HERVÉ REINHARD

Fonctionnelles additives de diffusions et de processus de branchement

Mémoires de la S. M. F., tome 35 (1973), p. 17-55
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1973__35__17_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 35, 1973, p. 17-55.

FONCTIONNELLES ADDITIVES DE DIFFUSIONS ET DE PROCESSUS DE BRANCHEMENT

Hervé REINHARD

L'objet de cet article est la description des fonctionnelles additives, continues, de potentiel fini et de carré intégrable, des processus de branchement construits à partir d'une diffusion.

Dans le premier chapitre, on reprend la construction, donnée par Ikeda, Nagasawa et Watanabe, d'un processus de branchement par recollement des trajectoires, on décrit alors toutes les fonctionnelles additives de processus recollés en fonction de celles du processus initial. En supposant connues les fonctionnelles additives des processus produits du processus initial, on peut décrire toutes les fonctionnelles d'un processus de branchement.

Au deuxième chapitre on généralise la formule de Vent'cell, en décrivant toutes les fonctionnelles additives continues, non négatives, de potentiel fini et de carré intégrable d'une diffusion : la formule obtenue présente de l'intérêt par elle-même.

Le troisième chapitre est une application des deux précédents ; le processus initial est une diffusion tuée dont on décrit les fonctionnelles additives, les processus produits sont équivalents à des diffusions tuées dont on connaît alors les fonctionnelles additives : on peut ainsi décrire les fonctionnelles du processus de branchement.

Notations.-

Si S est un espace localement compact :

$B(S)$ désigne l'ensemble des fonctions boréliennes bornées

$C(S)$ désigne l'ensemble des fonctions continues bornées

$C^*(S)$ désigne l'ensemble des fonctions continues telles que $|f| \leq 1$.

ε_x est la masse de Dirac au point x

λ est la mesure de Lebesgue

C_k^p désigne l'ensemble des fonctions p continûment différentiables à support compact

$C(R^+,R^d)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de R^+ dans R^d. Si M est une martingale de carré intégrable $\langle M,M\rangle$ désigne le processus croissant associé à M, si N est une autre martingale de carré intégrable le produit scalaire $\langle M;N\rangle$ est égal, par définition, à $\frac{1}{2}[\langle M+N,M+N\rangle - \langle M,M\rangle - \langle N,N\rangle]$. Les notations relatives à un processus de Markov $(\Omega,F,F_t,X_t,\theta_t,P_x)$ sont celles de [1].

Les propositions, lemmes et formules sont numérotés dans l'ordre où ils apparaissent dans le texte. Une formule comme (II,A,9) désigne le neuvième lemme (ou formule, ou proposition) de la partie A du chapitre II.

CHAPITRE I

FONCTIONNELLES ADDITIVES DE PROCESSUS DE BRANCHEMENT

A - Processus de branchement.

Nous allons donner les principales définitions et propriétés des processus de branchement en suivant : Ikeda, Nagasawa et Watanabe [8].

Soit S un espace compact à base dénombrable, S^n la $n^{\text{ième}}$ puissance symétrique de S, soit $S^0 = \{\delta\}$ un point isolé, $\Sigma = \overset{\infty}{\underset{0}{\cup}} S^n$ la somme topologique des puissances symétriques de S et $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{\Delta\}$ le compactifié de Σ.

Pour tout f appartenant à $B(S)$ nous définissons une fonction $\hat{f}$ sur $\hat{\Sigma}$ par :

$$(\mathrm{I,A,1}) \qquad \hat{f}(x) = \begin{cases} \prod_1^n f(x_j) & \text{si } x = (x_1,\dots,x_n) \\ 1 & \text{si } x = \delta \\ 0 & \text{si } x = \Delta \end{cases}$$

Un processus de Markov $(\Omega, F, F_t, X_t, P_x)$, à valeurs dans $\hat{\Sigma}$, est un processus de branchement si son semi-groupe de transition P_t vérifie la relation suivante :

$$(\mathrm{I,A,2}) \qquad P_t\, \hat{f}(x) = \widehat{P_t\, \hat{f}_S}(x) \quad \text{pour toute } f \text{ de } B(S) \text{ et tout } s \text{ de } \Sigma.$$

La variable aléatoire ξ_t, définie par $\xi_t(\omega) = n$ si $X_t(\omega) \in S^n$, s'appelle le nombre de particules à l'instant t ; la variable aléatoire $\tau(\omega)$, définie par $\tau(\omega) = \inf(t, \xi_t(\omega) \neq \xi_0(\omega))$, s'appelle le temps de premier branchement ; le processus $(\Omega, F_t, X_t^0, P_x^0)$, défini sur $S \cup \{\Delta\}$, par :

$$(\mathrm{I,A,3}) \qquad P_x^0 = P_x, x \in S \cup \{\Delta\};\ X_t^0(\Delta) = \begin{cases} X_t(\omega) & \text{si } t < \tau(\omega) \\ \Delta & \text{si } t \geq \tau(\omega); \end{cases}$$

s'appelle la partie de non branchement.

Quand $X_{\tau-}$, existe sur $\{\tau < \infty\}$, on appelle loi de branchement du processus un noyau $\Pi(x,E)$, défini sur $S \times \hat{\Sigma}$, tel que, sur $\{\tau < \infty\}$:

$$(\mathrm{I,A,4}) \qquad E_x(e^{-\lambda\tau}\, X_\tau \in E \mid X_{\tau-}) = \Pi(X_{\tau-}, E)\, E_x(e^{-\lambda\tau} X_{\tau-}).$$

Une telle loi existe dès que le processus X est quasi-continu à gauche et possède un système de Lévy, ce qui est en particulier le cas si X est un processus de Hunt (avec mesure de référence); X^0 et Π caractérisant alors le processus de branchement, en ce sens que, deux processus, qui ont même partie de non-branchement et même loi de branchement, sont équivalents. Nous ne nous occuperons que de tels processus, que nous désignerons sous le nom de (X^o, Π)-processus)

On peut, à l'inverse, connaissant X^o et Π, construire le (X^o, Π) processus sous les hypothèses suivantes :

$X^o = (\Omega, X_t^o, F_t^o, P_x^o)$ est un processus de Markov fort sur $S \cup \{\Delta\}$ tel que les tribus F_t^o soient complètes et continues à droite, Π est un noyau sur $S \times \hat{\Sigma}$, et

(I,A,5) (1) $P_x^o(\zeta^o = t) = 0$ pour tout x de S et tout t

(2) $P_x^o(X^o_{(\zeta^o)^-}$ existe , $\zeta^o < \infty) = P_x^o(\zeta^o < \infty)$

(3) $\Pi(x,S) = 0$

Le théorème 3.5 de [8] donne un moyen de construire le (X^o, Π)-processus correspondant ; on peut remarquer que les conditions (1) et (2) sont toujours remplies par la partie de non-branchement d'un (X^o, Π)-processus quasi-continu à gauche, et que la condition (3) n'est pas, à proprement parler, une restriction.

Avant d'énoncer le théorème de construction d'un (X^o, Π)-processus, nous allons donner les définitions nécessaires à la compréhension de son énoncé.

Soit $S^{(n)}$ la nième puissance topologique de S, S^n la nième puissance topologique symétrique de S.

<u>Définition (I,A,6)</u> - Un processus $X_n^* = (\Omega_n ; (X_n^*)_t , (F_n^*)_t , (P_n^*)_x)$ à valeurs dans $S^{(n)} \cup \{\Delta\}$, est appelé un produit direct d'ordre n de X^o si pour tout $x = (x_1,\dots,x_n)$ de $S^{(n)}$, et toute suite de fonctions $(f_1,\dots,f_n)$ de $C(S)$:

$$(E_n^*)_x \,[f_1 \otimes f_2 \dots \otimes f_n \;(X_n^*)_t] = \prod_1^n E^o_{x_i}[f_i(X_t^o)]$$

Un processus $\tilde{X}_n = (\Omega_n, (\tilde{X}_n)_t , (\tilde{F}_n)_t , (\tilde{P}_n)_x)$, à valeurs dans $S^n \cup \{\Delta\}$, est appelé produit symétrique d'ordre n de X^o, si pour tout x de S^n et toute f de $C^*(S)$:

$$(\tilde{E}_n)_x[\hat{f}(\tilde{X}_n)_t] = \prod_1^n E^o_{x_i}[f(X_t^o)]$$

On construit facilement une version canonique de X_n^* en posant :

(I,A,7) $$\Omega_n = \Omega^{(n)} = \{\bar{\omega}, \bar{\omega} = (\omega_1,\dots,\omega_n)\}$$

$$\bar{\zeta}(\bar{\omega}) = \min_{1 \leq k \leq n} \zeta(\omega_k)$$

$$(X_n^*)_t\,(\bar{\omega}) = \begin{cases} X_t^o(\omega_1),\dots,X_t^o(\omega_n) & \text{si } t < \bar{\zeta}(\bar{\omega}) \\ \Delta & \text{si } t \geq \bar{\zeta}(\bar{\omega}) \end{cases}$$

$(F_n^*)_t = \mathfrak{F}((X_n^*)_t\ ,\ s \leq t)$ éventuellement complétées et rendues continues à droite ;

$$(P_n^*)_x(A) = \begin{cases} P^o_{x_1} \times \dots \times P^o_{x_n}[A] & \text{si } x = (x_1,\dots,x_n) \in S^{(n)} \\ P^o_\Delta \times \dots \times P^o\,[A] & \text{si } x = \Delta. \end{cases}$$

Si ρ est l'injection naturelle de $S^{(n)}$ dans $S^{(n)}$, le processus suivant est une version canonique de X_n : $[\Omega^{(n)}\ ,\ \rho(X_n^*)_t\ (\tilde{\omega})\ ,\mathfrak{F}((X_n)_s, s \leq t), (\tilde{P}_n)_x]$

$$\text{où} \quad (\tilde{P}_n)_x[A] = \begin{cases} P^o_{x_1} \times \dots \times P^o_{x_n}[A] & \text{si } x = (x_1,\dots,x_n) \in S^n \\ P^o_\Delta \times \dots \times P^o_\Delta\,[A] & \text{si } x = \Delta. \end{cases}$$

Ces deux processus sont deux processus standards, si X^o **est standard.**

Ce sont des processus de Hunt, si X^o l'est et si ζ^o est totalement inaccessible.

<u>Définition (I,A,8)</u> - On appelle somme directe de $\tilde{X}_n$ un processus $\tilde{X}$ défini sur $\hat{\Sigma}$ par : $\tilde{X} = (\tilde{\Omega}, \tilde{X}_t(\tilde{\omega}), \tilde{F}_t, \tilde{P}_x)$ où

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{n \geq 0} \Omega^{(n)} \qquad \text{si } \Omega^{(o)} = \{\omega_\delta\}$$

$$\tilde{X}_t(\tilde{\omega}) = \begin{cases} (\tilde{X}_n)_t(\tilde{\omega}) & \text{si } \tilde{\omega} \in \bigcup_{n \geq 1} \Omega^{(n)} \\ \delta & \text{si } \tilde{\omega} = \omega_\delta \end{cases}$$

$F_t = \mathfrak{F}(\tilde{X}_s(\tilde{\omega}), s \leq t)$ éventuellement complétées et rendues continues à droite,

$\tilde{P}_x(A) = (\tilde{P}_n)_x[A \cap \Omega^{(n)}]$ si $x \in S^n$; $\tilde{P}_\delta[A] = \varepsilon_{\{\omega_\delta\}}[A]$

On appelle distribution instantanée un noyau μ sur $\tilde{\Omega} \times \hat{\Sigma}$, tel que, pour tout temps d'arrêt T : $\mu(\omega, dy) = \mu(\theta_T\,\omega, dy)$ sur $(T < \zeta)$ P_x-p.s.

Soit π une loi de branchement, nous allons construire une distribution instantanée à partir du noyau π sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}_\infty) \times \hat{\Sigma}$. Nous définissons d'abord un noyau μ' sur $(\Omega^{(n)}, (\tilde{F}_n)_t \times \hat{\Sigma}^{(n)}$ par :

$$(I,A,9) \quad \mu'(\tilde{\omega}, dx_1,\dots,dx_n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} I_{\{\zeta(\tilde{\omega}) = \zeta^o(\omega_i)\}}\, \pi(X^o_{(\zeta^o)^-}(\omega_i, dx_i)\ \prod_{j \neq i} \varepsilon_{X^o_{(\zeta^o)^-}(\omega_j)}(dx_j) & \text{si } 0 < \zeta(\tilde{\omega}) < \infty \\ \varepsilon_{\{\Delta\dots\Delta\}}(dx_1,\dots,dx_n) & \text{sinon,} \end{cases}$$

(I,A,10) Soit $\gamma(x_1\ldots x_n) = \begin{cases} \Delta & \text{si il existe un } i \text{ tel que } x_i = \Delta \\ \delta & \text{si pour tout } i \text{ tel que } x_i = \delta \\ p(x_{11},\ldots,x_{1n_1} ; x_{21},\ldots,x_{2n_2} ; x_{n1},\ldots,x_{n\,n_m}) & \text{sinon ;} \end{cases}$

γ est une application mesurable de $\hat{\Sigma}^{(n)}$ dans $\hat{\Sigma}$ et $\mu(\tilde{\omega},dx) = \mu'(\tilde{\omega},\gamma^{-1}(dx))$ est une distribution instantanée sur $\Omega^{(n)} \times \hat{\Sigma}$; on obtient ainsi une distribution instantanée sur $\bigcup_{n \geq 1} \Omega^{(n)} \times \hat{\Sigma}$; en posant, en outre, $\mu(\omega,dx) = \varepsilon_{\{\delta\}}(dx)$ on obtient la distribution cherchée.

Au moyen d'une telle distribution, on peut -comme nous le préciserons- recoller les trajectoires du processus X grâce au théorème de Ionescu.Tulcea.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème 3.5 de [8] :

Théorème I.A. - Le processus obtenu par prolongement des trajectoires de $\tilde{X}$ au moyen de μ est le (X^o,π)-processus relatif à X^o et π.

Nous sommes ainsi conduits à étudier les fonctionnelles additives de processus recollés.

B - Fonctionnelles additives de processus recollés.

Soit $X = (\Omega, X_t, \theta_t, P_x, F_t)$ un processus de Markov fort, continu à droite et limité à gauche, à valeurs dans $(E,B(E))$; soit $\Phi = \Omega \times E = \{\varphi ; \varphi = (\omega,y)\}$. Soit $g = F_\infty \otimes B(E)$, $\hat{\Phi} = \prod \Phi_j$ et $\hat{F} = \otimes g_j$ $1 \leq j \leq n$ où Φ_j et g_j sont des copies de Φ et g. Soit μ une distribution instantanée sur $\Omega \times E$ et $Q(x,A) = \iint_A P_x(d\omega)\, \mu(\omega,dy)$ où $x \in E$, $A \in g$.

Nous allons construire par recollement des trajectoires de X un processus $\hat{X} = (\hat{\Phi}^o, \hat{X}_t, \hat{\theta}_t, \hat{P}_x, \hat{F}_t)$:

D'après le théorème de Ionescu-Tulcea, il existe sur $(\hat{\Phi},\hat{F})$ une probabilité $\hat{P}_x$ telle que, pour toute F mesurable sur $\prod_{j \geq n} \Phi_j$:

(I,B,1) $E_x F(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \int Q(x,d\varphi_1) Q(x_1,d\varphi_2) \ldots Q(x_{n-1},d\varphi_n) F(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$; où $\varphi_i = (\omega_i,x_i)$; soit $k(\hat{\varphi}) = \inf(j, \zeta(\omega_j) = 0)$ et $\zeta^{(n)}(\omega) = \sum \zeta(\omega_i)$ $1 \leq i \leq n$

$$\hat{X}_t(\hat{\varphi}) = \begin{cases} X_t(\omega_1) & \text{si } t < \zeta(\omega_1) \\ x_1 & \text{si } t = \zeta(\omega_1) \\ X_{t-\zeta^{(n)}(\omega)}(\omega_n) & \text{si } \zeta^{(n-1)}(\omega) < t < \zeta^{(n)}(\omega) \\ x_n & \text{si } t = \zeta^{(n)}(\omega) \\ \Delta & \text{si } t = \hat{\zeta}(\hat{\varphi}) = \zeta^{(k(\hat{\varphi}))}(\omega) \end{cases}$$

Soit $\hat{\Phi}^{o} = \{\hat{\varphi}\ ;\ \hat{X}_t(\hat{\varphi})$ est continu à droite $\}$, il est clair que $\hat{P}_x(\hat{\Phi}^{o}) = 1$. Rappelons la notion suivante, due à Courrège et Priouret [4] :

Soient $X = (\Omega, F^o_\infty, F^o_t, X_t, P_x)$ un processus de Markov où $F^o_t = \sigma(X_s, s \leq t)$, F_∞ la tribu complétée universelle de F^o_∞, nous désignerons par F_t, la tribu complétée universelle de F^o_t par rapport à F_∞ ; soit H une application de Ω dans $(0,\infty)$: on définit la relation d'équivalence R^X_H sur Ω en posant :

(I,B,2) $\omega \sim \omega(R^X_H) \Longleftrightarrow H(\omega) = H(\omega')$ et $X_s(\omega) = X_s(\omega')$, $\forall s \leq H(\omega)$.

Il est démontré, dans [4], que F^o_t (respectivement F_t) est égale à l'ensemble des évènements de F^o_∞ (respectivement F_∞) qui sont saturés pour R^X_t. Quand il n'y aura pas d'ambiguité nous noterons R_t pour R^X_t.

Nous définirons alors les tribus $\hat{F}_t$ par
$\{A \in \hat{F} \Longleftrightarrow (\hat{\varphi} \in A\ , \hat{\Psi} \sim \hat{\varphi}(R_T) \Longrightarrow \Psi \in A)\}$. Si nécessaire nous compléterons ces tribus et nous considérerons les tribus $\bigcap_{s>t} \hat{F}_s$; dans ces conditions, si T est un temps d'arrêt de $\hat{F}_t$, $\hat{F}_T$ est la tribu engendrée par T.

