3.),

$$\int_0^1 |g|_r \times |f|_r = \int_{1-}^{0} S_f(t)\,d|g|_r(t) \leqslant 1.$$

Par conséquent, si $S_\varphi \leqslant S_f$, on a $\varphi \in B_f$ et le théorème est prouvé.

III.1.3. Définition.

Si $e \in T$, on définit l'ensemble, noté $(B_f)|_e$, par :

$$(B_f)|_e = (\varphi : \exists\, \hat\varphi \in B_f,\ \text{avec}\ \varphi = \hat\varphi|_e).$$

III.1.4. Théorème.

Tout isomorphisme de $(e,dx)$ sur $([0,m(e)], dy)$ induit une bijection affine de $(B_f)\big|_e$ sur $B_{(|f|_r)}\big|_{[0,m(e)]}$ construit sur le segment $[0,m(e)]$.

Preuve :

Soit $\theta$ un isomorphisme de $(e,dx)$ sur $([0,m(e)], dy)$ :

Si $\varphi \in (B_f)|_e$, on a $\varphi = \hat\varphi|_e$ où $\hat\varphi \in B_f$, et, si $u \subseteq e$, on a $\int_u |\varphi| = \int_u |\hat\varphi| \leqslant S_f(m(u))$.

Finalement on a l'égalité annoncée car $1(e) \times \theta^{-1}((|f|_r)\big|_{[0,m(e)]}) \in B_f$.

III.2. ETUDE DE $\mathcal{E}(B_f)$.

III.2.1. Théorème.

On a $\mathcal{E}(B_f) = (\varphi : |\varphi| E |f|)$ et cet ensemble est un fermé de $L^1$.

Preuve :

Il s'agit de prouver que $\mathcal{E}(B_f) = (\varphi : S_\varphi = S_f)$ ; il résulte alors de (II.1.2.) que cet ensemble est fermé dans $L^1$.

(III.2.1.) exprime que deux ensembles sont identiques; prouvons d'abord une inclusion :

III.2.2. Lemme.

Si $S_\varphi = S_f$, alors $\varphi \in \mathcal{E}(B_f)$.

Preuve :

Supposons $\varphi \geqslant 0$ avec $\varphi = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in B_f$.

On a : $S_f(1) = \int_0^1 |\varphi_1| = \int_0^1 |\varphi_2| = \int_0^1 \varphi_1 = \int_0^1 \varphi_2$. D'où : $\varphi_1, \varphi_2 \geqslant 0$.

Si $E_k = (x:f(x) \geqslant k)$ et $F_h = (x:f(x) > h)$ on a :

$$\int_{E_k} \varphi_i = S_f(m(E_k)) \quad \text{et} \quad \int_{F_h} \varphi_i = S_f(m(F_h)) \quad (i = 1,2)$$

On a donc, pour les nombres $m(E_k)$ et $m(F_h)$ : $S_\varphi = S_{\varphi_1} = S_{\varphi_2} = S_f$.

Si $m_o \in [0,1]$ et si $m_o \notin \left(m(E_k)\right) \cup \left(m(F_h)\right)$, alors il existe $u_o \in R^+$ avec : $m(E_{u_o}) > m_o > m(F_{u_o})$.

Sur $\left[m(E_{u_o}), m(F_{u_o})\right]$, $S_\varphi = S_f$ est affine (de pente $u_o$); $S_{\varphi_1}$ et $S_{\varphi_2}$ étant concaves on a $S_{\varphi_1} = S_{\varphi_2} = S_\varphi = S_f$ partout. D'où $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$.

Si $S_\varphi \neq S_f$ $(\varphi \geqslant 0)$ on va construire une décomposition $\varphi = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ avec $\varphi_1 \neq \varphi_2$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in B_f$:

On a $S_\varphi < S_f$ sur un ensemble ouvert de $]0,1]$, qui est une réunion dénombrable d'ensembles ouverts non $\emptyset$ $]a_i,b_i[$ (sauf si $b_i = 1$, cas où l'on peut avoir $]a_i,1]$) deux à deux disjoints. Soit $]t_1,t_2[$ l'un de ces intervalles où on supposera, par exemple, $t_1 \neq 0$ et $t_2 \neq 1$; on va alors utiliser un nouveau lemme:

III.2.3. Lemme.

Si, sur $]t_1, t_2[$, $S_\varphi$ est affine, $\varphi$ n'est pas extrémale.

Preuve :

$\exists$ $v_o > 0$, tel que, sur $]t_1, t_2[$, $\varphi_r = v_o$, $\varphi_r$ étant discontinue en $t_1$ et $t_2$.
Si $E_o = (x:\varphi(x) = v_o)$, $m(E_o) = t_1 - t_2$.
Il existe une partition de $E_o$, en $\hat{E}_o$ et $\check{E}_o$, de même mesure; alors $\varphi_1 = \varphi + k(1_{\hat{E}_o} - 1_{\check{E}_o})$ et $\varphi_2 = \varphi - k(1_{\check{E}_o} - 1_{\hat{E}_o})$ répondent à la question, si $k > 0$ est assez petit.

III.2.4. Remarque.

Le cas où l'on peut partager $]t_1, t_2[$ en deux segments $]t_1,\theta[$ et $[\theta, t_2[$ sur chacun desquels $S_\varphi$ est affine, $S_\varphi$ n'étant pas affine sur $]t_1, t_2[$, se ramène au précédent.

Il s'agit maintenant de prouver un dernier lemme :

III.2.5. Lemme.

Dans les cas contraires à (III.2.3. et 4), $\varphi$ n'est pas extrémale.

Preuve :

Sur $\left]t_1, t_2\right[$ la fonction $\varphi_r$ prend au moins trois valeurs essentielles, soient $v_+ > v_o > v_-$.

Il existe $k > 0$ tel que : $(v_+ - 2k) > (v_o + 2k) > (v_o - 2k) > (v_- + 2_k)$.

