J. FORT

Contribution à l'étude des éléments tertiaires et isotypiques dans les modules et les $(\mathcal{T})$-algèbres

Mémoires de la S. M. F., tome 1 (1964)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1964__1__1_0>

Bull. Soc. math. France,
mémoire 1, 1964, IV + 99 p.

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES ELEMENTS TERTIAIRES ET ISOTYPIQUES DANS LES MODULES ET LES $(\mathfrak{C})$-ALGEBRES

par

Jacques FORT

-:-

Ce travail porte essentiellement sur les deux notions suivantes :

1/ La notion d'élément tertiaire d'une $(\mathfrak{C})$-algèbre (L) , introduite et étudiée par L. LESIEUR et R. CROISOT dans [13] , [14] , [15] , et [16][1] . Lorsque (L) est le treillis des sous-modules d'un module U sur un anneau $\mathfrak{E}$ non nécessairement commutatif, et que $(\mathfrak{C})$ est le treillis des idéaux bilatères de $\mathfrak{E}$, la notion de sous-module tertiaire généralise alors celle de sous-module primaire définie dans le cas où $\mathfrak{E}$ est un anneau commutatif (cf. N. BOURBAKI, Algèbre commutative, chapitre 4).

2/ La notion de sous-module isotypique d'un module U introduite par P. GABRIEL, et appliquée à l' $\cap$ -décomposition d'un sous-module en sous-modules isotypiques (cf. [10]) ; tous les résultats que nous utilisons ici figurent au chapitre X de [16] , en liaison étroite avec la notion de sous-module tertiaire.

Nous nous proposons dans ce travail, en suivant les suggestions de Monsieur le Professeur L. LESIEUR, d'étudier les questions suivantes :

1/ S'affranchir, partiellement ou totalement, des conditions de chaine ascendante (ou descendante) portant sur les résiduels à gauche et à droite des sous-modules d'un module U (conditions figurant à l'axiome (D) de [13] , I ; ou à l'axiome D du chapitre III de [16]) ; et étudier, dans ces conditions nouvelles, les sous-modules tertiaires, les radicaux tertiaires, et les sous-modules unirésidués.

2/ Définir une notion d'élément injectif et d'enveloppe injective dans les treillis modulaires, $\cap$ -continu et complet ; et utiliser ces notions pour introduire celle d'élément isotypique dans un treillis modulaire noethérien (ou artinien).

---

(1) cf. bibliographie aux deux dernières pages.

3/ Comparer cette notion d'élément isotypique à celle d'élément tertiaire.

Nous avons divisé notre exposé en onze chapitres.

L'étude du radical tertiaire d'un sous-module et des sous-modules tertiaires d'un $\mathcal{E}$-module à gauche U , est conduite au chapitre I , dans la situation la plus générale. Cette étude est précisée, sous une condition (E) assez large, au chapitre II ; nous avons pu ainsi étendre à des modules ne vérifiant pas nécessairement l'axiome (D) , de nombreux résultats de L. LESIEUR et R. CROISOT. Lorsque cette extension n'était qu'une simple transposition, nous n'avons indiqué que l'énoncé correspondant ; lorsqu'elle a nécessité au contraire une élaboration originale, nous avons donné intégralement les démonstrations.

La comparaison des notions de sous-module tertiaire et de sous-module unirésidué est abordée au chapitre III, sous la considération des faits suivants : on sait que, d'une part, tous les exemples de modules ou d'anneaux construits pour tenter de séparer ces deux notions ont été -jusqu'à présent- inopérants ; et que, d'autre part il n'a pas été obtenu d'éventuel théorème général d'équivalence des deux notions. Cette équivalence est cependant connue dans le cas d'un module sur un anneau commutatif, et dans le cas d'un anneau artinien à gauche (cf. § 7 et 8 de [13] , II). Nous étendons cette équivalence au cas des modules sur un anneau artinien à gauche (théorème 3.3) ; deux autres cas d'équivalence sont abordés, et un théorème de transfert (théorème 3.1) permet de ramener le problème au cas des idéaux d'un anneau -tout au moins dans des conditions assez usuelles-

De la structure de module de U , nous ne conservons au chapitre IV (et jusqu'au chapitre X), que celle du treillis (L) de ses sous-modules ; et l'étude porte essentiellement sur un treillis (L) modulaire, complet et $\cap$-continu. Le chapitre IV précise et indique quelques propriétés des treillis modulaires portant sur les quotients semblables et sur les unions (et intersections) directes, propriétés qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

Pour introduire les notions d'éléments injectifs dans (L) et d'enveloppe injective d'un élément de (L) , nous nous sommes volontairement limités à la considération des seuls éléments de (L) , et nous n'avons pas cherché à plonger

(L) dans un treillis (L') plus riche en propriétés que (L) -ce qui est le cas par exemple du treillis des sous-modules d'un module M , lorsque M est plongé dans un module injectif-. Nos définitions ont cependant été choisies de telle sorte qu'elles coïncident le plus souvent avec les définitions habituelles correspondantes, dans le cas particulier où (L) est le treillis des sous-modules d'un module injectif.

Aux chapitres V et VI sont introduites les notions d'extension essentielle d'un élément donné de (L) , et d'élément complément de (L) ; leurs propriétés élémentaires sont étudiées. Les éléments de (L) qui ne possèdent pas d'extension essentielle propre ont été appelés injectifs, bien qu'ils coïncident avec les éléments compléments de (L) -théorème 6.1-. Ce dimorphisme d'écriture a été maintenu afin de conserver l'analogie des énoncés des propriétés étudiées avec ceux des propriétés correspondantes que nous connaissons, touchant les modules.

Nous prouvons au chapitre VII l'existence "d'enveloppes injectives" d'un élément donné de (L) , qui sont caractérisées par des énoncés de même forme que ceux portant sur les enveloppes injectives d'un module (théorème 7.2), à l'exception cependant de leur unicité (à un isomorphisme près).

Au chapitre VIII les injectifs (ou compléments) extrêmaux de (L) sont étudiés en détail, et leurs diverses caractérisations sont fondamentales pour l'étude des applications faite aux chapitres suivants.

