MÉMOIRES DE LA S. M. F.

SIVARAMAKRISHNA ANANTHARAMAN

Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1

Mémoires de la S. M. F., tome 33 (1973), p. 5-79
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1973__33__5_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 33, 1973, p. 5-79.

SCHÉMAS EN GROUPES, ESPACES HOMOGÈNES ET ESPACES ALGÉBRIQUES SUR UNE BASE DE DIMENSION 1

par

Sivaramakrishna ANANTHARAMAN

-:-:-:-

Résumé. - Soient S un schéma localement noethérien, et X un S-espace algébrique en groupes séparé et localement de type fini sur S (resp. le S-faisceau fppf quotient d'un S-schéma en groupes G, localement de type fini, par un sous-schéma fermé en groupes H, plat sur S). Lorsque S est de dimension 0, on sait que X est représentable. Par contre, même dans les meilleurs cas, un tel X n'est pas nécessairement représentable si $\dim S \geqslant 2$. Dans ce travail, on démontre la représentabilité de tels X lorsque $\dim S \leqslant 1$; si S est normal, la démonstration utilise des techniques (à peu près connues) spéciales au cas $\dim S = 1$; le cas général se résoud ensuite moyennant un critère (général) de descente d'espaces algébriques par des morphismes entiers.

Table des matières

Pages

Introduction. 6

Chapitre I. - Le recollement suivant un fermé. Applications. 8

1.1 Le recollement suivant un fermé. 10
1.2 Application aux questions de descente fpqc 15
1.3 Application aux espaces algébriques. 19

Chapitre II. - Schémas en groupes sur un schéma de Dedekind. 22

2.1 La lissification (N) 22
2.2 Une application aux groupes commutatifs. 25
2.3 Schémas en groupes et morphismes affines. 30

Chapitre III. - Sur les faisceaux quotients et les anneaux algébriques. 35

3.1 Un théorème d'Artin. 35
3.2 Une descente entière d'espaces algébriques. 40
3.3 Existence du quotient en codimension 1 49
3.4 Application aux espaces homogènes. 52

Chapitre IV. - Applications aux questions de représentabilité. 53

Appendice I. - Passage au quotient par un groupoïde plat. 63

A. Réduction au cas d'un groupoïde quasi-fini. 63
B. Un critère de passage au quotient. 66

Appendice II. - Normalisé d'un schéma sur un schéma de Dedekind. 73

Bibliographie. 78

Introduction

Depuis que la notion d'espace algébrique a été introduite en Géométrie algébrique par M. Artin, de nombreuses questions de représentabilité ont été traitées suivant deux principes généraux.

(a) Etudier les conditions pour qu'un foncteur soit un espace algébrique.

(b) Etudier les conditions pour qu'un espace algébrique soit un schéma.

Dans le présent travail, on étudie certains cas particuliers de (b). On sait par exemple que, sur une base de dimension zéro, un espace algébrique en groupes G est un schéma ([2], §4). Sur un corps k, ce fait se démontre de la façon suivante : il existe un ouvert dense X de G qui est un schéma (SGAD, V, 8.1) ; et sur la clôture algébrique $\overline{k}$ de k, on dispose de suffisamment de sections de G pour pouvoir recouvrir G par les translatés de cet ouvert X. La descente de $\overline{k}$ à k est possible, comme chaque ensemble fini de points de $G_{\overline{k}}$ est contenu dans un ouvert affine.

On peut essayer d'appliquer une telle méthode sur une base S quelconque. Mais, pour ce faire, on doit a priori disposer d'un ouvert représentable X de G tel que X soit dense dans chacune des fibres de G sur S. Or, en général, il n'existe pas de tel X : en effet, on a un espace algébrique en groupes G lisse et non séparé sur un trait, dont le plus grand ouvert représentable est sa fibre générique (SGAD, VI_B, page 81). Même lorsque l'on fait l'hypothèse de séparation, il existe un contre-exemple de Raynaud, sur une base locale régulière de dimension 2 ([18], X 14).

En revanche, on peut montrer, avec l'hypothèse de séparation, que le plus grand ouvert représentable X d'un espace algébrique G contient ses points de codimension 1 (cf. (3.3.1)) ; si S est de dimension $\leqslant 1$, cet ouvert X contient donc les points maximaux des fibres de G sur S.

Nous étudions par suite les questions "maturelles" suivantes :

1° Soient S un schéma localement noethérien de dimension $\leqslant 1$, G un S-espace algébrique en groupes, séparé et localement de type fini sur S. Alors G est-il un schéma ?

2° Soient S comme dans le 1°, G un S-faisceau fppf en groupes, S' un schéma fpqc sur S tel que $G_{S'}$ soit un S'-schéma (en groupes) séparé et localement de présentation finie. Alors G est-il un schéma ?

3° Nous étudions également la question d'existence du schéma quotient du type G/H. On sait que les faisceaux de ce type sont des espaces algébriques sur une base

S quelconque localement noethérienne (cf. (3.1.1)). Par contre, la question de représentabilité de ces faisceaux admet une réponse négative si l'on ne suppose pas H fermé dans G et plat sur S , ou si dim S $\geqslant$ 2 (mêmes contre-exemples que plus haut). Nous étudions donc le cas où S est localement noethérien de dimension $\leqslant$ 1.

A ces trois questions, nous répondons affirmativement ; nous montrons aussi que chaque ensemble fini de points de G (resp. G/H) qui se projette dans un ouvert affine de S est contenu dans un ouvert affine de G (resp. G/H).

Esquissons brièvement la méthode de démonstration. On note d'abord que les fibres sont des schémas. Sur une base normale, par exemple sur un trait, la notion d'adhérence schématique de la fibre générique de G (cf. (1.2.0)) et une technique du recollement suivant un fermé (cf. (1.1)) nous permettent de supposer que G est plat sur S (cf. (1.2) et (1.3)). En utilisant l'appendice II, on se ramène alors au cas G lisse sur S (chap. IV). On applique ensuite les résultats de la thèse de Raynaud ([18]).

Dans le cas où S est non normal, on utilise un critère général de descente entière (cf. (3.2.1)) qui ne dépend pas de la structure de groupe sur G ou de la structure homogène sur G/H .

Faute de références satisfaisantes, nous avons dû démontrer en détail certains résultats "connus", comme le recollement suivant un fermé, ou le passage au quotient plat (resp. fini).

L'auteur tient à remercier vivement M. RAYNAUD, dont l'encouragement et les conseils lui ont été une aide précieuse pour ce travail.

-:-:-:-

Chapitre I

Recollement suivant un fermé. Applications

1.0. Un trait est par définition un triple $(S = \operatorname{Spec} \Lambda, \eta, s)$ où Λ est un anneau de valuation discrète et η (resp. s) est le point générique (resp. fermé) de $S = \operatorname{Sped} \Lambda$.

Supposons que $X = \operatorname{Spec} A$ est un schéma affine noethérien sur un trait $(\operatorname{Spec} \Lambda = S, \eta, s)$. Soient π une uniformisante de Λ et T l'idéal de Λ-torsion dans A. Alors on a la notion d'adhérence schématique $\bar{X}$ de la fibre générique X_η de X dans X : c'est le sous-schéma fermé $V(T)$ de X. C'est aussi le plus grand sous-schéma de X plat sur S. D'autre part, on a également les voisinages infinitésimaux $\{X_s^{(n)}\}_{n \geqslant 0}$ de la fibre spéciale X_s : ce sont les sous-schémas fermés $\{V(\pi^n A)\}_{n \geqslant 0}$ de X.

Il y a une façon naturelle de reconstituer X à partir de la donnée de $\bar{X}$ et des $\{X_s^{(n)}\}_{n \geqslant 0}$; topologiquement c'est très clair ; il s'agit d'identifier les points communs de $\bar{X}$ et X_s. Puisque ces points communs forment une partie fermée $\bar{X} \cap X_s$ de X, il s'agit de "recoller" $\bar{X}$ et X_s suivant ce fermé commun.

Pour tenir compte du faisceau structural, nous procédons de la manière suivante. Pour chaque $n \geqslant 0$, considérons "l'intersection schématique" de $\bar{X}$ et $X_s^{(n)}$: c'est le sous-schéma fermé $\bar{X} \times_X X_s^{(n)} = V(\pi^n A + T)$ de X, donc c'est un sous-schéma fermé à la fois de $\bar{X}$ et de $X_s^{(n)}$. On a ainsi deux plongements

$$V(\pi^n A + T) \rightrightarrows \bar{X} \amalg X_s^{(n)} .$$

Ces deux plongements correspondent aux deux morphismes composés

$$\begin{tikzcd} & A/T \arrow[dr] & \\ A/T \times A/\pi^n A \arrow[ur, "pr_1"] \arrow[dr, "pr_2"'] & & A/(\pi^n A + T) \\ & A/\pi^n A \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(où les flèches sont évidentes).

Si $B^{(n)}$ est le sous-anneau (de $A/T \times A/\pi^n A$) d'égalité de ces deux flèches, il se trouve que Spec $B^{(n)}$ est le conoyau de la double flèche

$$V(\pi^n A + T) \rightrightarrows X \amalg X_s^{(n)}$$

dans la catégorie (Sch/S) (voir (1.1.3) ci-dessous). On a alors un morphisme canonique $\varphi^{(n)}$: Spec $B^{(n)} \to X$. Je dis que pour tout n assez grand $\varphi^{(n)}$ est un isomorphisme.

En effet, il est clair que $\varphi^{(n)}$ correspond au morphisme canonique $A \xrightarrow{\theta^{(n)}} A/T \times A/\pi^n A$ qui se factorise par $B^{(n)}$. D'autre part, si $a_1, a_2 \in A$ sont tels que $a_1 \equiv a_2\ (\pi^n A + T)$ alors $a_1 = a_2 + \pi^n a' + t'$ avec $a' \in A$, $t' \in T$, d'où $(a_1 - \pi^n a') = (a_2 + t')$ est un élément a de A tel que $a \equiv a_1\ (\pi^n A)$ et $a \equiv a_2\ (T)$. Ce qui prouve que $\theta^{(n)}(A) = B^{(n)}$, donc $\varphi^{(n)}$ est une immersion fermée pour tout n . Enfin le noyau de $\theta^{(n)}$ est $(\pi^n A) \cap T = \pi^n T$ et comme T est engendré par un nombre fini d'éléments (A noethérien), $\pi^n . T = 0$ pour n assez grand. Donc $\theta^{(n)} : A \xrightarrow{\sim} B^{(n)}$ pour n assez grand.

Tout cela prouve que X est le schéma obtenu par "recollement" de $\bar{X}$ et $X_s^{(n)}$ suivant le fermé commun $\bar{X} \times_X X_s^{(n)}$ pour n assez grand.

Il se trouve que plusieurs aspects de ce phénomène se prêtent à des généralisations. Ainsi, pour un foncteur quelconque G de $(Sch/S)^\circ$ dans Ens, on a la notion d'adhérence schématique $\bar{G}$ de G_η dans G (S étant toujours un trait ; voir (1.2.0) ci-dessous), et sous certaines conditions, si $\bar{G}$ et les $G_s^{(n)}$ sont des schémas, on peut représenter G "en recollant $\bar{G}$ et $G_s^{(n)}$ suivant un fermé" (voir (1.2.4) et (1.3.2) ci-dessous). L'avantage de cette méthode est qu'elle ramène la question de la représentabilité de G sur S à celle des $G_s^{(n)}$ (qui sont des foncteurs sur un schéma artinien) et celle de $\bar{G}$, qui est alors un foncteur "plat sur S" se prêtant donc à plus de manipulations que G .

1.1. Le recollement suivant un fermé

1.1.0. On se pose la question suivante. Etant donnés trois schémas X_1, X_2, Y et deux immersions fermées $Y \xrightarrow{\theta_i} X_i$, $i = 1,2$, peut-on construire un schéma X en recollant X_1, X_2 suivant (Y, θ_1, θ_2) ?

Plus précisément, la donnée (Y, θ_1, θ_2) définit une relation d'équivalence évidente sur $X_1 \amalg X_2$:

$$Y \underset{\theta_2}{\overset{\theta_1}{\rightrightarrows}} X_1 \amalg X_2 .$$

Soient $X = X_1 \underset{\theta}{\amalg} X_2 = X_1 \underset{Y}{\amalg} X_2$ (où $\theta = (\theta_1, \theta_2)$) l'espace annelé quotient de $X_1 \amalg X_2$ pour cette relation et $\varphi_i : X_i \to X$ les morphismes canoniques d'espaces annelés. On a alors la

1.1.1. Proposition : $X = X_1 \underset{\theta}{\amalg} X_2$ est un schéma et les φ_i sont des immersions fermées dans (Sch). Par suite il existe un sous-schéma fermé $\bar{Y}$ de X, à espace sous-jacent $\varphi_1(X_1) \cap \varphi_2(X_2)$ tel que $\varphi_i . \theta_i : Y_i \to \bar{Y}$, $i = 1,2$, soient des isomorphismes.

1.1.2. Remarques :

(a) Supposons que, pour chaque i, $X_i' \hookrightarrow X_i$ soit un ouvert tel que $\theta_1^{-1}(X_1') = \theta_2^{-1}(X_2') = Y'$. Alors $\theta_i' = \theta_i | Y' : Y' \to X_i'$ sont des immersions fermées, et il est clair que $X_1' \underset{\theta'}{\amalg} X_2'$ (où $\theta' = (\theta_1', \theta_2')$) s'identifie canoniquement à un ouvert de $X_1 \underset{\theta}{\amalg} X_2$.

(b) Supposons démontrée la proposition (1.1.1). Il est alors immédiat que le schéma $X_1 \underset{\theta}{\amalg} X_2$ est le quotient de $X_1 \amalg X_2$ pour la relation d'équivalence définie par (θ_1, θ_2) dans le catégorie (Sch).

(c) Soient S un schéma et Z un schéma sur S. Nous dirons que Z est de type (FA) sur S si chaque ensemble fini de points de Z qui se projette dans un ouvert affine de S, est lui-même contenu dans un ouvert affine de Z. Un schéma Z est dit de type (FA) s'il est de type (FA) sur Spec Z. Revenant à la situation précédente, nous démontrerons que si chaque X_i est de type (FA), il en est de même de $X = X_1 \underset{\theta}{\amalg} X_2$. En fait nous montrerons un peu plus:

Si E est un ensemble fini de points de X tel que chaque $E_i = \varphi_i^{-1}(E)$ soit contenu dans un ouvert affine de X_i, alors E est contenu dans un ouvert affine de X.

1.1.3. Démonstration de 1.1.1 dans le cas affine :

Supposons que $X_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, $i = 1,2$, $Y = \mathrm{Spec}(\bar{A})$ et $Y_i = \theta_i(Y) = V(I_i)$ où I_i est un idéal de A_i, $i = 1,2$. On a alors un diagramme

$$\begin{tikzcd} & A_1 \arrow[dr] & \\ A_1 \times A_2 \arrow[ur, "pr_1"] \arrow[dr, "pr_2"'] & & \bar{A} \\ & A_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où les morphismes sont évidents. Posons B = le sous-anneau (de $A_1 \times A_2$) d'égalité des deux flèches composées $A_1 \times A_2 \rightrightarrows \bar{A}$. Je dis que $X = \mathrm{Spec}\, B$ s'identifie alors à l'espace annelé $X_1 \coprod_{\theta} X_2$.

i) Puisque $\bar{A}$ est un quotient de A_i, $p_i = pr_i|B$ est surjectif ce qui nous donne des immersions fermées $\varphi_i : X_i \hookrightarrow X$. D'autre part, si $K_i = \ker(B \xrightarrow{p_i} A_i)$, il est clair que $K_1 \simeq (0) \times I_2$, $K_2 \simeq I_1 \times (0)$, donc $K_1 . K_2 = 0$ dans B. Ce qui montre que : $X = \varphi_1(X_1) \cup \varphi_2(X_2)$ ensemblistement.

ii) Or, $X - \varphi_2(X_2) = \bigcup_{g \in K_2} \mathrm{Spec}\, B_g$; un élément $g \in K_2$ est de la forme $(f,0)$, $f \in I_1$ et réciproquement ; d'autre part, il est clair que $\varphi_1^{-1}(\mathrm{Spec}\, B_g)$ est l'ouvert affine $\mathrm{Spec}(A_1)_f$ de X_1. Comme $X_1 - Y_1 = \bigcup_{f \in I_1} \mathrm{Spec}(A_1)_f = \bigcup_{g \in K_2} \varphi_1^{-1}(\mathrm{Spec}\, B_g)$ et que $B_g \simeq (A_1)_f$ pour $f \in I_1$ et $g = (f,0) \in K_2$, on a montré que :

$\varphi_1|(X_1 - Y_1)$ est un isomorphisme sur l'ouvert $X - \varphi_2(X_2)$ de X (on a aussi l'assertion analogue pour $\varphi_2|X_2 - Y_2$).

iii) Enfin, soit $J = \ker(B \to \bar{A})$ où la flèche est le morphisme unique provenant de la définition de B ; il est clair que $(a_1, a_2) \in J$ si et seulement si $a_i \in I_i$, $i = 1,2$, d'où $J = K_1 + K_2$ dans B. Et puisque $B/J \simeq \bar{A}$, on en conclut que $V(J)$ est égal à $\varphi_1(X_1) \cap \varphi_2(X_2)$, schématiquement.

On déduit de i), ii) et iii) que $(X = \mathrm{Spec}\, B, \varphi_1, \varphi_2)$ est bien l'espace annelé quotient de $X_1 \amalg X_2$ pour la relation d'équivalence $\mathrm{Spec}\, \bar{A} \rightrightarrows X_1 \amalg X_2$.

C.Q.F.D.

1.1.4. Démonstration de 1.1.1 dans le cas général :

Le fait que l'espace annelé $X = X_1 \amalg_\theta X_2$ soit un schéma se vérifie localement sur X ; donc, grâce à 1.1.2 (a) et 1.1.3 il suffit de montrer la chose suivante :

Soit y un point quelconque de Y , $y_i = \theta_i(y)$. Alors il existe un ouvert affine U_1 de X_1 (resp. U_2 de X_2) contenant y_1 (resp. y_2) tel que $\theta_1^{-1}(U_1) = \theta_2^{-1}(U_2)$.

Mais afin de démontrer du même coup la remarque 1.1.2 (c), nous allons prouver un peu plus :

(*) Soit E un ensemble fini de points de X tel que $E_i = \varphi_i^{-1}(E)$ soit contenu dans un ouvert affine de X_i , $i = 1,2$. Alors il existe un ouvert affine V_1 de X_1 (resp. V_2 de X_2) contenant E_1 (resp. E_2) tel que $\theta_1^{-1}(V_1) = \theta_2^{-1}(V_2)$.

Commençons par un lemme facile.

Lemme(F) : Soit F un ensemble fini de points d'un schéma affine $Z = \operatorname{Spec} A$. Si U est un ouvert quelconque de Z contenant F alors il existe un $a \in A$ tel que $F \subset Z_a \subset U$.

En effet, si p_x est l'idéal premier de A défini par un point quelconque x de Z et si I est un idéal de définition de $Z-U$ dans A , on a $p_x \not\supset I$ pour $x \in F$. Comme F est fini, on a $I \not\subset \bigcup_{x \in F} p_x$ et il existe un $a \in I$ tel que $a \notin p_x$ pour tout $x \in F$.

Revenons à la démonstration de (*). Posons $Y_i = \theta_i(Y)$, $i = 1,2$. Soit U_1' un ouvert affine de X_1 contenant E_1 ; alors il existe un ouvert U_2' de X_2 tel que $U_1' \cap Y_1 \xrightarrow[\theta]{\sim} U_2' \cap Y_2$. Ajoutant au besoin un ouvert de X_2 contenant $E_2 - (\overline{E} = (\varphi_1(X_1) \cap \varphi_2(X_2) \cap E))$ et contenu dans $X_2 - Y_2$, on peut supposer que $U_2' \supset E_2$.

Si U_2'' est un ouvert affine de X_2 contenant E_2 , alors il existe un ouvert affine U_2''' de U_2'' (donc de X_2) tel que $E_2 \subset U_2''' \subset U_2'' \cap U_2'$ (lemme(F)). Quitte à restreindre U_1' on est ainsi ramené à supposer que :

il existe un ouvert affine $\tilde{U}_1$ de X_1 , un ouvert U_1 de $\tilde{U}_1$ et un ouvert

affine U_2 de X_2 tels que :

a) $U_1 \supset E_1$, $U_2 \supset E_2$

b) $U_1 \cap Y_1 \underset{\theta}{\simeq} U_2 \cap Y_2$

Soit $f \in A(\tilde{U}_1)$ (notation évidente) un élément tel que $E_1 \subset \tilde{U}_{1_{f_1}} \subset U_1$ (lemme(F)) ; soient $\bar{f}_1$ son image dans $A(U_1 \cap Y_1)$ et $\bar{f}_2$ la θ-coimage de $\bar{f}_1$ dans $A(U_2 \cap Y_2)$. Il est immédiat que tout revient à trouver un relèvement f_2 de $\bar{f}_2$ dans $A(U_2)$ tel que $U_{2_{f_2}} \supset E_2$, car on peut alors prendre $V_1 = \tilde{U}_{1_{f_1}}$ et $V_2 = U_{2_{f_2}}$. (Notons d'ailleurs que dans le cas où $E = \bar{E}$, i.e. où $E \subset \varphi_1(X_1) \cap \varphi_2(X_2)$, <u>tout</u> relèvement f_2 de $\bar{f}_2$ dans $A(U_2)$ possède cette propriété ; la démonstration proprement dite de 1.1.1 s'achève donc ici).

Pour établir (*), on peut évidemment supposer que :

(**) aucun des points de E_2 n'est une spécialisation stricte d'un autre point de E_2 .

Or, soit I un idéal de définition de $U_2 \cap Y_2$ dans $A(U_2)$ et f_2' un relèvement quelconque de $\bar{f}_2$ dans $A(U_2)$. Posons $E_2' = (E_2 - \bar{E}) \cap U_{2_{f_2'}}$ et $E_2'' = (E_2 - \bar{E}) \cap V(f_2')$. Il est clair que $I \not\subset p_x$ pour $x \in E_2''$; et à cause de (**) on a $p_y \not\subset p_x$ si $y \in E_2'$ et $x \in E_2''$. D'où $I \cap (\bigcap_{y \in E_2'} p_y) \not\subset \bigcup_{x \in E_2''} p_x$; il existe donc un $g \in I \cap (\bigcap_{y \in E_2'} p_y)$ tel que $g \notin p_x$ pour $x \in E_2''$. Il est alors immédiat que $f_2 = f_2' + g$ est un relèvement de $\bar{f}_2$ qui répond à la question. C.Q.F.D.

1.1.5. <u>Remarques</u> :

i) Plaçons-nous désormais sur un schéma de base S . Si $(X_1 , X_2 , Y , \theta_1 , \theta_2)$ est une donnée de recollement du type 1.1.0 dans (Sch/S) alors $X = X_1 \underset{\theta}{\amalg} X_2$ est évidemment dans (Sch/S) . De plus il est facile à voir que si chaque X_i est S-séparé, X l'est aussi.