Si $E_+ = (x:\varphi \geqslant (v_+ - k))$, on a : $m(E_+) = \tilde{t}_1 > t_1$.

Si $E_- = (x:\varphi \geqslant (v_- - k))$, on a : $m(E_-) = \tilde{t}_2 < t_2$.

Si $E_o = (x: (v_o - k) \leqslant \varphi \leqslant (v_o + k))$; on a : $m(E_o) > 0$.

Il existe alors une partition de $E_o$, en $\hat{E}_o$ et $\check{E}_o$, de même mesure ;si on pose :

$\varphi_1 = \varphi + \varepsilon(1_{\hat{E}_o} - 1_{\check{E}_o})$ et $\varphi_2 = \varphi - \varepsilon(1_{\hat{E}_o} - 1_{\check{E}_o})$ , $\varphi_1$ et $\varphi_2$ constituent la décomposition cherchée si $\varepsilon > 0$ est assez petit.

III.2.5. Théorème.

$B_f = \overline{\mathcal{E}(B_f)}$ pour la topologie $6(L^1, L^\infty)$.

Preuve :

Il suffit de prouver que,si $g \in L^1_+$ et $\int_0^1 g = \int_0^1 |f|$, alors $g \in B_f$ entraine $g \in \overline{(\varphi: \varphi E|f|)}$.

Supposons $\int_0^1 |f| = 1$ et montrons que : $1 \in \overline{(\varphi: \varphi E|f|)}$ :

Fixons $n$ et soient $(e_1, e_2, .., e_2n)$ les segments du découpage de $[0,1]$ en $2^n$ parties égales. Il existe alors $\theta \in [0,2^{-n}]$ tel que :

$\left[S_f(\theta) + (S_f(1) - S_f(1 - 2^{-n} + \theta))\right] = 2^{-n}$.

En considérant ensuite le segment$[\theta , 1- 2^{-n} + \theta]$,et en répétant le procédé précédent, on voit qu'il existe $(\varphi_n) E |f|$, telle que : $\forall p, 1 \leqslant p \leqslant 2^n$ , on ait :

$\int_{e_p} \varphi_n = 2^{-n}$.

On a donc bien : $1 \in \overline{(\varphi: \varphi E|f|)}$.

On passe ensuite, par récurrence, au cas où $S_g$ est "affine par segments"

si $\left(S_g(t) = kt\right.$ au voisinage de 0, on raisonne sur : $\left.\inf((t \rightsquigarrow kt) , S_g)\right)$ puis au cas général en remplaçant $g \in B_f$, sur des ensembles convenables, par sa moyenne.

III.2.6. Théorème.

Les topologies fortes et faibles de $L^1$ ont des traces identiques sur $\mathcal{E}(B_f)$.

Preuve :

Il s'agit de montrer que tout voisinage fort de $f$ contient un voisinage faible de $f$ . On peut supposer $f \in L^1_+$

On se donne $\varepsilon > 0$ et on pose $E_p = (x : f(x) \geqslant p\varepsilon)$, où $p$ est un entier $> 0$.

Si $g \in \mathcal{E}(B_f), g \geqslant 0$, on a $g \geqslant p\,\varepsilon$ sur $E_p$ sauf, sur un ensemble de mesure $m_g$, telle que :

$$\int_{E_p} g(u)du \leqslant \int_0^a f_r(u)du + \int_{m(E_p)}^b f_r(u)du \quad \text{où : } a = m(E_p) - m_g \text{ et : } b = m(E_p) + m_g.$$

Sur un voisinage faible convenable de $f$ on a, pour un certain $\alpha > 0$ :

$$\left| \int_{E_p} f(u)du - \int_{E_p} g(u)du \right| \leqslant \alpha \; ; \text{ d'où : } \int_a^{m(E_p)} f_r(u)du - \int_{m(E_p)}^b f_r(u)du \leqslant \alpha$$

Il en résulte que, si $\alpha \to 0$, $\varepsilon$ et $p$ étant fixés, on a $m_g \to 0$, uniformément en $g$ (où $g \geqslant 0$).

On applique ce procédé à un nombre fini convenable d'ensembles $E_p$, pour $\varepsilon$ bien choisi. Si on n'a pas $g \geqslant 0$, on peut raisonner sur $|g|$.

## III.3. EXPOSITION FORTE ET REORDONNEE PAR RAPPORT A UNE FONCTION.

### III.3.1. Lemme.

Si $g \in (L^\infty \setminus 0)$, le fait que $g$ soit, ou non, une forme d'exposition forte de $B_f$, ne dépend que de $|g|$ à une équivalence près.

Preuve :

Soient $\hat{g} E \tilde{g} \in (L_+^\infty \setminus 0)$; supposons que $\tilde{g}$ expose fortement l'élément $\tilde{f}$, mais que $\hat{g}$ n'expose fortement aucun élément de $B_f$.

L'ensemble $\left(\varphi : \varphi \in B_f \text{ et } \int \varphi \hat{g} = \int |f|_r \hat{g}_r\right)$ est alors une face de $B_f$ non réduite à un point.

Soient alors $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ deux points extrémaux distincts de cette face, on a :

$$|\hat{f}_1| E |\hat{f}_2| E |\tilde{f}| E |f| .$$

Soient $(\theta_n)$ une suite d'automorphismes de $T$ (cf:II.2.1.), telle que :

$\theta_n(\hat{g}) \to \hat{g}_r$ en $\| \|_\infty$ et: $\theta_n(\hat{f}_i) \to \tilde{f}_i$ au sens $6(L^1, L^\infty)$. $(i = 1,2)$

on a alors: $\int(\hat{f}_1)\hat{g} = \int \theta_n(\hat{f}_1) \times \theta_n(\hat{g}) = \int (\tilde{f}_1)\tilde{g} = \int (\tilde{f}_2)\tilde{g} = \int |f|_r g_r$.

D'où : $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 = \tilde{f}$.