Le treillis (L) est supposé noethérien (ou artinien) au chapitre IX (ainsi qu'aux deux derniers chapitres) ; Nous y donnons d'abord un théorème de décomposition d'un élément complément de (L) en intersection de compléments maximaux de (L) (théorème 9.1). Puis nous étendons un théorème de G. AZUMAYA à une classe de treillis (L) satisfaisant à une condition supplémentaire (S) (théorème 9.2) ; et nous donnons une caractérisation des modules injectifs portant uniquement sur le treillis des sous-modules de modules extensions faciles à construire (théorème 9.3)

Une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathfrak{S}$ des quotients co-irréductibles de (L) (définition 10.2 et proposition 10.1) nous a permis de définir au chapitre X , la notion de Γ-types de quotients co-irréductibles attachés à un élément donné X de (L) ; Γ est une classe d'isomorphismes de quotients pouvant être choisie ultérieurement de plusieurs façons intéressantes. Il est alors possible, pour chaque choix de Γ , de développer une théorie des éléments Γ-isotypiques de (L) , et de décomposer les éléments de (L) en intersection réduite d'éléments Γ-isotypiques (théorèmes 10.2 et 10.3).

Au chapitre XI, nous appliquons les résultats du chapitre X aux ($\mathcal{C}$)-algèbres modulaires (L) et aux modules. Nous déterminons des conditions suffisantes portant sur la classe Γ pour qu'un élément Γ-isotypique de (L) soit tertiaire, par l'étude des résiduels essentiels de cet élément (théorème 11.1) ; enfin il est possible de choisir Γ dans le cas des modules, pour obtenir une théorie des Γ-types et des sous-modules Γ-isotypiques équivalente à celle, connue, des sous-modules isotypiques (théorème 11.3).

Je tiens à exprimer ici toute ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur L. LESIEUR rapporteur de cette thèse ; ses enseignements et ses conseils m'ont été d'un grand secours pour l'élaboration de ce travail, et pour sa rédaction définitive.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur le Professeur P. DUBREIL qui m'a fait l'honneur de présider mon Jury, et à Monsieur le Professeur A. REVUZ qui a bien voulu me proposer un deuxième sujet de thèse.

Je suis également très reconnaissant envers Monsieur le Professeur R. CROISOT auprès de qui j'ai toujours trouvé l'accueil le plus favorable.

-:-

CHAPITRE I

-:-

RADICAL TERTIAIRE D'UN SOUS-MODULE, SOUS-MODULES TERTIAIRES.

-:-

Les notations et symboles suivants seront en usage principalement au cours des chapitres I , II , III .

$\mathcal{E}$ désigne un anneau non nécessairement commutatif ou unitaire. U désigne un $\mathcal{E}$-module à gauche. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont représentés par des lettres grecques minuscules, ceux de U par des minuscules ordinaires, les idéaux bilatères de $\mathcal{E}$ par des majuscules manuscrites, les idéaux à gauche par des gothiques, les sous-modules par des majuscules d'imprimerie.

(x) représente le sous-module engendré par $x \in U$, $(\alpha|$ l'idéal à gauche engendré par $\alpha \in \mathcal{E}$, (α) l'idéal bilatère engendré par $\alpha \in \mathcal{E}$. Le symbole $\alpha \mathcal{E}^* x$ représente la réunion de l'élément αx et de tous les éléments $\alpha \rho x$, ρ décrivant $\mathcal{E}$.

Pour tout sous-module X de U et tout sous-ensemble non vide $S \subsetneq U$ la notation $X \,^{\bullet}.\, S$ représente l'ensemble $\xi \in \mathcal{E}$ tels que $\xi s \in X$, $\forall s \in S$; c'est un idéal à gauche de $\mathcal{E}$. Si S est sous-module de U , $X \,^{\bullet}.\, S$ est un idéal bilatère de $\mathcal{E}$ appelé résiduel à gauche de X par S , il est propre si $S \not\subseteq X$.

Pour tout élément γ du centre de $\mathcal{E}$ et tout sous-module X de U , la notation $X \,.^{\bullet}\, \gamma$ représente l'ensemble des $x \in U$ tels que $\gamma x \in X$; c'est un sous-module de U .

Pour tout idéal bilatère $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$ et tout sous-module X de U , la notation $X \,.^{\bullet}\, \mathcal{A}$ est l'ensemble des $x \in U$ tels que $\alpha x \in X$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$; c'est un sous-module de U appelé résiduel à droite de X par $\mathcal{A}$.

1. RADICAL TERTIAIRE D'UN SOUS-MODULE.

Les deux définitions qui suivent sont celles données dans [13] , II , (définitions 6.1 et 6.2) ;

DEFINITION 1.1 - Soit X un sous-module quelconque de U. Les éléments α de $\mathcal{E}$ vérifiant la condition :

$$a \in X \Longrightarrow \exists\, a' \in (a) \text{ tel que } a' \notin X \text{ et } \alpha\, \mathcal{E}^*\, a' \subseteq X$$

forment un <u>idéal</u> <u>bilatère</u> $\mathfrak{R}(X)$ de $\mathcal{E}$. $\mathfrak{R}(X)$ s'appelle le <u>radical</u> <u>tertiaire</u> du sous-module X.

DEFINITION 1.2 - On dit qu'un sous-module T est <u>tertiaire</u> lorsqu'il vérifie la propriété suivante : $\alpha\, \mathcal{E} * b \subseteq T$ et $b \notin T \Longrightarrow \alpha \in \mathfrak{R}(T)$.

PROPOSITION 1.1(1) - $X \neq U$ étant sous-module de U, on a :

a) $\mathfrak{R}(X) = \bigcap\limits_{a \notin X} \mathfrak{R}(X \,^{\bullet}\!.\, a)$.

b) si γ est élément du centre de $\mathcal{E}$: $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(X \,.^{\bullet}\, \gamma)$.

a) si $\mathcal{E} a \not\subseteq X$, on a : $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(X \,^{\bullet}\!.\, a)$; en effet soient $\rho \in \mathfrak{R}(X)$ et $\beta \notin X \,^{\bullet}\!.\, a$; il existe alors $x \in (\beta a)$ tel que $x \notin X$ et $\rho\, \mathcal{E}^*\, x \subseteq X$. Mais x est de la forme $x = \gamma a$ avec $\gamma \in (\beta|$ et $\gamma \notin X \,^{\bullet}\!.\, a$; comme $\rho\, \mathcal{E}^*\, x \subseteq X$ est équivalent à $\rho\, \mathcal{E}^*\, \gamma \subseteq X \,^{\bullet}\!.\, a$, il résulte bien $\rho \in \mathfrak{R}(X \,^{\bullet}\!.\, a)$.

Si $\mathcal{E} a \subseteq X$, on a $X \,^{\bullet}\!.\, a = \mathcal{E}$ et $\mathfrak{R}(X \,^{\bullet}\!.\, a) = \mathcal{E} \supseteq \mathfrak{R}(X)$.
Réciproquement soit $\alpha \in \bigcap\limits_{a \notin X} \mathfrak{R}(X \,^{\bullet}\!.\, a) = \mathfrak{F}$, idéal bilatère de $\mathcal{E}$
Soit aussi $b \notin X$. Montrons qu'il existe $b' \in (b)$, $b' \notin X$ avec $\alpha\, \mathcal{E}^*\, b' \subseteq X$. (équivalent à $\alpha \in \mathfrak{R}(X)$).