Supposons que $S' \in$ (Sch/S). Alors, on obtient par le changement de base $S' \to S$, une donnée de recollement $(X_1' = X_{1_{S'}} , X_2' = X_{2_{S'}} , Y' = Y_{S'} , \theta_1' = \theta_{1_{S'}} , \theta_2' = \theta_{2_{S'}})$ dans (Sch/S'). Ce qui nous permet de construire le S'-schéma $X_1' \underset{\theta'}{\amalg} X_2'$ (où $\theta' = (\theta_1', \theta_2')$). D'après 1.1.2 (b), il existe un S'-isomorphisme

canonique $X_1' \coprod_{\theta'} X_2' \to (X_1 \coprod_{\theta} X_2)_{S'}$.

La démonstration de 1.1.1 montre que si S' est plat sur S , alors c'est un isomorphisme. En d'autres termes, le recollement suivant un fermé commute aux changements de base plats.

ii) Supposons que S est localement noethérien et que $(X_1 , X_2 , Y , \theta_1 , \theta_2)$ est une donnée du type 1.1.0 localement de type fini sur S (i.e., chaque X_i l'est). Alors une démonstration analogue à celle du théorème 5 de l'appendice I montre que $X_1 \coprod_{\theta} X_2$ est aussi localement de type fini sur S .

iii) Soient S localement noethérien, $(X_1 , X_2 , Y , \theta_1 , \theta_2)$ une donnée du type 1.1.0 localement de type fini sur S et $(X_1' , X_2' , Y' , \theta_1' , \theta_2')$ une deuxième donnée étale sur la première (i.e., on a des S-morphismes étales tels que tous les carrés évidents soient cartésiens). Alors le S-morphisme canonique $X_1' \coprod_{Y'} X_2' \to X_1 \coprod_{Y} X_2$ (cf. 1.1.2 (b)) est étale.

Il faut montrer que si x est un point de $X = X_1 \coprod_{Y} X_2$ qui est dans $(X_1 \cap X_2) \simeq Y$ et si x' est un point de $X' = X_1' \coprod_{Y'} X_2'$ au-dessus de x , alors $\mathcal{O}_{X',x'}$ est essentiellement étale sur $\mathcal{O}_{X,x}$. Pour ce faire, remarquons d'abord que Spec $\mathcal{O}_{X,x}$ (resp. Spec $\mathcal{O}_{X',x'}$) est le schéma recollé de Spec $\mathcal{O}_{X_1,x}$ (resp. Spec $\mathcal{O}_{X_1',x'}$) et Spec $\mathcal{O}_{X_2,x}$ (resp. Spec $\mathcal{O}_{X_2',x'}$) suivant le fermé commun Spec $\mathcal{O}_{Y,x}$ (resp. Spec $\mathcal{O}_{Y',x'}$). Si l'on note le hensélisé strict d'un anneau local $\mathcal{O}$ par $\tilde{\mathcal{O}}$, alors il est clair que Spec $\widetilde{\mathcal{O}_{X,x}}$ (resp. Spec $\widetilde{\mathcal{O}_{X',x'}}$) est le schéma recollé de Spec $\widetilde{\mathcal{O}_{X_1,x}}$ (resp. Spec $\widetilde{\mathcal{O}_{X_1',x'}}$) et Spec $\widetilde{\mathcal{O}_{X_2,x}}$ (resp. Spec $\widetilde{\mathcal{O}_{X_2',x'}}$)..... suivant le fermé commun Spec $\widetilde{\mathcal{O}_{Y,x}}$ (resp. Spec $\widetilde{\mathcal{O}_{Y',x'}}$). L'assertion iii) est alors immédiate.

1.2. Application aux questions de descente fpqc sur un schéma de Dedekind

1.2.0. Par définition, un schéma de Dedekind S est un schéma intègre qui est localement le spectre d'un anneau de Dedekind ; le schéma S est donc localement noethérien, intègre et régulier de dimension 1.

Soient S un schéma de Dedekind, à point générique η, et $G : (Sch/S)^{o} \to Ens$ un foncteur quelconque. On peut définir alors l'adhérence schématique $\bar{G}$ de G_η dans G comme étant le sous-foncteur $\bar{G}$ de G tel que $T \xrightarrow{\alpha} G$ est dans $\bar{G}(T) \Longleftrightarrow \alpha$ admet une factorisation

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr] & & G \\ & T' \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

où T' est un S-schéma plat.

La motivation de cette définition est assez claire : Pour un schéma quelconque X sur S, l'adhérence schématique $\bar{X}$ de X_η dans X est le plus grand sous-schéma de X sans S-torsion, donc est le plus grand sous-schéma plat sur S. La définition fonctorielle dit simplement que $\bar{G}$ est "le plus grand sous-foncteur de G plat sur S".

Il s'ensuit que si G est représentable, les deux définitions coïncident. Remarquons enfin que si $\bar{G}$ est représentable, il est nécessairement plat sur S.

Pour que le foncteur G soit représentable sur S, on a ainsi les conditions nécessaires suivantes :

i) $\bar{G}$, l'adhérence schématique de G_η dans G est représentable ;

(+) ii) chaque voisinage infinitésimal de chaque fibre de G sur S est représentable ;

iii) G est un S-faisceau fpqc.

On a la réciproque partielle suivante:

1.2.1. Proposition : Soient S un trait (S,η,s), $G : (Sch/S)^{o} \to Ens$ un foncteur qui vérifie les conditions (+) ci-dessus. Supposons qu'il existe un trait $S' = (S',\eta',s')$ fidèlement plat sur S tel que $G_{S'}$ soit un schéma localement noethérien. Alors G est représentable et localement noethérien.

Commençons par quelques remarques.

1.2.2. Remarques préliminaires :

a) Soient S un schéma de Dedekind, $G : (Sch/S)^{o} \to Ens$ un foncteur et S_1 un schéma de Dedekind plat sur S. Si $\overline{G}$ (resp. $(\overline{G_{S_1}})$) est l'adhérence schématique de G_η (resp. $(G_{S_1})_{\eta_1}$) dans G (resp. G_{S_1}) alors on a un isomorphisme canonique $(\overline{G})_{S_1} \simeq (\overline{G_{S_1}})$.

Cela découle formellement des définitions. En d'autres termes, la formation de l'adhérence schématique commute aux changements de base plats.

b) Soient X un schéma sur le trait $S = (S,\eta,s)$ et $\overline{X}$ l'adhérence schématique de X_η dans X. Alors pour chaque $n \geqslant 0$, $\overline{X} \times_X X_s^{(n)}$ est un sous-schéma fermé à la fois de $\overline{X}$ et de $X_s^{(n)}$. D'après 1.1.1., on peut donc recoller $\overline{X}$ et $X_s^{(n)}$ suivant $\overline{X} \times_X X_s^{(n)}$; soit $\overline{X} \amalg X_s^{(n)}$ le schéma ainsi obtenu. D'après 1.1.2 (b), on a un morphisme canonique $\overline{X} \amalg X_s^{(n)} \xrightarrow{\varphi^{(n)}} X$.

c) On a vu (1.0) que si X est un schéma affine noethérien, c'est un isomorphisme pour n assez grand. On a vu aussi que le recollement suivant un fermé "se fait localement" en se ramenant au cas affine (cf. 1.1.4). Il en résulte que si X est noethérien, $\varphi^{(n)}$ est un isomorphisme pour n assez grand ; et par suite, si X est localement noethérien, alors localement sur X, $\varphi^{(n)}$ est un isomorphisme pour n assez grand.

d) Plaçons-nous dans le contexte de 1.2.1 et supposons (grâce à b) que $S = (S,\eta,s)$, $S' = (S',\eta',s')$ sont des traits. Alors, pour chaque $n \geqslant 0$, le sous-foncteur $\overline{G} \times_G G_s^{(n)}$ est représentable et est un sous-schéma fermé de $G_s^{(n)}$.

En effet, si l'indice de ramification du trait S' sur S est $r \geqslant 1$, il est clair (compte tenu de a)) que $(\overline{G} \times_G G_s^{(n)})_{S'} \simeq \overline{G}_{S'} \times_{G_{S'}} G_{s'}^{(nr)}$. Mais puisque $G_{S'}$ est un schéma, le membre à droite est un sous-schéma fermé de $G_{s'}^{(nr)} = (G_s^{(n)})_{S'}$; d'où la conclusion par descente fpqc.

e) Ce fait nous permet, sous les hypothèses de 1.2.1., de recoller les schémas $\overline{G}$, $G_s^{(n)}$, suivant le fermé $\overline{G} \times_G G_s^{(n)}$, pour chaque $n \geqslant 0$. Notons

toujours $\bar{G} \amalg G_s^{(n)}$ le schéma ainsi obtenu. D'après 1.1.5 i) (le recollement suivant un fermé commute aux changements de base plats) il s'ensuit que

$$(\bar{G} \amalg G_s^{(n)})_{S'} \xleftarrow{\sim} \bar{G}_{S'} \amalg G_{s'}^{(nr)} \text{ (notations de d))}.$$

Or, on a le morphisme canonique $\bar{G}_{S'} \amalg G_{s'}^{(nr)} \xrightarrow{\varphi'^{(nr)}} G_{S'}$ et il est formel de voir que les changements de base $S'' = S' \times_S S' \underset{pr_2}{\overset{pr_1}{\rightrightarrows}} S'$ donnent le même morphisme canonique $(\bar{G} \amalg G_s^{(n)})_{S''} \to G_{S''}$. Comme, par hypothèse, G est un S-faisceau fpqc, on en déduit un morphisme canonique $\bar{G} \amalg G_s^{(n)} \to G$, pour tout $n \geqslant 0$, que nous noterons $\varphi^{(n)}$; c'est un morphisme relativement représentable par des immersions fermées ; et l'on a des immersions fermées $\bar{G} \amalg G_s^{(n)} \to \bar{G} \amalg G_s^{(n+1)}$, compatibles avec les $\varphi^{(n)}$, $n \geqslant 0$.

1.2.3. <u>Démonstration de</u> 1.2.1 :

Remarquons d'abord que les schémas $\bar{G} \amalg G_s^{(n)}$, $n \geqslant 0$, ont le même espace sous-jacent. Soit $\{U_\alpha^{(o)}\}_\alpha$ un recouvrement ouvert affine de $\bar{G}$ $G_s^{(o)}$; soit, pour chaque $n \geqslant o$ et chaque α, $U_\alpha^{(n)}$ l'ouvert de $\bar{G} \amalg G_s^{(n)}$ qui a le même espace sous-jacent que $U_\alpha^{(o)}$; alors $U_\alpha^{(n)}$ est affine (EGA, I, 5.1.9), de sorte que $\{U_\alpha^{(n)}\}_\alpha$ est un recouvrement ouvert affine de $\bar{G} \amalg G_s^{(n)}$.

Or, considérons, pour α fixe, la famille $((U_\alpha^{(n)})_{S'})_{n \geqslant o}$. Puisque $G_{S'}$ est un schéma localement noethérien, (1.2.2 c)) montre que cette famille est stationnaire et que sa valeur stationnaire est un ouvert du schéma $G_{S'}$. Par descente fidèlement plate, la famille $(U_\alpha^{(n)})_{n \geqslant o}$ est elle-même stationnaire, pour α fixe. Si U_α est sa valeur stationnaire il est clair que U_α représente un ouvert de G. Enfin les $\{U_\alpha\}_\alpha$ recouvrent G.

1.2.4. <u>Corollaire</u> : Soient S un schéma de Dedekind et $G : (Sch/S)^o \to Ens$ un foncteur qui vérifie les conditions (+) de 1.2.0 et qui est localement de présentation finie sur S (cf. EGA, IV, 8.14). Supposons qu'il existe un schéma S' fpqc sur S tel que $G_{S'}$ soit représentable (et localement de présentation finie) sur S'. Alors G est représentable.

Démonstration : Comme plus haut, on peut supposer que S est un trait $(\mathrm{Spec}\ \Lambda, \eta, s)$ et par suite que S' est affine, soit $S' = \mathrm{Spec}\ A'$. On peut évidemment supposer que A' est un anneau de valuation (non nécessairement discrète) dominant Λ. Dans ce cas, l'adhérence schématique (ordinaire) $\overline{G'}$ de la fibre générique de $G' = G_{S'}$ sur S', dans G', est plate sur S', donc on a l'égalité $\overline{G'} \simeq \overline{G} \times_S S'$. Par descente fpqc on conclut que, pour chaque $n \geqslant o$, $\overline{G} \times_G G_s^{(n)}$ est un sous-schéma fermé de $G_s^{(n)}$.

Ce fait nous permet de construire, suivant le procédé de 1.1.4., des ouverts $\{U_\alpha\}_\alpha$ du foncteur G tels que :

a) pour tout α et tout $n \geqslant o$, $U_\alpha \cap \overline{G}$ (resp. $U_\alpha \cap G_s^{(n)}$) soit un ouvert affine de $\overline{G}$ (resp. $G_s^{(n)}$)

b) $\bigcup_\alpha U_\alpha = G$.

Puisqu'il suffit de montrer que chacun des ouverts $\{U_\alpha\}$ est un schéma, on peut supposer que $G_{S'}$ est de présentation finie sur S', dans l'énoncé 1.2.4 (en effet chaque $(U_\alpha)_{S'}$ est un ouvert quasi-compact et quasi-séparé du schéma $G_{S'}$). Or, l'anneau A' est limite inductive filtrante de ses sous-Λ-algèbres $\{A_i\}_{i \in I}$ de type fini. Puisque $G_{S'}$ est de présentation finie sur S', il s'ensuit que $G \otimes_\Lambda A_i$ est représentable et de type fini sur $\mathrm{Spec}\ A_{i_o}$ pour $i_o \in I$ assez grand (cf. [8]).

Comme A' est sans Λ-torsion, il en est de même de A_{i_o}, donc $\mathrm{Spec}\ A_{i_o}$ est S-plat. Quitte à prendre une S-quasi-section plate de $\mathrm{Spec}\ A_{i_o}$ (cf. EGA, IV, 17.16.1) et par la suite normaliser et localiser, on se ramène à supposer que S' est un trait fidèlement plat sur S. On est donc dans un cas particulier de 1.2.1.

C.Q.F.D.

1.2.5. Remarques :

a) Gardons les notations et les hypothèses générales de 1.2.0. Nous dirons que G est plat sur S si $G = \overline{G}$.

b) Il est formel de voir que si G est un foncteur en groupes sur S, alors $\overline{G}$ l'est aussi.

c) Supposons que la fibre générique G_η de G sur S est représentable. Si $H_\eta \hookrightarrow G_\eta$ est un sous-schéma <u>fermé</u> de G_η, alors on a une définition évidente de l'adhérence schématique $\bar{H}$ de H_η dans G, qui coïncide avec la définition habituelle si G est un schéma.

d) Si, dans c), G est un foncteur en groupes et H_η est un sous-groupe invariant fermé de G_η, il est clair que $\bar{H}$ est un sous-foncteur en groupes invariant de $\bar{G}$.

1.3. <u>Application aux espaces algébriques</u>

1.3.0. <u>Définition</u> : Soit S un schéma. On appelle <u>S-espace algébrique</u> un S-faisceau fppf X qui s'insère dans une suite exacte de S-faisceaux $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{p} X$, où

i) Y, Z sont des S-schémas,

ii) $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$ est une S-relation d'équivalence <u>étale et de présentation finie</u>,

iii) le monomorphisme canonique $Z \xrightarrow{(p_1,p_2)} Y \times_S Y$ est une <u>immersion</u>.

Nos espaces algébriques sont donc les espaces algébriques localement séparés au sens de [1].

($*_1$) L'espace algébrique X ci-dessus est dit <u>séparé</u> si le morphisme $d : Z \xrightarrow{(p_1,p_2)} Y \times_S Y$ est une <u>immersion fermée</u>.

($*_2$) Cet espace algébrique X est dit un <u>S-espace algébrique</u> (loc. PF) si Y est <u>localement de présentation finie sur</u> S.

1.3.1. <u>Remarques</u> :

a) Avec les notations de 1.3.0., soit $\{Y_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement ouvert affine de Y. Si Y_1 est le S-schéma $\coprod_\alpha Y_\alpha$ et $Y_1 \xrightarrow{\theta} Y$ est le morphisme canonique, soit $Z_1 \rightrightarrows Y_1$ la relation induite sur Y_1 (cf. SGAD, V, 3). On voit que cette relation est elle aussi étale et de présentation finie (cf. 3.1.2.2). Si X_1 est le S-faisceau fppf quotient de $Z_1 \rightrightarrows Y_1$, alors il est clair que $X_1 \simeq X$.

En particulier, on peut supposer dans la définition plus haut que Y est <u>séparé</u> (sur S).

b) Un S-espace algébrique (loc. PF) X est localement de présentation finie sur S (au sens de EGA, IV, 8.14) (cf. [18], VI, 1.2.1).

c) Supposons maintenant que S est un schéma de Dedekind. Alors on a la notion d'adhérence schématique $\bar{X}$ de la fibre générique de X dans X (1.2.0). Si X est un S-espace algébrique, alors $\bar{X}$ est un sous-S-espace algébrique fermé de X : en effet, soit X le conoyau $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{p} X$. Alors la projection canonique $Y \xrightarrow{p} X$ est relativement représentable par des morphismes étales et de présentation finie (cf. 3.1.2.1). On en conclut facilement que $\bar{Y} \simeq \bar{X} \times_X Y$. D'autre part, considérons la relation d'équivalence induite sur $\bar{Y}$ pour le monomorphisme canonique $\bar{Y} \to Y$. Comme $Z \simeq Y \times_X Y$ (cf. 3.1.2.1) et p_1, p_2 sont les projections canoniques $Y \times_X Y \rightrightarrows Y$, il s'ensuit que cette relation sur $\bar{Y}$ n'est rien d'autre que $\bar{Z} \rightrightarrows \bar{Y}$, interprétés soit comme les projections canoniques $\bar{Z} \simeq \bar{Y} \times_{\bar{X}} \bar{Y} \rightrightarrows \bar{Y}$, soit comme les factorisations des restrictions $p_i | \bar{Z}$. Il est alors clair que $\bar{Z} \rightrightarrows \bar{Y}$ est une S-relation d'équivalence étale et de présentation finie. D'autre part, du fait $\bar{Z} \simeq \bar{Y} \times_{\bar{X}} \bar{Y}$, on déduit facilement que $\bar{X}$ est le S-faisceau fppf quotient de $\bar{Z} \rightrightarrows \bar{Y}$.

Le but de ce numéro est de démontrer la

1.3.2. <u>Proposition</u> : Soient S un schéma de Dedekind et X un S-espace algébrique (loc. PF). Supposons que

i) $\bar{X}$ est représentable (notation de 1.3.1 c))

et ii) chaque voisinage infinitésimal de chaque fibre spéciale de X sur S est représentable.

Alors X est représentable.

<u>Démonstration</u> : Soit X le conoyau $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{p} X$, comme plus haut. Ramenons-nous d'abord au cas X "quasi-compact" ; en effet, si U est un ouvert affine quelconque de Y, son saturé $p_1 p_2^{-1}(U)$ est un ouvert de Y de présentation finie

sur S et on peut remplacer Y par cet ouvert et X par l'ouvert correspondant.

Ramenons-nous par la suite au cas où S est un trait ; en effet, puisque X est de présentation finie, il suffit de prouver la représentabilité après localisation en chaque point s de S (cf. [8]). On peut donc supposer que $S = (S,\eta,s)$ est un trait.

Remarquons alors que pour chaque $n \geqslant o$, $\bar{X} \times_X X_s^{(n)}$ est un sous-schéma fermé de $X_s^{(n)}$, car $\bar{X} \hookrightarrow X$ est une immersion fermée (relative). Cela nous permet de construire les schémas $\bar{X} \amalg X_s^{(n)}$, pour chaque $n \geqslant o$ (notations de 1.2.2). On sait (d'après 1.2.2 c)) qu'il existe $m \geqslant o$ tel que $\bar{Y} \amalg Y_s^{(m)} \xrightarrow{\sim} Y$ et $\bar{Z} \amalg Z_s^{(m)} \xrightarrow{\sim} Z$. D'autre part, d'après 1.1.5 iii), le morphisme canonique $\bar{Y} \amalg Y_s^{(m)} \to \bar{X} \amalg X_s^{(m)}$ est étale, et est compatible avec $Z \simeq (\bar{Z} \amalg Z_s^{(m)}) \rightrightarrows (\bar{Y} \amalg Y_s^{(m)}) \simeq Y$ (cf. 1.1.2 b)). Puisque Z a "le bon graphe", on en conclut que $\bar{X} \amalg X_s^{(m)}$ s'identifie au faisceau fppf quotient de $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$.

C.Q.F.D.

Chapitre II

Schémas en groupes sur un schéma de Dedekind

2.0. Nous appellerons semi-trait un schéma de Dedekind semi-local.

La plupart des résultats de ce chapitre concerne les schémas en groupes plats et séparés sur un semi-trait. Certains d'entre eux sont dus à Raynaud.

2.1. La lissification (N) (N = Néron ; cf. [20])

2.1.1. Théorème (N) : Soient S un semi-trait à point générique η et G un S-schéma en groupes localement de type fini, à fibre générique G_η lisse. Alors il existe un schéma en groupes G' lisse sur S et un S-homomorphisme $u' : G' \to G$ avec les propriétés suivantes :

i) $u'_\eta : G'_\eta \to G_\eta$ est un isomorphisme

ii) tout S-morphisme $X \xrightarrow{\theta} G$ avec X S-lisse admet une factorisation unique

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\theta'"'] & & G \\ & G' \arrow[ur, "u'"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, la "formation" du couple (G',u') commute aux changements de base étales sur S.

Nous ne donnerons ici que quelques indications de la démonstration de 2.1.1.

2.1.2. L'idée de la construction du couple (G',u')

On peut supposer que S est un trait $(\mathrm{Spec}\, A, \eta, s)$. L'idée est la suivante : prendre le plus petit sous-schéma en groupes H de G_s qui contient les points de G_s par lesquels passent une quasi-section étale de G au-dessus de S, et faire "grossir" H par certains types "d'éclatements" de G.

Nous commençons donc par spécifier le type d'éclatement que nous allons considérer.

(A) Soit X un schéma localement de type fini sur le trait S et supposons donné un sous-schéma fermé Y de la fibre spéciale X_s. Soit $E(X,Y)$ le S-schéma

éclaté de X suivant Y. Comme Y est au-dessus de s, l'idéal I de Y dans X "contient" π (où π est une uniformisante de Λ) et on peut considérer l'ouvert X^Y de $E(X,Y)$ où π engendre l'idéal inversible image inverse de I dans $E(X,Y)$.

C'est un schéma X^Y possédant les propriétés suivantes :

1) X^Y est S-plat, le morphisme canonique $X^Y \xrightarrow{p} X$ est affine et p_η est un isomorphisme.