Nous définirons enfin $\hat{\theta}_t$ par :

(I,B,3).

$$\hat{\theta}_t(\hat{\varphi}) = \begin{cases} (\theta_{t-\zeta^{(n)}(\omega)}(\omega_{n+1})\ , x_{n+1}\ ; \varphi_{n+2}, \dots) & \text{si } \zeta^{(n)}(\omega) \leq t < \zeta^{(n+1)}(\omega) \\ (\varphi_k\ , \varphi_{k+1}, \dots) & \text{si } t \geq \hat{\zeta}(\hat{\varphi}) \\ & \text{et } k = \inf(j, \zeta(\omega_j) = 0) \end{cases}$$

Nous noterons, le plus souvent, $\hat{\theta}_t \hat{\varphi}$ sous la forme $\theta_t \hat{\varphi}$ quand il n'y aura pas de risque de confusion.

On peut alors démontrer la proposition suivante ([8] ou [10]) :

<u>Proposition (I,B,4)</u> - Le processus $\hat{X}$ est un processus de Markov fort, continu à droite et limité à gauche. Si X est quasi continu à gauche et ζ totalement inaccessible, $\hat{X}$ est un processus standard.

Nous verrons au chapitre III un cas particulier où $\hat{X}$ est un processus de Hunt. Si on pose $\tau(\hat{\varphi}) = \zeta(\omega_1)$, les processus $(\hat{X}_t, t < \tau, \hat{P}_x)$ et $(X_t, t < \zeta, P_x)$ sont équivalents, de plus $\hat{P}_x(\omega_1 \in B, X_\tau(\hat{\varphi}) \in A) = \int_B P_x(d\omega)\, \mu(\omega, A)$.

On posera également

$\tau_n(\hat{\varphi}) = \sum \zeta(\omega_i)$ $1 \leq i \leq \inf(n, k(\hat{\varphi}))$ si $\hat{\varphi} = (\omega_1, x_1, \dots)$.

Nous allons maintenant décrire complètement les fonctionnelles additives du processus recollé en fonction de celles de X et du noyau μ.

<u>Proposition (I,B,5)</u> - Soit B_t une fonctionnelle additive de X, soit

$$A_t(\hat\varphi) = \begin{cases} B_t(\omega_1) & \text{si } \hat\varphi \in E_1^t = \{t < \zeta(\omega_1)\} \\ \sum_1^{n-1} B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i) + B_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n) & \text{si } \hat\varphi \in E_n^t = \{\zeta^{(n-1)}(\omega) \leq t < \zeta^{(n)}(\omega) \leq \hat\zeta(\hat\varphi)\} \\ \sum_1^{k(\hat\varphi)} B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i) & \text{si } \hat\varphi \in E_\infty^t = \{t \geq \hat\zeta(\hat\varphi)\} \end{cases}$$

A_t est une fonctionnelle additive de $\hat X$.

La démonstration se décompose en plusieurs lemmes.

<u>Lemme</u> (I,B,6) - $\hat P_x$ p.s. $A_{t+s}(\hat\varphi) = A_t(\hat\varphi) + A_s \circ \theta_t \hat\varphi$.

<u>Démonstration</u>. Soient t et s fixés. Nous allons montrer que, sur chacun des ensembles E_p^{t+s}, la relation (I,B,6) est réalisée $\hat P_x$ p.s, la démonstration demande quelque soin du fait que A n'est pas parfaite.

1. - Soit $\hat\varphi \in (E_\infty^{t+s})^c = \bigcup_1^{k(\hat\varphi)} E_p^{t+s}$; on posera

(I,B,7) : $E_{n,p}^{t,s} = E_{n+p}^{t+s} \cap E_n^t$

α) Soit $\hat\varphi \in E_1^{t+s}$; alors $A_{t+s}(\hat\varphi) = B_{t+s}(\omega_1) = B_t(\omega_1) + B_s \circ \theta_t \omega_1$

$$= A_t(\hat\varphi) + A_s \circ \theta_t \hat\varphi \ P_x \text{ p.s.}$$

si $B_{t+s}(\omega_1) = B_t(\omega_1) + B_s \circ \theta_t \omega \ \forall \omega_1 \in \Lambda^1$ alors

$$A_{t+s}(\hat\varphi) = A_t(\hat\varphi) + A_s \circ \theta_t \hat\varphi \quad \forall \hat\varphi \in (\Lambda^1 \times \Phi \times \Phi \times \dots) = B_1$$

il est clair que $P_x(\Lambda_1) = \hat P_x(B_1)$.

β) Soit $\hat\varphi \in E_{1,q-1}^{t,s}$; dans ce cas

$$A_{t+s}(\hat\varphi) = \sum_1^{q-1} B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i) + B_{t+s-\zeta^{(q-1)}(\omega)}(\omega_q)$$

$$A_t(\hat\varphi) = B_t(\omega_1)$$

et $\theta_t \hat\varphi = (\theta_t \omega_1, x_1 ; \varphi_2, \dots)$.

Soit $(\hat\varphi)_i = \omega_i$ alors $\sum_1^{q-1} \zeta(\theta_t \hat\varphi)_i \leq s < \sum_1^{q} \zeta(\theta_t \hat\varphi)_i$,

donc $A_s \circ \theta_t \hat\varphi = B_{\zeta(\omega_1)-t} \circ \theta_t \omega_1 + \sum_2^{q-1} B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i) + B_{s+t-\zeta^{(q-1)}(\omega)}(\omega_q)$

(si $q = 2$ le deuxième terme du membre de droite ne figure pas) ainsi :

$A_{t+s}(\hat{\varphi}) - A_s \circ \theta_t \hat{\varphi} = B_{\zeta(\omega_1)}(\omega_1) - B_{\zeta(\omega_1)-t} \circ \theta_t \omega_1 = B_t(\omega_1)\ P_x$ p.s.

Comme $A_t(\hat{\varphi}) = B_t(\omega_1)$, on conclut, comme précédemment, que $A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t\ \hat{P}_x$ p.s. sur $E^{t,s}_{1,q-1}$.

γ) Soit $\hat{\varphi} \in E^{t,s}_{n,p}$, dans ce cas

$$A_{t+s}(\hat{\varphi}) = \sum_1^{n+p-1} B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i) + B_{t+s-\zeta(n+p-1)(\omega)}(\omega_{n+p})$$

$$A_t(\hat{\varphi}) = \sum_1^{n-1} B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i) + B_{t-\zeta(n-1)(\omega)}(\omega_n)$$

$$\theta_t \hat{\varphi} = (\theta_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n), x_n : \varphi_{n+1} \ldots)$$

$$\zeta(\theta_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n)) = \zeta^{(n)}(\omega)-t$$

γ'): soit $p=o$ alors $s < \zeta^{(n)}(\omega_i)-t = \zeta[\theta_t(\hat{\varphi})_1]$

et $A_s \circ \theta_t \hat{\varphi} = B_s(\theta_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n))$

Soit $B^{n,p}_{\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}}$ la section de $E^{t,s}_{n,p}$ à $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ fixés (t et s sont fixés).

Soit $C^{n,p}$ la projection de $E^{t,s}_{n,p}$ sur Φ^{n-1} : $C^{n,p} = \{(\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1})\}$; $\exists \varphi_n, (\varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots) \in E^{t,s}_{n,p}\}$.

On sait qu'il existe un ensemble $\Lambda^{n,o}_{\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}} \subset B^{n,o}_{\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}}$ tel que, d'une part :

(1) $B_{t+s-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n) = B_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n) + B_s(\theta_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n))$

sur $\Lambda^{n,o}_{\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}}$, d'autre part : $P_x(\Lambda^{n,o}_{\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}}) = P_x(B^{n,o}_{\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}})$.

Soit alors $\Lambda^{n,o} = C^{n,o} \times \Lambda^{n,o}_{\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}}$: $\hat{P}_x(\Lambda^{n,o}) = \hat{P}_x(E^{t,s}_{n,o})$ et (1) est réalisée sur $\Lambda^{n,o}$, or (1) entraîne que $A_{t+s}(\hat{\varphi}) = A_t(\hat{\varphi}) + A_s \circ \theta_t \hat{\varphi}$. Cette dernière relation est donc vraie sur $E^{t,s}_{n,o}$ $\hat{P}_x$ p.s.

γ'') : soit $p > 0$ alors $\sum_1^p \zeta(\theta_t \hat{\varphi})_i \leq s < \sum_1^{p+1} \zeta(\theta_t(\hat{\varphi})_i)$

Donc

$$A_s\circ\theta_t\hat{\varphi} = B_{\zeta^{(n)}(\omega)-t}\circ\theta_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n) + \sum_{n+1}^{n+p+1} B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i) + B_{s+t-\zeta^{(n+p-1)}(\omega)}(\omega_{n+p})$$

(où, comme précédemment, le deuxième terme du membre de droite ne figure pas si $p=1$). Or il existe un ensemble $\Lambda^{n,p}_{\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}} \subset B^{n,p}_{\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}}$ tel que

$P_x(\Lambda^{n,p}_{\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}}) = P_x(B^{n,p}_{\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}})$,

et sur lequel :

(2) $B_{\zeta^{(n)}(\omega)-t}\circ\theta_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n) + B_{t-\zeta^{(n)}(\omega)}(\omega_n) = B_{\zeta(\omega_n)}(\omega_n)$

Soit $\Lambda^{n,p} = C^{n,p}\times\Lambda^{n,p}_{\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}}$: $\hat{P}_x(\Lambda^{n,p}) = \hat{P}_x(E^{t,s}_{n,p})$, la relation (2) est alors vraie sur $\Lambda^{n,p}$, ce qui entraîne que, $\hat{P}_x$ p.s. sur cet ensemble :

$A_{t+s}(\hat{\varphi}) = A_t(\hat{\varphi}) + A_s\circ\theta_t\hat{\varphi}$. Cette relation est donc vraie sur $(E^{t+s}_\infty)^c$, $\hat{P}_x$ p.s.

2) Soit $\hat{\varphi}\in E^{t+s}_\infty$

Soit $D^{t,s}_n = E^{t+s}_\infty \cap E^t_n$ (I,B,8)

de telle sorte que $A_{t+s}(\hat{\varphi}) = \sum_1^{k(\hat{\varphi})} B_{\zeta(\omega_p)}(\omega_p)$ et que $k(\theta_t\hat{\varphi}) = k(\hat{\varphi}) - (n-1)$ sur E^t_n.

α) Soit $\hat{\varphi}\in D^{t,s}_1$, alors $A_t\hat{\varphi} = B_t(\omega_1)$

$$\theta_t\hat{\varphi} = (\theta_t\omega_1, x_1\ ;\varphi_2,\ldots\ldots).$$

Comme $s \geq \hat{\zeta}(\hat{\varphi}) - t = \hat{\zeta}(\theta_t\hat{\varphi})$: $A_s\circ\theta_t\hat{\varphi} = B_{\zeta(\omega_1)-t}\circ\theta_t\omega_1 + \sum_{p=2}^{k(\hat{\varphi})} B_{\zeta(\omega_p)}\omega_p$ car $k(\theta_t\hat{\varphi}) = k(\hat{\varphi})$. (Ce dernier terme ne figurant pas si $k(\hat{\varphi}) = 1$).

Comme $B_{\zeta(\omega_1)}(\omega_1) = B_t(\omega_1) + B_{\zeta(\omega_1)-t}\circ\theta_t\omega_1$, P_x p.s., on vérifie, comme précédemment, que, $\hat{P}_x$ p.s., sur $D^{t,s}_1$: $A_{t+s}(\hat{\varphi}) = A_t(\hat{\varphi}) + A_s\circ\theta_t\hat{\varphi}$.

β) Soit $\hat{\varphi}\in D^{t,s}_n$, dans ce cas :

$$A_t(\hat{\varphi}) = \sum_1^{n-1} B_{\zeta(\omega_p)}(\omega_p) + B_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n)\ ;$$

comme $s \geq \hat{\zeta}(\theta_t\hat{\varphi})$:

$$A_s\circ\theta_t\hat{\varphi} = B_{\zeta^{(n)}(\omega)-t}\circ\theta_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n) + \sum_{n+1}^{k(\hat{\varphi})} B_{\zeta(\omega_p)}(\omega_p)$$

car sur $D_n^{t,s}$: $k(\theta_t \hat{\varphi}) = k(\hat{\varphi}) - (n-1)$. (Si $k(\hat{\varphi}) = n$, le dernier terme ne figure pas). On montre alors, comme précédemment, que, $\hat{P}_x$ p.s., sur $D_n^{t,s}$: $A_{t+s}(\hat{\varphi}) = A_t(\hat{\varphi}) + A_s \circ \theta_t \hat{\varphi}$.

Soit $\hat{\varphi} \in D^{t,s}$, ici $A_{t+s}(\hat{\varphi}) = A_t(\hat{\varphi}) = \sum_1^{k(\hat{\varphi})} B_{\zeta(\omega_p)}(\omega_p)$;

Comme $t \geq \hat{\zeta}(\hat{\varphi})$: $\hat{\zeta}(\theta_t \hat{\varphi}) = 0$ et $k(\theta_t \hat{\varphi}) = 0$, de sorte que $A_s \circ \theta_t \hat{\varphi} = 0$ pour tout s, ce qui achève la démonstration.

Lemme (I,B,9) - A_t est $\hat{F}_t$ mesurable.

Démonstration. - On rappelle que les ensembles E_i^t sont définis en (I,B,5). Considérons

$$\{A_t \hat{\varphi} < a\} = E_1^t \cap \{B_t(\omega_1) < a\} + \dots + E_n^t \cap \Big\{B_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n) + \sum_1^{n-1} B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i) < a\Big\}$$
$$+ E_\infty^t \cap \Big\{\sum_1^{k(\hat{\varphi})} B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i) < a\Big\}$$
$$= F_1^t + \dots + F_n^t + \dots + F_\infty^t \quad (F_i^t \in \hat{F}_\infty \text{ pour tout } i).$$

Soit $\hat{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ où $\varphi_i = (\omega_i, x_i)$

$\hat{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots)$ où $\psi_i = (\eta_i, y_i)$;

Rappelons que la relation d'équivalence R_t^X a été définie en (I,B,2) et que si $\hat{\psi} \sim \hat{\varphi}(R_t^X)$, pour toute fonction f, $\hat{F}_t$-mesurable : $f(\hat{\varphi}) = f(\hat{\psi})$.

α) Soit $\hat{\varphi} \in E_1^t$ et $\hat{\psi} \sim \hat{\varphi}(R_t^{\hat{X}})$, alors $\eta_1 \sim \omega_1$ (R_t^X), $\hat{\psi} \in E_1^t$ et $B_t(\eta_1) = B_t(\omega_1)$, de sorte que, si $\hat{\varphi} \in F_1^t$ et $\hat{\psi} \sim \hat{\varphi}(R_t^{\hat{X}})$; $\hat{\psi} \in F_1^t$ ce qui entraîne, par définition, que F_1^t de même que E_1^t, appartient à $\hat{F}_t$ (si on a rendu les tribus $\hat{F}_t$ continues à droite, on fait le même raisonnement pour tous les s, $s > t$)

β) Soit $\hat{\varphi} \in E_n^t$ et $\hat{\psi} \sim \hat{\varphi}(R_t^X)$; il est clair que $\omega_i = \eta_i$ $\forall i \leq n-1$, donc que $\zeta(\omega_i) = \zeta(\eta_i)$, $\forall i \leq n-1, n-1$, et que $\omega_n \sim \eta_n (R^X_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)})$ de sorte que $\hat{\psi} \in E_n^t$, que $E_n^t \in \hat{F}_t$ et que $B_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega_i)}(\omega_n) + \sum_1^{n-1} B_{\zeta(\eta_i)}(\eta_i) = B_{t-\zeta^{(n-1)}(\eta_i)}(\eta_n) + \sum_1^{n-1} B_{\zeta(\eta_i)}(\eta_i)$; donc, si $\varphi \in F_n^t$ et $\hat{\psi} \sim \hat{\varphi}(R_t^X)$ alors $\hat{\psi} \in F_n^t$, donc $F_n^t \in \hat{F}_t$.

γ) Soit $\hat{\varphi} \in E_\infty^t$ et $\hat{\psi} \sim \hat{\Phi}(R_t^{\hat{X}})$, alors $\omega_i = \eta_i$, $\forall i \leq k(\hat{\varphi}) = k(\hat{\psi})$, donc $\hat{\psi} \in E_\infty^t$ et $E_\infty^t \in \hat{F}_t$. Si $\hat{\varphi} \in F_\infty^t$ alors $\hat{\psi} \in F_\infty^t$ de telle sorte que $\hat{F}_\infty^t \in \hat{F}_t$, ce qui entraîne que, pour tout a, $\{A_t(\hat{\varphi}) < a\}$ appartient à $\hat{F}_t$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Pour établir la proposition (I,B,5), il ne reste qu'à noter que $A_0(\hat{\varphi}) = 0$.

Par, cette proposition, nous avons construit une fonctionnelle additive de $\hat{X}$ continue aux points $\tau_n(\hat{\varphi}) = \sum \zeta(\omega_i)$ $1 \leq i \leq \inf(n, k(\hat{\varphi}))$.

Nous allons maintenant construire une fonctionnelle additive de $\hat{X}$ qui ne saute précisément qu'à ces instants.