Et alors $\theta_n(\hat{f}_i) \to \tilde{f}$ $(i = 1,2)$ dans $L^1$ (cf: III.2.6.) d'où $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$

### III.3.2. Lemme.

Soient $f \in L_+^1$ et $g_r \in (L_+^\infty \setminus 0)$, décroissante ; les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $g_r$ expose fortement $f_r$ dans $B_f$.

b) Le support de la mesure $df_r$, sur $]0,1]$, est contenu dans le support de la mesure $dg_r$ sur $]0,1]$.

c) Le support de la mesure $df_r$, sur $]0,1[$, est contenu dans le support de la mesure $dg_r$ sur $]0,1[$ ; de plus $f_r > 0 \Rightarrow g_r > 0$, en tout point de continuité de $]0,1[$ des deux fonctions.

Preuve :

Il est clair que b) et c) sont équivalents.

Supposons c) non vérifié :

Si l'inclusion sur les supports des mesures $df_r$ et $dg_r$ sur $]0,1[$ n'est pas vérifiée, il existe un segment ouvert, non $\emptyset$, $]a,b[ \subset ]0,1[$ sur lequel $g_r$ est constante et $f_r$ varie; $g_r$ ne saurait alors exposer fortement $f_r$ dans $B_f$.

De même, si en un point de $]0,1[$, de continuité de $f_r$ et $g_r$, on a $f_r > 0$ et $g_r = 0$, $g_r$ ne peut exposer fortement $f_r$.

Inversement, supposons c) vérifié, et que l'on ait pour $\varphi \in B_f$ :

$$\int_0^1 \varphi g_r = \int_0^1 f_r g_r = \int_0^1 |\varphi| g_r \quad \text{ou} : \int_{1^-}^{0} (S_f(t) - \int_0^t |\varphi(u)| du) dg_r(t) = 0 .$$

Si on pose : $E_k = (x : f_r(x) \geqslant k)$ et $F_h = (x : f_r(x) > h)$ alors,

si $t \in (1) \cup (m(E_k)) \cup (m(F_h))$, on a : $S_f(t) = S_\varphi(t)$.

Il en résulte que $S_f = S_\varphi$ partout (cf:preuve de (III.2.2.)) car $S_\varphi$ est concave.

On a alors $\varphi = f_r$ car $f_r > 0 \Rightarrow g_r > 0$ en tout point de continuité de $]0,1[$ des deux fonctions.

On introduit maintenant la définition suivante :

III.3.3. Définition.

On se donne $g \in (L_+^\infty \setminus 0)$, et $f \in L_+^1$ où $g_r$ vérifie les conditions de (III.3.2.). On dit alors que l'élément $f_g$, en lequel l'hyperplan $(\varphi : \int \varphi\, g = \int f_r g_r)$ touche $B_f$, est le réordonné de $f$ par rapport à $g$.

Le théorème suivant identifie les formes d'exposition forte de $B_f$ au point $f$:

III.3.4. Théorème.

La fonction $g \in L^\infty$, expose fortement $B_f$ au point $f \geqslant 0$, ssi, il existe une fonction décroissante $\varphi_r \in (L_+^\infty \setminus 0)$, telle que :

a) $\varphi_r$ verifie les conditions de (III.3.2.).

b) Si $e_k = (x:f(x) = k)$ et $e_{h_r} = (x:f_r(x) = h)$ on a :

pour $k > 0$ : $(g \times 1(e_k))\ E\ (\varphi_r \times 1(e_{k_r}))$

et pour $k = 0$ :$(|g| \times 1(e_o))\ E\ (\varphi_r \times 1(e_{o_r}))$.

c) Si $e = (\cup e_k)^c$ et $e_r = (\cup e_{h_r})^c$ alors $g \times 1(e)$ est la réordonnée de $\varphi_r \times 1(e_r)$ par rapport à $f \times 1(e)$.

De plus, on a : $|g| E\ \varphi_r$.

Preuve :

Supposons que $\varphi_r$ vérifie les conditions de (III.3.2.) et que $g$ soit définie comme en (III.3.4.). On a alors : $|g|\ E\ \varphi_r$ et $\int gf = \int f_r |g|_r$.
Il résulte alors de (III.3.1.) que $g$ expose fortement $B_f$ au point $f$.
Inversement, si $g$ expose fortement $B_f$ au point $f$, supposons $g \geqslant 0$, on a :
$e_{k_r} = (x: g_r(x) \in I_k)$ pour un certain intervalle $I_k$.
Posons $\hat{e}_k = (x: g(x) \in I_k)$ et $\hat{e} = (\cup e_k)^c$.
Il existe alors une suite $(\theta_n)$ d'automorphismes de $T$ telle que : (cf :II.2.1.)
$\theta_n(e_{k_r}) = \hat{e}_k\ (\forall k)$ , $\theta_n(g_r) \to g$ uniformément et $\theta_n(f_r) \to f$,p.p.
Il en résulte que : $\forall k$ : $f \times 1(\hat{e}_k) = k \times 1(\hat{e}_k)$; $\hat{e}_k = e_k$ et $(g \times 1(\hat{e}_k))E\ (g_r \times 1(e_{k_r}))$.
$g \times 1(e)$ est alors la réordonnée de $g_r \times 1(e_r)$ par rapport à $f \times 1(e)$, grâce à l'exposition forte. D'où le théorème.

III.3.5. Remarque.

On a mis ainsi en évidence la structure et la richesse des formes d'exposition forte de $B_f$ en chaque point de $\mathcal{E}(B_f)$.

## IV. ETUDE DE CERTAINS ESPACES DE BANACH ET D'UNE DUALITE.

### IV.1. ETUDE DU BANACH DONT LA BOULE UNITE EST $B_f$, GENERALISATION.

On se donne $f \in (L^1_+ \setminus L^\infty)$, de sorte que $B_f \not\subset L^\infty$.

IV.1.1. Définition.

On note $L(B_f)$ l'espace normé dont la boule unité est $B_f$ et $\| \|_{B_f}$ sa norme.