Si $\alpha\, \mathcal{E}^*\, b \subseteq X$, on choisit $b' = b$.

Si $\alpha\, \mathcal{E}^*\, b \not\subseteq X$, ou bien $\alpha \lambda b \notin X$ pour un certain $\lambda \in \mathcal{E}$; par définition de $\mathfrak{F}$, $\alpha \in \mathfrak{R}(X \,^{\bullet}\!.\, \lambda b)$, et il existe $\alpha' \in (\alpha|$ tel que $\alpha' \notin X \,^{\bullet}\!.\, \lambda b$ et $\alpha\, \mathcal{E}^*\, \alpha' \subseteq X \,^{\bullet}\!.\, \lambda b$. On choisit dans ce cas $b' = \alpha' \lambda b$; ou bien $\alpha b \notin X$; $\alpha \in \mathfrak{R}(X \,^{\bullet}\!.\, b)$ et il existe $\alpha'' \in (\alpha|$ tel que $\alpha'' \notin X \,^{\bullet}\!.\, b$ et $\alpha\, \mathcal{E}^*\, \alpha'' \subseteq X \,^{\bullet}\!.\, b$. On choisit dans ce cas $b' = \alpha'' b$.

b) Si $\rho \in \mathfrak{R}(X)$ et $b \notin X \,.^{\bullet}\, \gamma$, ou $\gamma b \notin X$, on peut trouver $x \in (\gamma b)$ tel que $x \notin X$ et $\rho\, \mathcal{E}^*\, x \subseteq X$; x est de la forme $x = \gamma b'$ avec $b' \in (b)$ puisque γ appartient au centre de $\mathcal{E}$.
$b' \notin X \,.^{\bullet}\, \gamma$; et $\rho\, \mathcal{E}^*\, \gamma\, b' \subseteq X$ entraine $\gamma \rho\, \mathcal{E}^*\, b' \subseteq X$, ou $\rho\, \mathcal{E}^*\, b' \subseteq X \,.^{\bullet}\, \gamma$; par suite $\rho \in \mathfrak{R}(X \,.^{\bullet}\, \gamma)$.
Dans le cas où $X \,.^{\bullet}\, \gamma = U$, on a encore $\mathfrak{R}(X \,.^{\bullet}\, \mathcal{E}) = \mathcal{E} \supseteq \mathfrak{R}(X)$.

---

(1) cf. proposition 1.1 de [8], II.

PROPOSITION 1.2 - Pour les sous-modules X_1 , X_2 ,..., X_n , on a :

$$\mathcal{R}(X_1) \cap \mathcal{R}(X_2) \cap \dots \cap \mathcal{R}(X_n) \subseteq \mathcal{R}(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n)$$

Il suffit de faire la démonstration pour deux sous-modules X_1 et X_2 . Soient $\alpha \in \mathcal{R}(X_1) \cap \mathcal{R}(X_2)$ et $b \notin X_1 \cap X_2$. On a, par exemple, $b \notin X_1$; il existe alors $b' \in (b)$ tel que $b' \notin X_1$ et $\alpha \mathfrak{S}^* b' \subseteq X_1$.

Si $\alpha \mathfrak{S}^* b' \subseteq X_2$, alors $b' \notin X_1 \cap X_2$ et $\alpha \mathfrak{S}^* b' \subseteq X_1 \cap X_2$ entrainent $\alpha \in \mathcal{R}(X_1 \cap X_2)$.

Si $\alpha \mathfrak{S}^* b' \not\subseteq X_2$, deux éventualités :

- ou bien $\alpha b' \notin X_2$, et $\alpha \in \mathcal{R}(X_2)$ entraine l'existence de $b'' \in (\alpha b')$ tel que $b'' \notin X_2$ et $\alpha \mathfrak{S}^* b'' \subseteq X_2$. Mais $b'' \in (b')$ entraine : $\alpha \mathfrak{S}^* b'' \subseteq X_1 \cap X_2$ avec $b'' \notin X_1 \cap X_2$, et par suite $\alpha \in \mathcal{R}(X_1 \cap X_2)$.
- ou bien $\alpha \lambda b' \notin X_2$ pour un certain $\lambda \in \mathfrak{S}$; on raisonne comme précédemment en remplaçant b' par $\lambda b'$.

Cette proposition étend, au cas des modules, sans imposer de conditions de chaines sur les sous-modules de U ou sur les idéaux de $\mathfrak{S}$, la propriété 1.6 de [13] , III .

2. SOUS-MODULES TERTIAIRES.

DEFINITION 1.3. - Rappelons la définition d'un sous-module <u>secondaire</u> donnée au § 6 de [13] , I ,

Un sous-module X est dit secondaire si $\mathfrak{A} Y \subseteq X$, $Y \not\subseteq X \Longrightarrow \exists$ k_i entiers positifs (i = 0, 1,..., n ; n $\geqslant$0) et des idéaux bilatères $\mathcal{L}_i$ tels que :

$$\mathfrak{A}^{k_0} \mathcal{L}_1 \mathfrak{A}^{k_1} \mathcal{L}_2 \dots \mathcal{L}_n \mathfrak{A}^{k_n} U \subseteq X \quad \text{et} \quad X \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{L}_i = X$$

PROPOSITION 1.3 -

a) Tout sous-module secondaire est tertiaire.

b) Tout sous-module tertiaire selon la définition de MM. LESIEUR et CROISOT donnée à la propriété 7.2 de [13] , I - (1) - est tertiaire selon la définition 1.2 .

a) résulte de la propriété 7.4 de [13] , I , dont la preuve n'utilise aucune condition de chaîne, et de la partie b) de la proposition.

b) est une conséquence des définitions, et est indiquée en note à la définition 2.2 de [13] , II .

REMARQUE - Il n'est pas certain que l'équivalence des définitions données dans I et II de [13] pour les éléments tertiaires, soit valable dans le cas général du présent chapitre 1. Néanmoins cette équivalence est assurée dans des conditions très larges -cf. le théorème 2.2 du chapitre 2-.

THEOREME 1.1 - Tout sous-module <u>$\cap$-irréductible</u> est <u>tertiaire</u>.

La démonstration du lemme 3.1 de [13] , II ,

"Tout idéal à gauche $\cap$-irréductible est tertiaire"

qui n'utilise que la structure de module à gauche de l'anneau, s'étend d'elle même au cas des modules.

DEFINITION 1.4 - On appelle résiduel <u>élémentaire</u> de X , un résiduel à gauche propre de X de la forme $X \,{}^{\bullet}\!\!.\, (y)$, avec $y \notin X$.