<u>Proposition</u> (I,B,10). - <u>Soit</u> f^n <u>une suite de fonctions mesurables de</u> $\Phi^n \times E$ <u>dans</u> $\bar{R}$, <u>soit</u>

$$A_t \hat{\varphi} = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{\varphi} \in E_1^t \\ \sum_1^{n-1} f^i(\varphi_1 \ldots \varphi_i , x_{i+1}) & \text{si } \hat{\varphi} \in E_n^t \\ \sum_1^{k(\hat{\varphi})} f^i(\varphi_1 \ldots \varphi_i , x_{i+1}) & \text{si } \hat{\varphi} \in E_\infty^t \end{cases}$$

Pour que A_t soit une fonctionnelle additive de $\hat{X}$, il faut et il suffit que pour tout $\hat{\varphi}$ de E_n^t : $f^k(\theta_t\hat{\varphi}) = f^{n+k-1}(\hat{\varphi})$ $\forall 0 < k < k(\hat{\varphi})$ (la définition des ensembles E_i^t est donnée en (I,B,5)).

<u>Démonstration</u>. - Vérifions d'abord que $A_t(\hat{\varphi})$ est $\hat{F}_t$-mesurable.

$$\{A_t \hat{\varphi} < a\} = \bigcup_1^\infty [E_i^t \cap \{A_t \hat{\varphi} < a\}] = \bigcup_1^\infty G_n^t (G_n^t \in \hat{F} , \forall n)$$

Il est clair que $G_1^t = E_1^t$ donc $G_1^t \in \hat{F}_t$.

Soit $n > 1$ et $\hat{\varphi} \in E_n^t$, soit $\hat{\psi} \sim \hat{\Phi}(R_t^{\hat{X}})$, alors $\omega_i = \eta_i$ $\forall i \leq n-1$

$x_i = y_i$ $\forall i \leq n$

donc $f^i(\varphi_1 \ldots \varphi_i, x_{i+1}) = f^i(\eta_1 \ldots \eta_i y_{i+1}) \forall i \leq n-1$, alors si $\hat{\varphi} \in G_n^t$, $\hat{\psi}$ aussi appartient à G_n^t donc $G_n^t \in \hat{F}_t$, ce dernier raisonnement s'étend aussi au cas où $n=k(\hat{\varphi})$ donc $G_\infty \in \hat{F}_t$.

Soit (I) $A_{t+s}(\hat{\varphi}) = A_t(\hat{\varphi}) + A_s \circ \theta_t \hat{\varphi}$

(II) $f^k(\theta_t\hat{\varphi}) = f^{n+k-1}(\hat{\varphi})$ $\forall 0 < k < k(\hat{\varphi})$ si $\hat{\varphi} \in E_n^t$.

(α) Soient t et s fixés et (II) réalisée

α') Soit $\varphi \in (E_\infty^{t+s})^c$ (cf. I,B,7) pour les notations)

si $\hat{\varphi} \in E_1^{t+s}$ (I) est toujours réalisée si $\hat{\varphi} \in E^{t,s}_{1,q-1}$ alors $A_{t+s}(\hat{\varphi}) = \sum_1^{q-1} f^i(\varphi_1 \dots \varphi_i, x_{i+1})$ et $A_t(\hat{\varphi}) = 0$

$\theta_t \hat{\varphi} = (\theta_t \omega_1, x_1 ; \dots)$ de sorte que $\sum_1^{q-1} \zeta(\theta_t \hat{\varphi})_i \leq s < \sum_1^{q} (\theta_t \hat{\varphi})_i$ et

$A_s \circ \theta_t \hat{\varphi} = \sum_1^{q-1} f^i(\theta_t \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_i, x_{i+1})$, alors (I) est réalisée si

$$\hat{\varphi} \in E^{t,s}_{n,p} : A_{t+s}(\hat{\varphi}) = \sum_1^{n+p-1} f^i(\varphi_1 \dots \varphi_i, x_{i+1})$$

$$A_t(\hat{\varphi}) = \sum_1^{n-1} f^i(\varphi_1 \dots \varphi_i, x_{i+1})$$

$$\theta_t \hat{\varphi} = (\theta_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)} (\omega_n), x_n ; \varphi_{n+1} \dots)$$

a). si $p=0$ $s < \zeta^{(n)}(\omega) - t = \zeta(\theta_t \hat{\varphi})_1$ donc $A_s \circ \theta_t \hat{\varphi} = 0$ et (I) est réalisée.

b). si $p \neq 0$ $\sum_1^{p} \zeta(\theta_t \hat{\varphi})_i \leq s < \sum_1^{p+1} \zeta(\theta_t \hat{\varphi})_i$, donc

$A_s \circ \theta_t \hat{\varphi} = \sum_1^{p} f^i(\theta_{t-\zeta^{(n+1)}(\omega)}(\omega_n), x_n ; \dots ; \varphi_{n+i-1}, x_{n+i})$, dans ces conditions

(I) devient :

$\sum_1^{p} f^{n-1+i}(\varphi_1, \dots \varphi_{n+i-1}, x_{n+i}) = \sum_1^{p} f^i(\theta_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n), \dots, x_{n+i})$ qui est ainsi réalisée.

α'') Soit $\hat{\varphi} \in E^{t+s}_{\infty}$

alors $A_{t+s}(\hat{\varphi}) = \sum_1^{k(\hat{\varphi})} f^i(\varphi_1 \dots \varphi_i, x_{i+1})$ et $s \geq \hat{\zeta}(\theta_t \hat{\varphi})$

Si $\hat{\varphi} \in D^{t,s}_1 = E^{t+s}_{\infty} \cap E^t_1$ (cf. 1,B,8), $A_t(\hat{\varphi}) = 0$ et $k(\theta_t \hat{\varphi}) = k(\hat{\varphi})$, donc

$A_s \circ \theta_t \hat{\varphi} = \sum_1^{k(\hat{\varphi})} f^i(\theta_t \varphi_1, \dots \varphi_i, x_{i+1})$ et (I) est réalisée.

Si $\hat{\varphi} \in D^{t,s}_n = E^{t+s}_{\infty} \cap E^t_n : A_t(\hat{\varphi}) = \sum_1^{n-1} f^i(\varphi_1 \dots \varphi_i, x_{i+1})$

et $k(\theta_t \hat{\varphi}) = k(\hat{\varphi}) - (n-1)$ donc

$A_s \circ \theta_t \hat{\varphi} = \sum_1^{k(\hat{\varphi})-(n-1)} f^i(\theta_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega_1)}(\omega_n), \dots ; \varphi_{n+i-1}, x_{n+i})$ devient :

$$\sum_1^{k(\hat{\varphi})-(n-1)} f^{n-1+i}(\varphi_1 \dots \varphi_{n+i-1}, x_{n+i}) = \sum_1^{k(\hat{\varphi})-(n-1)} f^i(\theta_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n), \dots ; \varphi_{n+i-1}, x_{n+i})$$ (I) est donc réalisée ;

Si $\hat{\varphi} \in D^{t,s}_{\infty} = E^{t+s}_{\infty} \cap E^t_{\infty} : A_{t+s}(\hat{\varphi}) = A_t(\hat{\varphi})$ et $k(\theta_t \hat{\varphi}) = 0$ donc $A_s \circ \theta_t \hat{\varphi} = 0$ et (I) est réalisée. Ainsi (II) entraîne (I).

β) Soit t fixé et (I) réalisée.

Soit $\hat{\varphi} \in E^t_1$, en faisant varier s, φ appartient successivement à tous les ensembles $E^{t,s}_{1,q-1}$, où q varie de 2 à $k(\hat{\varphi})$ et sur ces ensembles (I) entraîne que $\sum_1^{q-1} f^i(\varphi_1,\ldots,\varphi_i,x_{i+1}) = \sum_1^{q-1} f^i(\theta_t\varphi_1,\ldots,\varphi_i,x_{i+1})$ de sorte que (II) est réalisée.

Soit $\hat{\varphi} \in E_n^t$, en faisant varier s, $\hat{\varphi}$ appartient successivement à tous les ensembles $E_{n,p}^{t,s}$, où p varie de 1 à $k(\hat{\varphi})-n$, sur ces ensembles on a vu que (I) s'écrit :

$$\sum_1^p f^{n-1+i}(\varphi_1\ldots\varphi_{n+i-1},x_{n+i}) = (\sum_1^p f^i(\theta_{\zeta(n-1)(\omega)}(\omega_n),\ldots\varphi_{n+i-1},x_{n+i})$$ de sorte que (II) est réalisée ; ce qui achève la démonstration de la proposition (I,B,10).

Définition (I,B,11) - Nous dirons qu'une fonctionnelle obtenue par le procédé décrit à la proposition (I,B,5) est une fonctionnelle recollée ; nous dirons qu'une fonctionnelle obtenue par le procédé décrit à la proposition (I,B,10) est une fonctionnelle de sauts de branchement.

Si A est une fonctionnelle additive de $\hat{X}$, si $\zeta^{(n-1)}(\omega) \leq t < t+s < \zeta^{(n)}(\omega)$ il est clair que A_t et A_{t+s} ne dépendent que de $\omega_i (i \leq n-1)$, de $x_i (i \leq n)$ et de ω_n, en particulier de x_n et de la loi instantanée μ. Pour $\omega_i (i \leq n-1)$ et $x_i (i \leq n)$ fixés, A se comporte comme une fonctionnelle additive B_n de ω_n. C'est le cas pour les fonctionnelles obtenues aux propositions (I,B,5) et (I,B,10), dans le premier cas B_n est toujours identique à B, dans le deuxième elle est constante ; le théorème suivant montre que ce sont les seuls cas possibles et qu'on ne saurait recoller une famille de fonctionnelles différentes non constantes.

Théorème (I,B) - Soit A une fonctionnelle additive de $\hat{X}$: il existe deux fonctionnelles additives de $\hat{X}$, A^1 et A^2, telles que $A = A^1+A^2$, et que A^1 soit une fonctionnelle recollée, A^2 une fonctionnelle de sauts de branchement. La décomposition est évidemment unique, en particulier toutes les fonctionnelles additives continues de X sont du type recollé.

Démonstration. - La démonstration se décompose en plusieurs lemmes.

Lemme (I,B,12) - Soit A une fonctionnelle additive de $\hat{X}$ et

$$B_t(\hat{\varphi}) = \begin{cases} A_t(\hat{\varphi}) & \text{si } t < \zeta(\omega_1) \\ \lim_{s \uparrow \zeta(\omega_1)} A_s(\hat{\varphi}) & \text{si } t \geq \zeta(\omega_1) \end{cases}$$

$B_t(\hat{\varphi})$ ne dépend que de ω_1 et B est une fonctionnelle additive de X.

Démonstration. -

α) Si $\zeta(\omega_n) > 0$: $B_o(\hat{\varphi}) = A_o(\hat{\varphi}) = 0$; si $\zeta(\omega_1) = 0$ $B_t(\hat{\varphi}) = 0$ $\forall t$

β) Montrons que, $B_t(\hat{\varphi})$ ne dépend que de ω_1 et est F_t mesurable.
$\{B_t(\hat{\varphi}) < a\} = E_1^t \cap \{A_t(\hat{\varphi}) < a\} + (E_1^t)^c \cap \{\lim_{s\uparrow\zeta(\omega_1)} A_s(\hat{\varphi}) < a\} = H_1^t + H_2^t$. Comme A_t est une fonctionnelle additive $\{A_t\,\hat{\varphi} < a\} \in \hat{F}_t$ donc $H_1^t \in \hat{F}_t$. Soit $\hat{\varphi}$ tel que $X_s(\omega_1) = X_s(\eta_1)$, pour tout $s < t \leq \zeta(\omega_1)$, alors $\hat{\varphi} \sim \hat{\varphi}(\hat{R}_t^X)$ donc, si $\hat{\varphi}$ appartient à H_1^t, $\hat{\varphi}$ appartient aussi à H_1^t ce qui prouve que H_1^t ne dépend que de ω_1 et entraîne que H_1^t appartient à F_t.

De la même façon $\{\lim_{s\uparrow\zeta(\omega_1)} A_s(\hat{\varphi}) < a\} \in \hat{F}_{\zeta(\omega_1)}$, soit $\hat{\varphi}$ tel que $X_s(\omega_1) = X_s(\eta_1)$ pour tout $s < \zeta(\omega_1) \leq t$, alors $\hat{\varphi} \sim \hat{\varphi}(R^X_{\zeta(\omega_1)})$ et si $\hat{\varphi} \in \{\lim_{s\uparrow\zeta(\omega_1)} A_s(\hat{\varphi}) < a\}$, $\hat{\varphi}$ appartient au même ensemble, ce qui prouve que ce dernier ne dépend que de ω_1 et appartient à $F_{\zeta(\omega_1)}$, alors H_2^t ne dépend aussi que de ω_1, et appartient à F_t ce qui prouve β.

γ) Prouvons maintenant l'additivité de B.

γ') Soit $\hat{\varphi} \in E_1^{t+s}$ alors $A_{t+s}(\hat{\varphi}) = B_{t+s}(\varphi_1)$

$$A_t(\hat{\varphi}) = B_t(\varphi_1).$$

Comme $s < \zeta(\omega_1) - t = \zeta(\theta_t\hat{\varphi})_1$: $A_s \circ \theta_t \hat{\varphi} = B_s \circ \theta_t \varphi_1$.

Comme $A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t$ $\hat{P}_x$ p.s. : $B_{t+s}(\varphi_1) = B_t(\varphi_1) + B_s(\theta_t \varphi_1)$ P_x p.s.

γ'') Soit $\hat{\varphi} \in (E_1^{t+s})^c \cap E_1^t$; sur cet ensemble $B_{t+s}(\varphi_1) = \lim_{u\uparrow\zeta(\omega_1)-t} A_{u+t}(\hat{\varphi})$ et $B_t(\varphi_1) = A_t(\hat{\varphi})$, de plus $s \geq \zeta(\theta_t\hat{\varphi})_1 = \zeta(\omega_1) - t$ donc

$$B_s \circ \theta_t\ \varphi_1 = \lim_{u\uparrow\zeta(\omega_1)-t} A_u \circ \theta_t\,\hat{\varphi}, \text{ or } \forall u \leq \zeta(\omega_1) - t$$

$A_{u+t}(\hat{\varphi}) = A_t(\hat{\varphi}) + A_u \circ \theta_t \hat{\varphi}$ $\hat{P}_x$ p.s. on peut choisir une suite de rationnels r, croissant vers $\zeta(\omega_1) - t$, de sorte que la limite suivant r soit la même que suivant u ; soit $\hat{\Lambda}_r$ l'ensemble où

$$A_{r+t}(\hat{\varphi}) = A_t(\hat{\varphi}) + A_r \circ \theta_t \hat{\varphi} \text{ et } \hat{\Lambda} = \bigcap_r \hat{\Lambda}_r : \hat{P}_x(\hat{\Lambda}) = \hat{P}_x[E_1^t \cap (E_1^{t+s})^c]$$

On vérifie alors que sur $E_1 \cap (E_1^{t+s})^c$, P_x p.s., $B_{t+s}(\varphi_1) = B_t(\varphi_1) + B_s \circ \theta_t \varphi_1$.

γ''') Soit $\hat{\varphi} \in (E_1^t)^c \cap (E_1^{t+s})^c = \{t \geq \zeta(\omega_1)\}$

dans ce cas $B_{t+s}(\varphi_1) = B_t(\varphi_1) = \lim_{u\uparrow\zeta(\omega_1)} A_u(\hat{\varphi})$, comme par ailleurs

$\zeta(\theta_t \omega_1) = 0$: $B_s \circ \theta_t \varphi_1 = 0$ pour tout s et $B_{t+s}(\varphi_1) = B_t(\varphi_1) + B_s \circ \theta_t\,\varphi_1$.

<u>Lemme</u> (I,B,13) - Soit A une fonctionnelle additive de $\widehat{X}$ et

$$\Delta A^i(\hat\varphi) = A_{\zeta^{(i)}(\omega)}(\omega) - \lim_{s\uparrow\zeta^{(i)}(\omega)} \hat\varphi$$

$$C_t(\hat\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat\varphi\in E_1^t \\ \sum_1^{n-1} \Delta A^i(\hat\varphi) & \text{si } \hat\varphi\in E_n^t \\ \sum_1^{k(\hat\varphi)} \Delta A^i(\hat\varphi) & \text{si } \hat\varphi\in E_\infty^t \end{cases}$$ (cf I,B,5 pour les notations).

C_t est une fonctionnelle additive de saut de branchement de $\widetilde{X}$.

<u>Démonstration.</u>- Soit $f^i = \Delta A^i$, comme A_t est $\widehat{F}_t$-mesurable, ΔA^i est $\widehat{F}_{\zeta^{(i)}(\omega)}$ mesurable ; soit $\hat\varphi \in \{\Delta A^i(\cdot) < a\}$ et $\hat\Psi \sim \hat\Phi(R^X_{\zeta^{(i)}(\omega)})$, alors $\hat\Psi\in\{\Delta A^i < a\}$, ce qui montre que cet ensemble ne dépend que de $(\varphi_1,\dots,\varphi_{i-1}, x_i)$, comme cela est vrai pour tout a, $\Delta A^i = f^i(\varphi_1,\dots,\varphi_{i-1},x_i)$, il suffit alors de vérifier que la relation $f^k(\theta_t\hat\varphi) = f^{n+k-1}(\hat\varphi)$, pour tout $k < k(\hat\varphi)$, $k > 0$, est alors réalisée sur E_n(cf. I,B,10).

Soit $\hat\varphi\in E_n^t$, alors $\Delta A^k(\theta_t\hat\varphi) = A_{\sum_1^k \zeta(\theta_t\hat\varphi)_i}(\theta_t\hat\varphi) - A_{\sum_1^k \zeta(\theta_t\hat\varphi)_i^-}(\theta_t\hat\varphi)$,

or

$$A_{\sum_1^k(\theta_t\hat\varphi)_i}(\theta_t\hat\varphi) = A_{\zeta^{(n+k-1)}(\omega)-t}(\theta_t\hat\varphi) = A_{\zeta^{(n+k-1)}(\omega)}(\hat\varphi) - A_t(\hat\varphi), \quad P_x \text{ p.s.},$$

soit s croissant vers : $\zeta^{(n+k-1)}(\omega)-t$ $A_s\circ\theta_t\hat\varphi = A_{t+s}(\hat\varphi)-A_t(\hat\varphi)$, $\widehat{P}_x$ p.s., en choisissant une suite dénombrable s_n croissant vers $\zeta^{(n+k-1)}(\omega)-t$ on démontre ainsi que $\Delta A^k(\theta_t\hat\varphi) = \Delta A^{n+k-1}(\hat\varphi)$ ce qui est la relation cherchée. (Il faudrait faire une vérification particulière pour E_1^t, elle est immédiate).