IV.1.2. Définition.

On note $L(B_f)^o$ l'espace normé dont les éléments sont les $g \in L^1$, telles que :

$$\sup_{\varphi \in B_f} \left| \int \varphi g \right| = \int_0^1 f_r |g|_r \quad < + \infty \text{ avec pour norme : } \|g\|_{(B_f)^o} = \int_0^1 f_r |g|_r .$$

IV.1.3. Proposition.

Le dual de $L^\infty$ muni de $\| \ \|_{B_f}$ s'identifie à $L(B_f)^o$; et c'est alors un Banach.

Preuve :

Soit $1 \in (L^\infty)'$, $L^\infty$ étant muni de $\| \ \|_{B_f}$ :

Si $e \in T$, on a : $\left(f_r(m(e)^-) \times 1(e)\right) \in B_f$ ; d'où $|1(1(e))| \to 0$, si $m(e) \to 0$.

En vertu du théorème de RADON-NIKODYM $\exists g \in L^1$, telle que :

$1(1(e)) = \int_e g$. La proposition en résulte alors.

IV.1.4. Proposition.

a) $L^\infty$ est dense dans $L(B_f)^o$.

b) $L(B_f)$ est le dual de $L(B_f)^o$. (*)

Preuve :

a) résulte de la définition (IV.1.2.);

b) du fait que $B_f$ est $6(L^1, L^\infty)$ compact.

IV.1.5. Proposition.

Si $\varphi \in L(B_f)$, la distance $d(\varphi)$, de $\varphi$ à $L^\infty$, vaut : $d(\varphi) = \overline{\lim\limits_{\substack{t > 0 \\ t \to 0}}} \left(\frac{S\varphi(t)}{S_f(t)}\right)$.

En particulier : $\varphi \in \overline{(L^\infty)} \iff \frac{S\varphi(t)}{S_f(t)} \to 0$ si $t \to 0$ $(t > 0)$.

Preuve :

Soient $\varphi \in L(B_f)$ et $\varepsilon > 0$ : $\exists \varphi_\varepsilon \in L^\infty$, avec $(\varphi - \varphi_\varepsilon) \in (d(\varphi) + \varepsilon) B_f$, on a alors :

$$\int_e |\varphi| \leqslant m(e) \|\varphi_\varepsilon\|_\infty + (d(\varphi) + \varepsilon) S_f(m(e)), \text{ d'où : } \overline{\lim\limits_{\substack{t > 0 \\ t \to 0}}} \left(\frac{S\varphi(t)}{S_f(t)}\right) \leqslant d(\varphi).$$

(*) Après l'achèvement de ce travail, je me suis aperçu que cette proposition avait déjà été prouvée par HALPERIN : Canadian Journal of Maths, Volume 51 , Année 1953, page 228,corollaire.

Inversement, $\exists\, t_\varepsilon \in ]0,1]$ tel que : $\frac{S\varphi(t)}{S_f(t)} \leqslant \overline{\lim_{\substack{t>0\\ t\to 0}}} \left(\frac{S\varphi(t)}{S_f(t)}\right) + \varepsilon$ sur $]0,t_\varepsilon]$ .

Si $k_\varepsilon$ est assez grand on a :
$e_\varepsilon = (x : |\varphi(x)| \geqslant k_\varepsilon)$ avec $m(e_\varepsilon) \leqslant t_\varepsilon$ .
Si $\varphi_\varepsilon = \varphi - \varphi \times 1(e_\varepsilon{}^c) = \varphi \times 1(e_\varepsilon)$ on a : $d(\varphi) \leqslant \|\varphi_\varepsilon\|_{B_f} = \sup_{0<t\leqslant t_\varepsilon} \left(\frac{S\varphi(t)}{S_f(t)}\right) + \varepsilon$

D'où la proposition.

Les deux définitions suivantes généralisent les espaces $L(B_f)$ et $L(B_f)^o$ précé - dents. Dans ces définitions $A$ est une partie bornée de $L^1$, contenant un élément $\neq 0$, stable par équivalence forte en module.

IV.1.6. Définition.

On définit $L(B_A)$ comme l'espace normé dont la boule unité, $B_A$, est l'enveloppe convexe fermée de $A$; on note $\| \ \|_{B_A}$ la norme de $L(B_A)$.

IV.1.7. Définition.

On définit $L(A)^o$ comme l'espace normé des $g \in L^1$, telles que : $\sup_{\varphi \in A} \int |g\varphi| < +\infty$ .
On pose : $\|g\|_{(A)^o} = \sup_{\varphi \in A} \int |\varphi g|$ ; on note $A^\square$ la boule unité de $L(A)^o$.
D'après les définitions (VI.1.6.) et (IV.1.7.) on a :

IV.1.8. Proposition .

Les espaces $L(B_A)$ et $L(A^\square)^o$ sont identiques. Autrement dit : $B_A = (A^\square)^\square$.

IV.1.9. Théorème.

$L(A)^o$ est un Banach et on a : $L^\infty \subseteq L(A)^o \subseteq L^1$.

Preuve :
Il suffit de remarquer que l'on peut supposer que $A \subset L^\infty$ et que $A$ absorbe la boule unité de $L^\infty$ ; une suite de Cauchy dans $L(A)^o$ est alors une suite de Cauchy dans $L^1$.

On a également :

IV.1.10. Théorème.

On a $L \subsetneq L(A)^o \subsetneq L^1$, ssi, $A \cap L^\infty$ est faiblement relativement compact dans $L^1$ et non borné dans $L^\infty$.