DEFINITION 1.5 - Un idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{E}$ est <u>premier à droite si</u> :

$$\alpha\, \mathcal{E}^* \beta \subseteq \mathfrak{a} \Longrightarrow \beta \in \mathfrak{a} \text{ ou } \alpha\, \mathcal{E}^* \subseteq \mathfrak{a}$$

---

(1) Rappelons la propriété 7.2 de [13] , I . Pour que X soit tertiaire il faut et il suffit qu'il vérifie la condition :

$$X \,{}^{\bullet}\!\!.\, \mathfrak{K} \supset X \text{ et } (X \,{}^{\bullet}\!\!.\, \mathfrak{K}) \cap Y \subseteq X \Longrightarrow Y \subseteq X$$

PROPOSITION 1.4 [1] - Soit $T \neq U$ un sous-module <u>tertiaire</u>, on a les propriétés :

a) $\mathfrak{R}(T) = \sum_{y \notin T} \left[T \cdot\!. (y)\right] = \bigcup_{y \notin T} \left[T \cdot\!. (y)\right]$

b) si $\mathfrak{R}(T)$ est un résiduel à gauche propre de T, il est premier.

c) $\mathcal{E} a \not\subseteq T \Longrightarrow \mathfrak{R}(T) = \mathfrak{R}(T \cdot\!. a)$

d) si γ est un élément du centre de $\mathcal{E}$,

$$\gamma U \not\subseteq T \Longrightarrow \mathfrak{R}(T) = \mathfrak{R}(T \cdot\!. \gamma)$$

e) l'idéal à gauche $T \cdot\!. a$ est premier à droite si et seulement si :

$$a \in T \cdot\!. \mathfrak{R}(T)$$

<u>Preuve de a)</u> : Soit $\rho \in \mathfrak{R}(T)$; choisissons $b \notin T$, il existe $b' \in (b)$ tel que $b' \notin T$ et $\rho\, \mathcal{E}^* b' \subseteq T$, équivalent à $\rho \in T \cdot\!. (b')$.

Inversement, $\forall y \notin T$ on a $T \cdot\!. (y) \subseteq \mathfrak{R}(T)$ car $\rho\, \mathcal{E}^* y \subseteq T$, $y \notin T$ et T tertiaire entrainent $\rho \in \mathfrak{R}(T)$.

<u>Preuve de b)</u> : Soit $\alpha\, \mathcal{E}^* \beta \subseteq \mathfrak{R}(T) = T \cdot\!. I$ et $\beta \notin \mathfrak{R}(T)$;
il existe $y \in I$, $y \notin T$ tel que $\beta\, \mathcal{E}^* y \not\subseteq T$.
D'autre part $\alpha\, \mathcal{E}^* \beta \subseteq T \cdot\!. I$ entraine $\alpha\, \mathcal{E}^* \beta\, \mathcal{E}^* y \subseteq T$
Reprenons $\beta\, \mathcal{E}^* y \not\subseteq T$:

- ou bien $\beta y \notin T$; alors $\alpha\, \mathcal{E}^* \beta y \subseteq T$ entraine $\alpha \in \mathfrak{R}(T)$, T étant tertiaire.
- ou bien $\beta \lambda y \notin T$ pour un certain $\lambda \in \mathcal{E}$; et de même $\alpha\, \mathcal{E}^* \beta \lambda y \subseteq T$ entraine $\alpha \in \mathfrak{R}(T)$.

<u>Preuve de c)</u> : Il existe $\xi \in \mathcal{E}$ tel que $\xi \notin T \cdot\!. a$. De $\rho \in \mathfrak{R}(T \cdot\!. a)$ résulte que l'on peut trouver $\xi' \in (\xi)$ tel que $\xi' \notin T \cdot\!. a$ et $\rho\, \mathcal{E}^* \xi' \subseteq T \cdot\!. a$, ou : $\xi' a \notin T$ et $\rho\, \mathcal{E}^* \xi' a \subseteq T$;
T étant tertiaire on a bien $\rho \in \mathfrak{R}(T)$. La proposition 1.1 achève la démonstration.

---

(1) cf. proposition 1.2 de [8], II.

<u>Preuve de d)</u> : Même forme de démonstration qu'à c) ; en effet $x \notin T .^{\cdot} \gamma$ et $\rho \in \mathfrak{R}(T .^{\cdot} \gamma) \Longrightarrow \exists\, x' \in (x)$ tel que $x' \notin T .^{\cdot} \gamma$ et $\rho \mathcal{E}^* x' \subseteq T .^{\cdot} \gamma$, ou : $\gamma x' \notin T$ et $\rho \mathcal{E}^* \gamma x' \subseteq T$;
T étant tertiaire : $\rho \in \mathfrak{R}(T)$. On utilise ensuite la proposition 1.1 .

<u>Preuve de e)</u> : Supposons que $T \,^{\cdot}.\, a$ soit premier à droite, et que $a \notin T .^{\cdot} \mathfrak{R}(T)$. Il existerait donc dans $\mathfrak{R}(T)$ un élément ρ tel que $\rho a \notin T$; on peut alors trouver $a' \in (\rho a)$ tel que $a' \notin T$ et $\rho \mathcal{E}^* a' \subseteq T$. Mais $a' = \rho' a$ avec $\rho' \in (\rho|$, d'où $\rho \mathcal{E}^* \rho' \subseteq T \,^{\cdot}.\, a$; $\rho \notin T \,^{\cdot}.\, a \Longrightarrow \rho \mathcal{E}^* \not\subseteq T \,^{\cdot}.\, a$.

$T \,^{\cdot}.\, a$ étant premier à droite, il vient $\rho' \in T \,^{\cdot}.\, a$, en contradiction avec $\rho' a = a' \notin T$.

Inversement soit $a \in T .^{\cdot} \mathfrak{R}(T)$; si $a \in T$ alors $T \,^{\cdot}.\, a = \mathcal{E}$ est bien idéal premier (à droite) ; si $a \notin T$, soient alors deux éléments α et β de $\mathcal{E}$ tels que $\alpha \mathcal{E}^* \beta \subseteq T \,^{\cdot}.\, a$, qui entraine $\alpha \lambda \mathcal{E}^* \beta \subseteq T \,^{\cdot}.\, a$, $\forall \lambda \in \mathcal{E}$;

l'éventualité $\beta \in T \,^{\cdot}.\, a$ assure la preuve ;

si $\beta \notin T \,^{\cdot}.\, a$, $\alpha \mathcal{E}^* \beta a \subseteq T$ et $\alpha \lambda \mathcal{E}^* \beta a \subseteq T$ entrainent :
$\alpha \in \mathfrak{R}(T)$ et $\alpha\lambda \in \mathfrak{R}(T)$ $\forall \lambda \in \mathcal{E}$ puisque T est tertiaire.
Comme par hypothèse $a \in T .^{\cdot} \mathfrak{R}(T)$, $\alpha \mathcal{E}^* a \subseteq T$ ou $\alpha \mathcal{E}^* \subseteq T \,^{\cdot}.\, a$.