<u>Lemme</u> (I,B,14) - Soit A une fonctionnelle additive de $\widehat{X}$, soit B la fonctionnelle additive de X attachée à A par le lemme (I,B,12), alors si

$$\hat\varphi\in E_n^t \quad A_t(\hat\varphi) = \sum_1^{n-1} A^i(\hat\varphi) + \sum_1^{n-1} B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i) + B_{t-\sum_1^{n-1}\zeta(\omega_i)}(\omega_n)$$

$$\hat\varphi\in E_\infty^t \quad A_t(\hat\varphi) = \sum_1^{k(\hat\varphi)} (\Delta A^i(\hat\varphi) + B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i))$$

Démonstration. - Si $\hat{\varphi} \in E_1^t$ ce lemme se réduit au lemme (I,B,12). Démontrons alors le lemme (I,B,14) par récurrence.

Soit $\hat{\varphi} \in E_n^t$,

$$A_t(\hat{\varphi}) = A_{\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\hat{\varphi}) + A_{t-\zeta^{(n-1)}}(\theta_{\zeta^{(n-1)}(\omega)}\hat{\varphi}) \; ; \; \hat{P}_x \text{ p.s.}$$

or $$\theta_{\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\hat{\varphi}) = (\varphi_n, \ldots, \varphi_{n-1}) \text{ et } t-\zeta^{(n-1)}(\omega) < \zeta(\omega_n) = \zeta(\theta_{\zeta^{(n-1)}(\omega)}\hat{\varphi})_1,$$

donc

$$A_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\theta_{\zeta^{(n-1)}(\omega)}\hat{\varphi}) = B_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n), \text{ alors :}$$

$$A_t(\hat{\varphi}) = \Delta A^{n-1}(\hat{\varphi}) + A_{\zeta^{(n-1)}(\omega)^-}(\hat{\varphi}) + B_{t-\zeta^{(n-1)}(\omega)}(\omega_n), \text{ et si } s \text{ croit vers}$$

$\zeta^{(n-1)}(\omega)$: $A_s(\hat{\varphi}) = \sum_1^{n-2} \Delta A^i(\hat{\varphi}) + \sum_1^{n-2} B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i) + B_{s-\zeta^{(n-2)}(\omega)}(\omega_{n-1})$, dont la limite est $\sum_1^{n-2} \Delta A^i(\hat{\varphi}) + \sum_1^{n-1} B_{\zeta(\omega_i)}(\omega_i)$, ce qui établit le lemme.

Pour établir le théorème (I,B), il suffit alors de choisir pour A^1 la fonctionnelle recollée de B et pour A^2 la fonctionnelle C.

C - Fonctionnelles additives de processus de branchement.

Soit X^o un processus vérifiant les conditions (I,A,5), soit $\hat{X}$ le processus ayant X^o pour partie de non-branchement et un noyau π pour loi de branchement, nous avons vu comment construire $\hat{X}$ (théorème I,A) : il suffit de prolonger le processus $\tilde{X}$, somme directe des processus $\tilde{X}_n^o$ (cf. I,A,6 à I,A,8). D'après ce que nous venons de voir, il suffit donc, pour décrire les fonctionnelles additives de $\hat{X}$, de connaître les fonctionnelles additives de X, c'est-à-dire celles de $\tilde{X}_n^o$ pour tout n.

En général, si on connait les fonctionnelles additives de X^o, on ne connait pas pour autant celles de $\tilde{X}_n^o$. Si X est une diffusion et si X^o est un processus tué de X d'un type déterminé, il est possible de connaître les fonctionnels additives, continues, non négatives, de potentiel fini et de carré intégrable de X^o (cf. chapitre III) ; nous montrerons aussi que si X est une diffusion, $\tilde{X}_n$ est une diffusion et que $\tilde{X}_n^o$ est équivalent à un processus tué de $\tilde{X}_n$, nous arriverons de cette façon à décrire une classe de fonctionnelles additives de $\tilde{X}$.

Nous allons donner ici l'expression la plus générale d'une fonctionnelle additive de $\hat{X}$ en supposant connues les fonctionnelles additives de $\tilde{X}$. Soit B_t une fonctionnelle de $\tilde{X}$: c'est une suite de fonctionnelles additives B_t^n

de $\tilde{X}_n$ qui n'ont aucun lien entre elles, il suffit alors, pour construire une fonctionnelle additive de X, de se donner une suite $\{f^n\}$ d'applications de $\tilde{\Omega}^n \times \hat{\Sigma}$ dans $\overline{R}$, vérifiant la condition (I,B,10) ; on sait alors (théorème I,B) que la fonctionnelle A_t, définie ci-dessous, est une fonctionnelle additive de $\hat{X}$ et que cette forme est la forme générale des fonctionnelles de $\hat{X}$: si $\hat{\varphi} = (\tilde{\omega}_i, x_i) = (\tilde{\varphi}_i)$ alors

$$A_t(\hat{\varphi}) = \begin{cases} B_t(\tilde{\omega}_1) & \text{si } \hat{\varphi} \in E_1^t \\ \sum_1^{p-1} (f^i(\varphi_1, \ldots \varphi_i, x_{i+1}) + B_{\zeta(\tilde{\omega}_i)}(\tilde{\omega}_i)) + B_{t-\zeta(p-1)(\tilde{\omega})}(\tilde{\omega}_p) & \text{si } \hat{\varphi} \in E_p^t \\ \sum_1^{k(\hat{\varphi})} (f^i(\tilde{\varphi}_1 \ldots \tilde{\varphi}_i, x_{i+1}) + B_{\zeta(\tilde{\omega}_i)}(\tilde{\omega}_i)) & \text{si } \hat{\varphi} \in E_\infty^t \end{cases}$$

On peut alors énoncer le théorème suivant qui reformule le théorème (I,B) :

<u>Théorème</u> (I,C) - Soit A une fonctionnelle additive de $\hat{X}$, il existe une suite $\{B^n\}$ de fonctionnelles additives de $\tilde{X}_n^o$, une suite $\{f_n\}$ d'applications de $\tilde{\Omega}^n \times \hat{\Sigma}$ dans $\overline{R}$ vérifiant la condition (I,B,10), telles que, si χ^{n_i} désigne la fonction indicatrice de S^{n_i}, on puisse écrire :

$$A_t(\hat{\varphi}) = \begin{cases} B_t^{n_1}(\omega_1)\, \chi^{n_1}(x_1) & \text{si } \hat{\varphi} \in E_1^t \\ \sum_1^{p-1} (f^i(\tilde{\varphi}_1 \ldots \tilde{\varphi}_i, x_{i+1}) + B^{n_i}_{\zeta(\tilde{\omega}_i)}(\tilde{\omega}_i)\chi^{n_i}(x_i)) + B^{n_p}_{t-\zeta(p-1)(\tilde{\omega})}(\tilde{\omega}_p)\,\chi^{n_p}(\tilde{\omega}_p) & \text{si } \hat{\varphi} \in E_p^t \\ \sum_1^{k(\hat{\varphi})} (f^o(\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_i, x_{i+1}) + B^{n_i}_{\zeta(\tilde{\omega}_i)}(\tilde{\omega}_i)\, \chi^{n_i}(x_i)) & \text{si } \hat{\varphi} \in E_\infty^t \end{cases}$$

La loi de branchement π, qui indique dans quel espace on se trouve aux instants de branchement τ_n, permet de calculer $\hat{P}_x(\chi^{n_i}(x_i) = 1)$ grâce à :

(I,4,4) : si $x_1 \in S^{n_1}$, $\hat{P}_{x_1}(x_2 \in S^{n_2} \ldots x_p \in S^{n_p}) =$

$$\int_{S^{n_1} \times \ldots \times S^{n_p}} \pi(X_{\tau^-}, S^{p_2})\,\pi(\;)\ \ldots\ \pi(X_{\tau_{n_{p-1}}}, S^{n_p}).$$

Si A est une fonctionnelle continue de $\hat{X}$, $f^i \equiv 0$ pour tout i et B est une fonctionnelle continue de $\tilde{X}$, si A est de potentiel fini pour $\hat{P}_x$, B est de potentiel fini pour $\tilde{P}_x$, si A est de carré intégrable pour $\hat{P}_x$, B l'est pour $\tilde{P}_x$.

CHAPITRE II

FONCTIONNELLES ADDITIVES CONTINUES, NON NEGATIVES, DE POTENTIEL FINI ET DE CARRE INTEGRABLE, DE DIFFUSIONS

Si X est un processus de Markov, nous désignerons par N_X l'espace des fonctionnelles additives de X, non négatives, continues, de carré intégrable (1) et de potentiel fini ; nous désignerons par M_X l'espace des fonctionnelles additives de X, continues, de carré intégrable et d'espérance nulle et par L_X l'espace des fonctionnelles continues et d'espérance nulle. Avant de déterminer les fonctionnelles de N_{X_O} (cf, I,C) nous allons déterminer celles de N_X, généralisant ainsi un théorème de Vent'cell.

Soit $\beta = (\Omega, F_\infty, F_t, \beta_t, P_x)$ un brownien d-dimensionnel. On supposera que $F_t = \bigcap_\mu \overline{\mathcal{T}(\beta_s, s \leq t)}^\mu$, la complétion étant faite par rapport à F_∞ (on sait que ces tribus sont continues à droite du fait que β est fellérien) ; Vent'cell a montré que tout élément M de M_β peut s'écrire sous la forme d'une somme de d intégrables stochastiques :

$M_t = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t h^i(\beta_s) d\beta_s^i$, où β^i désigne les coordonnées de $\beta - \beta_0$.

Dynkin ([6]) a donné une représentation des fonctionnelles additives, non négatives, continues, du brownien et satisfaisant à $\sup_x E_x(M_t) < \infty$; ces fonctionnelles, qu'il appelle W-fonctionnelles ; se représentent en terme de W-mesure ; ces mesures sont par définition telles que $\sup_{x \in R^d} \int_{|x-y| \leq 1} |x-y|^{2-d} \mu(dy) < \infty$ si $d \geq 3$ (en particulier la mesure de Lebesgue est une W-mesure) ; lorsque la mesure qui représente M est finie, M peut aussi s'écrire comme une intégrale stochastique ; Dynkin n'a pas caractérisé les W-fonctionnelles dont la W-mesure est finie, d'une part, la condition $\sup_x E_x(M_t) < \infty$ est une condition très forte, d'autre part ; il est donc intéressant de décrire, en terme d'intégrales stochastiques, les fonctionnelles de N_β.

Nous généraliserons ensuite cette formule à des processus de diffusion autres que le brownien.

A - Cas du brownien.

Soit $\beta = (\Omega, F, F_t, \beta_t, \theta_t, P_x)$ un brownien d-dimensionnel et β_t^i les composantes de $\beta_t - \beta_0$. On supposera que $F_t = \bigcap_\mu \overline{\mathcal{T}(\beta_s, s \leq t)}^\mu$. L'objet de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant :

(1) nous dirons qu'une fonctionnelle B est de carré intégrable si $E_x(B_t^2) < \infty$, pour tout t fini et tout x.

Théorème (II,A) - Soit A une fonctionnelle additive, non négative, de β, continue, de carré intégrable et de potentiel fini. Il existe d fonctions mesurables sur $R^d, h^1 \dots h^d$, un potentiel régulier f, et une suite de temps d'arrêt τ_n tendant vers l'infini, tels que :

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} h^i(\beta_s)^2 < \infty,\ P_x \text{ p.s., pour tout } t \text{ et tout } x \text{, et que}$$

$$A_t = f(\beta_0) - f(\beta_t) + \sum_1^d \int_0^t h^i(\beta_s)d\beta_s^i.$$

La démonstration se décompose en plusieurs lemmes.

Comme A est continue, elle est équivalente à une fonctionnelle parfaite [5] ; nous supposerons donc A parfaite.

Rappelons qu'un potentiel régulier f est une fonction excessive finie telle que, pour toute suite de temps d'arrêt T_n croissant vers T, $E_x f(\beta_{T_n})$ converge vers $E_x f(\beta_T)$.

Lemme (II,A,1) - Soit $M_t = A_t + E_{\beta_t}(A_\infty) - E_{\beta_0}(E_\infty)$.

M_t est une fonctionnelle additive continue de β, d'espérance nulle ($M_t \in L\beta$) ; c'est donc une F_t-martingale.

Démonstration. - Il est facile de voir que M_t est une fonctionnelle additive d'espérance nulle, d'abord M_t est évidemment F_t mesurable, ensuite $M_t \circ \theta_s = A_{t+s} - A_s + E_{\beta_{t+s}}(A_\infty) - E_{\beta_s}(A_\infty) = M_{t+s} - M_s$;et $E_x(M_t) = E_x(A_t) + E_x(A_\infty \circ \theta_t) - E_x(A_\infty)$ $= E_x(A_t) + E_x(A_\infty) - E_x(A_t) - E_x(A_\infty) = 0$.

Pour établir le lemme, il reste à vérifier que $E_{\beta_t}(A_\infty)$ est continue, c'est à dire, que $x \rightsquigarrow E_x(A_\infty) = f(x)$, est continue sur les trajectoires. Comme f est finie et comme c'est le potentiel d'une fonctionnelle additive continue c'est un potentiel régulier.

Or, ([1] p. 193), on sait que, si, pour toute suite T_n de temps d'arrêt d'un processus X, croissant vers T, X_T est mesurable par rapport à la tribu $\bigvee_n F_{T_n}$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction excessive finie soit un potentiel régulier, est qu'elle soit un pseudo-potentiel (c'est-à-dire que $\lim_{t\to\infty} f(X_t) = 0$, p.s.) qu'elle soit régulière (c'est à dire continue sur les trajectoires), et qu'elle soit uniformément intégrable (c'est à dire que $f(X_T)$ soit uniformément intégrable lorsque T parcourt l'ensemble des temps d'arrêt).

Si T_n est une suite de temps d'arrêt d'un processus de Hunt X, croissant vers T, X_{T_n} converge vers X_T sur $(o\ \infty)$, donc X_T est mesurable par rapport à la tribu $\bigvee_n F_{T_n}$, d'après ce qui précède f est alors régulière donc continue sur les trajectoires.

La fonction f est celle qui figure dans l'énoncé du théorème.

La fonctionnelle M_t n'est pas de carré intégrable, pour nous placer dans une situation comparable à celle du théorème de Vent'cell, nous allons tuer le brownien β par une fonctionnelle multiplicative $1_{\{t \leq T\}}$. Nous rappelons à cet effet les définitions suivantes [1] :

Définition (II,A,2).- Soit $X = (\Omega, F, F_t, \theta_t, P_x, X_t)$ un processus de Markov à valeurs dans E et T un temps terminal, on appelle processus tué de X par T le processus $Y = (\hat{\Omega}, \hat{F}, \hat{F}_t, \hat{\theta}_t, \hat{X}_t, \hat{P}_x)$ défini par :

$$\hat{\Omega} = \Omega \times R^+ = \{\hat{\omega} = (\omega, \lambda)\}$$

$$\hat{F} = F \times \mathcal{B}_{R+}$$

$$\hat{X}_t(\hat{\omega}) = \begin{cases} X_t(\omega) & \text{si } t < \lambda \\ \Delta & \text{si } t \geq \lambda \text{ (} \Delta \text{ est le point de compactification de } E) \end{cases}$$

$$\hat{\theta}_{t(\hat{\omega})} = (\theta_t \omega, \lambda - tVo)$$

$\hat{P}_x$ est telle que $\hat{E}_x(Y) = E_x(Y(\omega, T(\omega))$ pour toute fonction Y $\hat{F}$-mesurable

$\hat{F}_t = \bigcap_{s>t} (\hat{F}^o_s)^*$ où $\hat{F}^o_s = \sigma(\hat{X}_s, s \leq t)$ et F^* désigne la complétée universelle de F.

Ces tribus ne sont pas les tribus considérées par Blumenthal & Getoor, mais elles possèdent la propriété suivante, qui sert de définition dans [4], et qui permet de démontrer toutes les propriétés du processus tué :

Lemme (II,A,3).- Soit $\hat{\Omega}_t = \Omega \times]t\ \infty]$, si $\hat{A} \in \hat{F}_t$, il existe un ensemble $A \in F_t$, tel que $\hat{A} \cap \hat{\Omega}_t = A \times]t\ \infty]$; ceci pour tout t.

Démonstration.- Soit d'abord $\hat{A} \in \hat{F}^o_s$ et $A = \{\omega ; \exists \lambda$ tel que $(\omega, \lambda) \in \hat{A} \cap \Omega_t\}$ soit $\omega \in A$ et $\varphi \sim \omega(R^X_t)$ (cf I,B,2), alors $\forall \mu > t$: $(\varphi, \mu) \sim (\omega, \lambda)(R^X_t)$ et $(\varphi, \mu) \in \hat{A} \cap \hat{\Omega}_t$, donc $\varphi \in A$ ce qui prouve que $A \in F_t$. Par ailleurs il est clair que $\hat{A} \cap \hat{\Omega}_t = A \times]\ t\ \infty]$.

Si $\hat{A} \in \bigcap_{s>t} \hat{F}^{o*}_s$, on détermine, pour chaque s, un ensemble A_s, tel que : $\hat{A} \cap \hat{\Omega}_s = A_s \times]s\ \infty]$, soit $A = \bigcap_s A_s$, alors $A \in F_t$ et $\hat{A} \cap \hat{\Omega}_t = A \times]t\ \infty]$.