Preuve :

a) Si $L^1 = L(A)^o$, on a équivalence des normes donc : $\| \ \|_{(A)^o} \leqslant k\| \ \|_1$, $k > 0$, et si $e \in T$, $\forall \varphi \in A$: $\frac{\int e|\varphi|}{m(e)} \leqslant k$ d'où $\|A\|_\infty < +\infty$.

b) Si $L^\infty \neq L(A)^o$, $\exists f_r \geqslant 0$, décroissante, dans $(L(A)^o \setminus L^\infty)$; il existe alors $k \geqslant 0$, tel que, $\forall \varphi \in A$ : $\int_0^1 |\varphi|_r f_r \leqslant k$ et donc :

$$\int_0^t |\varphi|_r \leqslant k/(f_r(t^-)) \to 0, \text{ si } t \to 0, \ t > 0.$$

A est donc faiblement relativement compact dans $L^1$.

Inversement, si A est équi-intégrable dans $L^1$, on a :

$$\int_0^t |\varphi| \to 0 \text{ uniformément en } \varphi \in A, \text{ si } t \to 0.$$

Prenons alors une suite $(t_n) > 0$, telle que : $\int_0^{t_n} |\varphi| \leqslant 2^{-n}$, $\forall \varphi \in A$.

Soit $g = \sum_1^\infty 1([0,t_n])$, alors $g \in (L(A)^o \setminus L^\infty)$;

IV.1.11. Proposition.

A et $A^\square$ vérifient, ou non, mais simultanément, les conditions de (IV.1.10).

Preuve :

a) Si $A \cap L^\infty$ est borné dans $L^\infty$, $A^\square$ n'est pas faiblement compact dans $L^1$..

b) Si $A \cap L^\infty$ est non borné dans $L^\infty$ et que $A^\square$ ne soit pas faiblement compact dans $L^1$, alors $L(A)^o = L^\infty$, avec une norme équivalente, d'où contradiction car $A \subseteq B_A$.

Le lemme en résulte alors car A et $A^\square$ jouent des rôles symétriques.

On peut introduire la définition suivante :

IV.1.12. Définition .

Si $\mathcal{A}$ est une famille de parties de $L^1$ vérifiant chacune les conditions de (IV.1.7.) on pose : $L(\mathcal{A})^o = \varinjlim_{A_i} L(A_i)^o$ où $A_i \in \mathcal{A}$.

D'après (IV.1.9.) on a :

IV.1.13. Proposition.

$L(\mathcal{A})^o$ est un espace complet; si la famille $\mathcal{A}$ est dénombrable cet espace est un espace de Fréchet.

On peut énoncer, comme en (IV.1.11.) :

IV.1.14. Théorème.

Dans le cas où la famille $\mathcal{A}$ des $A_i$ est dénombrable, on a : $L^\infty \subsetneq L(\mathcal{A})^o \subsetneq L^1$ ssi, chaque $A_i$ est faiblement compact dans $L^1$ et un $(A_i) \cap L^\infty$, au moins, n'est pas borné dans $L^\infty$.

En traduisant, dans une certaine direction, le théorème de Mackey, on peut énoncer :

IV.1.15. Théorème.

Soit un espace $L(\mathcal{A})^o$, où $\mathcal{A}=(A_i)$. Si $f \in (L(\mathcal{A})^o \setminus L^\infty)$ alors $f \in \overline{(L^\infty)}$, ssi, chaque $A_i \in \mathcal{A}$ est faiblement relativement compact dans $L(B_f)^o$.

On peut donner une traduction analytique de (IV.1.15.) :

IV.1.16. Proposition.

Soit $A$ une partie de $L(B_f)^o$, où $f \in (L^1_+ \setminus L^\infty)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $A$ est faiblement relativement compact dans $L(B_f)^o$.

b) $\int_0^t |g|\, {}_r f_r \to 0$, si $t \to 0$, uniformément en $g \in A$.

Preuve :

Si $A$ est faiblement relativement compact dans $L(B_f)^o$, on a, d'après (IV.1.15.), $f \in \overline{(L^\infty)}$ dans $L(A)^o$, soit :

$$\left|\int_0^t (f_r(x) - f_r(t^-))g(x)dx\right| \to 0, \text{ quand } t \to 0, \text{ uniformément en } g \in A.$$

Il existe donc une suite $(t_n)$, positive et décroissante, telle que :

$$\left|\int_0^{t_n} (f_r(x) - f_r(t^-))g(x)dx\right| \leq 4^{-n} \quad \forall g \in A.$$

Soit $\varphi(x) = \sum_1^\infty 2^n(f_r(x) - f_r(t_n^-)) \times 1([0,t_n])$ on a alors $\int_0^1 |\varphi g| \leq 1, \forall g \in A.$

L'implication réciproque étant évidente, la proposition est établie.

On peut énoncer la condition de (IV.1.16.) sous une autre forme, quand l'ensemble $\mathcal{A}$ des $A_i$ est dénombrable :

IV.1.17. Théorème.

Si $\mathcal{A}$ est dénombrable et si $f \in (L(\mathcal{A})^o \setminus L^\infty)$ les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $f \in \overline{(L^\infty)}$.

b) Il existe $\hat{f}$ dans $L(\mathcal{A})^o$ telle que :

$\dfrac{\hat{f}(t)}{|f|_r(t)} \to \infty$ lorsque $t \to 0$, $t > 0$, évitant une partie dénombrable de $]0,1]$.

On peut même exiger que $\hat{f} \in \overline{(L_+^\infty)}$ et que $\hat{f}$ décroisse.

Preuve :

Supposons $A_i \subseteq A_{(i+1)}$. Si $f \in \overline{(L_+^\infty)}$, il existe une suite décroissante $(t_n)$, $t_n > 0$, telle que :

Si $0 \leqslant t \leqslant t_n$, on a : $\int_0^t f_r|g| \leqslant 4^{-n}$, $\forall g \in A_n$.

Si $\hat{f} = \sum_1^\infty 2^n \times f_r \times 1([0,t_n])$ alors on a : $f \in L(\mathcal{A})^o$ et $\dfrac{\hat{f}(t)}{f_r(t)} \to \infty$, quand $t \to 0$, $t > 0$, évitant une partie dénombrable de $]0,1]$.