REMARQUE - Il est possible de définir un "radical tertiaire" $\mathfrak{R}_E(X)$ du sous-module X, comme étant l'intersection des résiduels essentiels de X. $\mathfrak{R}_E(X)$ est aussi l'intersection des idéaux premiers à droite de la forme $X \,^{\cdot}.\, a$ (L. LESIEUR, Cours de Mathématiques approfondies, Orsay 1963) .

La proposition 1.4 montre que, dans le cas d'un sous-module <u>tertiaire</u> T, l'ensemble des éléments a tels que $T \,^{\cdot}.\, a$ soit premier à droite, coïncide avec le sous-module $T .^{\cdot} \mathfrak{R}(T)$; d'où :

$$(1) \qquad T \,^{\cdot}.\, [T .^{\cdot} \mathfrak{R}(T)] = \mathfrak{R}_E(T)$$

Pour un sous-module quelconque X, nous avons l'inclusion :

$$(2) \qquad X \,^{\cdot}.\, [X .^{\cdot} \mathfrak{R}(X)] \subseteq \mathfrak{R}_E(X)$$

En effet la première partie de la preuve de e) de la proposition 1.4, montre que si $X \,^{\cdot}.\, a$ est premier à droite, alors $a \in X .^{\cdot} \mathfrak{R}(X)$ (que X soit tertiaire ou non tertiaire) ; et il résulte bien :

$$X \,^{\bullet}.\, [X \,.^{\bullet}\, \mathcal{R}(X)] \subseteq X \,^{\bullet}.\, (a) \subseteq X \,^{\bullet}.\, a$$

En l'absence de condition de chaîne, l'égalité (1) n'est pas toujours réalisée pour un sous-module X non tertiaire, comme on peut le montrer par l'exemple 2.1 du chapitre II .

Lorsque le module vérifie, pour chacun de ses sous-modules X , la condition (E) (introduite au chapitre II), l'égalité suivante est réalisée, pour tout sous-module X :

$$\mathcal{R}(X) = X \,^{\bullet}.\, [X \,.^{\bullet}\, \mathcal{R}(X)] = \mathcal{R}_E(X)$$

Elle est conséquence de la proposition 2.4 et des inclusions :

$$\mathcal{R}(X) \subseteq X \,^{\bullet}.\, [X \,.^{\bullet}\, \mathcal{R}(X)] \subseteq \mathcal{R}_E(X)$$

PROPOSITION 1.5 - Pour qu'un sous-module $X \neq U$ soit tertiaire il faut et il suffit qu'il vérifie la propriété :

$$X \,.^{\bullet}\, (\alpha) \supset X \Longrightarrow \alpha \in \mathcal{R}(X)$$

C'est la définition 3.1 de [13] , III , restreinte aux idéaux principaux (α) de $\mathcal{E}$.

$X \,.^{\bullet}\, (\alpha) \supset X \Longrightarrow \exists\ y \notin X$, $\alpha\, \mathcal{E}^* y \subseteq X$, X tertiaire $\Longrightarrow \alpha \in \mathcal{R}(X)$.

Réciproquement, si la propriété de l'énoncé est vraie pour $X \neq U$, soit alors $\alpha\, \mathcal{E}^* y \subseteq X$, $y \notin X$; on a $y \in X \,.^{\bullet}\, (\alpha)$.
$y \notin X$ et la propriété en question entraine $\alpha \in \mathcal{R}(X)$.

THEOREME 1.2 - Si le module U est unitaire, pour que le sous-module $X \neq U$ soit tertiaire, il faut et il suffit que X ait la propriété :

$$\mathcal{E} a \not\subseteq X \Longrightarrow \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X \,^{\bullet}.\, a)$$

La condition est nécessaire d'après la proposition 1.4 c) .
Inversement, supposons que X ait la propriété et soient $\alpha \in \mathcal{E}$, $a \in U$,

tels que : $\alpha\, \mathcal{E}^*\, a \subseteq X$ et $a \notin X$ -qui entraine $\mathcal{E} a \not\subseteq X$ puisque U est unitaire-. Soit alors β choisi tel que $\beta \notin X \,{}^{\bullet}\!. \,a$; comme $\alpha\, \mathcal{E}^*\, a \subseteq X$ on a aussi : $\alpha\, \mathcal{E}^* \beta\, a \subseteq X$, ou $\alpha\, \mathcal{E}^* \beta \subseteq X \,{}^{\bullet}\!.\, a$; par suite $\alpha \in \mathfrak{R}(X \,{}^{\bullet}\!.\, a) = \mathfrak{R}(X)$, et X est bien tertiaire.

REMARQUE - Ce théorème 1.2 est inexact lorsque $\mathcal{E}$ n'a pas d'élément unité. Considérons à cet effet le demi-groupe G défini par la table de multiplication :

	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	a	b	a
c	0	0	0	0

et construisons sur le corps $Z_2 = \{0,1\}$ à deux éléments, l'algèbre $\mathcal{E}$ d'éléments générateurs a, b, c, et dont la multiplication est celle issue de la table de G . Les éléments de $\mathcal{E}$ sont :

$$0 \; , \; a \; , \; b \; , \; c \; , \; a+b \; , \; b+c \; , \; c+a \; , \; a+b+c$$

$\mathfrak{A} = \{0,a\}$ est idéal bilatère de $\mathcal{E}$. Son radical tertiaire $\mathfrak{R}$ contient les éléments a et c puisque $a\mathcal{E} = c\mathcal{E} = \{0\}$, mais ne contient pas b car $(b| = \{0,b\} = b\,\mathcal{E}^*\, b \not\subseteq \mathfrak{A}$; donc :

$\mathfrak{R} = \{0 \; , \; a \; , \; c \; , \; a+c\}$ et $\mathfrak{A}$ n'est pas tertiaire puisque $b\,\mathcal{E}^*\, c = \{0 \; , \; a\} = \mathfrak{A}$, $c \notin \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{R}$. Les <u>seuls</u> éléments x de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}x \not\subseteq \mathfrak{A}$ sont : b , a+b , b+c , a+b+c .