Nous allons vérifier dans les deux lemmes suivant, qu'à une fonctionnelle additive de L_X correspond une fonctionnelle de L_Y, et nous tuerons β par un temps d'arrêt tel que la fonctionnelle correspondante soit de carré intégrable.

<u>Lemme</u> (II,A,4).- Soient $X = (\Omega,F,F_t,\theta_t,X_t,P_x)$ un processus de Markov, T un temps terminal, Y le processus tué de X par T. Soit $H_t(\omega)$ une martingale de X, alors $G_t(\omega,\lambda) = H_{t\wedge\lambda}(\omega)$ est une martingale de Y.

<u>Démonstration</u>.- Soit $\hat{A} \in \hat{F}_s$ et $s \leq t$

Calculons

$$\int_{\hat{A}} G_t(\omega,\lambda)d\,\hat{P}_x = \int_{\hat{A}\cap\hat{\Omega}_s} H_{t\wedge\lambda}(\omega)d\,\hat{P}_x + \int_{\hat{A}\cap(\hat{\Omega}_s)^c} H_{t\wedge\lambda}(\omega)d\,\hat{P}_x ; \int_{\hat{A}\cap\hat{\Omega}_s} H_{t\wedge\lambda}(\omega)\,d\,\hat{P}_x =$$

$$\int_A d\,P_x \int_{s+}^{\infty} H_{t\wedge\lambda}\,\delta_T(d\lambda) = \int_{A\cap(T>s)} H_{t\wedge T(\omega)}d\,P_x = \int_{A\cap(T>s)} H_{s\wedge T}\,d\,P_x$$

et le premier terme du membre de droite est égal à $\int_{\hat{A}\cap\hat{\Omega}_s} G_s(\omega,\lambda)d\,\hat{P}_x$.

Sur $(\hat{\Omega}_s)^c : \lambda \leq s \leq t$, donc la deuxième intégrale est égale à $\int_{\hat{A}\cap(\hat{\Omega}_s)^c} H_{s\wedge\lambda}\,d\,\hat{P}_x$ ce qui établit que $\int_{\hat{A}} G_t(\omega,\lambda)d\,\hat{P}_x = \int_{\hat{A}} G_s(\omega,\lambda)d\,\hat{P}_x$. Il reste à vérifier que G_t est $\hat{F}_t$ mesurable ; il suffit pour cela de constater que, si $s=t$, le calcul précédent montre que $G_t(\omega,\lambda) = E^{\hat{F}_t}\,G_t(\omega,\lambda)$ $\hat{P}_x$ p.s., et de se rappeler que les tribus $\hat{F}_t$ sont complètes.

<u>Lemme</u> (II,A,5).- Soient $X = (\Omega,F,F_t,\theta_t,X_t,P_x)$ un processus de Markov, T un temps terminal et Y le processus tué de X par T. Soit $M_t(\omega)$ une fonctionnelle additive continue d'espérance nulle de X, $(M_t \in L_X)$. Soit B définie par $B_t(\omega,\lambda) = M_{t\wedge\lambda}(\omega)$, alors B est une fonctionnelle additive d'espérance nulle de Y.

<u>Démonstration</u>.- D'après le lemme précédent $B_t(\omega,\lambda)$ est une martingale de Y. Comme $\hat{E}_x(B_t(\omega,\lambda)) = \hat{E}_x(B_o(\omega,\lambda)) = E_x(M_o(\omega)) = 0$: $B_o=0$ et B_t est centrée. Par définition $B_{t+s}(\omega,\lambda) = M_{(t+s)\wedge\lambda}(\omega)$ et $B_s\circ\theta_t(\omega,\lambda) = M_{s\wedge(\lambda-t\vee o)}(\theta_t\,\omega)$.

Nous allons vérifier que : (I) $M_{(t+s)\wedge\lambda}(\omega) = M_{t\wedge\lambda}(\omega) + M_{s\wedge[(\lambda-t)\vee o]}(\theta_t\,\omega)$ (on suppose comme précédemment que M est parfaite). Si $t \geq \lambda$,(I) se réduit à $M_\lambda(\omega) = M_\lambda(\omega) + M_o(\theta_t\,\omega)$ qui est évidemment réalisée, si $t < \lambda$ et $t+s \geq \lambda$,(I) devient $M_\lambda(\omega) = M_t(\omega) + M_{\lambda-t}\circ\theta_t\,\omega$ qui est aussi réalisée, enfin si $t+s < \lambda$, (I) se réduit à $M_{t+s}(\omega) = M_t(\omega) + M_s\circ\theta_t(\omega)$ qui est également réalisée.

Il serait naturel de tuer β au premier temps de sortie des ensembles $\{x : E_x(A_\infty) \leq n\}$, malheureusement on sait seulement que ces ensembles sont fermés, on ne connaît aucune propriété de leur intérieur ou de leur frontière et on ne sait même pas si le premier temps de sortie converge vers l'infini avec n.

Soit $f(x) = E_x(A_\infty)$: f est une fonction surharmonique non-négative. Au sens de la théorie classique du potentiel, Mokobodski a démontré dans [13] que, si f est finie, il existe une suite de fonctions surharmoniques f^n, finies, non négatives et continues, telles que $f(x) = \sum_1^\infty f^n(x)$. Nous allons vérifier que f^n est le potentiel d'une fonctionnelle additive continue non négative A^n et que $A_t = \sum_1^\infty A_t^n$.

Dans la démonstration du lemme (II,A,1), nous avons rappelé, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction excessive finie soit un potentiel régulier, c'est à dire le potentiel d'une fonctionnelle additive continue : il faut vérifier que f^n est continue sur les trajectoires, ce qui est clair, puisque celles-ci sont continues ; que $\lim_{t\to\infty} f^n(X_t) = 0$ p.s. et que $f^n(X_T)$ est uniformément intégrable, ce qui est réalisée pour f donc aussi pour f^n, car $0 \leq f^n \leq f$. Il existe donc pour tout n, une fonctionnelle additive continue, non négative de β telle que $E_x(A_\infty^n) = f^n(x)$; soit $B_t(\omega) = \sum_1^\infty A_t^n(\omega)$ est une fonctionnelle naturelle du brownien qui a même potentiel que A_t, donc

$$(\text{II,A,6}).- \quad A_t = \sum_1^\infty A_t^n , \quad E_x(A_\infty) = f(x) = \sum_1^\infty f_n(x) = \sum_1^\infty E_x(A_\infty^n)$$

<u>Remarque</u>.- L'hypothèse $E_x(A_\infty) < \infty$ permet ainsi d'assurer l'existence des fonctionnelles A^n, elle est par ailleurs essentielle pour assurer la continuité de $M_t = A_t + f(\beta_t) - f(\beta_o)$.

Soient $S_m = \{x \,;\, |x| < m\}$ et $T_m = \inf\{t, t > o \,;\, \beta_t \in S_m^c\}$

Soit $\beta^m = (\Omega \times R^+ , F_t^m , \beta_t^m , P_x^m)$ le processus tué de β par T_m

<u>Proposition</u> (II,A,7).- Il existe d fonctions mesurables $h_n^i (i=1\ldots d)$ telles que

$$E_x \int_0^{t\wedge T_m} [h_1^n(\beta_s)]^2 \, ds < \infty \ , \text{ et } \ A_t^n = f^n(\beta_o) - f^n(\beta_t) + \sum_1^d \int_0^t h_n^i(\beta_s) \, d\beta_s^i$$

<u>Démonstration</u>.- Soit $M_t^n(\omega) = A_t^n(\omega) - f^n(\beta_o(\omega)) + f^n(\beta_t(\omega))$. D'après le lemme (II,A,5), $M_{t\wedge\lambda}^n(\omega)$ est une fonctionnelle additive d'espérance nulle de β_m. Il est facile de vérifier que $M_{t\wedge\lambda}^n$ est de carré intégrable pour P_x^m : on remarque d'abord que si $x \in S_m^c$, $T_m(\omega) = 0$, P_x p.s., puisque tous les points de $\{|x| = m\}$ sont réguliers pour le brownien, de sorte que, si

$x \in S_m^c$: $E_x^m(M_{t\wedge\lambda}^n(\omega))^2 = E_x(M_{t\wedge T_m(\omega)}^n(\omega))^2 = 0$; si $x \in S_m$,

$E_x(M_{t\wedge T_m(\omega)}^n)^2 \leq 2\, E_x(A_{t\wedge T_m}^n)^2 + 2\, E_x(E_{\beta_{t\wedge T_m}} - E_{\beta_o})^2$, qui est fini, puisque $f^n(x)$ est bornée sur S_m. Ainsi $M_{t\wedge\lambda}^n(\omega)$ appartient à M_{β^m} ; il est clair par ailleurs que $\beta^i_{t\wedge\lambda}(\omega)$ appartient aussi à M_{β^m} et que $\beta^i_{t\wedge\lambda}$ est orthogonale à $\beta^j_{t\wedge\lambda}$ $(j\neq i)$, puisque β^i est orthogonale à β^j.

Avant de poursuivre la démonstration de la proposition (II,A,7) nous allons établir le lemme suivant :

Lemme (II,A,8).- Toute fonctionnelle de M_{β^m}, orthogonale à $\beta^i_{t\wedge\lambda}$, pour tout i, est nulle.

Démonstration.- Soit C^p_m l'ensemble des fonctions de C^p_k à support dans S_m. Soit $C^g_t(\omega,\lambda) = g(\beta^m_t) - g(\beta^m_o) - \int_o^t \frac{1}{2}\Delta g(\beta^m_s)ds$ $(g \in C^2_m)$.

Nous allons vérifier, que pour toute fonction g de C^2_m :

(II,A,9) $$C^g_t(\omega,\lambda) = \int_o^t D^i g(\beta_{s\wedge\lambda})\, d\beta^i_{s\wedge\lambda},\ P^m_x \text{ p.s.}$$

Si $x \in (S_m)^c$, les deux membres de (II,A,9) sont P^m_x p.s. nuls.

Si $x \in S_m$ et $t<\lambda$ (II,A,9) se réduit à la formule d'Ito :

si $t\geq\lambda$, $C^g_t(\omega,\lambda) = -f(\beta_o) + \int_o^{t\wedge\lambda} \frac{1}{2}\Delta g(\beta_s)ds = \int_o^{t\wedge\lambda} D^i g(\beta_s)d\beta^i_s - g(\beta_\lambda)$.

Or, P^m_x p.s., $g(\beta_\lambda)$ est nul, puisque g est à support dans S_m, ce qui établit (II,A,9). Cette formule montre que toute fonctionnelle de M_{β^m}, orthogonale à $\beta^i_{t\wedge\lambda}$, est orthogonale à C^g_t pour toute g de C^2_m.

Soit $\{U^p_m\}$ la résolvante de β^m : $U^p_m\varphi(x) = E^m_x \int_o^\infty \varphi(\beta^m_s)\, e^{-ps}ds$,

$U^p_m\varphi(x) = E_x\int_o^{T_m} e^{-ps}\varphi(\beta_s)ds$. Soit $g(x,y)$ la fonction de Green relative à S_m, on sait que $U_m\varphi(x) = \int g(x,y)\varphi(y)dy$ est de classe C^2, dès que φ est holdérienne et que $g(x,y)$ a pour limite 0 en tout point de la frontière de S_m, ce qui est réalisé puisque celle-ci est régulière, (th. 13-21, p. 53 de [7]) ; en appliquant ce théorème à l'opérateur $\frac{1}{2}\Delta - pI$, on établit que pour tout p : $U^p_m\varphi(x) \in C^2_m$.

Nous pouvons alors suivre les grandes lignes de la démonstration du théorème 6 de [11] (p. 131).

Soit $C^{p,\varphi}_t(\omega,\lambda) = U^p_m\varphi(\beta^m_t) - U^p_m\varphi(\beta^m_o) + \int_o^t (\varphi - p\,U^p_m\varphi)(\beta^m_s)ds$, si $\varphi\in C^\infty_m$, $g = U^p\varphi \in C^2_m$ et $C^{p,\varphi}_t = C^g_t$, donc toute fonctionnelle orthogonale à $\beta^i_{t\wedge\lambda}$ est orthogonale à $C^{p,g}_t$ $(g\in C^\infty_m)$, il est alors facile de passer à toutes les fonctions de C_m (fonctions continues à support dans S_m). Meyer montre que dans ces conditions l'espace des fonctions continues Φ sur $[s,\infty]$, telles que $E^m_x\{(M_{t\wedge\lambda} - M_{s\wedge\lambda})\int_s^\infty \Phi(V)\, f(X_V)\, e^{-V}dV|F^m_s\} = 0$ contient toutes les exponentielles et donc toutes les fonctions continues.

On montre alors, par récurrence, que pour toute suite $0 < t_1 < \dots < t_n$, toute suite de fonctions $f_1 \dots f_n$, boréliennes à support dans S_m, l'expression $E_x^m[f_1(\beta^m_{t_1}) \dots f_n(\beta^m_{t_n}) M_{t_n \wedge \lambda}]$ est nulle. Cela entraîne la nullité de M, en effet: soit x fixé et A tel que $M_t(\omega) > 0$ pour tout ω de A, soit $P_x(A) = a > 0$; soit G un ouvert de S_m contenant x, on peut, grâce à la majoration exponentielle, trouver t tel que $P_x^m(\beta_s \in G, \forall s \leq t) \geq 1-a/2$, soit f une fonction à support dans S_m et égale à 1 sur G : $E_x^m(f(\beta_t) M_{t \wedge \lambda}) > 0$ ce qui est absurde si f est continue; ainsi s'achève la démonstration du lemme (II,A,8).

<u>Démonstration de la proposition (II,A,7) (fin)</u>.-

D'après le lemme précédent et le théorème de projection ([10]) il existe d fonctions ${}^m h_n^{\,i}$ telles que $M^n_{t \wedge \lambda}(\omega) = \sum_1^d \int_0^t {}^m h_n^{\,i}(\beta_{s \wedge \lambda})\, d\beta^i_{s \wedge \lambda}$.

Soit $x \in S_m$ et $t \leq T_m(\omega) < T_{m+1}(\omega)$ alors :

$$\sum_1^d \int_0^t {}^m h_n^{\,i}(\beta_{s \wedge \lambda})\, d\beta^i_{s \wedge \lambda} = \sum_1^d \int_0^t {}^{m+1} h_n^{\,i}(\beta_{s \wedge \lambda})\, d\beta^i_{s \wedge \lambda}$$

et

$$\int_0^t ({}^m h_n^{\,i}(\beta_s) - {}^{m+1} h_n^{\,i}(\beta_s))^2\, ds = 0$$

Soit $B_m = \{x \in S_m \; ; \; {}^{m+1} h_n^{\,i}(x) \neq {}^m h_n^{\,i}(x)\}$. B_m est de U_m potentiel nul, or ${}^m h_n^{\,i}$ n'est défini qu'à un tel ensemble près. On peut donc trouver des fonctions h_n^i telles que :

$$M^n_{t \wedge \lambda}(\omega) = \sum_1^d \int_0^t h_n^i(\beta_{s \wedge \lambda})\, d\beta^i_{s \wedge \lambda}.$$

Cette dernière forme étant d'ailleurs la forme générale des éléments de M_{β^m}. Ainsi, P_x p.s. :

$$M^n_{t \wedge T_m}(\omega) = \sum_1^d \int_0^{t \wedge T_m} h_n^i(\beta_s)\, d\beta_s^i \quad \text{et} \quad E_x \int_0^{t \wedge T_m} (h_n^i)^2(\beta_s)\, ds < \infty .$$

Comme T_m croit vers l'infini avec m, cela signifie que M^n_t est une martingale locale égale à $\sum_1^d \int_0^t h_n^i(\beta_s)\, d\beta_s^i$, en fait, on sait par ailleurs que M^n_t est une martingale. Nous avons en même temps démontré le lemme suivant :

<u>Corollaire</u> (II,A,10).- Soit U un ouvert borné de R^d de frontière ∂U. On suppose que tous les points de ∂U sont réguliers pour U^{c}(1) ; soit $T = T_{U^c}$,

(1) Nous dirons dans la suite qu'un tel ouvert est un ouvert régulier (pour le brownien.

alors toute fonctionnelle de $M_{\beta T}$ du processus β_T tué du brownien par T, peut s'écrire :

$$M_t(\omega,\lambda) = \sum_1^d \int_0^{t\wedge T} h^i(\beta_s)d\,\beta_s^i \quad \text{où} \quad E_x\int_0^{t\wedge T} (h^i)^2(\beta_s)ds < \infty$$

Démonstration du théorème (II,A).-

D'après les lemmes précédents :

$$A_t = \sum_1^\infty A_t^n = \sum_{n=1}^\infty \{f^n(\beta_o)-f^n(\beta_t) + \sum_{i=1}^d \int_0^t h_n^i(\beta_s)d\beta_s^i\}$$

$$= f(\beta_o)-f(\beta_t) + \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^d \int_0^t h_n^i(\beta_s)d\,\beta_s^i$$

et

$$M_t^n = \sum_{i=1}^d \int_0^t h_n^i(\beta_s)\,d\,\beta_s^i.$$

Soit $S_m = \inf\{t\ ;\ A_t^2 + |\beta_t-\beta_o| + M_t^2 > m\}$, comme cette expression est continue, S_m croit vers l'infini avec m. Nous allons vérifier que $\sum_1^k M_{t\wedge S_m}^n$ converge dans $L^2(P_x)$ vers $M_{t\wedge S_m}$; comme $\sum_{n=1}^k M_{t\wedge S_m}^n$ converge p.s. vers $M_{t\wedge S_m}$, il suffit de vérifier que $\sum_{n=1}^k M_{t\wedge S_m}^n$ est une variable bornée dans L^2.

