

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

LUC TARTAR

## **Interpolation non linéaire**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 31-32 (1972), p. 375-380

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1972\\_\\_31-32\\_\\_375\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__375_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTERPOLATION NON LINEAIRE

par

Luc TARTAR

INTRODUCTION.

On s'intéresse ici à certaines généralisations de l'interpolation linéaire à diverses situations non linéaires.

Un premier type d'interpolation non linéaire consiste à considérer des applications lipschitziennes entre espaces de Banach. On peut aussi introduire des applications holdériennes. Browder [1], Lions [1], Lorentz-Shimogaki [1], [2], Peetre [1], Shimogaki [1], Tartar [1].

Un deuxième type consiste à considérer des espaces non vectoriels : espaces métriques en général. Justarsson, [1], Peetre [1], Peetre-Sparr [1], Tartar [2].

Certains théorèmes du premier type peuvent être obtenus avec des espaces d'interpolation très généraux mais on ne sait obtenir les autres qu'en utilisant les méthodes d'interpolation réelles : méthode des traces de J.L. LIONS ou méthode de J. PEETRE.

La méthode K peut être généralisée au cas des espaces métriques ; la méthode des traces demande des structures plus fines. Dans la situation envisagée ci-dessous les deux méthodes peuvent être utilisées. Comme dans le cas linéaire elles conduisent aux mêmes espaces. En utilisant la méthode des traces on arrive à caractériser certains de ces espaces.

RAPPELS D'INTERPOLATION LINEAIRE.

Soient  $A_0$  et  $A_1$  deux espaces de Banach plongés dans un espace localement convexe  $G$ .

1. Méthode K, Peetre [2].

Pour  $t > 0$  on définit sur  $A_0 + A_1$  la norme suivante

$$K(t, a) = \inf_{a = a_0 + a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t \|a_1\|_{A_1})$$

Il est facile de voir que  $t \rightarrow K(t, a)$  est une fonction croissante concave.

Définition 1. Pour  $0 < \theta < 1$  ;  $1 \leq p \leq +\infty$  on note  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$  l'espace des  $a$  tels que  $\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a))^p \frac{dt}{t} < +\infty$

Nous aurons besoin d'une variante de cette méthode, introduite aussi par Peetre, qui est la suivante

2. Méthode L. Peetre [3].

Pour  $0 < p_0, p_1 < +\infty$  et  $t > 0$  on définit sur  $A_0 + A_1$  la quantité suivante : 
$$L_{p_0, p_1}(t, a) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0}^{p_0} + t \|a_1\|_{A_1}^{p_1})$$

Définition 2. Pour  $0 < \theta < 1, 0 < p \leq +\infty$  on note  $(A_0, A_1)_{\theta, p; L}$  l'espace des  $a$  tels que  $\int_0^\infty (t^{-\theta} L_{p_0, p_1}(t, a))^p \frac{dt}{t} < +\infty$ .

3. Méthode des traces. Lions [2].

Pour  $\alpha_0, \alpha_1, p_0, p_1$  vérifiant les conditions  $1 \leq p_0, p_1 \leq +\infty; \alpha_0 + \frac{1}{p_0} > 0; \alpha_1 + \frac{1}{p_1} < 1$  on définit l'espace suivant :

$$W(A_0, A_1) = \{u \in L^1_{loc}(\theta, \infty; A_0 + A_1) \mid t^{\alpha_0} u \in L^{p_0}(0, \infty, A_0) \\ t^{\alpha_1} \frac{du}{dt} \in L^1(0, \infty, A_1)\}$$

$W(A_0, A_1) \subset C^0([0, \infty[, A_0 + A_1)$  et donc on peut donner la

Définition 3.  $T(\alpha_0, p_0, \alpha_1, p_1; A_0, A_1) = \{u(o) \mid u \in W(A_0, A_1)\}$

Le lieu entre ces 3 méthodes est donné par le résultat suivant. Peetre [3], [4]

Proposition 1. a)  $(A_0, A_1)_{\theta, p; L} = (A_0, A_1)_{\tilde{\theta}, \tilde{p}}$  où

$$\frac{1-\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{p_0}{p_1}; \quad \tilde{p} = ((1-\theta)p_0 + \theta p_1) p.$$

b)  $T(\alpha_0, p_0, \alpha_1, p_1; A_0, A_1) = (A_0, A_1)_{\theta, p}$  où

$$\theta = \frac{\alpha_0 + \frac{1}{p_0}}{\alpha_0 + \frac{1}{p_0} + 1 - \alpha_1 - \frac{1}{p_1}}; \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

EXEMPLES.