2) Tout S-morphisme $T \xrightarrow{\alpha} X$ où T est S-plat et α_s se factorise par Y, admet une factorisation unique

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha^Y"'] & & X \\ & X^Y \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

3) Soit (S',η',s') un trait étale sur S. Posons $X' = X_{S'}$, $Y' = Y_{S'}$. Alors on a un isomorphisme canonique

$$(X^Y)_{S'} \simeq X'^{Y'} .$$

<u>(B)</u> Revenons à la situation décrite dans 2.1.1. Soient π une uniformisante de Λ et $(\operatorname{Spec} \tilde{\Lambda} = \tilde{S}, \tilde{s}, \tilde{\eta})$ le trait hensélisé strict de S (EGA, IV, 18) ; posons $\tilde{G} = G_{\tilde{S}}$.

Considérons l'ensemble des points $\{g \in \tilde{G}_{\tilde{s}} |$ tels qu'il existe une section $\tilde{S} \to \tilde{G}$ passant par $g\}$ dans le groupe $\tilde{G}_{\tilde{s}}$. Alors on montre que le plus petit sous-schéma fermé $\tilde{H}_o$ de $\tilde{G}_{\tilde{s}}$ qui majore cet ensemble est un sous-groupe lisse sur $k(\tilde{s})$ (SGAD, VI_B, 7). Par descente galoisienne on obtient un sous-groupe H_o de G_s, lisse sur $k(s)$.

Avec les notations de (A), posons $G_1 = G^{H_o}$; c'est un schéma qui possède les propriétés correspondantes à 1), 2) et 3) plus haut. D'autre part, en utilisant le fait que G (resp. H_o) est un groupe, on voit formellement (moyennant 2)) que $G_1 = G^{H_o}$ est aussi un S-schéma en groupes et que le morphisme canonique $u_1 : G_1 \to G$ est un S-homomorphisme.

(C) Reprenons le cas général étudié dans (A). Si x est un point de $X(\tilde{S})$ (où $\tilde{S}$ est comme dans (B)), alors $\Gamma(\tilde{S}, x^*(\Omega_{X/S}))$ est un $\tilde{\Lambda}$-module et on note $m(x,X)$ la longueur de la partie de $\tilde{\Lambda}$-torsion de ce module. On voit alors (cf. [3]) que si X est supposé S-lisse au point $x(\tilde{\eta})$, X est S-lisse au point $x(\tilde{S})$ si et seulement si $m(x,X) = 0$.

(D) Revenant au cas de (B), par translation, on prouve que le nombre $m(x,G)$ est indépendant du choix du point x dans $G(\tilde{S})$ (cf. [3]) et nous le noterons $m(G)$.

(E) Si $G_1 \xrightarrow{u_1} G$ est comme dans (B), on a l'inégalité $m(G_1) \leqslant \operatorname{Sup}\{o, m(G)-1\}$ (cf. [3]).

(F) On construit un S-schéma en groupes G_2 à partir de G_1 et du sous-groupe fermé lisse H_1 de $(G_1)_s$ obtenu de la même façon que H_o dans G_s :

$G_2 = G_1^{H_1}$. Le morphisme canonique $G_2 \xrightarrow{u_2} G_1$ possède pour sa part les propriétés correspondantes à 1), 2), 3) plus haut et est un S-homomorphisme.

En réitérant le processus on finit par trouver un S-groupe G' et un S-homomorphisme $u' : G' \to G$ tels que $m(G')$ soit zéro (grâce à (E)), et tel que u'_η soit un isomorphisme (en particulier, G'_η est lisse). Il résulte de (C) alors que G' est S-lisse. Pour "prouver" le théorème (N) il ne reste plus qu'à vérifier la propriété ii) de l'énoncé.

Mais si X est S-lisse et $X \xrightarrow{\theta} G$ est un S-morphisme, alors θ_s se factorise forcément par H_o : en effet, X_s est réduit et les points de X_s par lesquels passent S-morphismes $\tilde{S} \to X$ sont denses dans X_s (EGA, IV,17). D'après (A), 2), donc θ admet une factorisation unique

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\theta_1"'] & & G \\ & G_1 \arrow[ur, "u_1"'] & \end{tikzcd}$$

. Le même raisonnement relève θ_1 à G_2 et par itération on prouve ii).

2.1.3. Remarques :

(a) Gardons les hypothèses générales de 2.1.1 et supposons que H'_o est un sous-groupe de G_s lisse sur $k(s)$ et tel que l'ensemble des points de G_s par lesquels passent des S-morphismes $\tilde{S} \to G$ soit dense dans H'_o (i.e., H'_o est un

sous-groupe lisse du groupe H_o qui intervient dans la "démonstration"). Alors le procédé ci-dessus reste entièrement valable et nous fournit une lissification, universelle pour les S-morphismes $X \xrightarrow{\theta} G$, où X est S-lisse et θ_s se factorise par H'_o.

(b) Remarquons enfin que le procédé ainsi que la conclusion du théorème restent valables pour un S-espace homogène X sous G (en effet le point (D) de 2.1.2 n'utilise que l'homogénéité de G) ; mais ce n'est intéressant que si $X(\tilde{S}) \neq \emptyset$.

2.2. <u>Une application aux Groupes commutatifs</u>

Rappelons d'abord que tout schéma en groupes lisse, séparé et de type fini sur un semi-trait est quasi-projectif (cf. [18], VIII.2). L'application que nous avons en vue est la suivante.

2.2.1. <u>Proposition</u> : Soient S un semi-trait (à point générique η), G un S-schéma en groupes commutatifs, <u>plat, séparé</u> et de type fini. Alors G est quasi-projectif.

Remarquons tout de suite que l'on peut supposer que G_η est <u>lisse</u> : en effet, soit R_η un sous-groupe radiciel de G_η tel que G_η/R_η soit un groupe lisse (SGAD, XVII, Append.II.3.1). Si R est l'adhérence schématique de R_η dans G, alors il est clair que R est fini radiciel et plat sur S ; donc le faisceau fppf quotient $G_1 = G/R$ est un schéma (SGAD, V) en groupes (R invariant dans G), plat, séparé et de type fini sur S ; et le morphisme canonique $G \to G_1$ est fini (loc. Cit.). Il suffit donc de prouver 2.2.1 pour G_1 ; de sorte que l'on peut supposer G_η lisse.

Dans ce cas la proposition 2.2.1 sera démontrée de la façon suivante : on montrera qu'il existe un entier $n > o$ tel que l'homomorphisme $n_G : G \to G$ (d'élévation à la puissance $n^{\text{ème}}$ dans G) soit quasi-affine et admette une factorisation

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "n_G"] \arrow[dr, "\tilde{\omega}"'] & & G \\ & G' \arrow[ur, "u'"'] & \end{tikzcd}$$

où (G',u') est la lissification (N) de G sur S ; alors ω est quasi-affine et la proposition résulte du fait rappelé plus haut.

Nous commençons donc par une étude des morphismes n_G. Rappelons d'abord deux résultats classiques.

2.2.2. Proposition : Soient G une variété abélienne sur un corps k, p la caractéristique de k et n un entier $> o$. Alors l'homomorphisme $n_G : G \to G$ (d'élévation à la puissance $n^{\text{ème}}$ dans G) est un morphisme fini. Si $p = o$, ou $(n,p) = 1$, alors c'est même un morphisme étale.

Pour une démonstration, voir Lang [14], IV, §3, théorème 6, ou Mumford [15] page 62.

2.2.3. Proposition : Soient G un schéma en groupes commutatifs, localement de type fini, sur un corps k, p la caractéristique de k et n en entier $> o$. Si $p = o$, ou $(n,p) = 1$, alors l'homomorphisme $n_G : G \to G$ est un morphisme étale. (Voir SGAD, VII_A, 8.4 et XV, lemme 1.3).

2.2.4. Corollaire de 2.2.2 : Soient G un schéma en groupes commutatifs, de type fini, sur un corps k et n un entier $> o$. Alors l'homomorphisme n_G est un morphisme affine.

Démonstration : On peut supposer k algébriquement clos. D'autre part si ${}_nG$ est le noyau de n_G, on a une factorisation canonique $G \to G/_{nG} \hookrightarrow G$ de n_G, où la deuxième flèche est un k-monomorphisme de k-groupes de type fini, donc est une immersion fermée (SGAD, VI_B, 1.4.2). Il suffit de montrer donc que $G \to G/_{nG}$ est un morphisme affine, ou ce qui revient au même, que ${}_nG$ est un k-groupe affine.

Or, si G_o est la composante neutre de G, $G/_{G_o}$ est un k-groupe fini ; il suffit donc de prouver que ${}_nG_o$ est affine et on peut ainsi supposer $G = G_o$. Puisque k est parfait, G_{red} est un sous-groupe de G et G/G_{red} est radiciel ; un raisonnement analogue nous permet alors de supposer $G = G_{red}$.

Mais alors il existe un sous-groupe linéaire L de G tel que $A = G/L$ soit une variété abélienne ([23], théorème 16). Puisque ${}_nA$ est fini (2.2.2) et que ${}_nL$ est linéaire, le corollaire est prouvé.

2.2.5. Remarques :

(a) Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes commutatifs, plat et de présentation finie sur S et n un entier $> o$ inversible sur S. Alors il résulte de 2.2.3 que n_G est un morphisme étale et de présentation finie (EGA, IV, 11.3.10); en particulier, ${}_nG = \ker(n_G)$ est un S-groupe étale et de présentation finie.

(b) Si, de plus, les fibres de G sur S sont supposées connexes (donc géométriquement irréductibles), il s'ensuit que n_G est un morphisme fidèlement plat.

2.2.6. Soit k un corps de caractéristique $p \geqslant o$. (Pour un entier $n > o$ nous adoptons la convention que $(n,p) = 1$ est une condition vide si $p = o$). On vient de voir que si n est un entier $> o$ tel que $(n,p) = 1$, alors ${}_nG$ est un k-groupe étale. Il en résulte que le plus petit sous-schéma fermé H de G qui majore la famille $\{{}_nG\}_{\substack{n>o \\ (n,p)=1}}$ est un sous-groupe de G lisse sur k (SGAD, VI_B, 7) ; il est facile de voir que la formation de H commute aux extensions du corps de base (loc. cit.).

Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Pour le reste de ce numéro, nous nous bornons aux points géométriques de $G,H\ldots$ à valeurs dans $\bar{k}$.

i) Soit $x \in G(\bar{k})$. Si, pour un $n > o$, $(n,p) = 1$, on a $x^n \in H(\bar{k})$ alors $x \in H(\bar{k})$.

Cas a). H connexe. Il résulte de 2.2.5 (b) que n_H est surjectif. On a donc $x^n = y^n$, $y \in H$, d'où $x \in H(\bar{k})$.

Cas b). H non connexe. Le même raisonnement montre que l'ordre du groupe fini H/H_o (H_o = composante neutre de H) est un entier m tel que $(m,p) = 1$. Donc si $x^n \in H(\bar{k})$, $(x^n)^m \in H_o(\bar{k})$ d'où, comme avant, $x \in H(\bar{k})$.

ii) Il résulte de i) que ${}_n(G/H) = (o)$, pour tout $n > o$, $(n,p) = 1$.

iii) Il résulte de ii) que si G est une variété abélienne, alors $G = H$: en effet, G/H est une variété abélienne et l'assertion résulte donc de 2.2.2.

iv) Soient L un k-sous-groupe (invariant) connexe de G et $A = G/L$. Alors pour tout $n > o$, $(n,p) = 1$, le morphisme canonique ${}_nG \to {}_nA$ est surjectif.

Cela résulte du fait que $n_L : L \to L$ est surjectif.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la

2.2.7. Proposition : Soient k un corps de caractéristique $p > o$, G un k-schéma en groupes commutatifs de type fini et H le sous-groupe (fermé) de G défini comme dans 2.2.6. Alors il existe un entier $n > o$ tel que G/H soit annulé par p^n (i.e., le morphisme p^n_G se factorise par H).

Démonstration : En remplaçant G par G/H, on est ramené, grâce à 2.2.6 ii), à montrer que si ${}_nG = (o)$ pour tout $n > o$, $(n,p) = 1$, alors G est annulé par une puissance de p. On peut supposer k algébriquement clos.

Si G_o est la composante neutre de G, alors (du fait que n_{G_o} est surjectif pour $n > o$, $(n,p) = 1$ et ${}_nG = (o)$ pour tout $n > o$, $(n,p) = 1$) on voit que G/G_o est un p-groupe, donc annulé par une puissance de p. Puisqu'il en est ainsi aussi du k-groupe radiciel $G_o/(G_o)_{red}$, on s'est ramené à supposer $G = G_o = (G_o)_{red}$.

Mais alors il existe un sous-groupe linéaire et connexe L de G tel que $A = G/L$ soit une variété abélienne (cf. [23], théorème 16). Il résulte donc de 2.2.6 iii) et iv) que $G = L$, i.e., G est linéaire et commutatif. La proposition résulte alors du théorème de structure de tels groupes (cf. [24], exposé 12).

C.Q.F.D.

2.2.8. Corollaire : Soient (S,η,s) un trait, G un S-schéma en groupes commutatifs plat et de type fini, à fibre générique lisse, et H_o le sous-groupe (fermé) de G_s défini comme dans 2.1.2 (i.e., l'adhérence schématique des images, dans G_s, des quasi-sections étales de G). Si $p > o$ est la caractéristique de $k(s)$, alors il existe $n > o$ tel que G_s/H_o soit annulé par p^n.

Il suffit de prouver que H_o est plus grand que le sous-groupe H de G_s défini comme dans 2.2.6 (grâce à 2.2.7). Pour ce faire, il suffit de remarquer que si $(n,p) = 1$, alors n est inversible sur S, donc ${}_nG$ est un S-groupe étale

(cf. 2.2.5 (a)).

2.2.9. <u>Corollaire</u> : Avec les hypothèses de 2.2.8., il existe un entier $n > o$ tel que p_G^n admette une factorisation (unique)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "p_G^n"] \arrow[dr, "\tilde{\omega}"'] & & G \\ & G' \arrow[ur, "u'"'] & \end{tikzcd}$$

où (G',u') est la lissification (N) de G sur S et $\tilde{\omega}$ est un S-homomorphisme.

Cela résulte de 2.2.8 et de la propriété universelle de (G',u') (voir la construction de 2.1.2).

2.2.10. <u>Corollaire</u> : Soient S un semi-trait, G un S-schéma en groupes commutatifs, <u>plat</u> et de type fini, à fibre générique lisse et (G',u') sa lissification (N) sur S. Alors il existe un S-endomorphisme φ de G qui admet une factorisation (unique)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & G \\ & G' \arrow[ur, "u'"'] & \end{tikzcd}$$

où φ' est un homomorphisme avec $\ker(\varphi'_\eta)$ <u>affine</u> (η étant le point générique de S).

En effet, si $p_1,\dots,p_r$ sont les caractéristiques résiduelles de S, différentes de zéro, alors on voit qu'il existe $n > o$ tel que $(p_1\dots p_r)_G^n$ satisfasse à la première assertion. La deuxième assertion résulte alors de 2.2.4.

Remarquons maintenant que pour prouver 2.2.1 (N.B. on s'est ramené au cas G_η <u>lisse</u>) il ne reste plus qu'à montrer, dans 2.2.10., que φ' est un morphisme quasi-affine, lorsque G <u>est séparé</u>. Ce sera fait dans la section suivante ; en fait nous montrerons que c'est un morphisme affine (cf. 2.3.2).

2.3. Schémas en groupes et morphismes affines

Les deux résultats principaux que nous avons en vue sont les suivants.

2.3.1. Proposition : Soient S un schéma de Dédekind, G un S-schéma en groupes plat, séparé et de type fini sur S. Si la fibre générique G_η de G sur S est affine, alors G est lui-même affine sur S.

2.3.2. Proposition : Soient S un schéma de Dédekind, G, G_o deux S-schémas en groupes de type fini et $u : G \to G_o$ un S-homomorphisme. On suppose que :

i) u est séparé

ii) G est S-plat

iii) $\ker(u_\eta)$ est affine (η étant le point générique de S).

Alors u est un morphisme affine.

2.3.3. Démonstration de 2.3.1 : On peut supposer que S est un trait (S,η,s). Soit X un S-schéma quasi-compact, quasi-séparé et plat ; alors l'algèbre $\Gamma(X)$ est sans torsion sur S, donc $\operatorname{Spec}\Gamma(X)$ est un schéma S-plat. On a un morphisme canonique $X \xrightarrow{\text{can.}} \operatorname{Spec}\Gamma(X)$ sur S. Alors

2.3.3.1. Lemme : Avec les notations précédentes, le morphisme $X \xrightarrow{\text{can.}} \operatorname{Spec}\Gamma(X)$ est schématiquement dominant (EGA, IV, 11) sur chacune des S-fibres.

Au-dessus de η c'est clair ; et au-dessus de s, il s'agit de prouver que, pour tout $f \in \Gamma(X)$, le morphisme canonique $\frac{\Gamma(X)_f}{\pi\,\Gamma(X)_f} \to \Gamma((X_f)_s, \mathcal{O}_{(X_f)_s})$, (où π est une uniformisante sur S), est injectif. Or, puisque X_f est S-plat, on a la suite exacte des faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_{X_f} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{X_f} \to \mathcal{O}_{(X_f)_s} \to 0 .$$

D'où la suite exacte

$$0 \to \Gamma(\mathcal{O}_{X_f}) \xrightarrow{\pi} \Gamma(\mathcal{O}_{X_f}) \to \Gamma(\mathcal{O}_{(X_f)_s}) \to \cdots\cdots$$

ce qui montre que l'application $\frac{\Gamma(X_f)}{\pi\,\Gamma(X_f)} \hookrightarrow \Gamma((X_f)_s)$ est injective ; pour finir, on note que $\Gamma(X_f) = \Gamma(X)_f$.

(b) Supposons maintenant que G est un schéma en groupes de type fini et plat sur le trait (S,η,s). Considérons le S-schéma plat $\operatorname{Spec} \Gamma(G) = G_1$ et le morphisme canonique $G \xrightarrow{\varphi} G_1$. Puisque G est un S-groupe et que G est plat, on voit formellement, moyennant la formule de Künneth, que G_1 est un S-groupe et que φ est un S-homomorphisme. On vient de voir que φ est universellement schématiquement dominant par rapport à S.

(c) Nous allons montrer que si G_η est <u>affine</u>, alors ce morphisme φ est étale, surjectif, et est un isomorphisme si G est <u>séparé</u>. Pour ce faire nous aurons besoin du

2.3.3.2. <u>Lemme</u> : Soient k un corps, G un k-schéma en groupes de type fini, G' un k-groupe quelconque <u>limite projective d'un système filtrant</u> $(G'_i, \varphi'_{ij})_{i,j\in I}$ <u>de k-groupes de type fini</u>, et $u : G \to G'$ un k-homomorphisme schématiquement dominant. Alors u est fidèlement plat et G' est de type fini.

<u>Démonstration</u> : Si $K = \ker(u)$, alors K est un k-groupe de type fini. Si u_i est le k-homomorphisme composé $G \xrightarrow{u} G' \longrightarrow G'_i$, alors $\{K_i = \ker(u_i)\}_{i\in I}$ est un système décroissant de k-sous-groupes de G, donc stationnaire. On voit donc que $K = K_{i_o}$ pour un i_o assez grand. D'où une factorisation canonique de u comme suit :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u_1"] & G/K \arrow[r, "u_2"] \arrow[dr, "u_2^{(i_o)}"'] & G' \arrow[d, "\varphi'_{i_o}"] \\ & & G'_{i_o} \end{tikzcd}$$

où u_1 est fidèlement plat, G/K est un k-groupe de type fini et u_2, $u_2^{(i_o)}$ sont des k-monomorphismes de groupes. Comme G'_{i_o} est de type fini, $u_2^{(i_o)}$ est une immersion fermée ; puisque G' est un k-groupe, G' est séparé (cf. SGAD, VI_A) donc φ'_{i_o} est séparé et il en résulte que u_2 est une immersion fermée. Mais u est schématiquement dominant, donc u_2 l'est aussi, d'où le fait que u_2 est un isomorphisme.

C.Q.F.D.

2.3.3.3. Corollaire : Soient k un corps, G un k-groupe de type fini, G' un k-groupe affine quelconque et $u : G \to G'$ un k-homomorphisme schématiquement dominant. Alors u est fidèlement plat et G' est de type fini.

En effet un k-groupe affine est limite projective d'un système filtrant de k-groupes affines et de type fini (SGAD, VI_B, 11.5) ; il suffit alors d'appliquer 2.3.3.2.

Ceci étant, revenons au contexte de 2.3.1. On a un S-homomorphisme $G \xrightarrow{\varphi} G_1 = \operatorname{Spec} \Gamma(G)$, universellement schématiquement dominant (relativement à S) et par hypothèse φ_η est un isomorphisme. Grâce à 2.3.3.3., on déduit que φ_s est fidèlement plat et que G_{1_s} est de type fini. Puisque G est S-plat, il s'ensuit que, pour chaque $n \geqslant o$, le morphisme $\varphi_s^{(n)} : G_s^{(n)} \to G_{1_s}^{(n)}$ est fidèlement plat (EGA, 0_{III}, 10.1.2) (notations évidentes).

Si $K = \ker(\varphi)$, cela signifie que, pour chaque $n \geqslant o$, $K_s^{(n)}$ est $S_s^{(n)}$-plat. Comme K est un S-groupe de type fini, il s'ensuit que K est S-plat (EGA, 0_{III}, 10.2.2). Par ailleurs, φ est séparé, donc K est S-séparé. Puisque $K_\eta = (o)$, on en conclut que $K = (o)$. Le morphisme de type fini $\varphi : G \to G_1$ est ainsi un monomorphisme, donc quasi-affine (EGA, IV, 18.12). Mais alors, le morphisme canonique φ est une immersion ouverte (EGA, II, 5.1.6). Il en résulte que φ est un isomorphisme. C.Q.F.D.

2.3.3.4. Une digression : Soient k un corps, G un k-groupe de type fini. Alors les méthodes employées dans cette section montrent que $G_1 = \operatorname{Spec} \Gamma(G)$ est un k-groupe, que le morphisme canonique $\varphi : G \to G_1$ est un k-homomorphisme schématiquement dominant, donc fidèlement plat et que G_1 est de type fini. Il en résulte que G_1 est un k-groupe linéaire ; par suite, c'est le plus grand quotient linéaire de G (mieux : tout k-morphisme $G \to T$ où T est affine se factorise par G_1). Si D est le sous-groupe $\ker(\varphi)$ de G et D_o est la composante neutre de D, G/D_o est linéaire, donc $D = D_o$. Enfin si G est connexe, $G/\underline{\mathrm{Cent}}_k(G)$ est linéaire ([23], th.13) donc $D \hookrightarrow \underline{\mathrm{Cent}}_k(G)$. On retrouve ainsi le

théorème classique de Rosenlicht ([23], cor.3, th.12).