Calculons donc

$$E_x(\sum_{n=1}^k M_{t\wedge S_m}^n)^2 \leq 2\,E_x(\sum_{n=1}^k A_{t\wedge S_m}^n) + 2\,E_x[\sum_{n=1}^k f^n(\beta_{t\wedge S_m})-\sum_{n=1}^k f^n(\beta_o)]^2$$

$$\leq 2\,E_x(A_{t\wedge S_m})^2 + 4\,E_x\,f(\beta_{t\wedge S_m})^2 + 4\,f(x)^2\ ;$$

or $f(\beta_{t\wedge S_m})^2 \leq 2(f(\beta_{t\wedge S_m})-f(\beta_o))^2 + 2f(\beta_o)^2 \leq 4(M_{t\wedge S_m})^2 + 4(A_{t\wedge S_m})^2 + 2f(\beta_o)^2$

donc $E_x(\sum_{n=1}^k M_{t\wedge S_m}^n)^2 \leq C(x,m)$ et $\sum_1^k M_{t\wedge S_m}^n$ converge dans $L^2(P_x)$, de sorte que c'est une suite de Cauchy et que

$$E_x[\sum_1^d \int_0^{t\wedge S_m} \sum_p^q h_n^i(\beta_s)d\,\beta_s^i]^2 = E_x \sum_{i=1}^d \int_0^{t\wedge S_m} [\sum_p^q h_n^i(\beta_s)]^2\,ds$$

converge vers zéro quand p et q tendent vers l'infini.

Soit $\varphi_n^i(\omega,s) = 1_{s<S_m(\omega)} \sum_1^n h_k^i(\beta_s)$, la convergence précédente montre que $\varphi_n^i(\omega,s)$ converge dans $L^2(P_x \otimes \lambda)$, et pour presque tout s, $\varphi_n^i(\omega,s)$ converge en probabilité (pour P_x) vers $\varphi^i(\omega,s,x)$. Soit s_o fixé, tel qu'il y ait convergence et soit $\varphi^i_{n_p}(x,s_o)$ une sous-suite qui converge P_x p.s. vers $\varphi^i(\omega,s_o,x)$.

Soit $A(x,s_o) = \{y\ ;\ \sum_{1}^{n_p(x,s_o)} h_k^i(y)$ ne converge pas quand p croit vers l'infini.$\}$

Soit $\Gamma_A = \{\omega ; \beta_{s_o}(\omega) \in A\}$, si la mesure de Lebesgue de $A, \lambda(A)$, était positive, $P_y(\Gamma_A)$ serait positif pour tout y et $\varphi_n^i(\omega,s_o)$ ne convergerait pas pour P_x, donc $\lambda(A) = 0$ et pour tout y $P_y(\Gamma_A) = 0$.

$$\text{Soit } h_x^i(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in A \\ \lim_{p\to\infty} \sum_{1}^{n_p(x,s_o)} h_k^i(y) & \text{si } y \in A^c \end{cases}$$

Il est clair que $\varphi_{n_p}^i(x,s_o)(\beta_{s_o}(\omega))$ converge P_y p.s, pour tout y, vers $1_{\{s_o < S_m\}} h_x^i(\beta_{s_o}(\omega))$ qui est donc égal P_y p.s., pour tout y, à $\varphi^i(\omega,s_o,y)$ de sorte que $\varphi^i(\omega,s_o,x) = 1_{\{s_o < S_m\}}(\omega)\, h^i(\beta_{s_o}(\omega))$ et ceci pour tout s_o, P_x p.s. pour tout x : $\sum_{1}^{k} M_{t\wedge S_m}^n$ converge, P_x p.s. $(\forall x)$, vers $\sum_{i=1}^{d} \int_0^{t\wedge S_m} h^i(\beta_s(\omega))d\beta_s^i$ donc $M_t = \sum_{i=1}^{d} \int_0^{t} h^i(\beta_s(\omega))d\beta_s^i$ et $E_x \int_0^{t\wedge S_m} [h^i(\beta_s(\omega))]^2 ds < \infty$, ce qui achève la démonstration du théorème II,A.

B.- <u>CAS GENERAL.</u>

Soit a une matrice symétrique positive, définie sur R^d, b un vecteur de R^d, a et b mesurables et bornés, soit

$$L = \frac{1}{2} \sum_{1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1}^{d} b_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

On dit qu'un processus de Markov X, de semi-groupe P_t, à trajectoires continues, est une diffusion associée à L si :

$$\forall x \in R^d, \forall f \in C_k^\infty \quad P_t f(x) = f(x) + \int_0^t P_s Lf(x).$$

Dans ces conditions, les relations suivantes, équivalentes, sont satisfaites :

(II,B,1) $f(X_t) - f(X_o) - \int_0^t Lf(X_s)ds$ est une P_x-martingale. $\forall x$

(II,B,2) $\forall \theta \in R^d$, $\exp \{\langle \theta, X_t - X_o - \int_0^t b(X_s)ds\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, a(X_s)\,\theta\rangle ds\}$

est une P_x-martingale. Si (II,B,1) ou (II,B,2) ont une solution unique P_x, sur $\Omega^o = C(R^+,R^d)$, le semi-groupe associé à P_x sur Ω^o est celui de l'unique diffusion associée à L. Nous nous plaçons dans des conditions où l'existence et l'unicité d'une telle probabilité est assurée, on trouvera de telles conditions dans [14], [2], [2']. (On peut remarquer que dans l'état actuel des choses on ne sait démontrer qu'une famille P_x, solution de (II,B,1) (ou II,B,2), fait de X_t (coordonnée d'ordre t de ω) un processus de Markov, que, si on sait que P_x est la solution unique de (II,B,1) (ou II,B,2)).

Nous supposons que Ω^o est muni des tribus $F_t = \bigcap_\mu \overline{\tau(X_u, u \leq t)}^\mu$, ces tribus sont continues à droite, car les processus de diffusions associés à L sont Fellériens.

Dans [2],[2'], nous avons généralisé la formule de Vent'cell à de telles diffusions. Nous allons suivre une méthode similaire et démontrer le théorème suivant :

Théorème (II,B).- Soit A une fonctionnelle additive continue, non négative, de carré intégrable et de potentiel fini, de la diffusion X sur Ω^o, associée à L ; il existe d fonctions mesurables g^i sur R^d, un potentiel régulier f, et une suite de temps d'arrêt τ_n croissant vers l'infini, tels que : pour tout i et tout t $E_x \int_o^{t \wedge \tau_n} [g^i(X_s)]^2 \, d\langle Z^i , Z^i \rangle_s < \infty$ et

$$A_t(\omega) = f(X_o) - f(X_t) + \sum_1^d \int_o^t g^i(X_s) d Z_s^i , \text{ où } Z_t = X_t - X_o - \int_o^t (b(X_s) ds.$$

Démonstration.- Nous suivons la méthode de [2], [2'] (voir aussi [15]). Soit R_t, l'image de R^d par $a(X_t)$ et N_t son supplémentaire, soit E_{N_t} l'opérateur de projection sur N_t, σ une matrice telle que $\sigma\sigma^* = a$, P_x la probabilité qui réalise (II,B,1), W la mesure brownienne et β un brownien sur Ω^o muni des tribus $G_t = \overline{\tau(\beta_s, s \leq t)}^W$.

Nous désignerons par $Z_t(\omega)$ la martingale $X_t(\omega) - X_o(\omega) - \int_o^t b(X_s) ds$; Z_t est une martingale pour $P_x (\forall x)$ relativement à F_t. On sait alors qu'il existe une matrice à coefficients bornés $\tilde{a}$, telle que le processus suivant soit un brownien : $\tilde{\beta}_t = \{(\Omega^o \times \Omega^o) , H_t, \tilde{\beta}_t(\omega,\omega') \, P_x \otimes W\}$ où

(II,B,3).
$$\tilde{\beta}_t(\omega,\omega') = \int_o^t \tilde{a}(X_u(\omega)) d\, Z_u(\omega) + \int_o^t E_N(X_u(\omega)) d\, \beta_u(\omega')$$

(II,B,4).
$$H_t(\omega,\omega') = \bigcap_\mu \overline{\tau(\tilde{\beta}_s, \; s \quad t)}^{P_\mu \otimes W}$$

alors (II,B,5) $Z_t(\omega) - Z_o(\omega) = \int_o^t \sigma(X_u(\omega)) d\, \tilde{\beta}_u(\omega,\omega')$.

Lemme (II,B,6).- Toute martingale M_t de L_X appartient à $L_{\tilde{\beta}}$

Démonstration.- Il suffit de vérifier que M_t est une martingale de $\tilde{\beta}$.

Soit $b \equiv o$, (II,B,5) devient $(X_t(\omega) - X_o(\omega) = \int_o^t \sigma(X_u(\omega))d\,\tilde{\beta}_u(\omega,\omega')$ de sorte que $\sigma(X_s, s \leq t) \subset \sigma(\tilde{\beta}_s, s \leq t)$: M_t est donc mesurable par rapport à H_t, vérifions que M_t est une H_t martingale pour $P_x \otimes W$: il suffit de vérifier que M_t est une $F_t \otimes G_t$ martingale pour cette même probabilité, or si $A \in F_t$, $B \in G_t$ il est clair que $\int_{A \times B} M_t(\omega)\, d(P_x \otimes W) = \int_{A \times B} M_s(\omega)\, d(P_x \otimes W)$ en intégrant séparément en P^A et W.

Si b n'est pas identiquement nul, les tribus F_t et H_t ne changent pas, seules les probabilités changent (formule de Cameron-Martin) de sorte que le raisonnement précédent est encore valable.

Démonstration du théorème (II,B) (fin).

Soit A une fonctionnelle de M_X et $M_t = A_t + E_{X_t}(A_\infty) - E_{X_o}(A_\infty)$; $E_{X_t}(A_{\infty}) = f(X_t)$ est continue, car X est un processus de Hunt, M_t, qui est une martingale pour F_t, est une martingale pour H_t et $P_x \otimes W$, de sorte qu'on peut exprimer M_t sous la forme suivante :

$$M_t = \sum_1^d \int_o^t h^i(\tilde{\beta}_s)\, d\,\tilde{\beta}_s^i, \text{ ou encore d'après la forme } \tilde{\beta}$$

$$M_t = \sum_1^d \int_o^t m^i(s,\omega,\omega')d\,Z_s^i(\omega) + \sum_1^d \int_o^t n^j(s,\omega,\omega')d\,\beta_s^i(\omega'),\ \text{où}\ m^i\ \text{et}\ n^j$$

sont progressivement mesurables par rapport aux tribus H_s, comme $M_t(\omega)$ est orthogonale à $\beta_t(\omega')$ les fonctions n_j sont nulles et $m^i(s,\omega,\omega') = m^i(s,\omega)$ est F_s mesurable. Pour conclure, nous utilisons la proposition suivante, démontrée dans [2], au chapitre II, et qui résulte d'un théorème de Mokobodski[11].

Proposition (II,B,7).- Soit H_t une martingale-fonctionnelle additive, d'un processus de Markov (Ω, A_t, x_t, P_x), qui s'écrit sous la forme $H_t(\omega) = \int_o^t h(s,\omega)d\,\zeta_s$, où ζ_t est une martingale-fonctionnelle additive du même processus, de processus croissant $\int_o^t \varphi(x_s)ds$ et où $E_x \int_o^t h^2(s,\omega)\,\varphi(x_s)ds < \infty$, quel que soit x. Alors il existe une fonction g mesurable telle que $H_t = \int_o^t g(x_s)d\,\zeta_s$, P_x p.s.

Soit τ_m le temps d'arrêt figurant au théorème (II,A), τ_m est en fait un temps d'arrêt de F_t et $[E_x \otimes W] \int_o^{t\wedge\tau_m} (h^i)^2(\tilde{\beta}_s)ds = E_x \int_o^{t\wedge\theta_m} [m^i(s,\omega)]^2 d\langle Z^i, Z^i\rangle_s$. ce qui achève la démonstration.

CHAPITRE III

FONCTIONNELLES ADDITIVES DE PROCESSUS DE BRANCHEMENT DE DIFFUSIONS

Nous appellerons processus de branchement de diffusion un (X^o, π) processus, dont la partie de non-brahchement X^o est une diffusion non conservatrice. Pour construire de telles diffusions on peut partir d'une diffusion conservatrice X et prendre pour X^o un processus tué de X. On sait alors construire le (X^o, π) processus correspondant (théorème I.A).

Dans le premier chapitre, nous avons décrit les fonctionnelles additives d'un (X^o, π) processus, connaissant celles de X^o (théorème I.C).

Dans le deuxième chapitre nous avons décrit les fonctionnelles additives, continues, non négatives de carré intégrable et de potentiel fini d'une diffusion conservatrice X (fonctionnelles de N_X). Nous allons maintenant décrire les fonctionnelles du même type d'un (X^o, π) processus. X^o étant un processus tué de X, il convient de décrire les fonctionnelles additives de processus tués de X. Nous allons le faire dans les deux cas suivants :

(A) X^o est le processus tué d'une diffusion X à la sortie d'un ouvert borné V, de frontière ∂V, tel que tout point de ∂V soit régulier pour un brownien construit sur R^d, relativement à V^c.

(B) X^o est le processus tué par une fonctionnelle multiplicative de la forme e^{-A_t}, où A_t est une fonctionnelle additive, continue, non négative de X, de λ^o-potentiel fini.

<u>Définition</u> III.1.- Nous appellerons U-processus de branchement les processus obtenus par la méthode A, à partir d'un ouvert U.

Nous appellerons, A-processus de branchement les processus obtenus par la méthode B, à partir d'une fonctionnelle additive A.

A- U-<u>processus de branchement</u>.

<u>Proposition</u> (III,A,1).- Soit $\beta = (\Omega, F, F_t, \beta_t, P_x)$ un brownien muni des tribus $F_t = \bigcap_\mu \overline{\tau(\beta_s, s \leq t)}^\mu$, soit $\gamma = (\Omega \times R^+, \hat{F}_t, \gamma_t, \hat{P}_x)$ le processus tué de β à la sortie d'un ouvert régulier borné U ; soit $A_t(\omega, \lambda)$ une fonctionnelle additive de N_γ : il existe un potentiel régulier f de γ, d fonctions mesurables sur R^d : $h^1 \ldots h^d$, une suite de temps d'arrêt T_n de β tendant vers l'infini tels que:

$$A_t(\omega, \lambda) = f(\gamma_o) - f(\gamma_t) + \sum_1^d \int_o^{t \wedge \lambda} h^i(\beta_s) d\beta_s^i \quad \text{et} \quad E_x \int_o^{t \wedge T_n} [h^i(\beta_s)]^2 \, ds < \infty$$

<u>Démonstration.</u> Au chapitre II nous avons décrit les fonctionnelles de N_β en tuant β à la sortie de boules de rayon n, nous avons obtenu au corollaire (II.A.6) l'expression des fonctionnelles de M_{β_T} si T est le premier temps de sortie d'un ouvert régulier, mais nous ne connaissons pas celles de N_{β_T} il nous faut tuer à nouveau γ pour obtenir l'expression des fonctionnelles de N_γ par l'intermédiaire de celles de M_{γ_S}.

Soit $f(x) = \hat{E}_x(A_\infty)$, f est un potentiel régulier, c'est une fonction excessive régulière si $\gamma_{\hat{T}}(\omega,\lambda) \in \bigvee_n \hat{F}_{\hat{T}_n}$, pour toute suite de temps d'arrêt $\hat{T}_n$ croissant vers $\hat{T}$. On sait qu'à une telle suite correspond une suite de F_t temps d'arrêt T_n, croissant vers T, telle que $T_n(\omega,\lambda)\wedge\lambda = T_n(\omega)\wedge\lambda$ et $\hat{T}(\omega,\lambda)\wedge\lambda = T(\omega)\wedge\lambda$.

Nous allons montrer que $\{\hat{T}(\omega,\lambda)<\lambda\} \in \bigvee \hat{F}_{\hat{T}_n}$. Remarquons d'abord que $\{\hat{T}(\omega,\lambda)<\lambda\} \in \hat{F}_{\hat{T}}$ car $\{\hat{T}(\omega,\lambda)<\lambda\} \cap \{\hat{T}(\omega,\lambda) \leq t\} = \{T(\omega) \leq t \times]t\infty] + [T(\omega)<\lambda]\times[0,t]$

et il est facile de voir que chacun de ces ensembles appartient à $\hat{F}_t$.

Il suffit alors de vérifier que $\hat{F}_{\hat{T}} = \bigvee_n \hat{F}_{\hat{T}_n}$, ce qui résulte du fait que les tribus du brownien sont dénuées de temps de discontinuité : $F_t = \bigvee_n F_{T_n}$. (Il suffit de vérifier que le brownien tué est standard spécial) [11'].

Sur l'ensemble $\{\hat{T}(\omega,\lambda)<\lambda\}, \gamma_{T_n}(\omega,\lambda) = \beta_{T_n}(\omega)$ converge vers $\beta_T(\omega) = \gamma_T(\omega,\lambda)$ qui est donc $\bigvee \hat{F}_{\hat{T}}$ mesurable ; sur $\{\hat{T}(\omega,\lambda) \geq \lambda\}, \gamma_T(\omega,\lambda) = \delta$ est mesurable par rapport à $\bigvee_n \hat{F}_{\hat{T}_n}$, ainsi f est excessive régulière et $f(\gamma_t)$ est continue.

Soit $M_t(\omega,\lambda) = A_t(\omega,\lambda) + f(\gamma_t) - f(\gamma_0)$

M_t est une fonctionnelle additive de γ continue et d'espérance nulle.

Soit $S_n = \{x, |x| \leq n\}$ et $\tau_n(\omega,\lambda) = T_{S_n^c}(\omega,\lambda)$

Soit $\delta^n = \{\Omega\times R^+\times R^+, \hat{F}^n_t, \delta^n_t, \hat{P}^n_x\}$ le processus tué de γ par $\tau_n(\omega,\lambda)$.