Montrons que $f \in \overline{(L^\infty)}$ :

Si $n_o$ est fixé et si $g \in A_{n_o}$ on a :

$$\int_0^t \hat{f}|g| \leqslant \int_0^t \Big(|g| \big(\sum_1^\infty 2^n \times f_r \times 1([0,t_n])\big)\Big) \leqslant \Big(\sum_1^n 2^m\Big)\int_0^t |g| f_r + \sum_{n+1}^\infty 2^p \times \int_0^{t_p} |g| \times f_r .$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on fixe $n_\varepsilon \geqslant n_o$, pour que $2^{-n} \leqslant \varepsilon/2$ et on prend $t > 0$, pour que $\int_0^t \hat{f}|g| \leqslant \varepsilon$ pour tout $g \in A_{n_o}$.

## IV.2. L'EQUI-INTEGRABILITE FORTE ET SES CONSEQUENCES POUR $L(B_f)$.

Nous allons définir pour une partie de $L^1$, une notion "d'équi-intégrabilité forte", en abrégé EIF.

IV.2.1. Définition.

Si $A$ est une partie de $L^1$ et $f$ un élément de $(L_+^1 \setminus L^\infty)$, on dit que $A$ est "équi-intégrable fortement" lorsque :

$\int_0^t f_r |g|_r \to 0$, quand $t \to 0$, uniformément en $g \in A$.

Les deux faits suivants seront utiles en (IV.2.4.) et (IV.2.5.) :

IV.2.2. Proposition.

Soient $\psi E \varphi$ deux fonctions de $L(B_f)^o$, où $f \in (L_+^1 \setminus L^\infty)$, il existe une suite $(\psi_i)$, telle que $(\psi_i) D \psi$ et $\psi_i \to \varphi$ dans $L(B_f)^o$.

IV.2.3. Lemme.

Une partie bornée $A$ de $L(B_f)^o$ est faiblement relativement compacte dans $L^1$, et son adhérence faible dans $L^1$ est contenue dans $L(B_f)^o$ et est bornée dans cet espace.

On est maintenant en mesure de donner, pour l'espace $L(B_f)^o$, (où $f \in (L_+^1 \setminus L^\infty)$), un analogue du "critère de DUNFORD-PETTIS" et du "théorème de VITALI-HAHN-SAKS".

IV.2.4. Théorème.

Une suite faiblement convergente dans $L(B_f)^o$, où $f \in (L_+^1 \setminus L^\infty)$, est EIF par rapport à $f$.

Preuve :

a) Sinon il existe une suite $(g_n)$ telle que :

$$\int_0^{n^{-1}} |g_n|_r \times f_r \geqslant \lambda > 0 \text{ et } (g_n) \to 0 \text{ faiblement dans } L(B_f)^o.$$

b) Appliquant la méthode de la "bosse glissante", on construit par récurrence les éléments : $g_{k_n}$, $u_n$, $v_n$, $E_n$, $\varphi_n$ tels que, respectivement :

$g_{k_n}$ est une $g_i$.

$(u_n, v_n)$ est un segment de $]0,1]$ et $0 < u_{n+1} \leqslant v_n < u_n$.

$E_n \in T$ et $m(E_n) = u_n - v_n$.

$(|\varphi_n'|)\ F\ (f_r \times 1([u_n, v_n]))$

On exige en outre que :

1°) si $p \geqslant 1$, $u_{p+1}$ vérifie pour tout $g_i$ : $\int_0^{u_{p+1}} |g_i|_r \leqslant \varepsilon / (\sup(|\varphi_p| + 1))^{-1}$.

2°) $k_{p+1}$ est tel que :

Si $p \geqslant 1$ : $\left| \int_{E_i \setminus (E_{i+1} \cup \ldots \cup E_p)} \varphi_i \times g_{k_{p+1}} \right| \leqslant \varepsilon / p^{-1}$ $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant p$ ; si $p \geqslant 0$ : $\int_0^{u_{p+1}} |g_{k_{p+1}}|_r \times f_r \geqslant \lambda - \varepsilon$.

3°) Si $p \geqslant 0$, $v_{p+1}$ est tel que : $\int_0^{v_{p+1}} |g_{k_{p+1}}| \times f_r \leqslant \varepsilon$.

4°) $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \lambda / 10$ et $\varphi_p$ est telle que, $\forall p \geqslant 1$, $\int \varphi_p \times g_{k_p} \geqslant \lambda - 2\varepsilon$.

c) Soit alors $\hat{E}_p = E_p \setminus (E_{p+1} \cup \ldots \cup E_{p+q} \cup \ldots)$, la fonction $\varphi = \sum_1^\infty \varphi_p \times 1(\hat{E}_p)$

est telle que : $\|\varphi\|_{B_f} \leqslant 1$ et $\int_0^1 \varphi \times g_{k_n} \geqslant m > 0$, $\forall n$.

IV.2.5. Théorème.

Toute suite faiblement de Cauchy dans $L(B_f)^o$, où $f \in (L^1_+ \setminus L^\infty)$, est EIF par rapport à $f$.

Preuve :

Sinon, il existe une suite $(g_n)$ telle que, pour un certain $\lambda > 0$, on ait :

$g_n \to 0$ faiblement dans $L^1$ et $\int_0^{n^{-1}} |g_n|_r \times f_r > \lambda$.

On peut alors construire par récurrence une suite $(n_k)$, qui tend vers l'infini, des ensembles $e_k \in T$, et des fonctions $\varphi_p$, tels que :

$$\left| \int_{e_k} (g_{n_k} - g_{n_{k+1}}) \times \varphi_k \right| > \lambda > 0$$

$$m(e_k) \leqslant (n_k)^{-1} \text{ et } \varphi_k \in (B_f) \cap L^\infty.$$

Enfin, posant $\hat{g}_k = (g_{n_k} - g_{n_{k+1}})$, on a :

$$\int_0^{n_k^{-1}} |\hat{g}_k|_r \times f_r \geqslant \int_{e_p} \hat{g}_k \times \varphi_k > \lambda \text{ et } \hat{g}_k \to 0 \text{ faiblement dans } L(B_f)^o.$$

D'où violation de (IV.2.4.).