2.3.4. Démonstration de 2.3.2 : On peut supposer toujours que $S = (S,\eta,s)$ est un trait. Quitte à remplacer G_o par l'adhérence schématique de $u_\eta(G_\eta)$ on peut supposer que u_η est fidèlement plat.

Considérons le sous-groupe fermé $H_o = u_s(G_s)$ de G_{o_s} et posons $G_1 = G_o^{H_o}$ (notations de 2.1.2 (A)). Alors G_1 est un S-schéma en groupes plat et de type fini sur S et affine sur G_o. Et l'homomorphisme $u : G \to G_o$ se relève en un S-homomorphisme $u_1 : G \to G_1$ de façon unique.

En itérant ce procédé, on trouve un système projectif $\{G_i\}_{i\geq 1}$ de S-schémas en groupes plats et de type fini sur S et affines sur G_o, et des relèvements compatibles $u_i : G \to G_i$ de u. Comme les G_i sont G_o-affines, on peut construire le schéma $G_\infty = \varprojlim_i G_i$; c'est un S-schéma en groupes plat sur S et affine sur G_o ; et on a un S-homomorphisme $G \xrightarrow{u_\infty} G_\infty$ qui relève les u_i.

(a) Le morphisme u_∞ est schématiquement dominant sur chacune des S-fibres.

Au-dessus de η cela résulte du fait que u_η est fidèlement plat. Au-dessus de s, il s'agit de prouver la chose suivante :

Soient U_∞ un ouvert affine de G_∞ et U son image réciproque dans G. Alors le morphisme canonique composé

$$\frac{\Gamma(U_\infty,G_\infty)}{\pi\,\Gamma(U_\infty,G_\infty)} \to \frac{\Gamma(U,G)}{\pi\,\Gamma(U,G)} \hookrightarrow \Gamma(U_s,G_s)$$

est injectif.

En effet, U_∞ provient d'un ouvert affine U_j de G_j pour tout j assez grand ; soit $r \in \Gamma(U_\infty,G_\infty)$ un élément dont l'image est zéro dans $\Gamma(U_s,G_s)$. Par définition, r provient d'un $r_i \in \Gamma(U_i,G_i)$; il en résulte que r_i est dans l'idéal de définition de $H_i = u_{i_s}(G_s)$. Donc l'image r_{i+1} de r_i dans $\Gamma(U_{i+1},G_{i+1})$ est dans l'idéal $\pi\,\Gamma(U_{i+1},G_{i+1})$; d'où l'assertion.

(b) Il résulte de (a) et de 2.3.3.2 que $(u_\infty)_s$ est fidèlement plat et que $(G_\infty)_s$ est de type fini. On en conclut, comme dans la démonstration de 2.3.1 que le noyau K de u_∞ est S-plat. Par ailleurs K est séparé et de type fini sur S. Comme, par hypothèse, K_η est affine, il résulte de 2.3.1 que K est affine.

(c) Le S-faisceau quotient G/K est un S-schéma.

Cela résulte de [17], p. 294-12.

(d) Si $K_i = \ker(u_i)$, on voit que $K = K_i$ pour i assez grand. Puisqu'il suffit de montrer que le morphisme induit $G/K \to G_\infty$ est affine, on peut supposer dès abord [quitte à remplacer G_o par un G_i (pour i assez grand) et G par G/K] que u est un monomorphisme. Il s'ensuit que u_∞ est alors quasi-affine ; donc, dans la factorisation canonique de u_∞

$$G \xrightarrow{v} \operatorname{Spec}(u_\infty)_*(\mathcal{O}_G) \xrightarrow{\omega} G_\infty$$

v est une immersion ouverte (EGA, II, 5.1.6).

D'autre part on a vu que $(G_\infty)_s$ est de type fini (cf. (a)), de sorte que le monomorphisme $(u_\infty)_s$ est une immersion fermée ; donc v_s est une immersion fermée (tandis que v_η est un isomorphisme).

Enfin le même raisonnement que dans le lemme 2.3.3.1 montre que v_s schématiquement dominant. D'où le fait que v est un isomorphisme. C.Q.F.D.

2.3.5. Remarque (corollaire) : Soient S un semi-trait, η son point générique, et G un S-schéma en groupes plat, séparé et de type fini, tel que G_η soit connexe. Alors G est quasi-projectif.

En effet, on se ramène d'abord au cas G_η lisse comme dans le cas G commutatif. Par suite, il existe un sous-groupe linéaire et invariant L_η de G_η tel que G_η/L_η soit une variété abélienne. Si L est l'adhérence schématique de L_η dans G, nous montrerons au chapitre IV que $G_1 = G/L$ est un schéma (en groupes) **(cf. Théorème (4.c), chap. IV). Il suffit alors d'appliquer 2.21 et 2.3.2.**

Chapitre III

Sur les faisceaux quotients et les espaces algébriques

3.1. Un théorème d'Artin

Soient S un schéma, Y, Z des S-schémas localement de présentation finie et $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$ une S-relation d'équivalence plate et de présentation finie. Notons X le S-faisceau fppf quotient. Le résultat suivant a été signalé par M. Artin, cf. [1], 7.1.

3.1.1. Théorème : Avec les notations précédentes, supposons que S est localement noethérien. Alors X possède une structure de S-espace algébrique (au sens de [1]) localement de présentation finie.

Notre premier objectif dans ce chapitre est de démontrer ce théorème. Grâce au corollaire 3 de l'appendice I, on peut supposer que $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$ est une relation d'équivalence plate, quasi-finie et de présentation finie ; et nous la supposerons de ce type dans ce qui suit.

3.1.2. Démonstration de 3.1.1 : Nous aurons besoin de quelques préliminaires.

3.1.2.1. Proposition : Avec les hypothèses et les notations ci-dessus, le carré

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

est cartésien ; et la projection canonique $p : Y \to X$ est relativement représentable par des morphismes quasi-finis et fppf.

Démonstration : La première assertion résulte des généralités faisceautiques. Pour la deuxième, il s'agit de prouver que, si $T \in (Sch/S)$ et si $\alpha \in X(T)$, alors le S-faisceau $F = T \times_X Y$ est représentable, quasi-fini et fppf sur T.

L'assertion étant locale sur T, on peut supposer T affine. D'autre part, il existe un S-schéma T', un S-morphisme affine et fppf $T' \xrightarrow{p'} T$, et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{p'} & T \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array} .$$

Considérons alors le S-faisceau $F' = F \times_T T'$; on a $F' = Y \times_X T' = (Y \times_X Y) \underset{(pr_2, \alpha')}{\times} T' = Z \underset{(p_2, \alpha')}{\times} T'$, donc c'est un S-schéma tel que la projection canonique $F' \to T'$ soit quasi-finie et fppf (car p_2 l'est). On est ainsi ramené à "descendre" F' relativement au morphisme fppf $p' : T' \to T$.

Soit U un ouvert affine quelconque de Y ; alors $U \times_X T$ est un ouvert de $F = Y \times_X T$, donc son image inverse $U \times_X T'$ est un ouvert de $F' = Y \times_X T'$ stable pour la donnée de descente canonique sur F' (relativement à p'). Par ailleurs, c'est un sous-objet de $U \times_S T'$, donc il est S-séparé. Enfin puisque p' est affine et fppf, on peut recouvrir l'ouvert $U \times_X T'$ de F' par des ouverts quasi-compacts et stables pour la donnée de descente ; ces ouverts seront donc séparés, quasi-finis et quasi-compacts sur T', donc quasi-affines sur T' (EGA, IV, 18). L'effectivité de la donnée de descente sur F' est alors assurée (SGA, 1, VIII).

C.Q.F.D.

3.1.2.2. <u>Corollaire</u> : Soient $Y' \xrightarrow{u} Y$ un S-morphisme plat (resp. plat et de présentation finie,...) et $Z' \rightrightarrows Y'$ la relation induite sur Y' par $Z \rightrightarrows Y$ (cf. SGAD, V, 3). Alors c'est une relation d'équivalence plate (resp. plate et de présentation finie,...).

En effet, puisque $Z \simeq Y \times_X Y$, la relation induite sur Y' n'est rien d'autre que $Y' \times_X Y' \underset{pr_2}{\overset{pr_1}{\rightrightarrows}} Y'$; d'autre part on a les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} Y' \times_X Y' & \longrightarrow & Y' \times_X Y & \xrightarrow{pr_1} & Y' \\ \downarrow{\scriptstyle pr_2} & & \downarrow{\scriptstyle pr_2} & & \downarrow{\scriptstyle p.u} \\ Y' & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

d'où l'assertion.

3.1.2.3. <u>Corollaire</u> : Soient T un S-schéma localement de type fini et $\alpha \in X(T)$. Alors l'ensemble $\mathcal{E}t(\alpha)$ des points $t \in T$ où α est (formellement infinitésimalement) étale (SGAD, XI, 1.8) est ouvert dans T. (N.B. L'hypothèse "noethérienne" sur S est pour la première fois utilisée ici).

En effet, d'après 3.1.2.1., $T \times_X Y$ est un schéma fppf sur T et la projection canonique $T \times_X Y \xrightarrow{pr_2} Y$ est localement de type fini. Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{E}t(pr_2)$ des points de $T \times_X Y$ où pr_2 est (formellement infinitésimalement) étale est un ouvert de $T \times_X Y$. Il est alors clair que $\mathcal{E}t(\alpha)$ est l'image de $\mathcal{E}t(pr_2)$ par le morphisme fppf $T \times_X Y \to T$, donc est un ouvert de T.

3.1.2.4. <u>Corollaire</u> : On peut généraliser (dans une certaine mesure) 3.1.2.1 comme suit :

Soient T_1, $T_2 \in (Sch/S)$ et $\alpha_i \in X(T_i)$, $i = 1,2$. Alors $T_1 \times_X T_2$ est un S-<u>schéma</u>.

L'assertion est locale sur X donc on peut supposer Y affine ; de même on peut supposer T_1, T_2 affines. On a que $T_2 \times_X Y$ est un schéma quasi-affine sur T_2 ; et Y étant séparé la projection canonique $pr_2 : T_2 \times_X Y \to Y$ est alors quasi-affine. D'autre part on a un $T_1' \in (Sch/S)$, un S-morphisme affine et fppf $T_1' \xrightarrow{p'} T_1$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T_1' & \xrightarrow{p'} & T_1 \\ {\scriptstyle \alpha_1'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array} .$$

On a alors que $(T_2 \times_X T_1) \times_{T_1} T_1' = (T_2 \times_X T_1') = (T_2 \times_X Y) \times_Y T_1'$ est un schéma quasi-affine sur T_1'. D'où la conclusion par descente fpqc.

Après ces préliminaires, revenons aux détails de la démonstration de 3.1.1.

Soit y un point quelconque de Y, fermé dans sa fibre sur S. Alors chaque point de son orbite sous (p_1, p_2) est un point fermé de la même fibre de Y sur S. Comme cette orbite $p_1 p_2^{-1}(y)$ est finie par hypothèse, il existe un ouvert affine U de Y tel que $\{p_1 p_2^{-1}(y)\} \cap U = \{y\}$. Pour étudier le faisceau X au voisinage de

l'image de y, on peut remplacer Y par U et $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$ par la relation induite sur U par Z (voir, par exemple, le lemme 1 de l'appendice I) ; cette relation induite sur U est, elle-aussi, plate, quasi-finie et de présentation finie (comme le montre par exemple 3.1.2.2). On peut donc supposer dès le début que $y = p_1 p_2^{-1}(y)$; donc $p_1^{-1}(y) = p_2^{-1}(y)$.

Ce dernier ensemble est contenu dans un ouvert affine de Z (car Z est alors quasi-affine). On peut donc "semi-localiser" Z suivant cet ensemble fini ; notons Z_y cet anneau semi-local.

Soient $\tilde{\mathcal{O}}_1$ le hensélisé de l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,y}$ et $\tilde{\mathcal{O}}_2$ le hensélisé de l'anneau semi-local Z_y. La donnée de la relation $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$ définit alors une relation d'équivalence finie et plate

$$\operatorname{Spec} \tilde{\mathcal{O}}_2 \underset{\tilde{p}_2}{\overset{\tilde{p}_1}{\rightrightarrows}} \operatorname{Spec} \tilde{\mathcal{O}}_1 .$$

Rappelons que $\tilde{\mathcal{O}}_2$, $\tilde{\mathcal{O}}_1$ sont des anneaux henséliens (noethériens). Cette relation d'équivalence sur $\operatorname{Spec} \tilde{\mathcal{O}}_1$ admet alors un quotient $\operatorname{Spec} \tilde{\mathcal{O}}$ (SGAD, V, 4.1) et l'on sait que $\tilde{\mathcal{O}}_1$ est fini et plat sur $\tilde{\mathcal{O}}$ (loc. cit.). L'anneau $\tilde{\mathcal{O}}$ est donc un anneau local noethérien et hensélien.

D'autre part, le morphisme canonique $\operatorname{Spec} \tilde{\mathcal{O}}_1 \to X$ est compatible avec la relation $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$; puisque X est un S-faisceau fpqc on en déduit un S-morphisme $\tilde{\tau} : \operatorname{Spec} \tilde{\mathcal{O}} \to X$.

<u>Point a)</u>. Ce morphisme $\tilde{\tau}$ est formellement infinitésimalement étale au point fermé de $\operatorname{Spec} \tilde{\mathcal{O}}$.

En effet, considérons le complété $\hat{\mathcal{O}}_1$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_2$) de $\mathcal{O}_y$ (resp. Z_y). Alors on a une relation d'équivalence finie et plate

$$\operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_2 \underset{\hat{p}_2}{\overset{\hat{p}_1}{\rightrightarrows}} \operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_1 .$$

définie par (p_1, p_2). Le quotient de $\operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_1$ par $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ est alors de la forme $\operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}$, où $\hat{\mathcal{O}}$ est un anneau local noethérien complet. Il est alors clair que $\hat{\mathcal{O}}$

est le complété de $\tilde{\mathcal{O}}$. D'autre part, il est formel de voir que $\hat{\mathcal{O}}$ (avec l'élément canonique de $X(\hat{\mathcal{O}})$) pro-représente X au point l'image de y. L'assertion est alors claire.

Point b). L'anneau local hensélien $\tilde{\mathcal{O}}$ est le hensélisé d'un anneau local essentiellement de type fini sur S.

Admettons ce point pour l'instant et complétons la démonstration de 3.1.1. Le faisceau X est localement de type fini sur S ([18], VI, 1.2.1) donc commute aux limites inductives filtrantes d'anneau sur S. On peut ainsi supposer qu'il existe un anneau local $\mathcal{O}$ essentiellement de type fini sur S tel que $\tilde{\mathcal{O}}$ soit le hensélisé de $\mathcal{O}$ et tel que $\tilde{\tau} \in X(\tilde{\mathcal{O}})$ provienne d'un $\tau \in X(\mathcal{O})$. Puisque la projection canonique $\operatorname{Spec} \tilde{\mathcal{O}} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ est formellement étale au point fermé de $\operatorname{Spec} \tilde{\mathcal{O}}$, on conclut (du point a)) que τ est formellement infinitésimalement étale au point fermé de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$.

Si T est un schéma de type fini sur S tel que $\mathcal{O}$ soit le localisé de $\mathcal{O}_T$ en un point $t \in T$, on peut supposer, quitte à restreindre T, que τ provient d'un S-morphisme $\alpha : T \to X$. Donc α est formellement infinitésimalement étale en t. Grâce à 3.1.2.3., on peut alors supposer, quitte à restreindre T, que α est étale (SGAD, XI). Ce qui achève la démonstration de 3.1.1 modulo le point b) ; mais ce dernier est un cas spécial du résultat suivant.

3.1.2.5. Proposition : Soient Λ un anneau noethérien, A_1, A deux Λ-algèbres locales noethériennes et henséliennes, et $A \xrightarrow{\varphi} A_1$ un Λ-morphisme local fini. Supposons que A est le hensélisé d'un anneau local essentiellement de type fini sur Λ ; alors il en est de même de A_1. Et la réciproque est aussi vraie si φ est injectif.

Démonstration : Par passage à la limite, l'assertion directe est claire. Prouvons donc la réciproque. L'anneau A est limite inductive filtrante de ses sous-Λ-algèbres $A^{(\alpha)}$ de type fini. Pour tout α assez grand, il existe une $A^{(\alpha)}$-algèbre finie $A_1^{(\alpha)}$ tel que $A_1^{(\alpha)} \otimes_{A^{(\alpha)}} A \simeq A_1$. Ces algèbres $A_1^{(\alpha)}$ sont donc

de type fini sur A et on a $\varinjlim_{\alpha} A_1^{(\alpha)} = A_1$. D'autre part, par hypothèse, on a un système filtrant $\{A_1^{(i)}\}_i$ de A-algèbres de type fini tel que les morphismes de transition de ce système soient étales de type fini, et que $\varinjlim_{i} A_1^{(i)} = A_1$.

On en conclut que pour un i fixe, on a une factorisation $A_1^{(i)} \to A_1^{(\alpha)} \to A_1^{(j)} \to A_1$ pour α, j assez grand.

Soit pour chaque α (resp. i) A^α (resp. A_1^α, A_1^i) le localisé de $A^{(\alpha)}$ (resp. $A_1^{(\alpha)}, A_1^{(i)}$) à l'idéal premier image inverse de l'idéal maximal de A (resp. A_1). On a alors les anneaux locaux A^α, A_1^α, A_1^i essentiellement de type fini sur A ; pour chaque α, A_1^α est essentiellement fini sur A^α. Et pour un i fixe, on a une factorisation $A_1^i \to A_1^\alpha \to A_1^j$ pour α, j assez grand ; on a également le fait que $A_1 = \varinjlim_{\alpha} A_1^\alpha = \varinjlim_{i} A_1^i$ et que A_1 est le hensélisé de A_1^i pour tout i.

Il en résulte que, dans la factorisation ci-dessus, $A_1^\alpha \to A_1^j$ est essentiellement quasi-fini. Fixons alors un tel α ; en passant aux hensélisés de A_1^α, A_1^i et A^α on obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A}_1^\alpha & \to & A_1 \\ \uparrow & & \uparrow \varphi \\ \tilde{A}^\alpha & \to & A \end{array}$$

où $\tilde{A}_1^\alpha \to A_1$, $\tilde{A}^\alpha \to \tilde{A}_1^\alpha$ sont des morphismes <u>finis</u>. Donc $\tilde{A}^\alpha \to A_1$ est fini ; puisque $A \xrightarrow{\varphi} A_1$ est injectif, on conclut que $\tilde{A}^\alpha \to A$ est <u>fini</u>. D'où on termine à l'aide du cas direct de la proposition. C.Q.F.D.

3.2. <u>Une "descente" entière d'espaces algébriques</u>

3.2.0. Dans ce qui suit, nous adoptons la convention suivante : Soient S un schéma et P une propriété de S-schémas (resp. de morphismes de S-schémas) qui est "de nature locale pour la topologie étale" ; alors on peut parler d'un S-espace algébrique (resp. d'un morphisme de S-espaces algébriques) qui possède la propriété P. Citons entre autres, la propriété d'être réduit, normal,... (resp. d'être

un morphisme affine, entier, fini,...). On peut aussi parler d'un faisceau quasi-cohérent en modules (resp. algèbres) sur un S-espace algébrique ; en particulier, à toute Algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A}$ sur un S-espace algébrique X, on peut associer un S-espace algébrique, affine sur X, noté $\operatorname{Spec} \mathcal{A}$.

Pour les définitions précises de ces notions et pour les fondations de la théorie des Espaces Algébriques, nous renvoyons le lecteur à [13]. Signalons toutefois que, pour un morphisme d'un S-<u>schéma</u> $\tilde{X}$ dans un S-espace algébrique X, les justifications nécessaires résultent directement de 3.1.2.1.

Le but principal de cette section est d'établir le résultat technique suivant.

3.2.1. <u>Théorème</u> : Soient S un schéma localement noethérien, X un S-espace algébrique (loc. PF) et <u>séparé</u> (cf. 1.3.0) et $\tilde{X}$ un S-schéma. Supposons que l'on a S-morphisme $\pi : \tilde{X} \to X$ <u>entier et surjectif</u> dont chaque fibre est contenue dans un ouvert affine de $\tilde{X}$. Alors X est un S-<u>schéma</u>.

Remarquons tout de suite que l'on peut supposer S <u>affine</u> et $\tilde{X}$ <u>réduit</u> ; ensuite on peut également supposer X <u>noethérien</u> et <u>réduit</u> (cf. [7], III, n°2, § 7).

3.2.2. <u>Une réduction préliminaire</u>

Avec les notations de 1.3.0., on représente X comme le conoyau $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{p} X$. D'après le théorème 6 de l'appendice I, la question de la représentabilité de X se ramène à montrer que l'espace annelé quotient de Y par Z est un S-schéma ; et d'après le théorème 5 de l'appendice I, ce dernier problème "se teste" sur les anneaux locaux de Y et les relations induites. Notre méthode de démonstration suivra cette ligne, surtout dans le cas où X est non normal. Dans ce numéro donc notre but sera d'obtenir quelques renseignements "utiles" sur la relation d'équivalence induite par $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$ sur les anneaux locaux de Y.

Notons d'abord que la suite $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{p} X$ donne, par le changement de base $\pi : \tilde{X} \to X$, une situation du type suivant :

$$(*)_1 \qquad \begin{tikzcd} \tilde{Z} \arrow[r, shift left, "\tilde{p}_1"] \arrow[r, shift right, "\tilde{p}_2"'] \arrow[d, "\pi_Z"] & \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\pi_Y"] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & Y \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

où tous les carrés sont cartésiens, et $\tilde{Y} = Y \times_X \tilde{X}$, $\tilde{Z} = Z \times_X \tilde{X}$ sont des S-schémas (cf. 3.1.2.1) ; les morphismes π_Y , π_Z sont donc des morphismes entiers et surjectifs de S-schémas.

Soit y un point quelconque de Y . Nous allons déduire une situation, analogue à $(*)_1$, où Y sera remplacé par un schéma semi-local (sous-objet de Y , et) contenant le point y , et les relations seront remplacées par les relations induites.

Pour réaliser cette réduction nous ferons, dans 3.2.1., l'hypothèse supplémentaire suivante :

(F) : Les fibres de π n'ont qu'un nombre fini de points.

Rappelons que l'on a pu supposer X noethérien. Suivant le procédé de 1.3.1 a), on peut donc supposer Y affine au sens absolu. Puisque S est supposé affine et X séparé, Z est aussi affine et par suite $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ sont affines. D'autre part, $\tilde{X} \times_X \tilde{X}$ est lui-aussi un schéma (cf. 3.1.2.4) tel que les projections canoniques $\tilde{X} \times_X \tilde{X} \underset{pr_2}{\overset{pr_1}{\rightrightarrows}} \tilde{X}$ soient des morphismes entiers et surjectifs.