Il est clair que $\delta^n_t(\omega,\lambda,\mu) = \begin{cases} \beta_t(\omega) & \text{si } t < \lambda\wedge\mu \\ \delta & \text{sinon} \end{cases}$; on sait, d'après le lemme (II,A.5), que $M_{t\wedge\mu}(\omega,\lambda) \in M_{\delta^n}$.

Soit $T(\omega) = T_{U^c}$ de premier temps de sortie de β de U.

Soit $T_n(\omega)$ la suite de F_t-temps d'arrêt attachée à $\tau_n(\omega,\lambda)$ par $T_n(\omega)\wedge\lambda = \tau_n(\omega,\lambda)\wedge\lambda$, T_n est le temps d'entrée de β dans S_n^c car

$$\{t < \tau_n(\omega,\lambda) \leq \lambda\} \subset \{\beta_s(\omega) \in S_n, \forall s \leq t\wedge\lambda\} \subset \{T_n(\omega) \leq \lambda\}.$$

Soit $\gamma^n = \{\Omega \times R^+ , \tilde{F}^n_t , \gamma^n_t , \tilde{P}^n_x\}$ le processus tué de β par

$$T_n(\omega) \wedge T(\omega) \text{ où } \gamma^n_t(\omega,\lambda) = \begin{cases} \beta_t(\omega) & \text{si } t < \lambda \\ \delta & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est facile de voir que δ^n et γ^n sont deux processus équivalents, en effet

$$\widehat{E}^n_x Y(\omega,\lambda,\mu) = E_x Y[\omega,T(\omega), \tau_n(\omega,T(\omega))]$$

$$\tilde{E}^n_x Y(\omega,\lambda) = E_x Y(\omega,T(\omega)\wedge T_n(\omega)), \text{ de sorte que :}$$

(III,A.2)

$$\hat{E}^n_x f(\delta^n_t) = E_x[f(\beta_t(\omega))1_{\{t < T(\omega)\wedge\tau_n(\omega,T(\omega))\}}], \text{ qui est égal à}$$

$$\tilde{E}^n_x f(\gamma^n_t) = E_x[f(\beta_t(\omega))1_{\{t< T(\omega)\wedge T_n(\omega)\}}].$$

$T\wedge T_n(\omega)$ est le temps d'entrée de β dans $(U \cap S_n)^c$ et $(U\cap S_n)$ est un ouvert régulier satisfaisant aux hypothèses du corollaire (II,A.10), nous connaissons donc les fonctionnelles de M_{γ_n}, nous allons connaître celles de M_{δ_n}, grâce au lemme suivant :

<u>Lemme</u> (III.A.3).- Soit A une fonctionnelle additive de M_δ et $C_t(\omega,\lambda) = A_t(\omega,\lambda,\infty)$, alors $C_t(\omega,\lambda)\in M_{\gamma^n}$.

<u>Démonstration.</u>- C_t est additive car $C_{t+s}(\omega,\lambda) = A_{t+s}(\omega,\lambda,\infty) = A_t(\omega,\lambda,\infty) + A_s(\theta_t\,\omega,(\lambda-t)\vee 0,\infty) = C_t(\omega,\lambda) + C_s(\theta_t\,\omega,(\lambda-t)\vee 0)$.

Nous allons vérifier que C_t est $\tilde{F}^n_t$ mesurable : soit $A = \{C_t(\omega,\lambda) < a\}$ $A = \{A_t(\omega,\lambda,\infty)\} < a\}$ qui appartient à $\hat{F}^n_t = [\bigcap_\mu \overline{\tau(\delta^*_s,\ s \leq t)}^\mu]_+$. Soit $f(\omega,\lambda,\mu)$ une fonction mesurable par rapport <u>aux tribus</u> $\hat{F}^n_t$, alors $f(\omega,\lambda,\infty)$ est mesurable par rapport aux tribus $\tilde{F}^n_t = [\bigcap_\nu \overline{\tau(\gamma^n_s,\ s \leq t)}^\nu]_+$, car cette propriété est vraie pour toute fonction f de la forme $\prod_1 \varphi_i(\delta^n_{s_i}(\omega,\lambda,\mu))$ puisque $\varphi(\delta^n_{s_i}(\omega,\lambda,\infty)) = \varphi(\gamma^n_{s_i}(\omega,\lambda))$; cela entraîne que $A \in \tilde{F}^n_t$: la formule (III.A.2) s'étend à des produits de fonction, de sorte que $\hat{E}^n_x[f_1(\delta^n_{t_1})\ldots f_p(\delta^n_t)] = \tilde{E}^n_x[f_1(\gamma^n_{t_1})\ldots f_p(\gamma^n_{t_p})]$, $\forall\, 0 < t \ldots < t_p = t$ or $f_i(\delta^n_t(\omega,\lambda,\infty)) = f_i(\gamma^n_t(\omega,\lambda))$, donc pour toute fonction φ $\hat{F}^n_\infty$ mesurable

(III.A.4) $$\hat{E}^n_x(\varphi(\omega,\lambda,\mu)) = \tilde{E}^n_x\,\varphi(\omega,\lambda,\infty) \text{ pour tout } x$$

ainsi

$$\tilde{E}^n_x(A_t(\omega,\lambda,\infty)) = \hat{E}^n_x\,A_t(\omega,\lambda,\mu) = 0$$

$$\tilde{E}^n_x(A^2_t(\omega,\lambda,\infty)) = \hat{E}^n_x\,A^2_t(\omega,\lambda,\mu) < \infty \quad \text{car } A_t(\omega,\lambda,\mu)\in M_{\delta^n}$$

ce qui montre que $C_t(\omega,\lambda) \in M_{\gamma^n}$.

Corollaire (III.A.5). - Soit $N_t(\omega,\lambda)$ une fonctionnelle additive de L_γ, il existe d fonctions mesurables g^i sur R^d, une suite de temps d'arrêt T_n de β croissant vers l'infini, tels que :

$$E_x \int_0^{t \wedge T_n} (g^i(\beta_s))^2 \, ds < \infty \quad \text{et} \quad N_t(\omega,\lambda) = \sum_1^d \int_0^{t\wedge\lambda} g^i(\beta_s)ds.$$

Démonstration.- On a vu au lemme (II.A.5) que $N_{t\wedge\mu}(\omega,\lambda)$ appartient à M_{ς^n}, donc $N_t(\omega,\lambda) \in M_{\gamma^n}$ et on peut appliquer le corollaire (II.A.10). En appliquant ce corollaire à M_t on achève la démonstration de la proposition (III.A.1).

Nous allons maintenant examiner le cas de diffusions autres que le brownien et démontrer le théorème suivant :

Proposition (III.A.6). - Soit L un opérateur elliptique et $X = (\Omega^o, F_t, X_t, P_x)$ la diffusion associé à L sur Ω^o, dans les conditions du théorème (II.B).

Soit $X^o = (\Omega^o \times R^+, F_t^o, X_t^o, P_x^o)$ le processus tué de X au temps d'entrée T dans le complémentaire d'un ouvert régulier borné U (relativement à un brownien β sur R^d). Soit $A_t(\omega,\lambda)$ une fonctionnelle additive continue, non négative, de carré intégrable et de potentiel fini de X^o ; il existe d fonctions g^i mesurables sur R^d, un potentiel régulier de X^o, f, et une suite de F_t temps d'arrêt T_n croissant vers l'infini, tels que

$$A_t(\omega,\lambda) = f(X_o^o) - f(X_t^o) + \sum_1^d \int_0^{t\wedge\lambda} g^i(X_s)dZ_s^i \quad \text{et} \quad E_x \int_0^{t\wedge T_n} g^i(X_s)^2 d\langle Z^i, Z^i\rangle_s < \infty$$

où Z_t désigne la martingale $X_t - X_o - \int_o^t b(X_s)ds$.

Démonstration.- Soit $f(x) = E_x^o(A_\infty)$, f est un potentiel régulier, et comme X est un processus de Hunt, on démontre, comme dans le cas du brownien que f est continue.

Soit $M_t(\omega,\lambda) = A_t(\omega,\lambda) + f(X_t^o) - f(X_o^o)$

Rappelons (cf. théorème II.B - démonstration) qu'il existe sur $\Omega^o \times \Omega^o$ un brownien $\tilde\beta_t(\omega,\omega')$ muni des tribus H_t, tel que $Z_t(\omega) - Z_o(\omega) = \int_o^t \sigma(X_u(\omega)) d\tilde\beta_u(\omega,\omega')$: soit $\tilde U = U \times R^d$, $\tilde U$ est un ouvert dont la frontière est régulière pour le brownien $\tilde\beta$, qui n'est pas borné, mais dont il est facile de voir qu'on peut lui appliquer le corollaire (II.A.10). Soit $\tilde T(\omega,\omega') = T(\omega)$, $\tilde T$ est le temps d'entrée dans $(\tilde U)^c$, soit

$\hat\beta = \{(\Omega^o \times \Omega^o \times R^+_\cdot, \hat F_t, \hat\beta_t, \hat P_x\}$ le processus tué de $\tilde\beta$ par $\tilde T$ où

$$\hat{\beta}_t(\omega,\omega',\mu) = \begin{cases} \tilde{\beta}_t(\omega,\omega') & \text{si } t<\mu \\ \delta & \text{sinon} \end{cases}$$; soit enfin $\tilde{M}_t(\omega,\omega',\mu) = M_t(\omega,\mu)$,

il est évident que $\tilde{M}_t \in L(\hat{\beta})$, donc, d'après le corollaire (III.A.5), il existe d fonctions mesurables h^i et une suite $\tilde{T}_n$ de temps d'arrêt croissant vers l'infini tels que $\tilde{M}_t(\omega,\omega',\mu) = M_t(\omega,\mu) = \sum_1^d \int_0^{t\wedge\mu} h^i(\tilde{\beta}_s)d\tilde{\beta}_s^i$ et que $(E_x\otimes W)\int_0^{t\wedge\tilde{T}_n} h^i(\tilde{\beta}_s)^2\, ds < \infty$. En utilisant la proposition (II.B.8) on conclut alors, comme au chapitre II que $M_t(\omega,\lambda) = \sum_1^d \int_0^{t\wedge\lambda} g^i(X_s)d\,Z_s^i$, et qu'il existe une suite T_n croissant vers l'infini telle que $E_x\int_0^{t\wedge T_n}(g^i(X_s))^2 d\langle Z^i,Z^i\rangle_s < \infty$.

Nous avons vu dans le théorème (I,C) comment on construit le (X^o,π) processus correspondant à X^o en considérant les processus produits de X^o, il nous faut donc vérifier d'abord que ces processus sont des diffusions tuées.

<u>Proposition</u> (III.A.7).- Soit X la diffusion associée à L et $\tilde{X}_n$ le produit symétrique d'ordre n de X : $\tilde{X}_n$ est une diffusion ($\tilde{X}$ aussi). Soit X^o le processus tué de X par T et $\tilde{X}_n^o$ le produit symétrique de X^o d'ordre n : $\tilde{X}_n^o$ est équivalent au processus $\tilde{Y}_n$ tué de $\tilde{X}_n$ par $T(\tilde{\omega}) = T(\omega_1)\wedge T(\omega_2)\ldots\wedge T(\omega_n)$

<u>Démonstration.</u>- On trouvera en (I.A.6) et (I.A.8) les définitions de $\tilde{X}_n$ et et X_n^*. Considérons d'abord X_n^*, produit direct d'ordre n de X. Nous allons montrer que X_n^* est une diffusion. Il est clair qu'il suffit de la démontrer si $n=2$. On sait que si X est la diffusion relative à L sur Ω^o : (III.A.8) $\exp\{\langle\theta,X_t-X_o-\int_0^t b(X_s)ds\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t\langle\theta,a(X_s)\,\theta\rangle ds\}$ est une P_x-martingale pour tout x, tout θ de R^d, relativement aux tribus F_t. Soit Y une copie de X et Z le processus produit de X et Y

$$Z_t^i(\omega,\omega') = \begin{cases} X_t^i(\omega) & \text{si } 1\leq i\leq d \\ Y_t^i(\omega') & \text{si } d<i\leq 2d \end{cases}$$

soit $B(X_s,Y_s) = B(Z_s)$ le vecteur de coordonnées $B^i(Z_s) = \begin{cases} b^i(X_s) & 1\leq i\leq d \\ b^i(Y_s) & d\leq i\leq 2d \end{cases}$

Soit $A(Z_s)$ la matrice dont les coefficients A_{ij} sont donnés par :

$$A_{ij}(Z_s) = A_{ji}(Z_s) = 0 \quad \text{si } 1\leq i\leq d \text{ et } d<j\leq 2d$$

$$A_{ij}(Z_s) = a_{ij}(X_s) \quad \text{si } 1\leq i\leq d \text{ et } 1\leq j\leq d$$

$$A_{ij}(Z_s) = a_{ij}(Y_s) \quad \text{si } d<i\leq 2d \text{ et } d<j\leq 2d$$

Soit enfin L_2 l'opérateur elliptique sur R^{2d} relatif à A et B, cet opérateur a les mêmes propriétés de régularité que L, il existe donc une diffusion associée à L_2 sur $(\Omega^o)^2 = C(R^+,R^{2d})$, nous allons vérifier que Z est cette diffusion, comme il y a unicité, il suffit de vérifier que l'expression correspondant à (III.A.8) est une $(P_2^*)_x$ martingale, relativement aux tribus $(F_2^*)_t = \bigcap_\mu \overline{\mathcal{F}(Z_s,s \leq t)}^\mu$, or (III.A.8) appliquée à X et Y exprime que relativement aux tribus suivantes : $\bigcap_\eta \overline{\mathcal{F}(X_s,s \leq t)}^\eta \otimes_t \bigcap_\nu \overline{\mathcal{F}(Y_s,s \leq t)}^\nu$, et pour $P_x \otimes P_y$: $\exp\{\langle\lambda, Z_t-Z_o - \int_o^t B(Z_s)ds\rangle - \frac{1}{2}\int_o^t \langle\lambda, A(Z_s)\lambda\rangle ds\}$ est une martingale pour tout λ, ce qui entraîne que Z est la diffusion cherchée. Le générateur de cette diffusion est donné par ses valeurs sur les fonctions $f \otimes g$ où f et g appartiennent à $C_k^2(R^d)$, ensemble de fonctions qui est dense dans $C_k^2(R^{2d})$; il est facile alors de vérifier que $L_2(f\otimes g)(x,y) = g(y)\, Lf(x) + f(x)\, Lg(y)$ de sorte que

(III.A.9) $$f(X_t)g(Y_t) - f(x)g(y) - \int_o^t (g(Y_s)\, Lf(X_s) + f(X_s)\, Lg(Y_s))ds$$

est une $(P_2^*)_{xy}$ martingale relativement aux tribus $(F_2^*)_t$; on peut écrire (III.A.9) pour f=g de sorte que d'après (II.B.1)

(III.A.10) $$C_t^{\hat{f}} = \hat{f}(\tilde{X}_2)_t - \hat{f}(\tilde{X}_2)_o - \int_o^t L_2\,\hat{f}(X_2)_s\, ds$$

est aussi une $(P_2^*)_{xy}$ martingale relativement aux tribus $(F_2^*)_t$; en remarquant que $(\tilde{X}_2)_s \in (A,B) = \{(X_2^*)_s \in A\times B\} \cup \{(X_2^*)_s \in B\times A\}$ et en se rappelant la définition de $\tilde{P}$ (I.A.8), on vérifie que $C_t^{\hat{f}}$ est une martingale de $(\tilde{F}_2)_t$ pour $(\tilde{P}_2)_{xy}$. Comme $(\hat{f},\ f\in C^*)(R^d))$ est dense dans $C_K(R^{2d})$ la relation (III.A.10) s'étend à toutes les fonctions de $C_K^2(R^{2d})$ ce qui prouve que $\tilde{X}_2$ est la diffusion associée à L_2 sur $(\Omega^o)^2$ muni des tribus $(\tilde{F}_2)_t$ et achève la démonstration de la première partie de (III.A.7).

Par définition

$$(\tilde{X}_n^o)_t(\bar{\omega},\bar{\lambda}) = \begin{cases} \rho(X_t^o(\omega_1,\lambda_1),\ldots,X_t^o(\omega_n,\lambda_n)) & \text{si } t<\inf \lambda_i \\ \Delta & \text{sinon} \end{cases}$$

soit aussi bien

$$(\tilde{X}_n^o)_t(\bar{\omega},\bar{\lambda}) = \begin{cases} \rho(X_t(\omega_1),\ldots X_t(\omega_n)) & \text{si } t<\inf \lambda_i \\ \Delta & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que si $x = (x_1\ldots x_n)$, par définition de $\tilde{E}$:

(III.A.11) $$(\tilde{E}_n^o)_x\, f[(\tilde{X}_n^o)_t(\omega,\lambda)] = \prod_1^n E_{x_i}[f(X_t(\omega_i)\, 1_{t<T(\omega_i)})]$$

Soit $\tilde{Y}_n = ((\Omega^o)^n \times R^+,\ \tilde{Y}_t^n,\ \tilde{g}_t^n,\ \tilde{Q}_x^n)$ le processus tué de $\tilde{X}_n$ par $T(\bar{\omega})$

où $\tilde{Y}^n_t(\omega,\lambda) = \begin{cases} \rho(X_t(\omega_1),\ldots,X_t(\omega_n)) & \text{si } t<\lambda \\ \Delta & \text{sinon} \end{cases}$ et

$$\tilde{E}^{Q_n}_x f[\tilde{Y}^n_t(\bar{\omega},\lambda)] = \tilde{E}^n_x[f(\tilde{X}^n_t(\ )\ 1_{t<T(\bar{\omega})}] = \prod_1^n E_{x_i}[f(X_t(\omega_i)\ 1_{t<T(\omega_i)}]$$

de sorte que, en comparant à (III.A.11), on vérifie l'équivalence de $\tilde{X}^o_n$ et $\tilde{Y}_n$.