On peut alors énoncer :

IV.2.6. Théorème.

Une partie A de $L(B_f)^o$, où $f \in (L^1_+ \setminus L^\infty)$, est faiblement relativement compacte, ssi, elle est EIF par rapport à f.

On a des critères de compacité séquentielle.

IV.2.7. Théorème.

$L(B_f)^o$, où $f \in (L^1_+ \setminus L^\infty)$, est faiblement séquentiellement complet.

IV.2.8. Remarque.

Les énoncés suivants sont équivalents:

a) La partie A de $L(B_f)^o$ est faiblement relativement compacte.

b) La saturée, par équivalence en module, de A est faiblement relativement compacte.

c) L'ensemble des $|g|_r$, où $g \in A$, est relativement compact dans $L(B_f)^o$.

IV.3. DUALITE ENTRE CERTAINS SOUS-ESPACES VECTORIELS DE $L^1$ ET CARACTERISATION DES ESPACES $L(A)^o$.

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace vectoriel de $L^1$, contenant 1, et stable par équivalence forte en module :

IV.3.1. Définition.

On pose $\mathcal{F}^\Delta = (g : g \in L^1, \; \forall f \in \mathcal{F}, fg \in L^1)$.

IV.3.2. Proposition.

Si $g \in \mathcal{F}^\Delta$, alors $B_g \subset \mathcal{F}^\Delta$.

Preuve :

Il suffit de prouver que, si $f \in \mathcal{F}$, alors $\int_0^1 |f|_r \times |g|_r < +\infty$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons $f,g \geqslant 0$; il existe alors des segments $e_n$, deux à deux disjoints, de $]0,1]$, des ensembles $e_{(p,f)}$ et $e_{(q,g)}$, deux automorphismes, $\theta_f$ et $\theta_g$, de T, tels que :

$$\theta_\varphi(\varphi \times 1(e_{(q,\varphi)})) = \theta_\varphi(\varphi) \times 1(e_p). \quad (\varphi = f,g) \text{ et :}$$

$$\int_0^1 \theta_f\,(f \times 1(e_{(p,f)})) \times \theta_g(g \times 1(e_{(p,g)})) \geqslant 1.$$

D'où : $\displaystyle\int_0^1 \theta_f(f) \times \theta_g(g) = +\infty$ . ce qui est impossible.

IV.3.3. Proposition.

On a toujours : $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{\Delta\Delta}$

Ceci conduit à la notion suivante :

IV.3.4. Définition.

Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\Delta\Delta}$ , l'espace est dit"parfait".

IV.3.5. Proposition.

a) $\mathcal{F}^{\Delta}$ est parfait et, inversement, tout espace parfait est un $\mathcal{F}^{\Delta}$ .
b) Si $\mathcal{F}$ est parfait, $(g \in \mathcal{F}) \Rightarrow (B_g \subset \mathcal{F})$.
c) Si les $\mathcal{F}_i$ sont parfaits, alors $(\cap \mathcal{F}_i)$ est parfait.
d) Si $\mathcal{F}$ est parfait, alors $L^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ .

Preuve :

Il suffit de remarquer que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{\Delta\Delta}$ entraine $(\mathcal{F}^{\Delta})_{\Delta} \subseteq (\mathcal{F}^{\Delta\Delta\Delta})$ et $(\mathcal{F})^{\Delta} \supseteq (\mathcal{F}^{\Delta\Delta\Delta})$ , et qu'on a toujours $(\bigcup_i \mathcal{F}_i)^{\Delta} = \bigcap_j \mathcal{F}_j$ , puis de changer $\mathcal{F}_k$ en $\mathcal{F}_k^{\Delta}$ .

IV.3.6. Proposition.

Les espaces $L(A)^o$ et $L(\mathcal{A})^o$ sont parfaits; de plus on a : $(L(A)^o)^{\Delta} = L(B_A)$.

Preuve :

Il suffit de prouver que $(L(A)^o)^{\Delta} = L(B_A)$.
Or, si $g \in (L(A)^o)$, raisonnant sur une suite de fonctions tronquées, et compte tenu du théorème de BANACH-STEINHAUS , on voit que $g \in L(B_A)$.

IV.3.7. Proposition.

Soit un espace $L(\mathcal{A})^o \neq L^{\infty}$, où la famille $\mathcal{A} = (A_i)$ est dénombrable; alors $\left(L(\mathcal{A})^o\right)^{\Delta}$ s'identifie au dual de $L^{\infty}$ :

Preuve :

Il suffit d'utiliser, comme en (IV.1.3.), le théorème de RADON-NIKODYM et, comme en (IV.3.6.), le théorème de BANACH-STEINHAUS.

IV.3.8. Remarque.

Si $\mathcal{A}$ est "filtrante croissante", le dual de $L^\infty \subseteq L(\mathcal{A})^o$ s'identifie toujours à : $\bigcup_{A_i \in \mathcal{A}} (L(B_{A_i}))$.

On considère maintenant un espace de Banach $F$, tel que : $L^\infty \subseteq F \subseteq L^1$.
On suppose $\|1\|_F = 1$ et que la boule unité $F_1$ de $F$ est stable par équivalence forte en module et "héréditaire" (ou "solide") dans le sens suivant : Si $f \in F_1$ et si $g \in F$ avec $|g| \leqslant |f|$ alors $g \in F_1$.

On a la :

IV.3.9. Proposition.

La boule unité $F_1$ est contenue dans la boule unité de $L^1$.

Preuve :

Supposons $f \in F_1$ et $\int_0^1 |f| = 1 + \alpha > 1$.
D'après (III.1.2.) il existe une suite $b_n$ telle que :
$b_n \in F_1$ et $b_n \to 1 + \alpha$ presque uniformément.
Donc, $\forall \varepsilon > 0$, la fonction $(1 + \alpha - \varepsilon)(1 - \varepsilon) \in F_1$, ce qui est impossible.
On a alors, d'après le théorème de BANACH-STEINHAUS, comme en (IV.3.6.):

IV.3.10. Proposition.