On trouve alors le diagramme suivant à trois étages :

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z} \times_Z \tilde{Z} \arrow[r, shift left, "\tilde{\tilde{p}}_1"] \arrow[r, shift right, "\tilde{\tilde{p}}_2"'] \arrow[d, shift right, "pr_1"'] \arrow[d, shift left, "pr_2"] & \tilde{Y} \times_Y \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{\tilde{p}}"] \arrow[d, shift right, "pr_1"'] \arrow[d, shift left, "pr_2"] & \tilde{X} \times_X \tilde{X} \arrow[d, shift right, "pr_1"'] \arrow[d, shift left, "pr_2"] \\ \tilde{Z} \arrow[r, shift left, "\tilde{p}_1"] \arrow[r, shift right, "\tilde{p}_2"'] \arrow[d, "\pi_Z"] & \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\pi_Y"] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & Y \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

où tous les carrés sont cartésiens, tous les faisceaux sauf X sont des schémas, les suites horizontales (strictes) exactes et les morphismes verticaux entiers et surjectifs.

Soit x l'image (ensembliste) dans X du point $y \in Y$ choisi plus haut. La fibre $\pi^{-1}(x)$ est un ensemble fini dans $\tilde{X}$ (d'après (F)), contenu dans un ouvert affine de $\tilde{X}$ par hypothèse. Il existe donc un schéma semi-local $\tilde{E}$ et un monomorphisme plat quasi-compact $\tilde{e} : \tilde{E} \hookrightarrow \tilde{X}$ dont l'image est l'ensemble des générisations des points de $\pi^{-1}(x)$. Or, l'ensemble $\tilde{p}^{-1}(\pi^{-1}(x))$ est une partie finie du schéma affine $\tilde{Y}$, donc on trouve un schéma affine semi-local $\tilde{F}$ et un monomorphisme plat quasi-compact $\tilde{f} : \tilde{F} \hookrightarrow \tilde{Y}$ dont l'image est l'ensemble des générisations des points de $\tilde{p}^{-1}(\pi^{-1}(x))$. Puisque le morphisme $\tilde{p}$ est fppf on trouve un morphisme fpqc $\tilde{F} \xrightarrow{\tilde{\theta}} \tilde{E}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{p}"] & \tilde{X} \\ \tilde{F} \arrow[u, "\tilde{f}"] \arrow[r, "\tilde{\theta}"] & \tilde{E} \arrow[u, "\tilde{e}"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Comme $\tilde{Z} \rightrightarrows \tilde{Y} \times_{\tilde{X}} \tilde{Y}$, la relation induite par $\tilde{Z} \rightrightarrows \tilde{Y}$ sur $\tilde{F}$ (pour le morphisme $\tilde{f}$) n'est rien d'autre que la relation d'équivalence

$$\tilde{G} = \tilde{F} \times_{\tilde{E}} \tilde{F} \underset{pr_2}{\overset{pr_1}{\rightrightarrows}} \tilde{F} .$$

Donc la suite $\tilde{G} \rightrightarrows \tilde{F} \xrightarrow{\tilde{\theta}} \tilde{E}$ est exacte ; $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ sont des schémas affines semi-locaux, et $\tilde{G}$ est affine.

Considérons dans $\tilde{Y} \times_Y \tilde{Y}$ les deux sous-objets $pr_1^{-1}(\tilde{F})$ et $pr_2^{-1}(\tilde{F})$; je dis qu'ils coïncident. En effet, pr_i, $i = 1,2$, est entier, donc fermé, et on en déduit que l'image du monomorphisme plat quasi-compact $pr_i^{-1}(\tilde{f}) : pr_i^{-1}(\tilde{F}) \to \tilde{Y} \times_Y \tilde{Y}$ est l'ensemble des générisations des points de $pr_i^{-1}(\tilde{p}^{-1}(\pi^{-1}(x)))$. Il suffit alors de remarquer que :

i) $pr_1^{-1}(\tilde{p}^{-1}(\pi^{-1}(x))) = pr_2^{-1}(\tilde{p}^{-1}(\pi^{-1}(x)))$

ii) un monomorphisme plat quasi-compact dans un schéma est entièrement

déterminé par son image dans ce schéma (cf. [21], 1.3).

Il s'ensuit qu'il existe un schéma affine semi-local F et un monomorphisme plat quasi-compact $f : F \hookrightarrow Y$ tel que $(\tilde{F},\tilde{f}) = \pi_Y^{-1}(F,f)$ (loc. cit., 3.4). Et l'image de f est l'ensemble des générisations des points de $p^{-1}(x) = p_1 p_2^{-1}(y)$.

Soit $G \rightrightarrows F$ la relation induite par $Z \rightrightarrows Y$ sur F (pour le morphisme f). On a alors un diagramme

$$(*)_2 \qquad \begin{array}{ccccc} \tilde{G} & \rightrightarrows & \tilde{F} & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & \tilde{E} \\ \downarrow & & \downarrow \pi_F & & \\ G & \rightrightarrows & F & & \end{array}$$

où la suite supérieure est exacte. Il est formel de voir que les deux carrés à gauche sont cartésiens, de sorte que π_F , π_G sont des morphismes entiers et surjectifs. D'où on déduit que G est <u>affine</u>.

Rappelons que F est un sous-objet plat semi-local de Y "contenant" y et que y est un point quelconque de Y . Nous nous servirons de cette "réduction locale" dans le cas où π est <u>fini</u>, et où donc l'hypothèse supplémentaire (F) sur les fibres de π sera vérifiée.

3.2.3. <u>Le cas affine de</u> 3.2.1

3.2.3.1. <u>Proposition</u> : Avec les hypothèses de 3.2.1., supposons de plus que $\tilde{X}$ est un schéma <u>affine</u> au sens absolu. Alors X est un schéma affine.

Grâce à [21] 3.1., il s'agit simplement de montrer que X est un schéma. On peut donc supposer S affine, $\tilde{X}$ réduit, et ensuite X noethérien, réduit. Par un raisonnement du passage à la limite (EGA, IV, 8) on se ramène ensuite à <u>supposer que</u> S (resp. Y) <u>est de type fini sur</u> Spec $\mathbf{Z}$, en utilisant le

3.2.3.2. <u>Lemme</u> : On peut supposer dans 3.2.3.1 que $\pi : \tilde{X} \to X$ est <u>fini</u>, surjectif.

En effet, le faisceau X commute aux limites inductives filtrantes d'anneau sur S (cf. [18], VI, 1.2.1). Comme $\tilde{A} = A(\tilde{X})$ est limite inductive filtrante de ses sous-anneaux A_i de type fini sur S , $\pi \in X(\tilde{A})$ provient d'un $\pi_i \in X(A_i)$,

pour i assez grand. On peut donc remplacer $\tilde{X}$ par Spec A_i et π par π_i, pour un i assez grand. C.Q.F.D.

Considérons alors le diagramme suivant (comme dans 3.2.2) :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Z} \arrow[r, shift left, "\tilde{p}_1"] \arrow[r, shift right, "\tilde{p}_2"'] \arrow[d, "\pi_Z"'] & \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\pi_Y"] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\
Z \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & Y \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}$$

où $Z, Y, \tilde{Y}, \tilde{X}, \tilde{Z}$ sont des schémas sur S, <u>affines</u> au sens absolu, et π_Y, π_Z sont des morphismes finis et surjectifs. En posant donc $Y = \text{Spec } B$, $\tilde{Y} = \text{Spec } \tilde{B}$, $Z = \text{Spec } C$, $\tilde{Z} = \text{Spec } \tilde{C}$ et $\tilde{X} = \text{Spec } \tilde{A}$, on trouve le diagramme

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
\tilde{A} \arrow[r, "\tilde{\delta}"] & \tilde{B} \arrow[r, shift left, "\tilde{\delta}_1"] \arrow[r, shift right, "\tilde{\delta}_2"'] & \tilde{C} \\
A \arrow[r] \arrow[u, dashed] & B \arrow[r, shift left, "\delta_1"] \arrow[r, shift right, "\delta_2"'] \arrow[u, "i_B"] & C \arrow[u, "i_C"']
\end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \delta_i = {}^a p_i \,,\ \tilde{\delta}_i = {}^a\tilde{p}_i \,,\ i = 1,2 \,, \\ \tilde{\delta} = {}^a\tilde{p}, \ldots, \end{array}$$

où A est défini comme le sous-anneau d'égalité de $B \underset{\delta_2}{\overset{\delta_1}{\rightrightarrows}} C$, la suite supérieure est stricte exacte et les deux carrés à droite sont co-cartésiens. D'après les théorèmes 5, 6 de l'appendice I, pour prouver la représentabilité de X, il suffit de prouver que $\tilde{A}$ est entier sur A.

<u>Point a)</u>. <u>Le normalisé de</u> X <u>est un schéma</u> (affine).

Soient Y_{nor}, Z_{nor} les normalisés de Y, Z ; alors la donnée $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$ définit une relation d'équivalence étale, de présentation finie $Z_{nor} \rightrightarrows Y_{nor}$ et le normalisé X_{nor} de X est le faisceau fppf quotient de cette dernière relation. Par ailleurs, Y, Z étant de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$, Y_{nor}, Z_{nor} le sont également ; donc X_{nor} est un S-espace algébrique (loc. PF) et séparé, fini sur X. Quitte à remplacer $X, Y, Z, \tilde{X}$ plus haut par leurs normalisés, on peut les supposer normaux.

On doit montrer que $X = X_{nor}$ est un schéma ; on peut donc remplacer Y par une composante irréductible ($Z \rightrightarrows Y$ par la relation induite) et X par l'ouvert correspondant ; Y est alors intègre. Dans le diagramme $(*)$ plus haut, $\tilde{B}$ est donc un B-module sans torsion. Par suite, pour un $\tilde{a} \in \tilde{A}$ quelconque, on peut définir le polynôme caractéristique $P(i_B, \tilde{\delta}(\tilde{a}))$ de $\tilde{\delta}(\tilde{a}) \in \tilde{B}$ sur B.

Puisque les deux carrés à droite (dans $(*)$) sont cocartésiens et que $\tilde{\delta}_2\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_1\tilde{\delta}$, on a l'égalité

$$\delta_1 P(i_B, \tilde{\delta}(\tilde{a})) = P(i_C, \tilde{\delta}_1\tilde{\delta}(\tilde{a})) = P(i_C, \tilde{\delta}_2\tilde{\delta}(\tilde{a})) = \delta_2 P(i_B, \tilde{\delta}(\tilde{a})) \ ;$$

ce qui veut dire que les coefficients de $P(i_B, \tilde{\delta}(\tilde{a}))$ sont des éléments de A. Par Caylay-Hamilton on a alors $P(i_B, \tilde{\delta}(\tilde{a}))(\tilde{\delta}(\tilde{a})) = 0$; comme $\tilde{\delta}$ est injectif, cela montre que $\tilde{a}$ est entier sur A.

<u>Point b)</u>. X <u>est un schéma</u>.

Grâce au point a) et au lemme 3.2.3.2 on peut supposer que le morphisme $\pi : \tilde{X} \to X$ est <u>birationnel</u>, <u>fini</u>. L'hypothèse supplémentaire (F) de 3.2.2 est donc vérifiée ; en faisant recours à la "réduction locale" de 3.2.2., on peut supposer que le diagramme $(*)$ plus haut est le diagramme d'anneaux correspondant à la situation (semi)-locale $(*)_2$ de 3.2.2.

Pour montrer que le plus grand ouvert de Y, au-dessous duquel X est un schéma, contient les points de $F = \operatorname{Spec} B$, il suffit toujours de montrer que $\tilde{A}$ est entier sur A (Appendice I, théorèmes 5, 6).

Puisque $\tilde{B}$ est fini, birationnel sur B, le conducteur I de $\tilde{B}$ dans B est $\neq (0)$; c'est un idéal de B (resp. $\tilde{B}$) stable par la relation d'équivalence $B \rightrightarrows C$ (resp. $\tilde{B} \rightrightarrows \tilde{C}$) de sorte que la réduction mod I nous fournit un second diagramme

$$(\bar{*}) \qquad \begin{tikzcd} \bar{\tilde{A}} \arrow[r] & \bar{\tilde{B}} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bar{\tilde{C}} \\ \bar{A} \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed] & \bar{B} \arrow[u] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bar{C} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où $\bar{A}$ est défini comme le sous-anneau d'égalité de $\bar{B} \rightrightarrows \bar{C}$, la suite supérieure est stricte exacte, et les deux carrés à droite sont co-cartésiens.

Pour montrer que $\tilde{A}$ est entier sur A , nous raisonnons par récurrence sur $\dim B$ ("relativement à l'existence d'un tel diagramme"). Si $\dim B = 0$, il n'y a rien à démontrer, car $\tilde{Y} \to Y$ est birationnel fini.

Soit $\tilde{\alpha} \in \tilde{A}$ un élément quelconque. Par l'hypothèse de récurrence, son image $\bar{\tilde{\alpha}}$ dans $\bar{\tilde{A}}$ est entière sur $\bar{A}$; soit alors $\bar{\tilde{\alpha}}^n + \sum_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \bar{a}_i \bar{\tilde{\alpha}}^i = 0$ une équation de dépendence intégrale, à coefficients $\bar{a}_i$ dans $\bar{A}$. Pour chaque i , $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on choisit un relèvement a_i dans $\tilde{A}$ de l'image de $\bar{a}_i$ dans $\bar{\tilde{A}}$. On a alors le

3.2.3.3. <u>Lemme</u> : Pour tout i , $0 \leqslant i \leqslant n-1$, l'élément a_i de $\tilde{A}$, considéré comme élément de $\tilde{B}$, est dans l'image de $B \xrightarrow{i_B} \tilde{B}$.

En effet, on peut trouver un élément $b'_i \in B$ tel que son image $\bar{b}'_i$ dans $\bar{B}$ s'envoie sur l'image de a_i dans $\bar{\tilde{B}}$. Ce qui signifie que, dans $\tilde{B}$, $(a_i - b'_i)$ est un élément de $I.\tilde{B} \hookrightarrow B$; i.e., $(a_i - b'_i)$ est dans l'image de $B \xrightarrow{i_B} \tilde{B}$, et il en est donc de même de a_i.

Rappelons que l'on a pu supposer X <u>réduit</u>, donc aussi Y , Z . D'où il résulte que $i_C : C \to \tilde{C}$ est injectif. Les a_i , $0 \leqslant i \leqslant n-1$, proviennent donc de A. Considérons alors l'élément $\tilde{a} = \tilde{\alpha}^n + \sum_{0 \leqslant i \leqslant n-1} a_i \tilde{\alpha}^i$ de $\tilde{A}$; pour voir que $\tilde{\alpha}$ est entier sur A , il suffit de montrer que $\tilde{a}$ est un élément de A . Mais puisque son image dans $\bar{\tilde{A}}$ est zéro, on a $\tilde{a} \in I.\tilde{B} \hookrightarrow B$; donc $\tilde{a} \in \tilde{A} \cap B = A$. C.Q.F.D.

3.2.4. <u>Le cas général de</u> 3.2.1

a) <u>Réduction au cas</u> π <u>fini</u>

Considérons le morphisme affine $\pi : \tilde{X} \to X$. Puisque X est noethérien, on sait que, d'après [13], p. 155, $(\tilde{X}, \pi)$ est limite projective filtrante d'un système $(X_i, \pi_i)_{i \in I}$ de S-espaces algébriques <u>de type fini et affines</u> sur X .

Or, soient x un point quelconque de X et $\tilde{V}$ un ouvert affine de $\tilde{X}$ contenant la fibre $\pi^{-1}(x)$. Alors, il existe un ouvert quasi-compact V_i d'un X_i tel que $\tilde{V} \simeq V_i \times_{X_i} \tilde{X}$: en effet, considérons les espaces topologiques sous-jacents

$\mathrm{Top}(X_i)$ des S-faisceaux X_i (*); alors on a aussi $\mathrm{Top}(\tilde{X}) = \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Top}(X_i)$ et l'assertion est donc claire.

Si φ_i est la projection canonique $\tilde{X} \to X_i$, $\varphi_i|\tilde{V} : \tilde{V} \to V_i$ est entier, surjectif. Puisque $\tilde{V}$ est un schéma affine, il résulte du cas affine 3.2.3 que V_i est un <u>schéma, affine au sens absolu</u>.

D'autre part, considérons les projections canoniques $\tilde{X} \times_X \tilde{X} \underset{pr_2}{\overset{pr_1}{\rightrightarrows}} \tilde{X}$; alors $(\tilde{V} - pr_1\, pr_2^{-1}(\tilde{X}-\tilde{V})) = \tilde{W}$ est un ouvert de $\tilde{V}$ tel que $pr_1^{-1}(\tilde{W}) = pr_2^{-1}(\tilde{W})$ et $\tilde{W}$ contient la fibre $\pi^{-1}(x)$. Il s'ensuit que $\tilde{W} = \pi^{-1}(U)$ pour un ouvert U de X contenant x. Si U_i est l'ouvert $\pi_i^{-1}(U)$ de X_i, alors U_i est un ouvert de V_i donc est un schéma ; d'autre part $U \hookrightarrow X$ est quasi-compact et il en est donc de même de $U_i \hookrightarrow V_i$; d'où U_i est un schéma quasi-affine. Quitte à remplacer X par U, $\tilde{X}$ par U_i et π par $\pi_i|U_i$, on peut alors supposer $\tilde{X}$ <u>quasi-affine</u> (au sens absolu) <u>et</u> π <u>fini</u>.

b) <u>Fin de la démonstration</u>

Puisque π est fini, la réduction faite dans 3.2.2 peut-être appliquée. Avec les notations de 3.2.2., pour un point y quelconque de Y, on trouve ainsi un diagramme d'anneaux du type $(*)$ de 3.2.3., tel que Spec B soit un sous-objet plat semi-local de Y contenant y. Avec les notations de ce même diagramme $(*)$, on prouve alors que $\tilde{A}$ est entier sur A, suivant le même argument que dans le cas 3.2.3. On termine (comme avant) par un appel auxthéorèmes 5, 6 de l'appendice I.

C.Q.F.D.

3.2.5. <u>Remarque</u> : Nous avons en fait démontré le résultat suivant : Soient S un schéma localement noethérien, X un S-espace algébrique (loc. PF) <u>séparé</u>, $\tilde{X}$ un S-espace algébrique quelconque, $\pi : \tilde{X} \to X$ un morphisme <u>entier</u> et x un point de X. Supposons que "$\tilde{X}$ est un schéma <u>affine</u> au voisinage de la fibre $\pi^{-1}(x)$". Alors X est un schéma au voisinage du point x.

(*) Cf. [13], p. 132.

3.3. Une première application : Existence du quotient en codim 1

Soient S un schéma localement noethérien, Z , Y des S-schémas localement de type fini, $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$ une S-relation d'équivalence plate et de type fini, et X le S-faisceau fppf quotient. Alors on a vu (cf. 3.1.1) que X est un S-espace algébrique (loc. PF) ; cela nous permet de parler de la codimension d'un point x dans X .

3.3.1. Proposition : Avec les notations ci-dessus, supposons de plus que X est séparé sur S (i.e., le morphisme canonique $d : Z \xrightarrow{(p_1,p_2)} Y \times_S Y$ est une immersion fermée). Alors le plus grand ouvert U de X qui est un schéma contient les points de codimension $\leqslant 1$ de X .

Démonstration : On peut supposer ci-dessus que $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$ est une relation d'équivalence étale, de type fini. Soient y un point de codimension 1 de Y et x son image dans X . Pour montrer que X est un schéma au voisinage de x , on peut supposer X (et donc Y , Z) réduit (cf. [7], III, N°2, §7), et noethérien. Soit $\tilde{Y}$ (resp. $\tilde{Z}$) le normalisé de Y (resp. Z). La donnée de la relation $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$ définit alors une relation d'équivalence étale et de présentation finie $\tilde{Z} \underset{\tilde{p}_2}{\overset{\tilde{p}_1}{\rightrightarrows}} \tilde{Y}$. Le normalisé $\tilde{X}$ de X est le S-faisceau fppf quotient de cette dernière relation. Si $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to X$ est la projection canonique, alors, d'après [13], p.155, $(\tilde{X},\tilde{\pi})$ est limite projective d'un système filtrant $(X_i,\pi_i)_{i\in I}$ de S-espaces algébriques finis sur X .

Nous allons montrer qu'il existe $i_o \in I$ assez grand tel que X_{i_o} soit "un schéma affine au voisinage de la fibre $\pi_{i_o}^{-1}(x)$ ". Grâce à 3.2.5., cela prouvera 3.3.1.

Considérons l'anneau local $A = \mathcal{O}_{Y,y}$. La relation induite par $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y$ sur Spec A est alors de la forme Spec $B \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}}$ Spec A et c'est une relation d'équivalence étale. L'anneau B est alors semi-local, noethérien, réduit, de dimension 1. Soit $\tilde{A}$ (resp. $\tilde{B}$) le normalisé de A (resp. B) ; on a alors la relation d'équi-

valence étale "déduite" $\operatorname{Spec} \tilde{B} \underset{\tilde{p}_2}{\overset{\tilde{p}_1}{\rightrightarrows}} \operatorname{Spec} \tilde{A}$.

<u>Point 1)</u>. Cette dernière relation admet un conoyau dans (Sch/S).

Remarquons que $\operatorname{Spec} \tilde{A}$ est un semi-trait. Pour prouver ce point, on peut donc supposer que $\operatorname{Spec} \tilde{A}$ est un trait (lemme 1, appendice I). L'anneau $\tilde{A}$ est alors un anneau de valuation discrète. Si K est son corps des fractions, la relation induite sur $\operatorname{Spec} K$ est finie étale, donc admet un conoyau de la forme $\operatorname{Spec} L$, où L est un sous-corps de K tel que K soit une extension finie séparable de L . Soit A_1 l'anneau de valuation discrète $A \cap L$. On a que $\operatorname{Spec} \tilde{B}$ est un fermé de $(\operatorname{Spec} \tilde{A} \times_S \operatorname{Spec} \tilde{A})$ qui coïncide avec $(\operatorname{Spec} \tilde{A} \times_{\operatorname{Spec} A_1} \operatorname{Spec} \tilde{A})$ sur l'ouvert $(\operatorname{Spec} K \times_S \operatorname{Spec} K)$. D'où on conclut que $\operatorname{Spec} \tilde{B}$ est égal à $(\operatorname{Spec} \tilde{A} \times_{\operatorname{Spec} A_1} \operatorname{Spec} \tilde{A})$. D'autre part, $\operatorname{Spec} A$ est plat sur $\operatorname{Spec} A_1$; il en résulte que $\operatorname{Spec} A_1$ est le conoyau (faisceautique) de $\operatorname{Spec} \tilde{B} \underset{\tilde{p}_2}{\overset{\tilde{p}_1}{\rightrightarrows}} \operatorname{Spec} \tilde{A}$.

<u>Point 2)</u>. Le conoyau de $\operatorname{Spec} \tilde{B} \underset{\tilde{p}_2}{\overset{\tilde{p}_1}{\rightrightarrows}} \operatorname{Spec} \tilde{A}$ est un schéma <u>affine</u> $\tilde{E}$.