1.  $A_0 = L^1(\Omega); A_1 = L^\infty(\Omega)$ .

On définit  $(A_0, A_1)_{1-\frac{1}{p}, q}$ ,  $q = L^{p,q}(\Omega)$  espaces de Lorentz et  $L^{p,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ .

2.  $A_0 = L^{p_0, q_0}(\Omega); A_1 = L^{p_1, q_1}(\Omega)$   $p_0 \neq p_1$  alors

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} = L^{p, q}(\Omega) \quad \text{où} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

$$\underline{3} . A_0 = W^{1,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i=1 \dots n \} \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$A_1 = L^p(\Omega) \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

On définit  $(A_0, A_1)_{\theta, q} = B_q^{1-\theta, p}(\Omega)$  espaces de Besov

$$\text{On a } B_p^{s,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy < +\infty \}$$

pour  $0 < s < 1 ; 1 \leq p < +\infty$

Si  $p = 2$  on note  $B_2^{s,2} = H^s(\Omega)$  espace de restriction à  $\Omega$  des fonctions de  $H^s(\mathbb{R}^n) = \{ u \in S'(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$  où  $\hat{u}$  désigne la transformée de Fourier.

INTERPOLATION NON LINEAIRE : 1<sup>er</sup> type.

Supposons pour simplifier  $A_0 \subset A_1$  et  $B_0 \subset B_1$ .

Théorème 1 : Peetre [1], Tartar [3].

Soit  $T$  une application de  $A_1$  dans  $B_1$ , qui applique  $A_0$  dans  $B_0$  et qui vérifie :

$$\| T a - T b \|_{B_1} \leq c \| a - b \|_{A_1}^\alpha \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad \forall a, b \in A_1$$

$$\| T a - T b \|_{B_0} \leq c \| a - b \|_{A_0}^\beta \quad 0 < \beta \leq 1. \quad \forall a, b \in A_0$$

alors si  $0 < \theta < 1 ; 1 \leq p < +\infty$   $T$  applique  $(A_0, A_1)_{\theta, p} = X$  dans

$$Y = (B_0, B_1)_{\theta, q} \quad \text{où } \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et } q = \max(1, \frac{p}{(1-\theta)\beta + \theta\alpha})$$

$$\text{et on a } \| T a - T b \|_Y \leq c \| a - b \|_X^{(1-\theta)\beta + \theta\alpha} \quad \forall a, b \in X.$$

Plusieurs généralisations sont possibles. Pour les applications il est utile de supprimer l'hypothèse :  $T$  holdérienne de  $A_0$  dans  $B_0$  pour la remplacer par  $T$  bornée au sens  $\| T a \|_{B_0} \leq c \| a \|_{A_0}^\beta. \quad \forall a \in A_0.$

En particulier on peut montrer : Tartar [3]

Théorème 2 : On suppose que

$$\| T a - T b \|_{B_1} \leq f(\| a \|_{A_1}, \| b \|_{A_1}) \| a - b \|_{A_1}^\alpha \quad \forall a, b \in A_1 \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$\| T a \|_{B_0} \leq g(\| a \|_{A_1}) \| a \|_{A_0}^\beta \quad \forall a \in A_0. \quad 0 < \beta.$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions continues sur  $\overline{\mathbb{R}_+^2}$  et  $\overline{\mathbb{R}_+}$ .