Les quatre résiduels $\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}\!.\, x$ correspondants contiennent a et c mais ne contiennent pas b puisque $a\mathcal{E} = c\mathcal{E} = \{0\}$ et $b\,x \notin \mathfrak{A}$.
Par suite $\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}\!.\, x = \mathfrak{R}$. On vérifie aisément que $\mathfrak{R}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$, et $\mathcal{E}x \notin \mathfrak{A} \Longrightarrow \mathfrak{R}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{A} \,{}^{\bullet}\!.\, x)$; $\mathfrak{A}$ vérifie la propriété du théorème sans être tertiaire.

DEFINITION 1.6 - Un sous-module X est dit <u>$\mathfrak{R}$-tertiaire</u>, lorsqu'il est tertiaire et que son radical tertiaire est $\mathfrak{R}$.

THEOREME 1.3 - L'intersection d'une famille finie de sous-modules $\mathfrak{R}$-tertiaires est un sous-module $\mathfrak{R}$-tertiaire.

Cet énoncé est celui de la propriété 7.6 de [13] , I , établie sous les conditions de chaîne (D) au § 1 de [13] , I , et celui du lemme 3.2 de [13] , II , établi sans utiliser de condition de chaîne, dans le cas d'un anneau. Son adaptation au cas des modules est aisée.

Le théorème 7.1 de [13] , II , relatif aux idéaux à gauche, s'adapte immédiatement au cas des sous-modules, sous forme de la proposition suivante : (donnée dans [8] , I , sous la référence "Théorème 1")

PROPOSITION 1.6 - T étant sous-module $\mathfrak{R}$-tertiaire de U , et x un élément de U , si l'on a $\mathcal{E}\, x \not\subseteq T$, l'idéal à gauche $T \,^{\bullet}.\, x$ est $\mathfrak{R}$-tertiaire dans $\mathcal{E}$.

Rappelons la démonstration : $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(T \,^{\bullet}.\, x)$ d'après la proposition 1.4 ;
si $\alpha\, \mathcal{E}^* \beta \subseteq T \,^{\bullet}.\, x$ avec $\beta \notin T \,^{\bullet}.\, x$,
$\alpha\, \mathcal{E}^*\, \beta\, x \subseteq T$ avec $\beta\, x \notin T$; T étant $\mathfrak{R}$-tertiaire : $\alpha \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(T \,^{\bullet}.\, x)$.

PROPOSITION 1.7 - T étant sous-module $\mathfrak{R}$-tertiaire de U , et γ un élément du centre de $\mathcal{E}$, si l'on a $\gamma\, U \not\subseteq T$, le sous-module $T \,.^{\bullet}\, \gamma$ est $\mathfrak{R}$-tertiaire dans U .

C'est une conséquence de la proposition 1.4 d) : $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(T \,.^{\bullet}\, \gamma)$.
On termine comme à la proposition 1.6 .

THEOREME 1.4 - T étant sous-module $\mathfrak{R}$-tertiaire de U , et S un sous ensemble non vide fini de U , si $\mathcal{E}\, S \not\subseteq T$, l'idéal à gauche $T \,^{\bullet}.\, S$ est $\mathfrak{R}$-tertiaire dans $\mathcal{E}$.

En effet $T \,^{\bullet}.\, S = \bigcap_{i=1}^{n} (T \,^{\bullet}.\, s_i)$ avec $s_i \in S$ et $s_i \notin T$ (ne sont conservés que les $s \in S$ tels que $\mathcal{E}\, s \not\subseteq T$) ; le théorème est alors conséquence de la proposition 1.6 et du théorème 1.3 .

CHAPITRE II

-:-

MODULES VERIFIANT LA CONDITION (E)

-:-

1. UNE CONDITION D'EXISTENCE DES RESIDUELS ESSENTIELS.

Rappelons la définition et la propriété suivantes :

DEFINITION 2.1 - On appelle résiduel essentiel du sous-module X, un idéal bilatère $\mathcal{P}$ tel qu'il existe un sous-module $Y \supset X$ avec $\mathcal{P} = X \cdot\!. Y$ et :

$$X \subset Z \subseteq Y \Longrightarrow X \cdot\!. Z = X \cdot\!. Y \quad , \quad Z \text{ étant sous-module de } U .$$

on dit alors que $\mathcal{P}$ est résiduel essentiel de X par rapport à Y.
C'est la définition donnée dans [15] . Dans le cas où X, Y, Z sont des éléments d'un treillis modulaire (c'est ici le cas), cette définition est équivalente à :

DEFINITION 2.1' - L'idéal $\mathcal{P}$ bilatère est résiduel essentiel du sous-module X, s'il existe un sous-module $Y \not\subseteq X$ avec $\mathcal{P} = X \cdot\!. Y$ et :

$$Z \not\subseteq X \, , \, Z \subseteq Y \Longrightarrow X \cdot\!. Z = X \cdot\!. Y \quad , \quad Z \text{ étant sous-module de } U .$$

Cette équivalence est donnée dans [15] .

PROPOSITION 2.1 -

a) Tout résiduel essentiel du sous-module $X \neq U$ est un idéal premier.

b) Si $\mathcal{P}$ est un résiduel à gauche propre maximal de $X \neq U$, c'est un résiduel essentiel de X.

Ce sont respectivement le lemme et la propriété 1 de [15] . Dans tout ce chapitre II, tous les sous-modules envisagés seront supposés vérifier la condition suivante (sauf à la proposition 2.2) :

CONDITION (E) - On dit que le sous-module $X \neq U$ vérifie la condition (E), d'existence des résiduels essentiels, si : $y \notin X \Longrightarrow \exists y' \in (y)$ tel que $y' \notin X$ et $X \cdot\!. (y')$ soit résiduel essentiel de X par rapport à (y') .

PROPOSITION 2.2 - Tout sous-module X de U , $X \neq U$, vérifie la condition (E) lorsque l'une des conditions suivantes est réalisée :

a) L'anneau $\mathcal{E}$ est <u>artinien</u> à gauche.

b) L'ensemble des résiduels élémentaires du sous module $X \neq U$ vérifie la <u>condition maximale</u> -ceci pour tout sous-module véritable X de U-.

c) Le module U est unitaire et <u>semi-simple</u>.

d) Les conditions de <u>chaîne (D)</u> de L. LESIEUR et R. CROISOT de [13] , I , sont vérifiées par tout sous-module de U .

e) L'anneau $\mathcal{E}$ vérifie (E) pour sa structure de $\mathcal{E}$-module à gauche (tous les idéaux à gauche propres de $\mathcal{E}$ vérifient (E)).

