

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN SCHMETS

Espaces $C(X)$ tonnelé, infra-tonnelé et σ -tonnelé

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 351-355

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__351_0

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ESPACES $C(X)$ TONNELÉ, INFRA-TONNELÉ ET σ -TONNELÉ

par

Jean SCHMETS

1. Soit X un espace topologique complètement régulier et séparé et soit $C(X)$ l'espace des fonctions continues dans X , muni de la topologie "compact-ouvert", c'est-à-dire du système des semi-normes p_K [2] où K parcourt l'ensemble des compacts de X , p_K étant défini par :

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|, \quad \forall f \in C(X).$$

Nous désignons par $C^{**}(X)$ [resp. $C_s^{**}(X)$] le dual de $C(X)$ {resp. le dual de $C(X)$ } muni de la topologie $\sigma[C^{**}(X), C(X)]$.

Nous notons τ les éléments de $C^{**}(X)$. En particulier, pour tout $x \in X$, la loi τ_x définie dans $C(X)$ par :

$$\tau_x(f) = f(x), \quad \forall f \in C(X),$$

appartient à $C^{**}(X)$.

On sait que tout $\tau \in C^{**}(X)$ admet un support compact, que nous allons noter $[\tau]$, tel que $[c\tau] = [\tau]$ pour tout nombre complexe $c \neq 0$ et pour lequel il existe $C > 0$ tel que :

$$|\tau(f)| \leq C \sup_{x \in [\tau]} |f(x)|, \quad \forall f \in C(X).$$

De plus, si $F \subset X$ est fermé et tel que $\tau(f) = 0$ pour tout $f \in C(X)$ nul sur F , on a $[\tau] \subset F$.

Si \mathcal{B} est un sous-ensemble de $C^{**}(X)$, posons :

$$[\mathcal{B}] = \bigcup_{\tau \in \mathcal{B}} [\tau].$$

LEMME 1. - Si $\mathcal{B} \subset C^{**}(X)$ est équicontinu, $[\mathcal{B}]$ est compact dans X .

LEMME 2. - Si \mathcal{B} est borné dans $C_s^{**}(X)$, tout $f \in C(X)$ est borné sur $[\mathcal{B}]$.

LEMME 3. - Si \mathcal{B} est borné dans $C_s^{**}(X)$ et si $[\mathcal{B}]$ est compact dans X , \mathcal{B} est équicontinu.

Pour le premier lemme, on note que si \mathcal{B} est équicontinu, il existe un compact $K \subset X$ et une constante $C > 0$ tels que :

$$\sup_{\tau \in \mathcal{B}} |\tau(f)| \leq C_{D_K}(f), \quad \forall f \in C(X).$$

Dès lors, on a $[\tau] \subset K$ pour tout $\tau \in \mathcal{B}$ et $[\mathcal{B}]$ est un sous-ensemble fermé de K .

Le lemme 2 est établi dans [5] (cf. Lemme 2, p. 294).

Le lemme 3 résulte quant à lui de la première partie de la démonstration du théorème 1 dans [4].

2. Suivant [3], $C(X)$ est :

- infra-tonnelé si toute union dénombrable d'ensembles équicontinus, bornée dans $C_S^*(X)$ est équicontinue. L'espace $C(X)$ est donc infra-tonnelé si et seulement si tout tonneau qui est intersection dénombrable de voisinages de 0, fermés et absolument convexes, est un voisinage de 0.

- σ -tonnelé si tout ensemble dénombrable et borné dans $C_S^*(X)$ est équicontinu.

THEOREME 1. - L'espace $C(X)$ est tonnelé si et seulement si, pour tout fermé non compact $F \subset X$, il existe $f \in C(X)$ non borné sur F .

C'est un des résultats fondamentaux de [4] et [5] (cf. théorème 2).

THEOREME 2. - L'espace $C(X)$ est infra-tonnelé si et seulement si, pour toute union dénombrable de compacts dans X , dont l'adhérence n'est pas compacte dans X , il existe $f \in C(X)$ non borné sur cette union.

La condition est nécessaire. Soient $K_m (m \in \mathbb{N})$ des compacts dont l'adhérence de l'union ne soit pas compacte dans X . Les ensembles

$$\mathcal{K}_m = \{\tau_x : x \in K_m\}$$

sont évidemment équicontinus et on a :

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_m \right].$$

De là, par le lemme 1, $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_m$ n'est pas équicontinu, donc n'est pas borné dans $C_S^*(X)$. D'où la conclusion.

La condition est suffisante. Soient $\mathcal{B}_m \subset C_S^*(X)$ ($m \in \mathbb{N}$) des ensembles équi-continus, dont l'union est bornée dans $C_S^*(X)$. Par le lemme 1, $[\mathcal{B}_m]$ est compact pour tout m . Par le lemme 2, $\left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{B}_m \right]$ est tel que tout $f \in C(X)$ y soit borné, donc est compact vu l'hypothèse sur X . On conclut alors par le lemme 3.

THEOREME 3. - L'espace $C(X)$ est σ -tonné si et seulement si, pour toute suite $\tau_m \in C^*(X)$ telle que $[\bigcup_{m=1}^{\infty} \tau_m]$ ne soit pas compact, il existe $f \in C(X)$ non borné sur $[\bigcup_{m=1}^{\infty} \tau_m]$.