Cela résulte du fait que ce conoyau est un schéma noethérien (normal), séparé, de dimension 1 à ensemble sous-jacent fini, et du lemme suivant.

3.3.1.1. <u>Lemme</u> (cf. [18], VIII.1) : Soit T un schéma localement noethérien, <u>séparé</u>. Alors chaque ensemble fini de points de codimension $\leqslant 1$ dans T est contenu dans un ouvert <u>affine</u> de T .

<u>Point 3)</u>. Si le normalisé $\tilde{X}$ de X est un S-espace algébrique (<u>loc. PF</u>) (par exemple, si S est de type fini sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$), alors les faits précédents montrent que $\tilde{X}$ est un schéma (affine) au voisinage de la fibre $\pi^{-1}(x)$ (cf. théorèmes 5, 6 de l'appendice I). Dans ce cas, grâce à 3.2.5., la démonstration de 3.3.1 s'achèvera ici.

<u>Point 4)</u>. Dans le cas où $\tilde{X}$ n'est pas de type fini sur X , nous procédons comme suit.

Notons A_o , B_o , $\tilde{A}_o$, $\tilde{B}_o$ les réductions de A , B , $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ modulo l'idéal maximal m de $A = {}_{Y,y}$. Donc on a la relation étale finie "déduite"

$\operatorname{Spec} \tilde{B}_o \rightrightarrows \operatorname{Spec} \tilde{A}_o$ sur le schéma artinien $\operatorname{Spec} \tilde{A}_o$; son conoyau est un schéma artinien $\tilde{E}_o$, dont les corps résiduels sont des extensions de type fini sur $k(s)$, où s est la projection de y dans S (Krull-Akizuki). Puisque $\tilde{E}$ est affine (Point 2)), on peut relever des générateurs de ces $k(s)$-extensions en un nombre fini d'éléments de $\Gamma(\tilde{E})$; soient a_α , $\alpha = 1,\dots r$, les images de ces relèvements dans $\tilde{A}$.

Remarquons que l'on peut supposer $Y, Z, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ affines ; quitte à restreindre Y et à modifier les $\{a_\alpha\}$ par des éléments de $\Gamma(Y)$, on peut supposer que ces a_α proviennent de $\Gamma(\tilde{Y})$ et en fait de $\ker(\Gamma(\tilde{Y}) \rightrightarrows \Gamma(\tilde{Z}))$. Ecrivant $(\tilde{X},\pi) = \varprojlim_{i\in I} (X_i,\pi_i)$, posons par suite $Y_i = Y \times_X X_i$, $Z_i = Z \times_X X_i$, $i \in I$. Alors Y_i (resp. Z_i) est un schéma fini sur Y (resp. Z) (cf. [13], p. 138) ; et on a $\varinjlim_{i\in I} \Gamma(Y_i) = \Gamma(\tilde{Y})$; $\varinjlim_{i\in I} \Gamma(Z_i) = \Gamma(\tilde{Z})$. Il existe donc $i_o \in I$ assez grand tel que les a_α proviennent de $\Gamma(Y_{i_o})$ et en fait de $\ker(\Gamma(Y_{i_o}) \rightrightarrows \Gamma(Z_{i_o})) = C_{i_o}$. Il est alors immédiat que le morphisme canonique $Y_{i_o} \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} C_{i_o}$ est compatible avec $Z_{i_o} \rightrightarrows Y_{i_o}$, et que $\deg.\operatorname{tr}_{k(\varphi(y'))} k(y') = 0$, pour tout $y' \in (\pi_{i_o})_Y^{-1}(y)$.

D'après les théorèmes 5, 6 de l'appendice I, X_{i_o} est un schéma au voisinage de la fibre $\pi_{i_o}^{-1}(x)$. On termine par 3.3.1.1 et 3.2.5. C.Q.F.D.

3.3.2. <u>Remarque</u> : La proposition 3.3.1 est <u>fausse</u> si l'on ne fait pas l'hypothèse de séparation sur X , ou si l'on considère les points de codimension $\geqslant 2$ de X . En effet on a un contre-exemple d'un espace algébrique G en groupes (loc. PF) (resp. (loc. PF) et séparé) et <u>lisse</u> sur un trait (resp. sur un anneau local régulier de dimension 2) tel que le plus grand ouvert représentable de G ne rencontre pas la fibre de G au-dessus du point fermé de la base, cf. SGAD, VI_B, page 81 (resp. [18], X.14).

3.4. Application aux espaces homogènes

3.4.1. Proposition : Soient S un schéma de Dedekind et G un S-espace algébrique en groupes, (loc. PF), séparé, et plat sur S. Alors il existe un schéma S_1 fpqc sur S tel que G_{S_1} soit un schéma. Plus précisément, si K est le corps des fractions de S et $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, le normalisé S_1 de S dans $\bar{K}$ est tel que G_{S_1} soit un schéma.

Démonstration : On peut supposer que S est un trait (S,η,s). Représentons G comme le conoyau $Z \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{p} G$, comme dans 1.3.0 ; le schéma Y est donc plat et localement de type fini sur S. Si y est un point fermé de Y_s, alors on voit comme dans EGA, IV, 17.16.1 qu'il existe une S-quasi-section plate de Y passant par y. Cette quasi-section devient nécessairement localement triviale sur S_1.

Par ailleurs, d'après 3.3.1., le plus grand ouvert U de G qui est un S-schéma contient (G_η et) les points maximaux de G_s (i.e., images des points maximaux de Y_s). Il est alors clair que les translatés de cet ouvert U par les dites quasi-sections recouvrent G_{S_1}. C.Q.F.D.

3.4.2. Proposition : Soient S un schéma de Dedekind, G un S-schéma en groupes plat et localement de type fini, H un sous-schéma fermé en groupes de G, plat sur S, et G/H le S-faisceau fppf quotient. Alors il existe un schéma S_1 fpqc sur S tel que $(G/H)_{S_1}$ soit un S_1-schéma.

Démonstration : Considérons la relation d'équivalence canonique $G \times_S H \rightrightarrows G$. Puisque le faisceau fppf quotient se construit en se restreignant à des ouverts affines, on se ramène au cas d'une relation d'équivalence plate et de type fini ; et 3.1.1 montre alors que G/H est un S-espace algébrique, (loc. PF) séparé et plat sur S. Sachant que G/H est homogène sous G, on termine comme dans 3.4.1. C.Q.F.D.

Chapitre IV

Applications aux questions de représentabilité

4.0. Les résultats principaux que nous avons en vue sont les suivants.

4.A. Théorème : Soient S un schéma localement noethérien de dimension $\leqslant 1$, G un S-faisceau fppf en groupes, et S' un schéma fpqc sur S tel que $G_{S'}$ soit représentable, séparé et localement de présentation finie sur S'. Alors G est représentable (séparé, localement de type fini) et de type (FA) sur S (i.e., chaque ensemble fini de points de G qui se projette dans un ouvert affine de S, est contenu dans un ouvert affine de G ; cf. 1.1.2 (c)).

4.B. Théorème : Soient S un schéma localement noethérien de dimension $\leqslant 1$, et G un S-espace algébrique (loc. PF) et séparé en groupes (cf. 1.3.0). Alors G est un schéma.

4.C. Théorème : Soient S un schéma localement noethérien de dimension $\leqslant 1$, G un S-schéma en groupes localement de type fini, H un sous-schéma fermé en groupes, plat sur S. Alors le S-faisceau fppf quotient G/H est un schéma de type (FA) sur S.

Avant d'énoncer un résultat concernant les espaces homogènes (au sens de [18], VI.1.1), donnons une définition.

4.0.1. Définition : Soient S un schéma, G (resp. X) un S-faisceau fppf en groupes (resp. un S-faisceau fppf) localement de présentation finie sur S. On suppose que G opère sur X. Nous dirons que X est un S-faisceau homogène (fppf) sous G si le morphisme (de faisceaux)

$$\begin{aligned} G \times_S X &\to X \times_S X \\ (g,x) &\mapsto (gx,x) \end{aligned}$$

est couvrant (fppf). Le faisceau X est dit presque homogène (fppf) sous G si X est la réunion d'un nombre fini d'ouverts homogènes (fppf) sous G. On dira que X est un S-espace (ou schéma) homogène (resp. presque homogène) sous G, si de

plus X est représentable.

4.D. Théorème : Soient S un schéma localement noethérien de dimension $\leqslant 1$, G un S-schéma en groupes de type fini, X un S-faisceau (fppf) qui est un S-faisceau presque homogène sous G, et S' un schéma fpqc sur S tel que $X_{S'}$ soit représentable, séparé, de présentation finie sur S' et couvre S'. Alors X est un schéma de type (FA) sur S.

4.1. Quelques remarques préliminaires

Nous allons nous ramener d'abord au cas S semi-local, dans les énoncés 4.A - 4.D. En effet, il est clair que, si la représentabilité est déjà établie, l'assertion "du type (FA) sur S" se démontre en se ramenant au cas S semi-local. D'autre part, pour établir la représentabilité on peut supposer S local : car, dans 4.A et 4.D il est question de descente fpqc, et c'est là un résultat standard ([17], appendix, lemma 2) ; pour 4.C on a vu que, dans les conditions de l'énoncé, G/H est un S-espace algébrique (loc. PF), cf. 3.1.1 ; donc dans les deux cas 4.B et 4.C, il est question de représenter un S-espace algébrique (loc. PF) ; par passage à la limite on peut donc supposer S local.

On peut supposer désormais donc que S est semi-local noethérien de dimension $\leqslant 1$. Rappelons d'abord quelques résultats connus que nous utiliserons dans ce qui suit.

4.1.1. Proposition : Soient S un schéma, $S' \to S$ un morphisme fpqc, X un S-faisceau fpqc tel que $X_{S'}$ soit représentable et localement de présentation finie sur S'. On suppose qu'il existe un morphisme entier et surjectif $T \to S$ tel que X_T soit un schéma. Alors, X est représentable sur S si et seulement si chaque fibre de la projection canonique $X_T \to X$ est contenue dans un ouvert affine de X_T.

Voir [21], théorème 4.1.

4.1.2. Proposition : Soient S le spectre d'un corps k, G un S-schéma en groupes localement de type fini et H un sous-schéma (fermé) en groupes de G. Alors le S-faisceau fppf quotient G/H est un schéma de type (FA).

Voir, par exemple, la démonstration de SGAD, VI_A, 3.2 .

4.1.3. <u>Proposition</u> : Soient T un schéma localement noethérien, $u : T' \to T$ un morphisme de schémas entier et surjectif, dont les fibres sont ensemblistement finies, et E un ensemble fini de points de T . Alors pour que E soit contenu dans un ouvert affine de T il faut et il suffit que $u^{-1}(E) = E'$ le soit dans T'.

Voir [21], corollaire 3.8 .

Reprenons la situation de 4.A - 4.D et considérons d'abord le cas $\dim S = 0$, i.e., S semi-local artinien. On peut en fait supposer que S est le spectre d'un corps k (appliquer, par exemple, 4.1.1 à 4.A et 4.D, et [7], III, n°2, §7 à 4.B et 4.C) ; soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k . Les théorèmes 4.A, 4.B résultent alors du fait que $G_{\bar{k}}$ est un schéma de type (FA) (cf., e.g., [16] I.8.6., et [1] 3.5) ; 4.C n'est rien d'autre que 4.1.2 ; et pour prouver 4.D sur k , on note que, si G^o est la composante neutre de G , alors les composantes connexes (ou irréductibles) de $X_{\bar{k}}$ sont de la forme $G^o_{\bar{k}}/\bar{H}$ pour un sous-groupe (fermé) $\bar{H}$ de $G^o_{\bar{k}}$; et on termine, grâce à 4.1.2, suivant le raisonnement classique de [16] I.8.7.

On supposera désormais donc que S est semi-local, noethérien, de dimension 1. D'après ce que l'on vient de voir, dans 4.A - 4.D, les fibres ainsi que leurs voisinages infinitésimaux sont représentables (et de type (FA)).

4.2. <u>Le cas</u> S <u>normal</u>

<u>Etape 1</u>) <u>L'énoncé du lemme-clé</u>.

4.2.1. <u>Lemme</u> : Soient S un schéma de Dédekind, X un S-faisceau fppf et S' un schéma fpqc sur S tel que $X_{S'}$ soit représentable et de présentation finie sur S'. Alors il existe une extension finie K_1 du corps des fractions K de S telle que, si S_1 est le normalisé de S dans K_1 , X_{S_1} soit un schéma (de type fini sur S_1).

<u>Démonstration</u> : On peut supposer que S est un trait $\operatorname{Spec} A$ et que S' est affine d'anneau A'. L'anneau A' est limite inductive filtrante de ses

sous-Λ-algèbres $\{A_i\}_{i\in I}$ de type fini. Puisque $X_{S'}$ est de présentation finie sur S', on trouve, par passage à la limite (EGA, IV, 8), un indice $i_o \in I$ assez grand tel que $X_{S'}$ (resp. la donnée de descente sur $X_{S'}$) provienne d'un schéma X_{i_o} (de type fini) sur Spec A_{i_o} (resp. d'une donnée de descente sur X_{i_o}). D'autre part, l'anneau A' étant sans Λ-torsion, A_{i_o} l'est également, donc $S_{i_o} = \text{Spec } A_{i_o}$ est (fidèlement) plat sur S. On en conclut que $X_{i_o} \simeq X_{S_{i_o}}$, i.e., $X_{S_{i_o}}$ est un schéma (de type fini) sur S_{i_o}.

Soit T une quasi-section plate de $S_{i_o} = \text{Spec } A_{i_o}$ sur S (EGA, IV, 17.16.1). Notons K_1 la plus petite extension quasi-galoisienne de K engendrée par un corps des fractions de T_{red}. Alors ce K_1 répond à la question. En effet, si S_1 est le normalisé de S dans K_1, il existe des points de S_1 au-dessus des points de T_{red}, donc il existe un sous-trait ouvert Z de S_1 tel que X_Z soit un schéma. D'autre part, le groupe de galois $\mathcal{G}$ de K_1 sur K agit comme un groupe de S-automorphismes sur S_1 ; et si Z' est un sous-trait ouvert quelconque de S_1, il existe $\sigma \in \mathcal{G}$ tel que $Z' = (Z)^\sigma$ (notation évidente). Puisque $\mathcal{G}$ laisse invariant "tout ce qui provient de S", on en conclut que X_{S_1} est un schéma.

C.Q.F.D.

<u>Etape 2) Réduction au cas des faisceaux plats sur</u> S.

En utilisant la notion d'adhérence schématique de la fibre générique d'un S-faisceau X (cf. 1.2.0), la technique du recollement suivant un fermé (cf. 1.2.4 et 1.3.2) et la remarque 1.1.2 (c) sur la propriété (FA), on se ramène au cas G <u>plat sur</u> S, dans 4.A - 4.C. Pour se ramener au cas G, X <u>plats sur</u> S dans 4.D, il suffit de noter que(sur S normal), si $\bar{G}$ (resp. $\bar{X}$) est l'adhérence schématique de la fibre générique de G (resp. X), alors $\bar{X}$ est presque homogène sous $\bar{G}$.

<u>Etape 3)</u> 4.A $\Longrightarrow$ 4.B.

En effet, il suffit de rappeler qu'un espace algébrique en groupes (loc. PF), plat et séparé sur un schéma de Dédekind S, est représentable après un changement de base fpqc $S' \to S$, cf. 3.4.1.

Etape 4) Démonstration de 4.A - 4.D dans le cas "de présentation finie" (S normal).

Remarquons d'abord que dans 4.C, G étant (désormais) plat sur S, il existe un schéma S' fpqc sur S tel que $(G/H)_{S'}$ est un schéma, cf. 3.4.2. Il s'agit donc, dans les trois cas 4.A, 4.C, 4.D, d'établir une descente fpqc et de prouver la propriété (FA).

On peut supposer que S est un semi-trait. Avec l'hypothèse "de présentation finie", on trouve, d'après 4.2.1., un semi-trait S_1 entier (plat) et surjectif sur S tel que G_{S_1}, $(G/H)_{S_1}$, X_{S_1} soient des schémas de type fini sur S_1. Grâce au critère 4.1.1 de descente fpqc, et à la proposition 4.1.3 concernant la propriété (FA), tout revient à prouver le résultat suivant.

4.2.2. Proposition : Soient S un semi-trait, G un S-schéma en groupes plat et de type fini et X un S-espace (ou schéma) presque homogène sous G. Si X est séparé, alors X est de type (FA).

Démonstration : Traitons d'abord le cas où G (et donc X) est lisse sur S. Dans ce cas, X est S-presque homogène également sous la composante neutre G^o de G. D'autre part, considérons les points maximaux des fibres de X sur S ; en utilisant [18], VIII.1, ou 3.3.1.1., on trouve un ouvert affine U de X contenant ces points (rappeler que X est séparé) ; on a donc $G^o.U = X$. Le résultat suivant montre alors que X est quasi-projectif.

Proposition ([18], V.3.10) : Soient S un schéma localement noethérien normal, G un S-schéma en groupes lisse et à fibres connexes, qui opère sur un S-schéma lisse X. Soient U un ouvert de X quasi-affine sur S, X' l'ouvert $G.U$, et F_i, $i \in I$, les composantes irréductibles de $X'-U$ qui sont de codimension 1. Alors tout cycle $D = \sum_{i \in I} n_i F_i$, où tous les $n_i > 0$, définit un diviseur sur $X' = G.U$ tel que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{X'}(D)$ soit S-ample.

Dans le cas où G, X dans 4.2.2 ne sont pas lisses sur S, il suffit (d'après le cas lisse, et 4.1.3) de démontrer le résultat suivant.

4.2.3. Proposition : Soient S , G , X comme dans 4.2.2 (X non nécessairement séparé). Alors il existe une extension finie K_1 du corps des fractions K de S telle que, si S_1 est le normalisé de S dans K_1 , on ait les propriétés suivantes :

i) Le normalisé $\tilde{G}_1$ de $(G_{S_1})_{red}$ est un S_1-schéma en groupes lisse et de type fini.

ii) Le normalisé $\tilde{X}_1$ de $(X_{S_1})_{red}$ est un S_1-espace presque homogène sous la composante neutre $\tilde{G}_1^o$ de $\tilde{G}_1$; en particulier $\tilde{X}_1$ est lisse (et de type fini) sur S_1 .

Démonstration : Il existe une extension finie radicielle K' de K telle que, $(G_{K'})_{red}$ soit un K'-groupe lisse (SGAD, VI_A). Si S' est le normalisé de S dans K', alors $(G_{S'})_{red}$ est l'adhérence schématique de $(G_{K'})_{red}$ dans $G_{S'}$, donc est un S'-schéma en groupes plat, de type fini et à fibre générique lisse. De même $(X_{S'})_{red}$ est un S'-schéma plat, de type fini et à fibre générique lisse: Puisque $(G_{K'})_{red} \underset{K'}{\times} (X_{K'})_{red}$ est alors réduit et que $(G_{S'})_{red} \underset{S'}{\times} (X_{S'})_{red}$ est S'-plat, on voit que $(G_{S'})_{red}$ opère sur $(X_{S'})_{red}$. Quitte à remplacer S par S', G par $(G_{S'})_{red}$ et X par $(X_{S'})_{red}$, on peut supposer donc que l'on a une situation du type suivant sur S :

G (resp. X) est un S-schéma en groupes (resp. un S-schéma) plat, de type fini et à fibre générique lisse ; G opère sur X et chaque fibre X_s de X sur S est ensemblistement presque homogène sous G_s (ou, ce qui revient au même, sous la composante neutre G_s^o de G_s).

Appliquons dans ces conditions les corollaires 2, 3 de l'appendice II. Il existe donc une extension finie K_1 de K telle que, si S_1 est le normalisé de S dans K_1 , on ait des propriétés suivantes :

1) Le normalisé $\tilde{G}_1$ de G_{S_1} est un S_1-schéma en groupes lisse, de type fini et la projection canonique $\tilde{G}_1 \to G_{S_1}$ est un S_1-homomorphisme fini.

2) Le normalisé $\tilde{X}_1$ de X_{S_1} est un S_1-schéma plat, <u>séparable</u> et de type fini.

Puisque, dans ces conditions, $\tilde{G}_1 \times_{S_1} \tilde{X}_1$ est normal ([18], IV.2.4), on voit formellement que $\tilde{G}_1$ opère sur $\tilde{X}_1$ de façon compatible avec l'action de G_{S_1} sur X_{S_1}.

Par ailleurs, les fibres de $\tilde{X}_1$ sur S_1 sont équidimensionnelles. Soient k un corps résiduel de S_1 et $\bar{k}$ sa clôture algébrique ; il est clair que les orbites de $\tilde{G}^o_{1_{\bar{k}}}$ dans $\tilde{X}_{1_{\bar{k}}}$ sont les composantes connexes (ou irréductibles) de $\tilde{X}_{1_{\bar{k}}}$. Quitte à remplacer K_1 par une extension finie (et séparable) de K_1, on voit alors que l'on peut supposer l'assertion ii) de l'énoncé également vérifiée. C.Q.F.D.

<u>Etape 5</u>) <u>Réduction au cas "de présentation finie"</u> (S normal) .

Notons d'abord que (pour S normal) il ne reste plus qu'à établir 4.A et 4.C dans le cas où G est <u>plat</u> et <u>localement</u> de présentation finie sur un <u>semi-trait</u> S. Nous commençons par établir un lemme.

4.2.4. <u>Lemme</u> : Avec les hypothèses de 4.A supposons de plus que S est un <u>semi-trait</u> et que G est <u>plat</u> sur S. Soient $s_1,\dots,s_n$ les points fermés de S, et Z_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, une composante connexe de G_{s_i}. Alors, il existe un plus petit sous-foncteur ouvert $G_{(Z)}$, $(Z) = (Z_1,\dots,Z_n)$, de G possédant les propriétés suivantes :

i) $(G_{(Z)})_{s_i} = Z_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$

ii) la fibre générique $G_{(Z)_\eta}$ de $G_{(Z)}$ est réunion d'un nombre fini de composantes de G_η.

Et par suite :

iii) $(G_{(Z)})_{S'}$ est de présentation finie sur S'.

<u>Démonstration</u> : Soient S_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, les sous-traits ouverts de S correspondant aux points fermés s_i. Supposons que l'on a construit un ouvert $G_{(Z_i)}$ de $G_i = G|S_i$ possédant les propriétés correspondantes à i), ii), iii) (par rapport à S_i et Z_i) pour tout $i = 1,\dots,n$. On peut alors poser $G_{(Z)} = \bigcup_{i=1}^{n} G_{(Z_i)}$.

On suppose donc que $S = (S,\eta,s)$ est un trait et que Z est une composante connexe de G_s. On peut aussi supposer que S' est le spectre d'un anneau de valuation dominant S ; soit η' (resp. s') son point générique (resp. fermé). Notons z le point générique de Z et z'_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, les points maximaux de $Z_{s'}$. Et posons $G' = G_{S'}$, $S'' = S' - \{s'\}$.