Alors  $T$  applique  $X = (A_0, A_1)_{\theta, p}$  dans  $Y = (B_0, B_1)_{\eta, q}$  avec  $\eta$  et  $q$  comme au théorème 1. De plus on a

$$\|T a\|_Y \leq h(\|a\|_{A_1}) \|a\|_X^{(1-\eta)\beta + \eta\alpha}$$
 où la fonction  $h$  vaut

$$h(t) = c g(2t)^{1-\eta} f(t, 2t)^\eta .$$

INTERPOLATION NON LINEAIRE : 2ème type.

On peut développer une théorie générale pour les espaces métriques : Gustarsson [1]. On considère ici une définition un peu différente et dans un cas assez particulier où les 3 méthodes linéaires introduites plus haut peuvent être généralisées.

Soit  $\lambda > -1$  ;  $1 \leq q_0, q_1 \leq +\infty$  .  $0 \leq s_0 \leq 1$

$$A_0 = \{u : |u|^\lambda u \in B_{q_0}^{s_0, q_0}(\Omega)\}$$
 muni de la distance

$$d(u, v) = \| |u|^\lambda u - |v|^\lambda v \|_{B_{q_0}^{s_0, q_0}(\Omega)}$$

$$A_1 = L^{q_1}(\Omega) .$$

Remarquons que  $A_0$  et  $A_1$  sont plongés dans  $L^1 + L^\infty$  .

1 pour  $t > 0$  et  $a \in A_0 + A_1$  on définit

$$K(t, a) = \inf_{a=a_0+a_1} (\| |a_0|^\lambda a_0 \|_{B_{q_0}^{s_0, q_0}} + t \| a_1 \|_{L^{q_1}})$$

Définition 1 bis . Pour  $0 < \theta < 1$  ;  $0 < p \leq +\infty$  on note  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$

l'ensemble des  $a$  :  $\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a))^p \frac{dt}{t} < +\infty$  .

2 pour  $t > 0$  ;  $0 < p_0, p_1 < +\infty$  et  $a \in A_0 + A_1$  on définit

$$L_{p_0, p_1}(t, a) = \inf_{a=a_0+a_1} (\| |a_0|^\lambda a_0 \|_{B_{q_0}^{p_0, q_0}} + t \| a_1 \|_{L^{q_1}})$$

Définition 2 bis . Pour  $0 < \theta < 1$  ;  $0 < p \leq +\infty$  on note  $(A_0, A_1)_{\theta, p; L}$

l'ensemble des  $a$  :  $\int_0^\infty (t^{-\theta} L_{p_0, p_1}(t, a))^p \frac{dt}{t} < +\infty$  .

3 pour  $\alpha_0, p_0, \alpha_1, p_1$  vérifiant  $1 \leq p_0, p_1 \leq +\infty$  ;  $\alpha_0 + \frac{1}{p_0} = 0$  ;  $\alpha_1 + \frac{1}{p_1} < 1$   
 on définit  $W(A_0, A_1) = \{ u : ]0, \infty[ \rightarrow A_0 + A_1 : t^{\alpha_0} |u|^\lambda \in L^{p_0}(0, \infty ; B_{q_0}^{s_0, q_0})$   
 $t^{\alpha_1} \frac{du}{dt} \in L^{p_1}(0, \infty ; L^{p_1}) \}$

Définition 3 bis :  $T(\alpha_0, p_0, \alpha_1, p_1, A_0, A_1) = \{ u(0) ; u \in W(A_0, A_1) \}$ .

Proposition 1 bis : identique à la proposition 1.

Ces espaces introduits ont la propriété d'interpolation suivante (dont la démonstration est identique à celle du théorème 2).

On suppose  $A_0 \subset A_1$  (on utilisera pour montrer cela le théorème de Sobolev fractionnaire Peetre [ 5 ]).