REMARQUE PRELIMINAIRE - Pour $X \neq U$, la condition (E) est équivalente à la condition (E') :

$$\mathcal{E}\, y \not\subseteq X \Longrightarrow \exists\, y' \in (y) \text{ tel que } y' \notin X \text{ , et tel que } X \,\dot{.}\, (y')$$

soit résiduel essentiel de X par rapport à (y'). En effet, visiblement, (E) entraine (E'). Inversement soit $y \notin X$; si $\mathcal{E} y \not\subseteq X$ alors (E') entraine (E) ; si $\mathcal{E} y \subseteq X$, alors $X \,\dot{.}\, (y) = \mathcal{E}$ est résiduel essentiel de X par rapport à (y)

<u>Preuve de a)</u> : On vérifie (E') . Soit $\mathcal{E}\, y \not\subseteq X$; désignons par $(\alpha|$ un idéal <u>minimal</u> parmi les idéaux à gauche monogènes $(\lambda|$ tels que $(\lambda| y \not\subseteq X$, et posons $\mathcal{P} = X \,\dot{.}\, (\alpha| y$. $\mathcal{P}$ est résiduel essentiel de X par rapport à $(\alpha| y = (\alpha y)$, en effet soit un sous-module Z tel que $Z \subseteq (\alpha| y$ et $Z \not\subseteq X$. Il existe $z \in (\alpha| y$ tel que $z \notin X$ et $z \in Z$; $z = \alpha' y$ avec $\alpha' \in (\alpha|$; $z \notin X$ entraine $(z) = (\alpha'| y \not\subseteq X$ avec $(\alpha'| \subseteq (\alpha|$, par suite $(\alpha'| = (\alpha|$ et $Z = (\alpha| y$, $X \,\dot{.}\, Z = \mathcal{P}$.

<u>Preuve de b)</u> : On vérifie (E) . Soient $y \notin X$ et $\mathcal{P} = X \,\dot{.}\, (y_0)$ un résiduel élémentaire <u>maximal</u> parmi les résiduels élémentaires $X \,\dot{.}\, (y')$ vérifiant $y' \notin X$ et $y' \in (y)$. $\mathcal{P}$ est essentiel par rapport à (y_0) car, soit un sous-module Z tel que $Z \subseteq (y_0)$ et $Z \not\subseteq X$, il existe $z \in Z$ tel que $z \notin X$; $(z) \subseteq Z \subseteq (y_0)$ et la maximalité de $\mathcal{P}$ entrainent :

$$X \,\dot{.}\, (z) = X \,\dot{.}\, Z = X \,\dot{.}\, (y_0) = \mathcal{P}$$

Preuve de c) : On vérifie (E') -dans ce cas $\mathcal{E}y \not\subseteq X$ équivaut à $y \notin X$- Soit donc $\mathcal{E}y \not\subseteq X$; par suite le sous-module $\mathcal{E}y$ différent de $\{0\}$ est semi-simple (cf. par exemple le corollaire 1 p. 33 n° 4 du § 3 chapitre 8 de [3]) et est somme directe de sous-modules simples $\mathcal{E}y_i$; $i \in I$.

$\mathcal{E}y \not\subseteq X$ entraine l'existence de $j \in I$ tel que $\mathcal{E}y_j \not\subseteq X$. Posons $\mathcal{P} = X \,^{\bullet}.\, \mathcal{E}y_j$, on a $y_j \in \mathcal{E}y$, $y_j \notin X$, et on vérifie aisément que $\mathcal{P}$ est résiduel essentiel de X relativement au sous-module simple $\mathcal{E}y_j$.

REMARQUE - Dans le cas particulier où $\mathcal{E}$ est semi-simple (en tant que $\mathcal{E}$-module à gauche), les conditions de c) sont réalisées pour tous les modules à gauche sur $\mathcal{E}$, car si $\mathcal{E}$ est semi-simple (et unitaire) tous les $\mathcal{E}$-modules à gauche sont semi-simples (cf. par exemple le théorème 4.2 de [4]).

Preuve de d) : L'axiome (D) du § 1 de [13] , I , impose la condition maximale, d'une part à l'ensemble des résiduels à gauche de X , d'autre part à l'ensemble des résiduels à droite de X .

Preuve de e) : On vérifie (E') . Soit $\mathcal{E}y \not\subseteq X$; Posons $\mathfrak{h} = X \,^{\bullet}.\, y$, $\mathfrak{h} \neq \mathcal{E}$. Il existe donc $\alpha \in \mathcal{E}$, $\alpha \notin \mathfrak{h}$. $\mathcal{E}$ vérifiant la condition (E) pour ses idéaux à gauche, il existe $\alpha' \in (\alpha|$ tel que $\alpha' \notin \mathfrak{h}$, et tel que $\mathfrak{h} \,^{\bullet}.\, (\alpha'| = \mathcal{P}$ soit résiduel essentiel de $\mathfrak{h}$ par rapport à $(\alpha'|$. Nous avons : $\mathcal{P} = (X \,^{\bullet}.\, y) \,^{\bullet}.\, (\alpha'| = X \,^{\bullet}.\, (\alpha'|\, y = X \,^{\bullet}.\, (\alpha' y)$ et $\alpha' y \notin X$.

Montrons que $\mathcal{P}$ est résiduel essentiel de X relatif à $(\alpha' y)$; soit donc un sous-module Z tel que $Z \subseteq (\alpha' y)$ et $Z \not\subseteq X$, et posons $\mathfrak{A} = Z \,^{\bullet}.\, y$; et $\mathfrak{A}' = (\alpha'| \cap \mathfrak{A}$; nous avons :

$$Z = \mathfrak{A}y = \mathfrak{A}'y \ .$$

Observons que $\mathfrak{A}'y = Z \not\subseteq X$ équivaut à $\mathfrak{A}' \not\subseteq \mathfrak{h} = X \,^{\bullet}.\, y$. Mais $\mathfrak{A}' \subseteq (\alpha'|$, et $\mathcal{P}$ est résiduel essentiel de $\mathfrak{h}$ par rapport à $(\alpha'|$; il en résulte :

$$\mathcal{P} = \mathfrak{h} \,^{\bullet}.\, \mathfrak{A}' = (X \,^{\bullet}.\, y) \,^{\bullet}.\, \mathfrak{A}' = X \,^{\bullet}.\, \mathfrak{A}'y = X \,^{\bullet}.\, Z \ .$$

$\mathcal{P}$ est bien résiduel essentiel de X relatif à $(\alpha' y)$, et la condition (E') est vérifiée par le sous-module X . Remarquons que la réciproque de cette propriété est inexacte :

Soit $\mathcal{E}$ un anneau commutatif unitaire ne vérifiant pas (E) pour sa structure de $\mathcal{E}$-module (cf. exemple 2.1 qui suit). Si $\mathcal{M}$ est un idéal maximal de $\mathcal{E}$, le $\mathcal{E}$-module quotient $U = \mathcal{E}/\mathcal{M}$ est simple, donc vérifie (E) .