La condition est nécessaire. Soit τ_m une suite de $C^*(X)$ telle que $[\bigcup_{m=1}^{\infty} \tau_m]$ ne soit pas compact. Pour tout m , il existe un nombre complexe $c_m \neq 0$ tel que :

$$|c_m \tau_m(f)| \leq \sup_{x \in [\tau_m]} |f(x)|, \quad \forall f \in C(X).$$

Vu que $[c_m \tau_m] = [\tau_m]$ pour tout m , on a

$$[\bigcup_{m=1}^{\infty} c_m \tau_m] = [\bigcup_{m=1}^{\infty} \tau_m].$$

De là, si tout $f \in C(X)$ est borné sur $[\bigcup_{m=1}^{\infty} \tau_m]$, la suite $c_m \tau_m$ est bornée dans $C^*(X)$ car on a :

$$\sup_m |c_m \tau_m(f)| \leq \sup_{x \in [\bigcup_{m=1}^{\infty} \tau_m]} |f(x)| < \infty, \quad \forall f \in C(X).$$

Mais alors, comme $C(X)$ est σ -tonné, la suite $c_m \tau_m$ est équicontinue et, par le lemme 1, $[\bigcup_{m=1}^{\infty} c_m \tau_m]$ est compact. D'où une contradiction.

La suffisance de la condition s'établit comme dans le théorème 2.

3. Considérons le renforcement " $C(X)$ σ -tonné entraîne $C(X)$ infra-tonné". Il a lieu si, pour tout compact K , il existe $\tau \in C^*(X)$ tel que $[\tau] = K$.

Ceci pose le problème de savoir quels sont les compacts dans X qui sont support d'une fonctionnelle linéaire continue dans $C(X)$.

Une réponse partielle est donnée par la considération des compacts séparables car si $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le compact K , la fonctionnelle

$$\tau = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \tau_{x_m}$$

est telle que $[\tau] = K$. Comme tout compact métrisable est séparable et que $C(X)$ est séparable par semi-norme si et seulement si tout compact $K \subset X$ est métrisable, on voit que si $C(X)$ est σ -tonné et séparable par semi-norme, il est infra-tonné. En fait, ceci relève d'une propriété générale.

PROPOSITION 1.- Si un espace vectoriel topologique localement convexe est σ -tonnelé et séparable par semi-norme, il est infra-tonnelé.

Désignons par E l'espace considéré et munissons son dual E^* de la topologie $\sigma(E^*, E)$.

Tout ensemble équicontinu du dual a son adhérence compacte et la topologie γ est équivalente à une distance. Tout ensemble équicontinu est donc séparable. De là, toute union dénombrable d'ensembles équicontinus est séparable. D'où la conclusion si l'espace est σ -tonnelé.

4. Le renforcement " $C(X)$ infra-tonnelé entraîne $C(X)$ tonnelé" a lieu si tout fermé dans X est l'adhérence d'une union dénombrable de compacts dans X . C'est notamment le cas si tout fermé est séparable.

Cependant, en ce qui concerne le renforcement " $C(X)$ σ -tonnelé entraîne $C(X)$ tonnelé", signalons le résultat suivant, établi dans [3].

PROPOSITION 2. - Si un espace vectoriel topologique localement convexe est σ -tonnelé et séparable, il est tonnelé.

5. Voici enfin une démonstration très simple d'un exemple assez général d'espaces $C(X)$ tonnelés; on peut aussi recourir aux μ -espaces [1] pour l'établir.

PROPOSITION 3. - S'il existe dans X une métrique plus faible, $C(X)$ est tonnelé.

Soit F un fermé dans X tel que tout $f \in C(X)$ soit borné sur F ; établissons que F est compact.

Désignons par d la métrique plus faible.

Etablissons tout d'abord que si la suite $x_m \in F$ converge pour d vers $x_0 \in X$, alors x_m converge vers x_0 dans X . Procédons par l'absurde: soit $x_m \in F$ une suite convergente pour d vers $x_0 \in X$ et non-convergente dans X ; quitte à considérer une sous-suite, on peut évidemment supposer qu'il existe un voisinage V de x_0 qui ne contient aucun des x_m . Il existe alors $f \in C(X)$ égal à 1 dans $X \setminus V$ et à 0 dans un voisinage de x_0 . Dès lors, la fonction f définie dans X par :

$$f(x) = \begin{cases} f'(x)[d(x, x_0)]^{-1} & \text{si } x \in X \setminus \{x_0\} \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

appartient à $C(X)$ et n'est pas bornée sur F , d'où une contradiction.

Cela étant, F est fermé pour d et d γ est équivalent à la topologie

induite par X .

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que F est pseudo-compact pour la distance d car toute fonction f continue pour d dans F admet un prolongement \tilde{f} continu pour d à X , donc \tilde{f} appartient à $C(X)$ et \tilde{f} est borné sur F .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BUCHWALTER (H.). - Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier, Séminaire Choquet, 9 (1969-1970), 14-01, 14-15.
- [2] DE WILDE (M.), GARNIR (H.G.), SCHMETS (J.). - Analyse Fonctionnelle, I, Birkhäuser, Basel, 1968.
- [3] DE WILDE (M.), HOUET (C.). - On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces, Math. Ann., 192, (1971), 257-261.
- [4] NACHBIN (L.). - Topological vector spaces of continuous functions, Proc. of the Nat. Acad. of Sc., 40, (1954), 471-474.
- [5] SHIROTA (T.). - On locally convex vector spaces of continuous functions, Proc. Japan Acad. 30, (1954), 294-298.
- [6] WARNER (S.). - The topology of compact convergence on continuous functions spaces, Duke Math. J., 25, 1958, 265-282.

Jean SCHMETS
Université de Liège
Institut de Mathématiques
15 avenue des Tilleuls
B 4000 LIÈGE (Belgique)