Considérons le sous-foncteur ouvert U de G à ensemble sous-jacent $(G-(G_s-Z))$. Le sous-foncteur $G_{(Z)}$ de l'énoncé sera obtenu en éliminant de U les composantes de $U_\eta = G_\eta$ qui ne "générise" pas Z. Pour ce faire, remarquons d'abord que, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant r$, $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{G',z'_i}) \cap G'_{\eta'}$ est affine, donc ne contient qu'un nombre fini de points maximaux de $G'_{\eta'}$; soit donc Y l'ouvert quasi-compact de G_η, réunion des composantes de G_η dont l'image inverse dans $G'_{\eta'}$ rencontre un des $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{G',z'_i})$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Je dis que $U_{S''} - Y_{S'} = U_{S''} - Y_{S''}$ est fermé dans $U_{S'}$; pour le voir il faut démontrer l'assertion suivante : Si x' est un point maximal de $U_{S''} - Y_{S''}$, alors $\{\overline{x'}\} \cap (U_{s'} = Z_{s'}) = \emptyset$.

Mais $U_{S'} \hookrightarrow G'$ est plat sur S' et ses fibres n'ont pas de composantes immergées ; donc, si $\{\overline{x'}\} \cap Z_{s'} \neq \emptyset$, chacune des composantes de cette intersection sera de dimension $\dim(Z)$ (EGA, IV, 14.3.10) ; chaque point maximal de $\{\overline{x'}\} \cap Z_{s'}$ sera alors un des z'_i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Ce qui contredira le choix de Y.

Il en résulte $U_{S'} - (U_{S''} - Y_{S''}) = Y_{S'} \cup Z_{S'}$ est un ouvert de $U_{S'}$ donc de $G_{S'}$. Il est alors immédiat que le sous-foncteur $G_{(Z)}$ de G, à ensemble sous-jacent $Y \cup Z$, est un ouvert de G satisfaisant aux assertions du lemme. C.Q.F.D.

Nous conservons les hypothèses et les notations de 4.2.4. Le sous-foncteur ouvert de G qui correspond au choix $(Z) = (G^o_{s_1}, \ldots, G^o_{s_n})$ (où $G^o_{s_i}$ est la composante neutre de G_{s_i}, $1 \leqslant i \leqslant n$) sera noté $G_{(0)}$. Il est formel de voir que c'est un sous-faisceau en groupes de G (c'est le plus petit sous-groupe ouvert de G). Pour un choix de (Z) quelconque, il est formel aussi de voir que le morphisme canonique $G_{(0)} \times_S G_{(Z)} \to G$ de faisceaux, se factorise par $G_{(Z)}$; autrement dit, le S-faisceau en groupes $G_{(0)}$ opère sur $G_{(Z)}$. Puisque, pour tout $s \in S$, G_s/G^o_s

est un groupe étale sur $k(s)$ (cf. SGAD, VI_A, 5.5), on peut trouver un semi-trait S_1 fini et étale sur S, tel que $G_{(Z)S_1}$ soit un S_1-faisceau presque homogène (au sens de 4.0.1) sous $G_{(0)S_1}$ (bien entendu S_1 dépend du choix de (Z)).

Considérons maintenant le cas 4.C où G est <u>plat</u> et localement de présentation finie sur S un <u>semi-trait</u>. Considérons le morphisme canonique $G \xrightarrow{\varphi} G/H$ de faisceaux. Si $G_{(Z)}$ est un ouvert de G du type construit plus haut, il est formel de voir que $\varphi(G_{(Z)})$ est un sous-faisceau ouvert de G/H, car φ est couvrant fppf. (Noter aussi que G étant ici un schéma, la construction des $G_{(Z)}$ est facile). D'autre part, pour les actions canoniques de G, φ est une G-application. Donc si S_1 $(= S_1((Z)))$ est tel que $G_{(Z)S_1}$ soit un S_1-espace presque homogène sous $G_{(0)S_1}$, alors il est clair que $\varphi(G_{(Z)})_{S_1}$ est un S_1-faisceau presque homogène sous $G_{(0)S_1}$.

Fin de la démonstration dans le cas S normal.

<u>Etape 6</u>). Nous sommes maintenant en mesure de démontrer 4.A et 4.C (cas général) sur S normal ; comme nous l'avons vu, on peut supposer que S est un semi-trait et que G est S-plat. Grâce à 3.4.2., il s'agit, dans les deux cas, de faire une descente fpqc et d'établir la propriété (FA). Nous conservons les notations ci-dessus.

D'après l'étape 4), (où nous avons établi 4.A - 4.D avec l'hypothèse de présentation finie, sur S normal), $G_{(0)}$ est représentable. Pour un (Z) quelconque (comme plus haut), il existe un semi-trait S_1 fini et étale sur S tel que $G_{(Z)S_1}$ (resp. $\varphi(G_{(Z)})_{S_1}$) soit un S_1-faisceau presque homogène sous $G_{(0)S_1}$; à l'aide de l'étape 4) et la descente finie et plate (classique) d'un schéma de type (FA), on conclut que $G_{(Z)}$ (resp. $\varphi(G_{(Z)})$) est représentable. Comme les $G_{(Z)}$ (resp. $\varphi(G_{(Z)})$) recouvrent toutes les fibres spéciales de G (resp. G/H), on a ainsi prouvé la représentabilité de G (resp. G/H). Reste à établir la propriété (FA). Soit E un ensemble fini de points de G/H ; il suffit d'étudier le cas où chaque point de E est dans une des parties $\varphi(G_{(Z)})$ de G/H ; on trouve donc un nombre fini de (Z) tel que E soit contenu dans la réunion X de ces $\varphi(G_{(Z)})$. Il existe donc S_2 fini et étale sur S tel que X_{S_2} soit presque homogène sous

$G_{(0)S_2}$. On termine, grâce à l'étape 4), soit suivant un raisonnement classique, soit suivant 4.1.3. C.Q.F.D.

4.3. Le cas S non-normal ; fin de la démonstration .

Comme nous l'avons vu (cf. 4.1) on peut supposer que S est semi-local de dimension 1. Alors, le normalisé de S_{red} est somme disjointe de semi-traits et de corps (Krull-Akizuki). Si $\tilde{S}$ est ce normalisé, nous avons établi 4.A - 4.D sur $\tilde{S}$ dans 4.2. Il reste donc à faire la descente entière de $\tilde{S}$ à S . Pour 4.A et 4.D cela est assurée grâce au critère de descente 4.1.1 et la propriété (FA) sur $\tilde{S}$. Sachant que dans les deux cas 4.B et 4.C on a affaire à un S-espace algébrique (loc. PF) et séparé (cf. 3.1.1) on termine à l'aide du critère de descente 3.2.1 et la propriété (FA) sur $\tilde{S}$.

Enfin, la propriété (FA) sur S est assurée par celle sur $\tilde{S}$ et 4.1.3.

Appendice I

Passage au quotient par un groupoïde plat

Soient S un schéma quelconque, R, X des S-schémas localement de type fini et $R \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$ un S-groupoïde (cf. SGAD, V, 1) plat et de présentation finie. Nous appellerons graphe de ce groupoïde l'image ensembliste du morphisme $d : R \xrightarrow{(p_1,p_2)} X \times_S X$. Nous noterons X/R (resp. $\widetilde{X/R}$) l'espace annelé (resp. le S-faisceau fppf) quotient de X par R. Pour un morphisme $Y \xrightarrow{\varphi} X$ dans (Sch/S), nous noterons $R_Y \rightrightarrows Y$ le groupoïde induit par R sur Y (cf. SGAD, V, 3). Si x est un point de X, $R_x \rightrightarrows \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ sera le groupoïde induit par R sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$, pour le monomorphisme canonique $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$.

Dans cet appendice il est question d'étudier (suivant [19]) des conditions pour que X/R (resp. $\widetilde{X/R}$) soit un S-schéma. Le cas qui nous intéresse surtout est celui où le morphisme $d : R \xrightarrow{(p_1,p_2)} X \times_S X$ est quasi-fini (e.g., R est une relation d'équivalence sur X). (Cette hypothèse restrictive ne sera toutefois faite qu'à partir du corollaire 3).

A - Réduction au cas d'un groupoïde quasi-fini

Lemme 1 : Soient $R \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$ un groupoïde, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ un monomorphisme de schémas, $R_Y \rightrightarrows Y$ le groupoïde induit par R sur Y. On suppose que la restriction de p_2 à $p_1^{-1}(Y)$ (considéré comme sous-objet de R) est un morphisme ouvert couvrant son image pour la topologie fpqc. Alors le morphisme canonique $Y/R_Y \xrightarrow{j} X/R$ est une immersion ouverte d'espaces annelés.

Preuve : Vu la définition du groupoïde induit, j est évidemment injectif. L'hypothèse faite entraîne que le R-saturé d'un ouvert de Y est un ouvert de X, donc j est une immersion ouverte topologique. Il suffit donc de montrer que si $\operatorname{sat}_R(Y) = X$, alors on a $\ker(\Gamma(X) \rightrightarrows \Gamma(R)) = \ker(\Gamma(Y) \rightrightarrows \Gamma(R_Y))$. Or, par hypothèse le R-saturé de Y pour la topologie fpqc est X ; on en déduit que le faisceau fpqc $\tilde{X}$ quotient de X par R est égal au faisceau fpqc $\tilde{Y}$ quotient de Y par

R_Y . Il suffit alors de remarquer que

$$\ker(\Gamma(X) \rightrightarrows \Gamma(R)) = \mathrm{Hom}(\tilde{X}, \mathrm{Spec}\ Z[T]) = \mathrm{Hom}(\tilde{Y}, \mathrm{Spec}\ Z[T]) = \ker(\Gamma(Y) \rightrightarrows \Gamma(R_Y)).$$

<u>Proposition</u> 2 : Reprenons les hypothèses et les notations du début. Soient s un point quelconque de S et x un point fermé de X_s . Alors il existe un ouvert V de X saturé sous R et contenant x , et un sous-schéma Z de V tel que l'on ait :

(i) $R_Z \rightrightarrows Z$ est <u>plat et de présentation finie</u>

(ii) le morphisme canonique $\widetilde{Z/R_Z} \to \widetilde{V/R_V}$ (resp. $Z/R_Z \to V/R_V$) est un isomorphisme

(iii) $Z \cap p_1 p_2^{-1}(x)$ (qui est non vide d'après (ii)) est un ensemble fini de $\mathrm{Ens}(X)$.

Si de plus X est localement de présentation finie sur S , on peut supposer Z de présentation finie sur S .

<u>Démonstration</u> : Utilisant le lemme 1, on peut supposer X affine (remplacer X par un ouvert affine contenant x). Le lemme 7.2 de SGAD, V (où des hypothèses "noethériennes" sur les fibres suffisent) montre qu'il existe un sous-schéma fermé F de X , défini par un nombre fini d'équations (donc de présentation finie sur S, si X l'est), tel que, si $F_1 = p_1^{-1}(F)$ et si $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ désignent les restrictions de p_1 , p_2 à F_1 , on ait :

1) $\bar{p}_1\ \bar{p}_2^{-1}(x)$ est fini non vide dans $\mathrm{Ens}(F)$

2) $\bar{p}_2$ est <u>plat</u> aux points de $\bar{p}_2^{-1}(x)$.

Explicitons alors le groupoïde R suivant SGAD, V, page 4. On a ainsi le diagramme

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} R' \arrow[r, shift left, "p_1'"] \arrow[r, shift right, "p_2'"'] \arrow[d, "p_3'"'] & R \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \\ R \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & X & \end{tikzcd}$$

où $R' = R \underset{(p_1, p_2)}{\times} R$, la première suite est exacte et les deux carrés sont cartésiens.

Posons $F_2 = (p_1 p_1')^{-1}(F) = (p_1 p_2')^{-1}(F)$; c'est un sous-schéma de R' ; notons avec des lettres soulignées les restrictions aux F_i des morphismes de $(*)$. On obtient ainsi le diagramme

$$(\bar{*}) \qquad \begin{tikzcd} F_2 \arrow[r, shift left, "\bar{p}_1'"] \arrow[r, shift right, "\bar{p}_2'"'] \arrow[d, "\bar{p}_3'"'] & F_1 \arrow[r, "\bar{p}_1"] \arrow[d, "\bar{p}_2"] & F \\ R \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & X & \end{tikzcd}$$

où la première suite est exacte et les deux carrés sont cartésiens. Soit U_1 le plus grand ouvert de F_1 au-dessus duquel $\bar{p}_2$ est plat ; on a donc $U_1 \cap \bar{p}_2^{-1}(x) \neq \emptyset$. D'autre part, comme p_1, p_2 (donc aussi $\bar{p}_1'$, $\bar{p}_2'$) sont fppf, on a nécessairement $(\bar{p}_1')^{-1}(U_1) = (\bar{p}_2')^{-1}(U_1) =$ le plus grand ouvert où $\bar{p}_3'$ est plat. Puisque la première suite est exacte et que $\bar{p}_1$ est ouvert, on voit que $U_1 = (\bar{p}_1)^{-1}(U)$ pour un ouvert U de F ; on a évidemment $U \cap p_1 p_2^{-1}(x) \neq \emptyset$. Or, l'ouvert U de F est la trace sur F d'un ouvert W de X ; quitte à remplacer X par W, on peut donc supposer que $U = F$, donc $U_1 = F_1$, de sorte que $\bar{p}_2$ est plat.

Il est alors clair que dans ces conditions $R_F \rightrightarrows F$ est plat et de présentation finie : en effet, on a les carrés cartésiens suivants

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "d"] & X \times_S X \arrow[r, "pr_1"] & X \\ F_1 \arrow[u] \arrow[r] & F \times_S X \arrow[u] \arrow[r, "pr_1"] & F \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} F_1 \arrow[r] & F \times_S X \arrow[r, "pr_2"] & X \\ R_F \arrow[u] \arrow[r] & F \times_S F \arrow[u] \arrow[r, "pr_2"] & F \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

L'ensemble $F \cap p_1 p_2^{-1}(x)$ est fini non vide. D'après le lemme 1, le morphisme canonique $F/R_F \to X/R$ est une immersion ouverte. Pour établir la proposition 2 il suffit alors de prendre pour V l'ouvert de X égal au R-saturé de F dans X. La dernière assertion résulte de la démonstration. C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u> 3 : Soient S un schéma quelconque, R, X des S-schémas localement de type fini et $R \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X$ un S-groupoïde plat et de présentation finie tel que le morphisme $d : R \xrightarrow{(p_1, p_2)} X \times_S X$ soit quasi-fini. Soient s un point

de S et x un point fermé de X_s. Alors il existe un ouvert V de X, saturé sous R et contenant x, et un sous-schéma Z de V tel que l'on ait :

i) $R_Z \rightrightarrows Z$ est <u>plat, quasi-fini et de présentation finie</u>

ii) le morphisme canonique $Z/R_Z \to V/R_V$ (resp. $\widetilde{Z/R_Z} \to \widetilde{V/R_V}$) est un <u>isomorphisme</u>.

En effet considérons un V et un Z donnés par la proposition 2. Si z est un point de $Z \cap p_1 p_2^{-1}(x)$, alors l'hypothèse faite sur d et la définition du groupoïde induit entraînent que $R_Z \rightrightarrows Z$ est quasi-fini en z. En utilisant le "Main Theorem" et en se restreignant à un ouvert convenable de Z on peut supposer que $R_Z \rightrightarrows Z$ est un groupoïde plat, quasi-fini et de présentation finie. Il suffit alors de remplacer V par le R-saturé dans X de cet ouvert de Z.

<u>Remarque</u> 4 : Gardons les hypothèses du corollaire 3. Alors on voit que la question de représentabilité de X/R ou de $\widetilde{X/R}$ se ramène au cas où $R \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$ est un groupoïde quasi-fini, plat et de présentation finie. C'est à ce cas que nous allons nous borner ci-dessous.

B - <u>Un critère de passage au quotient</u>

<u>Théorème</u> 5 : Soient S un schéma quelconque, R, X des schémas localement de type fini, $R \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$ un S-groupoïde <u>plat, quasi-fini et de présentation finie</u>, x un point de X, s son image dans S. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe un ouvert R-saturé U de X contenant x tel que U/R_U soit un schéma.

2) i) Il existe un ouvert V de X contenant x tel que le graphe Γ_V de R_V soit fermé.

ii) Il existe un morphisme $V \xrightarrow{\varphi} Z$ dans (Sch/S) compatible avec R_V et tel que $\deg tr_{k(\varphi(x))} k(x) = 0$.

2bis) i) Le graphe Γ_x du groupoïde $R_x \rightrightarrows T = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ est fermé.

ii) Il existe un morphisme $T = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\varphi} Z$ dans (Sch/S)

compatible avec R_x et tel que $\deg \mathrm{tr}_{k(\varphi(x))}k(x) = 0$.

Enfin, si X/R est un schéma, le morphisme canonique $X \to X/R$ est universellement ouvert.

La démonstration que nous allons donner prouvera en même temps (vu le corollaire 3) le

<u>Théorème</u> 6 : Avec les hypothèses générales du corollaire 3, supposons de plus que $d : R \xrightarrow{(p_1,p_2)} X \times_S X$ est une <u>immersion</u>. <u>Alors</u>, si X/R est un schéma, le morphisme canonique $\widetilde{X/R} \to X/R$ est un isomorphisme ; en particulier, le morphisme canonique $X \to X/R$ est fppf.

<u>Démonstration</u> : Il est évident que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 2bis). Nous allons montrer que 2bis) $\Longrightarrow$ 1) et en même temps démontrer la dernière assertion du théorème 5 et le théorème 6. Commençons par faire quelques réductions.

a) <u>Réduction au cas où</u> X <u>est affine et</u> R <u>est de graphe fermé</u>.

Considérons $T = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,x}$ comme limite projective filtrante des voisinages ouverts affines X_i de x dans X . Soient $R_i = R_{X_i}$, $d_i : R_i \to X_i \times_S X_i$ le morphisme canonique et $\Gamma_i = d_i(R_i)$ = le graphe de d_i . On a donc l'égalité $T \times_S T = \varprojlim_i X_i \times_S X_i$ et les diagrammes cartésiens suivants :

$$\begin{array}{ccc} R_x & \xrightarrow{\text{can.}} & R_i \\ \downarrow{\scriptstyle d_x} & & \downarrow{\scriptstyle d_i} \\ T \times_S T & \longrightarrow & X_i \times_S X_i \end{array} .$$

Puisque d_i est de présentation finie, $\Gamma_i = \mathrm{im}(d_i)$ est une partie constructible de $X_i \times_S X_i$ (EGA, IV). D'autre part, $\Gamma_x = \mathrm{im}(d_x)$ est fermé par hypothèse dans $T \times_S T$. Il résulte de EGA, IV.8, que Γ_i est fermé dans $X_i \times_S X_i$ pour i assez grand.

b) <u>Réduction au cas</u> Z <u>de présentation finie</u>.

On peut supposer Z affine. Considérons Z comme limite projective filtrante de S-schémas affines de présentation finie $\{Z_\alpha\}$ et soit $\varphi^{(\alpha)} : T \to Z \to Z_\alpha$ le

morphisme composé.

Puisque X_s est de type fini sur $k(s)$, $\varphi^{(\alpha)}$ a la même fibre que φ en x pour α assez grand. Quitte à remplacer Z par Z_α et φ par $\varphi^{(\alpha)}$ pour α assez grand on peut supposer Z de présentation finie sur S.

c) <u>Réduction au cas où φ provient d'un morphisme de X dans Z</u>.

Puisque Z est de présentation finie sur S, le morphisme $\varphi : T \to Z$ provient d'un morphisme $\varphi_i : X_i \to Z$ pour i assez grand (notations de a)). Puisque $R_x = \varprojlim_i (R_i = R_{X_i})$ et que φ est compatible avec R_x, φ_i est compatible avec R_i pour i assez grand. Il suffit alors de remplacer X par un tel X_i. Grâce au "Main Theorem" on peut aussi supposer φ <u>quasi-fini</u>.

Ceci étant, quitte à changer de notations, on peut prendre $S = Z$. On est ainsi ramené à démontrer le

<u>Théorème</u> 7 : Soient S un schéma quelconque, X un S-schéma localement quasi-fini sur S et $R \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$ un S-groupoïde quasi-fini plat et de présentation finie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) X/R est un schéma.

2) Pour tout $x \in X$, il existe un ouvert U de X contenant x tel que le graphe de R_U soit fermé. De plus, si X/R est un schéma, le morphisme canonique $X \to X/R$ est universellement ouvert ; enfin si X/R est un schéma et si $d : R \xrightarrow{(p_1, p_2)} X \times_S X$ est une <u>immersion</u> alors le morphisme canonique $\widetilde{X/R} \to X/R$ est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u> : Il s'agit de prouver que 2) $\Longrightarrow$ 1) et établir les dernières assertions. On peut donc supposer, comme plus haut, que X est affine, quasi-fini sur S et que R est de graphe fermé.

Soit U le plus grand ouvert de S tel que, si V = l'image inverse de U dans X, on ait :

i) V/R_V est un schéma quasi-affine sur U et le morphisme canonique $V \to V/R_V$ est universellement ouvert.

ii) si d est une immersion, alors le morphisme canonique $\widetilde{V/R_V} \to V/R_V$ est un isomorphisme.

On doit prouver que $U = S$, sous l'hypothèse 2). Supposons donc que $U \neq S$ et soit s un point maximal de $S-U$. Alors il existe un voisinage étale S' de s sur S tel que l'on ait :

iii) il existe un point unique $s' \in S'$ au-dessus de s

iv) $X' = X_{S'}$ est somme disjointe $X'_1 \amalg X'_2$ de deux schémas

v) $X'_1 \hookrightarrow X' \to S'$ est fini

vi) $X'_2 \cap X'_{s'} = \emptyset$ (cf. EGA, IV 18.12).

L'image S'' de S' dans S est un ouvert contenant s et il nous suffit de montrer que $U > S''$; on peut donc supposer que S' couvre S.

Notons $R' \underset{p'_2}{\overset{p'_1}{\rightrightarrows}} X'$ le S'-groupoïde déduit de $R \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$ par le changement de base $S' \to S$. Supposons démontré que $X'/R' = Y'$ est un S'-schéma quasi-affine vérifiant i) et ii) ci-dessus sur S'. Notons d'abord le lemme facile suivant

<u>Lemme</u> 8 : Soient X' un schéma, $R' \rightrightarrows X'$ un groupoïde quasi-compact et quasi-séparé tel que $Y' = X'/R'$ soit un schéma et tel que le morphisme canonique $X' \to X'/R'$ soit quasi-compact, quasi-séparé et universellement ouvert, et enfin soit $Y'' \to Y'$ un morphisme <u>plat</u> dans (Sch). Si $R'' \rightrightarrows X''$ est le groupoïde déduit de $R' \rightrightarrows X'$ par le changement de base $Y'' \to Y'$, alors on a $Y'' \simeq X''/R''$.