On suppose  $B_0 \subset B_1$  où  $B_0$  et  $B_1$  sont soit un couple d'espaces de Banach soit un couple ayant des propriétés analogues à  $A_0, A_1$  c'est à dire

$$B_0 = \{ a : |a|^\mu, a \in B_{r_0}^{t_0, r_0} \} \quad B_1 = L^{r_1}$$

Soit  $T$  une application de  $A_1$  dans  $B_1$  et de  $A_0$  dans  $B_0$  vérifiant

$$\| T a - T b \|_{B_1} \leq f(\| a \|_{A_1}, \| b \|_{A_1}) \| a - b \|_{A_1}^\alpha$$

$$\| T a \|_{B_0} \leq g(\| a \|_{A_1}) \| a \|_{A_0}^\beta$$

où  $\| |a| \|_{A_0} = \| |a|^\lambda a \|_{B_{q_0}^{s_0, q_0}}$  et la définition analogue pour  $\| |T a| \|_{B_0}$

si  $B_0$  est un espace analogue.

Théorème 2 bis : Sous les hypothèses ci-dessus  $T$  envoie  $(A_0, A_1)_{\theta, p}$  dans  $(B_0, B_1)_{\eta, q}$  où  $\eta, q$  sont définis au théorème 1.

Remarquons pour finir que l'on sait caractériser certains des espaces obtenus. Plus précisément on a le

Théorème 3 : Soit  $A_0 = \{ a | |a|^\lambda a \in B_{q_0}^{s_0, q_0} \}$   $A_1 = L^{q_1}$ . Pour  $0 < \theta < 1$

On définit  $q_\theta$  par  $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ . Alors on a

$$(A_0, A_1)_{\theta, q_\theta} = \{ a | |a|^{\lambda(1-\theta)} a \in (B_{q_0}^{s_0, q_0}, L^{q_1})_{\theta, q_\theta} \}$$

Notons que si  $S_0 < 1$  . cet espace est  $B_{q_\theta}^{s_0(1-\theta), q_\theta}$

On trouvera dans Tartar [3] d'autres généralisations et quelques applications.

## BIBLIOGRAPHIE

- BROWDER (F.E.) [1] Remarks on Nonlinear Interpolation in Banach Spaces. Journal of Functional Analysis 4, 390-403 (1969).
- GUSTARSSON (J.) [1] Interpolation of Metric Spaces. University of Lund 1971
- LIONS (J.L.) [1] Some Remarks on Variational Inequalities. Proceedings of International Conference on Functional Analysis. Tokyo. April 1969.
- [2] Théorèmes de Traces et d'Interpolation. I - V. Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa (3) 13, 389-403 (1959) ; ibidem 14, 317-331 (1960) ; J Maths Pures Appl. (9) 42, 195-203 (1963) ; Math. Ann. 151, 42-56 (1963) ; An. Acad. Brasil. Ci (1963).
- LORENTY. (G.G.), SHIMOYAKI (T.) [1] Majorants for Interpolation Theorems. Publ. Ramanujan Inst. n° 1 (1968/69) 115-122.
- [2] Interpolation theorems for Operators in Function Spaces. Journal of Functional Analysis 2. 31-51 (1968).
- PEETRE (J.) [1] Interpolation of Lipschitz Operators and Metric Spaces. Mathematica Cluj. 12 (1970) 325-334.
- [2] A theory of Interpolation of Normed Spaces. Lectures Notes Brasilia (1963) (Notas de Matematica n° 39. 1968).
- [3] A New Approach in Interpolation Spaces. Studia Matematica T. XXXIV (1970) 23-42.
- [4] Sur le Nombre de Paramètres dans la Définition de Certains Espaces d'Interpolation. Recherche. Mat. 12 (1963) 248-261.
- [5] Espaces d'Interpolation et Théorème de Sobolev. Ann. Inst. Fourier 16 (1966) 279-317.
- PEETRE (J.) SPARR (G.) [1] Interpolation of Normed Abelian Groups. A paraître dans Ann. Math. Pures. Appl.
- SHIMOYAKI (T.) [1] An Interpolation Theorem on Banach Function Spaces. Studia Mathematica T. XXXI (1968) 233-240.
- TATAR (L.) [1] Théorèmes d'Interpolation Non Linéaire et Application. C.R.A.S. t 270 (1970) 1729-1731.
- [2] Théorèmes de Traces Non Linéaires et Applications. C.R.A.S. t 271 (1970) 789-791.
- [3] Thèse PARIS. avril 1971.

11, rue Servandoni  
PARIS 6ème (France)