Corollaire (III.A.12).- Soit A_t une fonctionnelle additive de $N_{\tilde{X}^o_n}$, il existe un potentiel régulier f de $\tilde{X}^o_n$, nd fonctions mesurables h^i sur R^{nd}, une suite τ_n de $\tilde{F}_t$ temps d'arrêt, τ_n tendant vers l'infini, tels que :

$$\tilde{E}_x \int_0^{t\wedge\tau_n} (h^i)^2(\tilde{X}_s)d\langle Z^i,Z^i\rangle_s < \infty$$

et

$$A_t(\omega_1,\lambda_1,\ldots,\omega_n,\lambda_n) = f(\tilde{X}^o_n)_o - f(\tilde{X}^o_n)_t + \sum_1^{nd}\int_0^{t\wedge\lambda_1\wedge\ldots\wedge\lambda_n} h^i(\tilde{X}_n)_s\, d(\tilde{Z}n^i)s$$

Démonstratinn.- On a établi cette formule pour $n=1$ à la proposition (III.A.6). Posons $M_t = A_t + f(\tilde{X}^o_n)_t - f(\tilde{X}^o_n)_o$ où $f = (\tilde{E}^o_n)_x(A_\infty)$ est un potentiel régulier. Remarquons que, si $\varphi(\omega_1,\lambda_1,\ldots\omega_n,\lambda_n)$ est $(\tilde{F}^o_n)_t$ mesurable la fonction $\varphi(\omega_1,\ \min\lambda_i,\omega_2,\infty\ldots\omega_n,\infty)$ est $\tilde{g}^n_t$ mesurable [cette affirmation est vraie pour toute fonction de la forme $\prod \varphi_i(X^o_n)_{t_i}$, pour toute suite $0\leq t_1\ldots<t_p=t$ puisque $(\tilde{X}^o_n)_t(\bar{\omega},\bar{\lambda}) = (\tilde{X}^o_n)_t\ (\omega_1,\ \min\lambda_i,\omega_2,\infty\ \ldots\omega_n,\infty)$].Cela entraîne alors que si h est $(\tilde{F}^o_n)_t$ mesurable $h(\bar{\omega},\bar{\lambda}) = h(\omega_1,\ \min\lambda_i,\omega_2,\infty\ \ldots\ \omega_n,\infty)$.

Remarquons alors que si $A_t(\bar{\omega},\bar{\lambda})$ est une fonctionnelle additive de $\tilde{X}^o_m$, $A_t(\omega_1,\min\lambda_i\ ;\omega_2,\infty\ \ldots\ \omega_n,\infty)$ est une fonctionnelle additive de $\tilde{Y}_n$ (ce qui se vérifie immédiatement comme au lemme III.A.3).

Comme $(E^o_n)_x\ A_\infty(\omega_1,\lambda_1\ \ldots\ \omega_n,\lambda_n) = \tilde{E}^{Q_n}_x\ A_\infty(\omega_1,\min\lambda_i,\omega_2,\infty\ldots)$, $f(x)$ est un potentiel régulier qui est une fonction excessive régulière, en effet $\tilde{E}^{Q_n}_x(A_\infty(\omega_1,\min\lambda_i)$ en est une car $\tilde{Y}_n$ est un processus tué d'une diffusion conservative par une fonctionnelle additive continue de potentiel fini. Alors $M_t \in L(\tilde{X}^o_n)$ donc aussi à $L(\tilde{Y}_n)$, de sorte qu'on peut appliquer la proposition (III.A.6) dans l'espace R^{nd}.

Il est dès lors possible de décrire les fonctionnelles additives au processus de branchement lié à X^o, grâce au théorème (I.C). Nous allons voir que les fonctionnelles de $N_{\tilde{X}^o_n}$ ont, dans le cas des A-processus de branchement la même forme que dans le cas présent, nous énoncerons donc le résultat final sous la forme d'un seul théorème qui figure à la fin du prochain paragraphe.

B - A-processus de branchement.

Soit X une diffusion associée à un opérateur L dans les conditions du théorème (B.II). X est un processus conservatif. Soit A une fonctionnelle additive continue, non négative, de λ^o-potentiel fini (pour un λ^o), soit X^o le processus tué de X par e^{-A_t}, nous avons appelé A-processus de branchement un processus $\hat{X}$ dont la partie de non branchement est X^o.

Pour trouver les fonctionnelles additives de $N_{\hat{X}}$, nous savons qu'il suffit de connaître celles de $N_{\tilde{X}^o}$. Pour trouver celles de $N_{\tilde{X}^o}$ nous allons utiliser le théorème suivant qui ^{n} figure dans [9] pages 216.

Théorème (III.B.1).- Soit $\hat{M}$ un processus standard tel que $\hat{X}_{\hat{\zeta}-} \in R^d$. Pour que $\hat{M}$ soit équivalent au processus tué d'un processus de Hunt M, conservatif, par une fonctionnelle de λ_o-potentiel fini, il faut et il suffit que :

1). $\hat{H}^{\lambda_o} 1(x)$ soit un potentiel régulier $(\hat{H}^{\lambda_o} f(x) = \hat{E}_x(e^{-\lambda\hat{\zeta}} f(\hat{X}_{\zeta-}), \hat{\zeta} < \infty)$

2). $\sum_{n \geq 1} (\hat{H}^{\lambda_o})^n 1(x) < \infty$

on peut alors prolonger le processus $\hat{M}$ en un processus $\overline{M}$ équivalent à M au moyen du noyau

$$\mu(\omega, dx) = \begin{cases} \varepsilon_{X_{\zeta^-}(\omega)} & \text{si } \hat{\zeta} < \infty \\ \varepsilon_{\delta} & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{([9] page 225)}$$

Proposition (III.B.2).- Soit A une fonctionnelle additive de N_{X^o}, il existe un potentiel régulier f de X^o, d fonctions mesurables sur R^d, une suite de temps d'arrêt T_n de X tels que :

$$A_t(\omega,\lambda) = \sum_1^d \int_0^{t\wedge\lambda} h^i(X_s) d Z_s^i \quad \text{et} \quad E_x \int_0^{t\wedge T_n} [h^i(X_s)]^2 \, d\langle Z^i, Z^i\rangle_s < \infty$$

Démonstration.- Nous allons utiliser le théorème (III.B.1) de la façon suivante :

soit $X = (\Omega^o, X_t, F_t, P_x)$ la diffusion sur Ω^o de générateur L

$X^o = (\Omega^o \times R^+, X_t^o, F_t^o, P_x^o)$ le processus tué de X par e^{-B_t} et

$\overline{X} = ((\Omega^o \times R^+)^N, \overline{X}_t, \overline{F}_t, \overline{P}_x)$ le processus prolongé de X^o par μ où $\overline{\omega} = \{\omega_i, \lambda_i\}_{i \in N}$. Nous savons que si A_t est une fonctionnelle additive de $\overline{X}$

$$A_t^o(\omega,\lambda) = \begin{cases} A_t(\omega) & \text{si } t < \lambda \\ \lim_{s\uparrow\lambda} A_s(\omega) & \text{si } t \geq \lambda \end{cases}$$ est une fonctionnelle additive de X^o et

que toute fonctionnelle additive de X^o peut être obtenue ainsi (I.A.3). Il nous suffit donc de connaître les fonctionnelles de $L_{\overline{X}}$. Soit $M_t = A_t + E_{X_t^o}(A_\infty) - E_{X_o^o}(A_\infty)$, $A_t \in L_{X_o}$. On sait que $\overline{X}_t(\omega,\lambda_1,\omega,\lambda_2\ldots\omega,\lambda_n\ldots) = X_t(\omega)$ P_x p.s. quelle que soit la suite λ_i en particulier

(III.B.3) $$\overline{X}_t(\omega,\lambda_1,\omega,\lambda_2\ \ldots) = \overline{X}_t(\omega,\infty,\omega,\ \infty\ldots),$$

donc pour toute φ $\overline{F}_t$ mesurable $\varphi(\omega,\lambda_1,\omega,\lambda_2\ldots)$ est F_t mesurable quelle que soit la suite λ_i, il est alors facile de vérifier que si A_t est une fonctionnel le additive de $\overline{X}$, $A_t(\omega,\infty,\omega,\infty\ldots)$ est une fonctionnelle additive de X (Pour vérifier l'additivité il suffit de remarquer que $\theta_t(\omega,\infty,\omega,\infty\ldots) = (\theta_t\,\omega,\infty$ on constate finalement que, si A_t est une fonctionnelle additive de $\overline{X}$, $A_t(\omega,\lambda_1,\ ,\lambda_2\ldots)$ ne dépend pas de la suite λ_i et est une fonctionnelle additive de X, de sorte que

$$A_t(\omega,\lambda_1,\omega,\lambda_2\ldots) = \sum_1^d \int_o^t h^i(X_s)d\,Z_s^i \quad \text{donc} \quad A_t^o(\omega,\lambda) = \sum_1^d \int_o^{t\wedge\lambda} h^i(X_s)d\,Z_s^i$$

avec $E_x \int_o^{t\wedge T_n} [h^i(X_s)]^2\, d\langle Z^i,Z^i\rangle_s < \infty$.

<u>Proposition</u> (III.B.4).- Soit A une fonctionnelle additive de $N_{\tilde{X}_n^o}$, il existe un potentiel régulier f de $\tilde{X}_n^o$, nd fonctions mesurables h^i sur R^{nd}, une suite croissante de temps d'arrêt T_n de $\tilde{F}_t$ tendant vers l'infini, tels que :

$$\tilde{E}_x \int_o^{t\wedge T_n} [h^i(\tilde{X}_d)]^2\, d\langle Z^i,Z^i\rangle_s < \infty$$

et

$$A_t(\omega_1,\lambda_1,\ldots\omega_n,\lambda_n) = f(\tilde{X}_n^o)_o - f(\tilde{X}_n^o)_t + \sum_1^{nd} \int_o^{t\wedge\lambda_1\ldots\wedge\lambda_n} h^i(\tilde{X}_n)_s\, d(\tilde{Z}_n^i)_s$$

<u>Démonstration</u>.- Soient $X^1\ldots X^n$ des copies de X

$$(\tilde{X}_n)_t(\omega_1\ldots\omega_n) = \begin{cases} \rho(X_t^1(\omega_1)\ldots X_t^n(\omega_n)) & \text{si } t < \min \zeta(\omega_i) \\ \Delta & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $C_t(\omega_1\ldots\omega_n) = A_t(\omega_1) + \ldots + A_t(\omega_n)$, C_t est une fonctionnelle additive continue, non négative de $\tilde{X}_n$ de $\lambda^\bullet$-potentiel fini. Soit $\tilde{X}_n^c$ le processus tué de $\tilde{X}_n$ par $e^{-C(\omega_1\ldots\omega_n)}$ où

$$(\tilde{X}_n^c)\ (\omega_1\ldots\omega_n,\lambda) = \begin{cases} \rho(X_t^1(\omega_1)\ldots X_t^n(\omega_n)) & \text{si } t < \lambda \\ \Delta & \text{sinon} \end{cases}$$

or

$$(\tilde{X}_n^o)\ (\omega_1,\lambda_1\ldots\omega_n,\lambda_n) = \begin{cases} \rho(X_t^1(\omega_1)\ldots X_t^n(\omega_n)) & \text{si } t < \min \lambda_i \\ \Delta & \text{sinon} \end{cases}$$

on peut alors vérifier que $\tilde{X}_n^c$ et $\tilde{X}_n^o$ sont équivalents, en effet :

$$(\tilde{E}_n^o)_x\ [\hat{f}(\tilde{X}_n^o)_t] = \prod_1^n E_{x_i}[f(X_t(\omega_i))_e - B_t(\omega_i)]$$

et $$(\tilde{E}_n^c)_x\ [\hat{f}(\tilde{X}_n^c)_t] = (\tilde{E}_n)_x[\hat{f}(\tilde{X}_n)_t \prod_{i=1}^n e^{-B_t(\omega_i)}$$, or il est facile de voir que pour toute fonction f F_t-mesurable

$$(\tilde{E}_n)_x[\hat{f}(\tilde{X}_n)_t(\omega_1\ldots\omega_n)\ f(\omega_1)\ldots f(\omega_n)] = \prod_1^n E_{x_i}[f(X_n)_t(\omega_i)f(\omega_i)]$$

de sorte que

$$(\tilde{E}_n^c)_x\ [\hat{f}(\tilde{X}_n^c)_t] = \prod_1^n E_{x_i}[f(X_t(\omega_i))\ e^{-B_t(\omega_i)}] = (\tilde{E}_n^o)_x[\hat{f}(\tilde{X}_n^o)_t]$$

Comme $(\tilde{X}_n^o)_t\ (\omega_1,\lambda,\omega_2,\infty\ldots\omega_n,\infty) = (\tilde{X}_n^c)_t(\omega_1,\omega_2\ldots\omega_n,\lambda)$ on conclut exactement comme en (III.A.12).

Nous donnons maintenant le théorème final qui regroupe les U-processus et les A-processus, puisque, dans les deux cas, les fonctionnelles de $N_{\tilde{X}}$ ont la même forme.

Théorème III.- Soit $\hat{X}$ le processus de branchement associé à la diffusion X^o tuée de X par un temps T de sortie d'un ouvert régulier ou par une fonctionnelle additive de λ^o-potentiel fini. Soit $A(\hat{\varphi})$ une fonctionnelle additive de $N_{\hat{X}}$ où $\hat{\varphi} = (\omega_i,\lambda_i,x_i) = (\tilde{\omega}_i,x_i)$. Il existe une suite de potentiels réguliers f_n de $\tilde{X}_n^o$, une suite de fonctions $h^{n,i}$, $0 < i \leq n$, pour chaque n, une suite de temps d'arrêt T_n de $\tilde{X}$ croissant vers l'infini, tels que :

$$A_t(\hat{\varphi}) = \begin{cases} A_t^{n_1}(\tilde{\omega}_1)\ \chi^{n_1}(x_1) & \text{si } \hat{\varphi}\in E_1^t \\ \sum_1^p A^{n_i}_{\zeta(\tilde{\omega})}(\tilde{\omega}_i)\ \chi^{n_i}(x_i) + A^{n_p}_{t-\zeta^{(p-1)}(\tilde{\omega})}(\tilde{\omega}_p)\ \chi^{n_p}(x_p) & \text{si } \hat{\varphi}\in E_p^t \\ \sum_1^{k(\hat{\varphi})} A^{n_i}_{\zeta(\tilde{\omega}_i)}(\tilde{\omega}_i)\ \chi^{n_i}(x_i) & \text{si } \hat{\varphi}\in E_\infty^t \end{cases}$$

où $\chi^{n_i}(.)$ est la fonction caractéristique de $(R^d)^{n_i}$ et

$$A_t^{n_i}(\bar{\omega},\bar{\lambda}) = f^{n_i}(\tilde{X}_{n_i}^o)_o - f^{n_i}(\tilde{X}_{n_i}^o)_t + \sum_1^{n_i d}\int_0^{t\wedge\lambda_1\cdots\lambda\lambda_{n_i}} h^{n,j}(\tilde{X}_{n_i})_s\ d(\tilde{Z}_{n_i})_s^j$$

avec $(\tilde{Z}_{n_i})_s = (\tilde{X}_{n_i})_s - (\tilde{X}_{n_i})_o - \int_0^t B^i(\tilde{X}_{n_i})_s\ ds$

Remarque.- On peut ajouter à A, une fonctionnelle de sauts de branchement (I,C).

BIBLIOGRAPHIE

(1) BLUMENTHAL & GETOOR : "Markov Processes and Potential Theory", Academic Press NY. London, 1968.

(2) BONAMI, KAROUI, REINHARD, ROYNETTE : "Processus de diffusion associé à un opérateur elliptique dégénéré". Ann. IHP 1971. n° 1 p. 33-86.

(2') KAROUI, REINHARD : "Processus de diffusion dans R^n". Séminaire de Proba. VII (à paraître).

(3) CAIROLI : "Produits de semi-groupes de transition et produits de Processus" Publ. ISUP vol. XV, 4, 1966.

(4) COURREGE & PRIOURET :"Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire, relations d'équivalence associée et propriétés de décomposition". Publ. ISUP, vol. XIV, 3, 1965.

(5) DELLACHERIE : "Une application aux fonctionnelles additives d'un théorème de Mokobodski". Séminaire de Proba. Strasbourg III. 1969. Lecture Notes Berlin-Springer.

(6) DYNKIN : "Markov Processes" - Vol. I. Springer 1965.

(7) DYNKIN : "Markov Processes" - Vol. II. Springer 1965.

(8) IKEDA - NAGASAWA - WATANABE : "Branching Markov Processes". J. Math. Kyoto. 1968 I (233,278) - II (365,410) 1969 III (95,160).

(9) KAROUI, REINHARD, ROYNETTE : "Processes tués de processus de Hunt conservatif et prolongement de processus standards". Ann. IHP vol. VI. n° 3. 1970 (p. 201-236).

(10) MEYER : "Inventiones Mathematicae" - 1 - 1966 Sur les relations entre diverses propriétés des processus de Markov".

(11) MEYER : "Intégrales Stochastiques". Séminaire Proba. Strasbourg I - Lecture Notes - Berlin-Springer.

(11') MEYER : "Processus de Markov". Lecture Notes - 1966 - Berlin-Springer.

(12) MOKOBODSKI : "Densité relative de deux potentiels comparables". Séminaire de Proba. Strasbourg IV. Lecture Notes. Berlin-Springer.

(13) MOKOBODSKI : "Thèse" - à paraître.

(14) STROOCK-VARADHAN : "Diffusion Processes with continuous coefficients". Comm. on Pure and appl. Math. Vol. XII - 1969 - (345-400).

(15) STROOCK-VARADHAN : "On the support of diffusion processes with application to the strong maximum principle". (à paraître).

Hervé REINHARD
Université de Paris-VI, Probabilités
4 place Jussieu, Tour 56
75230 PARIS CEDEX 05