Il en résulte dans notre cas que $Y' = X'/R'$ est muni d'une donnée de descente canonique par rapport au morphisme étale $S' \to S$. Puisque Y' est quasi-affine, cette donnée est effective (SGA, 1, VIII) et si Y est le schéma quasi-affine sur S ainsi obtenu, il est immédiat que Y est égal à X/R et possède les propriétés i), ii) au-dessus de S.

On peut donc supposer que $S' = S$, et par suite supprimer les "primes" des notations.

Considérons l'ouvert X_1 de X et le groupoïde induit par $R \rightrightarrows X$ sur X_1, soit $R_1 \rightrightarrows X_1$. Comme R est de graphe fermé, il en est de même R_1. Dans le cas

où $R \xrightarrow{d} X \times_S X$ est une immersion, cela entraîne que $R_1 \xrightarrow{\text{can.}} X_1 \times_S X_1$ est une immersion fermée, de sorte que $R_1 \rightrightarrows X_1$ est une relation d'équivalence finie et plate (car $X_1 \to S$ est <u>fini</u>). Donc si X_1/R_1 est un schéma, alors $\widetilde{X_1/R_1} \simeq X_1/R_1$ (SGAD, V, 4.1). Dans le cas général, l'image schématique de R_1 dans $X_1 \times_S X_1$ par le morphisme canonique est un sous-schéma fermé Γ_1 de $X_1 \times_S X_1$; et les projections canoniques $\Gamma_1 \rightrightarrows X_1$ définissent sur $\mathrm{Ens}(X_1)$ la même relation d'équivalence que R_1. On a alors le

<u>Lemme</u> 9 : Soient X, R deux S-schémas entiers et supposons que les fibres de X/S ont un nombre fini de points. Alors pour toute S-double flèche $R \rightrightarrows X$ qui définit sur $\mathrm{Ens}(X)$ une relation d'équivalence, le conoyau dans la catégorie des espaces annelés est un schéma Y, entier sur S. Et le morphisme canonique $X \to Y$ est entier.

<u>Preuve</u> : On peut supposer S donc R, X affines. Si $Y = \mathrm{Spec}\,(\ker(\Gamma(X) \rightrightarrows \Gamma(R)))$ il est évident que Y est entier sur S, et que le morphisme canonique $X \to Y$ est entier, dominant, donc surjectif. Il faut voir que Y a le bon espace sous-jacent. Quitte à remplacer S par Y, on peut supposer que $\Gamma(S) = \ker(\Gamma(X) \rightrightarrows \Gamma(R))$, hypothèse qui se conserve par extension plate. Soit $s \in S$ et montrons que X_s est une <u>seule</u> classe d'équivalence. Remplaçons S par le hensélisé de $\mathcal{O}_{S,s}$; X est alors somme d'un nombre fini de composantes locales. Si X_s contient plus d'une orbite, la double flèche $R \rightrightarrows X$ se décomposera en somme de deux double flèches

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \rightrightarrows & X_1 \\ \amalg & & \amalg \\ R_2 & \rightrightarrows & X_2 \end{array} ;$$

il existera donc dans $\Gamma(S) = \ker(\Gamma(X) \rightrightarrows \Gamma(R))$ un idempotent non-trivial, ce qui contredit la connexité de S. C.Q.F.D.

Il résulte de ce lemme que le conoyau de la double flèche $\Gamma_1 \rightrightarrows X_1$ est un schéma Y_1. Dans le cas où d est une immersion, on a vu que c'est aussi le quotient faisceautique $\widetilde{X_1/\Gamma_1} = \widetilde{X_1/R_1}$. Dans le cas général on a

<u>Lemme</u> 10 : Le morphisme canonique $X_1/R_1 \xrightarrow{i} Y_1$ est un isomorphisme ; et le morphisme canonique $X_1 \to Y_1$ est universellement ouvert.

<u>Preuve</u> : On a vu plus haut que Γ_1 et R_1 définissent la même relation d'équivalence sur $\mathrm{Ens}(X_1)$; donc i est un homéomorphisme topologique. Pour voir que i est un isomorphisme d'espaces annelés, il suffit de voir (quitte à remplacer X_1 par l'image inverse d'un ouvert affine quelconque de Y_1) que $\ker(\Gamma(X_1) \rightrightarrows \Gamma(R_1)) = \ker(\Gamma(X_1) \rightrightarrows \Gamma(\Gamma_1))$; mais puisque Γ_1 est l'image schématique de R_1, l'application canonique $\Gamma(\Gamma_1) \to \Gamma(R_1)$ est injective, d'où l'assertion.

Soit alors $r : X_1 \to Y_1$ le morphisme canonique ; d'après le lemme 9, r est entier, surjectif. Nous allons montrer que r est universellement ouvert. Soit donc $T \in (\mathrm{Sch}/S)$ et $R_{1_T} \rightrightarrows X_{1_T} \xrightarrow{r_T} Y_{1_T}$ le résultat du changement de base $T \to S$. Puisque le morphisme canonique $R_1 \to X_1 \times_{Y_1} X_1$ est surjectif, il en est de même de $R_{1_T} \to X_{1_T} \times_{T_{1_T}} X_{1_T}$; il s'ensuit que si M est un ouvert de X_{1_T}, $N = (r_T)^{-1}(r_T(M))$ est aussi ouvert, puisque c'est le saturé de M sous R_{1_T} et que $R \rightrightarrows X$ (étant fppf) est universellement ouvert. Mais alors $r_T(M) = r_T(N)$ est ouvert dans Y_{1_T} puisque r_T est fermé surjectif. C.Q.F.D.

On est maintenant en mesure de prouver que $Y = X/R$ est un schéma vérifiant i), ii) plus haut. Soit W le schéma V/R_V, quasi-affine sur U. Notons $\overline{Y_1}$ (resp. $\overline{W}$) l'image de $X_1 \cap V = \overline{X_1}$ dans Y_1 (resp. W). D'après le lemme 1, $\overline{Y_1}$ et $\overline{W}$ sont des ouverts, s'identifiant canoniquement au quotient de $\overline{X_1}$ par le groupoïde induit de R ; et dans le cas où d est une immersion, ce sera aussi le quotient faisceautique. Par recollement on obtient donc un schéma Y qui est un quotient X/R qui satisfait aux assertions du théorème 7. Reste à voir que Y est quasi-affine ; comme W est quasi-affine sur U, donc séparé et que $X_1 \cap V = \overline{X_1}$ est fini sur U, l'image $\overline{W}$ de $\overline{X_1}$ dans W est fermée et ouverte de sorte que Y est somme disjointe de Y_1 et un ouvert Y_2 (le complémentaire de $\overline{W}$ dans W). Puisque W est U-quasi-affine, Y_2 est quasi-affine (sur S) ; enfin Y_1 est entier donc affine sur S (lemme 9) ; d'où le fait que Y est quasi-affine.

C.Q.F.D.

Remarque 11 : Supposons que X/R est un schéma. Alors la même démonstration prouve que le morphisme canonique $X \to X/R$ est de type fini et que si S est localement noethérien, alors X/R est aussi localement de type fini sur S .

Appendice II

Normalisé d'un schéma sur un schéma de Dedekind

On se propose dans cet appendice de démontrer le résultat suivant de Raynaud.

Théorème 1 : Soient S un schéma de Dedekind (cf. 1.2.0), K son corps des fractions, $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, et $\bar{S}$ le normalisé de S dans $\bar{K}$. Supposons que X est un S-schéma plat et localement de type fini tel que X_K soit géométriquement normal. Alors le normalisé $\tilde{X}_{\bar{S}}$ de $X_{\bar{S}}$ est un schéma plat, séparable, localement de présentation finie sur $\bar{S}$, et fini sur $X_{\bar{S}}$.

Avant de procéder à la démonstration, donnons quelques corollaires.

Corollaire 2 : Soient S, K, $\bar{K}$, $\bar{S}$, X comme ci-dessus et supposons de plus que X est de type fini sur S. Alors il existe une extension finie K_1 de K telle que, si S_1 est le normalisé de S dans K_1, alors le normalisé $\tilde{X}_{S_1}$ de X_{S_1} soit plat, séparable, de type fini sur S_1 et fini sur X_{S_1}.

En effet, puisque la propriété pour une fibre d'être séparable est constructible, le corollaire résulte du théorème 1 par passage à la limite (EGA, IV, 8) et le critère de normalité de Serre ([18], IV, 2.4).

Corollaire 3 : Avec les hypothèses du corollaire 2, supposons de plus que X est un S-schéma en groupes. Si K_1, S_1 sont comme dans le corollaire 2, alors le normalisé $\tilde{X}_{S_1}$ de X_{S_1} est un S_1-schéma en groupes lisse et la projection canonique $\tilde{X}_{S_1} \to X_{S_1}$ est un S_1-homomorphisme.

En effet, sous les hypothèses du corollaire 2, $\tilde{X}_{S_1} \times_{S_1} \tilde{X}_{S_1}$ est normal ([18], IV, 2.4), et le corollaire 3 résulte donc formellement du corollaire 2.

Démonstration du théorème 1 : Modulo passage à la limite, il est clair que le théorème 1 résulte du théorème plus général suivant.

Théorème 1' : Soient A un anneau de valuation de hauteur 1, dont le corps des fractions K est algébriquement clos, $S = \operatorname{Spec} A$, t le point générique de S, s son point fermé, X un S-schéma plat, localement de type fini et à fibre géné-

rique normale. Alors, le normalisé $\tilde{X}$ de X est plat, <u>séparable</u>, localement de présentation finie sur S, et fini sur X.

<u>Démonstration</u> : On peut supposer X affine intègre, d'anneau A. Si $\dim X_K = n$, alors X_s a toutes ses composantes irréductibles de dimension n. D'après le lemme de normalisation de Noether, il existe un S-morphisme $\varphi : X \to S[T_1,\dots,T_n]$ tel que φ_s soit fini (et surjectif si $X_s \neq \emptyset$). On en conclut qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & S[T_1,\dots,T_n] \\ u\uparrow & & \uparrow v \\ X' & \xrightarrow{\varphi'} & Y \end{array}$$

où u,v sont étales affines, φ' est <u>fini</u>, $u(X') \supset X_s$ et $v_s : Y_s \xrightarrow{\sim} S[T_1,\dots,T_n]_s$, (cf. [22], ch.XI, page 119). Il suffit de prouver le théorème pour X'. On suppose donc que X est <u>fini</u> sur Y.

Soient A l'anneau de Y et B (resp. C) celui X (resp. du normalisé $\tilde{X}$). Montrons d'abord que C est fini sur A. Soient Λ' le complété de Λ, et A', B' les complétés de A,B pour la topologie définie par élément λ de Λ de valuation > 0. Alors B' est fini sur A'. Soient η un point maximal de Y_s et η' le point correspondant de Spec A'. Puisque A' est isomorphe à l'anneau de séries formelles restreintes en les n-variables $T_1,\dots,T_n$ sur Λ, il est clair que $A'_{\eta'}$ est un anneau de valuation dominant l'anneau de valuation A_η (et A_η est dense dans $A'_{\eta'}$).

Par ailleurs, comme X_K est normal et K algébriquement clos, si K' est le corps des fractions de Λ', $B_{K'}$ est normal ; par les propriétés d'excellence de la géométrie rigide sur K' (cf. [12]) on conclut que $B'_{K'}$ est normal. Enfin, soit D' la clôture intégrale de A' dans $B'_{K'}$; d'après Grauert-Remmert (cf. [9]), D' est <u>fini</u> sur A'.

Or, pour montrer que C est fini sur A, il suffit de montrer que le morphisme canonique $C \otimes_A A' \to D'$ est un isomorphisme : en effet, le problème se situe

aux points de $(\mathrm{Spec}\ A)_s$ et il suffit alors de remarquer que $\mathrm{Spec}\ A' \to \mathrm{Spec}\ A$ est plat et son image est l'ensemble des générisations des points de $(\mathrm{Spec}\ A)_s$. Par ailleurs, si Z est la partie de Y_s complémentaire des points maximaux, il résulte des propriétés de profondeur que C et D' sont Z-clos (cf. EGA, IV, 5.10). Il suffit donc de prouver que $C \otimes_A A' \to D'$ est un isomorphisme après localisation en chaque point maximal de $A'/\lambda A'$. Ce dernier point est une conséquence du

<u>Lemme</u> 2' : Soient Λ un anneau de valuation, K son corps des fractions, L une extension finie de K, $\bar{\Lambda}$ le normalisé de Λ dans L, Λ' un anneau de valuation dominant Λ tel que Λ soit dense dans Λ', K' son corps des fractions, $L' = K' \otimes_K L$, et $\overline{\Lambda'}$ la clôture intégrale de Λ' dans L'_{red}. Alors le morphisme canonique $\bar{\Lambda} \otimes_\Lambda \Lambda' \to \overline{\Lambda'}$ est surjectif et son noyau est le nil-radical de $\bar{\Lambda} \otimes_\Lambda \Lambda'$. Par conséquent, si L' est réduit on a $\bar{\Lambda} \otimes_\Lambda \Lambda' \xrightarrow{\sim} \overline{\Lambda'}$; si de plus $\overline{\Lambda'}$ est fini sur Λ', alors $\bar{\Lambda}$ est fini sur Λ.

<u>Preuve</u> : Notons que L'_{red} est un produit fini de corps L''_i, extensions finies de K'. Par suite, $\overline{\Lambda'}$ est le produit des normalisés $\overline{\Lambda'_i}$ de Λ' dans L''_i. On conclut donc (suivant Bourbaki [4], ch.VI, §8, n°1, et remarque au théorème 1) que $\bar{\Lambda}$ (resp. $\overline{\Lambda'}$) est un anneau semi-local, dont les composants locaux sont des anneaux de valuation, de groupe de valuation contenant celui de Λ (resp. Λ') comme un sous-groupe d'indice fini. Notons Γ le groupe associé à Λ ; puisque Λ est dense dans Λ', Γ est aussi le groupe associé à Λ'. Soient $\bar{\Lambda}_i$, $i = 1,2,\ldots,s$ les composants locaux de $\bar{\Lambda}$ et Γ_i le groupe associé à $\bar{\Lambda}_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Soit b' un élément de $\overline{\Lambda'}$; alors b' est l'image d'un $\ell' \in L'$ de la forme $\sum_{\alpha=1}^{n} a'_\alpha \otimes \ell_\alpha$, $a'_\alpha \in K'$, $\ell_\alpha \in L$. Puisque Γ est d'indice fini dans Γ_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, on peut trouver, pour chaque $\alpha = 1,2,\ldots,n$, un $r_\alpha \in \Gamma$ tel que $r_\alpha + v_i(\ell_\alpha) > o$ (où v_i est la valuation correspondante à $\bar{\Lambda}_i$), pour $1 \leqslant i \leqslant s$. Mais Λ est dense dans Λ', donc K l'est dans K', et pour tout α, il existe un $a_\alpha \in K$ tel que, si $a''_\alpha = a'_\alpha - a_\alpha$, alors $v(a''_\alpha) \geqslant r_\alpha$ (où v est la valuation correspondante à Λ'). On a donc $\Sigma\, a'_\alpha \otimes \ell_\alpha = \Sigma\, a_\alpha \otimes \ell_\alpha + \Sigma\, a''_\alpha \otimes \ell_\alpha$. Soit b_α un

élément de K ayant la même valuation que a''_α , $1 \leqslant \alpha \leqslant n$. Alors $b_\alpha \otimes \ell_\alpha = b_\alpha . \ell_\alpha$ a une valuation positive dans chacun des Γ_i , $1 \leqslant i \leqslant s$, donc est dans $\bar{\Lambda}$; par suite, $a''_\alpha \otimes \ell_\alpha = (a''_\alpha / b_\alpha)(b_\alpha \otimes \ell_\alpha)$ est dans $\bar{\Lambda} \otimes_\Lambda \Lambda'$. On en déduit que l'image dans L'_{red} de $\Sigma\, a_\alpha \otimes \ell_\alpha \in L$ est dans $\overline{\Lambda'}$, donc $\Sigma\, a_\alpha \otimes \ell_\alpha$ est un élément de L' entier sur Λ'. Par descente plate, $\Sigma\, a_\alpha \otimes \ell_\alpha \in \bar{\Lambda}$; d'où le fait que b' est dans l'image de $\bar{\Lambda} \otimes_\Lambda \Lambda'$. C.Q.F.D.

L'assertion du théorème concernant la présentation finie résulte du

<u>Lemme</u> 3' : Soient S un schéma <u>intègre</u>, X un S-schéma de type fini et x un point de X où X est plat sur S . Alors il existe un voisinage ouvert de x, plat et de présentation finie sur S .

Voir [11], corollaire (3.4.7).

Reste à prouver que $\tilde{X}_s$ est séparable, i.e., que $\tilde{X}_s$ est réduit, puisque $k(s)$ est algébriquement clos. Or, avec les notations introduites plus haut, $\tilde{X} = \operatorname{Spec} C$ est Z-clos, et pour voir que $\tilde{X}_s$ est réduit, il suffit donc de voir qu'il en est ainsi aux points maximaux.

Soit η un point maximal de $Y_s = (\operatorname{Spec} A)_s$; alors A_η est un anneau de valuation ; et l'anneau semi-local C_η est le normalisé de A_η dans le corps des fractions $F(C)$ de C , extension finie du corps des fractions $F(A)$ de A . On en conclut que les composants locaux C_i , $1 \leqslant i \leqslant r$, de C_η sont des anneaux de valuation, dominant A_η et à groupes Γ_i , $1 \leqslant i \leqslant r$, ayant Γ , celui de A_η , comme sous-groupe d'indice fini. Mais K étant algébriquement clos, le groupe de valuation Γ de A est <u>divisible</u>, donc $\Gamma = \Gamma_i$, $1 < i < r$. Remarquons par ailleurs que, par un choix convenable (et nouveau) de Y , on peut supposer aussi que les extensions résiduelles de C_η sur A_η sont triviales. On a donc que A_η est dense dans C_i , pour tout i .

D'autre part, soient $\widehat{F(A)}$ (resp. $\widehat{F(C)}_i$) le complété de $F(A)$ (resp. $F(C)$) pour la valuation associé à A_η (resp. C_i , $1 \leqslant i \leqslant r$). Puisque K est algébriquement clos, $F(A)$ et $F(C)$ sont des extensions séparables de K , et on a donc

$F(\hat{A})\otimes_{F(A)}F(C) \simeq \prod_{i=1}^{r} F(\hat{C})_i$ (Bourbaki, [4], ch.VI, §8, n°2). Il est alors facile de voir que, si $\hat{A}_\eta$, $\hat{C}_i$ sont les complétés des anneaux de valuation A_η, C_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, on a l'égalité $C\otimes_{A_\eta}\hat{A}_\eta \simeq \prod_{i=1}^{r}\hat{C}_i$ (raisonnons, par exemple, comme dans le lemme 2').

Puisque, sous les hypothèses faites, on a $\hat{A}_\eta \simeq \hat{C}_i$ pour tout i, cela entraîne que C est étale sur A aux points maximaux. On termine par remarquer que Y_s est réduit. C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> : Soient S un semi-trait et X un schéma plat et localement de type fini sur S et à fibre générique <u>lisse</u>. Si le normalisé $\tilde{X}$ de X est <u>lisse</u>, alors il est immédiat que $\tilde{X}$ est la lissification (N) de X sur S (voir ch.II).

Bibliographie

[1] ARTIN (M.). - The implicit function theorem in algebraic geometry, Algebraic geometry, Papers presented at the Bombay Colloquium, 1968 ; p. 13-34. - Bombay, Tata Institute for fundamental Research ; London, Oxford University Press, 1969 (Tata Institute. Studies in Mathematics, 4).

[2] ARTIN (M.). - Algebraization of formal moduli, I., Global analysis, Papers in honour of K. Kodaira ; p. 21-71. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1969 (Princeton mathematical Series, 29).

[3] ARTIN (M.). - Algebraic approximation of structures over complete local rings. - Paris, Presses universitaires de France, 1969 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 36 ; p. 23-58).

[4] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative. Chapitres 5-6. - Paris, Hermann, 1964 (Act. scient. et ind., 1308 ; Bourbaki, 30).

[5] DIEUDONNÉ (J.) et GROTHENDIECK (A.). - Eléments de géométrie algébrique (EGA). - Paris, Presses universitaires de France, 1960 ... (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, n° 4 ...).

[6] DEMAZURE (M.) et GROTHENDIECK (A.). - Schémas en groupes (SGAD), Séminaire à l' I. H. E. S., exposés V à XVII.

[7] DEMAZURE (M.) et GABRIEL (P.). - Groupes algébriques. Tome 1. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1970.

[8] GIRAUD (J.). - Méthode de la descente, Bull. Soc. math. France, Mémoire 2, 1964, VIII + 150 p.

[9] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nicht-archimedischen Analysis, Inventiones Math., Berlin, t. 2, 1966, p. 87-133.

[10] GROTHENDIECK (A.). - Séminaire de géométrie algébrique (SGA), I. H. E. S., 1960-1962, exposés I à VIII.

[11] GRUSON (L.) et RAYNAUD (M.). - Critères de platitude et de projectivité ..., Inventiones Math., Berlin, t. 13, 1971, p. 1-89.

[12] KIEHL (R.). - Ausgezeichnete Ringe in der nicht-archimedischen analytischen Geometrie, Math. Inst. der Univ. Münster (Notes privées).

[13] KNUTSON (D.). - Algebraic spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 203).

[14] LANG (S.). - Abelian varieties. - New York, Interscience Publishers, 1959 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 7).

[15] MUMFORD (D.). - Abelian varieties. - Bombay, Tata Institute for fundamental Research ; London, Oxford University Press, 1970 (Tata Institute. Studies in Mathematics, 5).

[16] MURRE (J. P.). - On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups. - Paris, Presses universitaires de France, 1964 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 23 ; p. 5-43).

[17] MURRE (J. P.). - Representation of unramified functors, Applications, Séminaire Bourbaki, 17e année, 1964/65, n° 294, 29 p.

[18] RAYNAUD (M.). - Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 119).

[19] RAYNAUD (M.). - Sur le passage au quotient par un groupoïde plat, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 384-387.

[20] RAYNAUD (M.). - Modèles de Néron, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1966, Série A, p. 345-347.

[21] RAYNAUD (M.). - Un critère d'effectivité de descente, Séminaire Samuel : Algèbre commutative, 1967/68 : Les épimorphismes d'anneaux, n° 5, 22 p.

[22] RAYNAUD (M.). - Anneaux locaux henséliens. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 169).

[23] ROSENLICHT (M.). - Some basic theorems on algebraic groups, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 401-443.

[24] Séminaire Heidelberg-Strasbourg : Groupes algébriques linéaires, 1965/66. - Strasbourg, Publications de l' I. R. M. A., 1967.

Sivaramakrishna ANANTHARAMAN
24 rue Berbier du Mets
75013 PARIS

-:-:-:-