On peut identifier $F^\Delta$ à une partie de $F'$.

IV.3.11. Théorème.

Si $F$, en tant qu'espace vectoriel, est parfait, $F$, en tant qu'espace de BANACH, est équivalent à $L(A)^o$, où : $A = (F^\Delta) \cap (F'_1)$. ($F'_1$ désignant la boule unité de $F'$)
Si, de plus, $\overline{(L^\infty)} = F$, $F^\Delta = F'$ et $F$ est muni de la norme $\| \ \|_{(A)^o}$.

Preuve :

Posons $A = (F^\Delta) \cap (F'_1)$.

On a $F^{\Delta} = L(B_A)$ d'après (IV.3.10) et alors $F = L(A)^{o}$ avec une norme comparable car $A \subseteq F'_1$ . D'où le théorème.

IV.3.12. Remarque.

Dans le situation de (IV.3.11.), on peut examiner si $\overline{(L^{\infty})} = F$ à l'aide de (IV.1.17.)

IV.3.13. Remarque.

On aurait pu partir dans (IV.3.1.) d'espaces $\mathcal{F}$ , contenant 1, stables par équivalence dyadique et changement de signe sur les ensembles dyadiques.
On aurait pu supposer dans (IV.3.) que les boules unités $F_1$ des Banachs considérés étaient héréditaires et stables par équivalence dyadique; on aurait alors abouti aux mêmes Banachs parfaits.

Preuve :
Le cas où $F = L^{\infty}$ est évident.
Sinon, il suffit de prouver l'analogue de (IV.3.10.) :
Raisonnant comme en (IV.3.10.), il suffit de montrer que $\|1(e)\|_F \to 0$, si $m(e) \to 0, 1(e) \in F$. Au cas contraire il existe $g \in (F \setminus L^{\infty})$, et une sous-suite$(e_{n_p})$ telle que $\varphi \in B_g$ où $\varphi = \sum_1^{\infty} p \times 1(e_{n_p})$.
Par hérédité on a alors : $\forall p, p \times \|1(e_{n_p})\|_F \leqslant \|\varphi\|_F$. D'où contradiction.

On introduit la définition suivante :

IV.3.14. Définition.

On note $|6|(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\Delta})$ la topologie, sur $\mathcal{F}$ , de la convergence uniforme sur les ensembles $B_f$ où $f \in \mathcal{F}^{\Delta}$
Cette topologie est associée aux semi-normes $p_f$, où $f \in \mathcal{F}^{\Delta}$, telles que :
Si $g \in \mathcal{F}, p_f(g) = \int_0^1 |f|_r \times |g|_r$.

Il est clair qu'on a alors :

IV.3.15. Théorème.

$\mathcal{F}^{\Delta\Delta}$ est le complété de $\mathcal{F}$ pour $|6|(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\Delta})$ et $\mathcal{F}^{\Delta}$ est le dual de $\mathcal{F}$.

Les fonctions étagées sont denses dans $\mathcal{F}^{\Delta\Delta}$.

Compte tenu de (IV.2.7.), on peut énoncer :

IV.3.16. Théorème.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\mathcal{F}$ est parfait.

b) $\mathcal{F}$ est $6(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\Delta})$ séquentiellement complet.

c) $\mathcal{F}$ est $|6|(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\Delta})$ complet.

D'après (IV.2.6.) on a :

IV.3.17. Théorème.

Une partie d'un espace parfait $\mathcal{F}$ est $6(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\Delta})$ relativement compacte, ssi, elle est équi-intégrable dans $L^1$ et EIF par rapport à toutes les $f \in (\mathcal{F}^{\Delta} \setminus L^{\infty})$.
On a des critères de compacité séquentielle.

IV.3.18. Remarque.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) La partie K de $\mathcal{F}$ parfait est $6(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\Delta})$ relativement compacte.

b) La saturée, par équivalence en module, de K est $6(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\Delta})$ relativement compacte.

c) L'ensemble des $|g|_r$, où $g \in K$, est $|6|(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\Delta})$ relativement compact.

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] BECKER.R. Thèse 3éme cycle, université de Paris VI, Juin 1971.

[2] GARLING.D.J.H. On symmetric sequençe spaces. Proc.London Math. Soc.(3) 16 (1966) 85-106.

[3] KÖTHE.G. Topologische lineare Raume. (Berlin 1960). ou: Topological vector spaces 1 (Springer Verlag 1969).

[4] MAHARAM.D. On homogeneous measure algebras. Proc.N.A.S. Vol.28. (1942) 108-111.

[5] NEUMANN.J.V. Einige sätze über messbare abbildungen. Ann.math.T.(33).(1932) 574-586.

[6] NEVEU.J. Bases mathématiques du calcul des Probalités.(Masson 1964)

BIBLIOGRAPHIE complémentaire. (Indiquée par la S.M.F.)

[7] LUXEMBOURG.W.A.J. Proc.Sympos.Analysis. (Queen's Univ. Kingston,Ont. 1967) P.83-144.

[8] RYFF.J.V. On the representation of doubly stochastic operators. Pacific J. Math. 13 (1963), 1379-89.

[9] RYFF.J.V. Orbits of $L^1$ functions under doubly stochastic transformations. Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965) 92-100.

[10] RYFF.J.V. Extreme points of some convex subsets of $L^1$ [0,1]. Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967) 1026-1034.

[11] RYFF.J.V. Majorized functions and measures. Indag. Math. 30 (1968), 431-437.


Ces auteurs ont travaillé sur des sujets voisins de ceux que nous avons abordés; en particulier (III.2.1.,5.) sont très proches de [10] et de [11].


Richard BECKER
Université de Paris-VI [E. R. A. 294]
Institut de Mathématiques, Tour 46
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05