EXEMPLE 2.1 - Il existe des modules ne vérifiant pas la condition (E) . Plus précisément nous allons établir que l'anneau produit $\mathcal{E} = \prod_{i \in I} \mathcal{E}_i$ d'une famille <u>infinie</u> d'anneaux <u>unitaires</u> $\mathcal{E}_i$ ne vérifie pas la condition (E) pour tous ses idéaux à gauche.

Soit $\mathfrak{K}$ l'idéal bilatère de $\mathcal{E}$ constitué de tous les éléments $\xi = (\xi_i)_{i \in I}$ à support fini (i.e., $\xi_i = 0$ pour tout indice i appartenant au complémentaire d'une partie finie de I). $\mathfrak{K}$ est distinct de $\mathcal{E}$ puisque la famille $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$ est infinie. Montrons que $\mathfrak{K}$ vérifie la propriété :

(*) $\eta \notin \mathfrak{K} \Longrightarrow \exists\, \eta' \in (\eta|$ tel que $\eta' \notin \mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}^{\cdot}.(\eta| \subset \mathfrak{K}^{\cdot}.(\eta'|$ (inclusion stricte)

$\eta = (\eta_i)_{i \in I}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{K}$, l'ensemble $S(\eta)$ des indices i pour lesquels $\eta_i \neq 0$ est infini, et admet une partition en deux sous-ensembles infinis disjoints :

$$S(\eta) = L_1 \cup L_2$$

Pour toute partie H de I posons $\varepsilon_H = (\zeta_i)_{i \in I}$ défini par : $\zeta_i = \varepsilon_i$ (élément unité de $\mathcal{E}_i$) si $i \in H$ et $\zeta_i = 0$ si $i \notin H$.

Choisissons alors η' défini par $\eta' = \varepsilon_{L_1}.\eta = (\eta'_i)_{i \in I}$; $\eta'_i = 0$ si $i \notin L_1$, et $\eta'_i = \varepsilon_i \eta_i = \eta_i$ si $i \in L_1$.

Nous avons $\eta' \in (\eta|$ et $\eta' \notin \mathfrak{K}$. Montrons que $\mathfrak{K}^{\cdot}.(\eta| \neq \mathfrak{K}^{\cdot}.(\eta'|$

Pour cela introduisons l'élément ε_{L_2} : $\forall \lambda \in \mathcal{E}$ nous avons $\varepsilon_{L_2}.\lambda.\eta' = 0$, et par suite $\varepsilon_{L_2} \in \mathfrak{K}^{\cdot}.(\eta'|$; d'autre part $\varepsilon_{L_2}.\eta \notin \mathfrak{K}$ entraine $\varepsilon_{L_2} \notin \mathfrak{K}^{\cdot}.(\eta|$. L'idéal $\mathfrak{K}$ vérifie bien la propriété (*) .

Dans ces conditions, $\mathfrak{K}$ <u>n'a pas de résiduel à gauche essentiel</u>, car si $\mathcal{P} = \mathfrak{K}^{\cdot}.\mathfrak{A}$ était résiduel à gauche essentiel de $\mathfrak{K}$ relatif à l'idéal à gauche $\mathfrak{A}$, pour $\alpha \in \mathfrak{A}, \alpha \notin \mathfrak{K}$, on aurait :

$$\mathcal{P} = \mathfrak{K}^{\cdot}.(\alpha|$$

La propriété (*) permettrait de trouver $\alpha' \in (\alpha| \subseteq \mathfrak{a}$ tel que $\alpha' \notin \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}^{\bullet}\circ (\alpha| \subsetneqq \mathfrak{k}^{\bullet}\circ (\alpha'|$, ce qui contredirait le fait que $\mathfrak{P}$ est un résiduel essentiel de $\mathfrak{k}$ relatif à $\mathfrak{a}$.

Cet exemple s'applique en particulier au composé direct $K^{\mathbb{N}}$ d'une famille dénombrable de corps isomorphes. Lorsque la famille d'anneaux est finie, nous obtenons par contre :

PROPOSITION 2.3 - Pour que l'anneau $\mathcal{E} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i$, produit d'une famille <u>finie</u> d'anneaux <u>unitaires</u> $\mathcal{E}_i$, vérifie la condition (E) pour tous ses idéaux à gauche, il faut et il suffit que chacun des anneaux $\mathcal{E}_i$ vérifie (E) pour tous ses idéaux à gauche.

Soient $p_1, \dots, p_n$, $q_1, \dots, q_n$ les projections et injections canoniques associées à la représentation de $\mathcal{E}$ comme anneau produit des anneaux $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$,

$$\mathcal{E}_i \xrightarrow{q_i} \mathcal{E} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i \xrightarrow{p_i} \mathcal{E}_i$$

Nous savons que l'anneau $\mathcal{E}$ est <u>composé</u> <u>direct</u> des sous-anneaux $q_1(\mathcal{E}_1), \dots, q_n(\mathcal{E}_n)$; et que pour $\alpha \in q_i(\mathcal{E}_i)$, $\alpha = q_i(p_i(\alpha))$ -cf. n° 11 , § 8 , chap. I , BOURBAKI [3]-.

Il est aisé de vérifier que, pour deux idéaux à gauche $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ de $\mathcal{E}$,

$$(1) \qquad \mathfrak{a}^{\bullet}.\,\mathfrak{b} = \bigoplus_{i=1}^{n} q_i\left(p_i(\mathfrak{a}) \,^{\bullet}.\, p_i(\mathfrak{b})\right)$$

et, dès que $\mathfrak{b} \subseteq q_j(\mathcal{E}_j)$,

$$(2) \qquad \mathfrak{a}^{\bullet}.\,\mathfrak{b} = \left[\bigoplus_{i\neq j} q_i(\mathcal{E}_i)\right] \oplus q_j\left(p_j(\mathfrak{a}) \,^{\bullet}.\, p_j(\mathfrak{b})\right)$$

Supposons que l'anneau $\mathcal{E}$ vérifie la condition (E) pour tous ses idéaux à gauche, et montrons que tout idéal à gauche $\mathfrak{a}_j$ de $\mathcal{E}_j$ vérifie cette même condition dans $\mathcal{E}_j$.

Soit $\eta_j \in \mathcal{E}_j$, $\eta_j \notin \mathfrak{a}_j$; $q_j(\eta_j) \notin q_j(\mathfrak{a}_j)$ et la condition (E) , entrainent l'existence de η' , élément de $\mathcal{E} q_j(\eta_j) = q_j(\mathcal{E}_j \eta_j)$, tel que $\eta' \notin q_j(\mathfrak{a}_j)$ et que

$$\mathcal{P} = q_j(\mathfrak{a}_j) \;\dot{\cdot}\; (\mathcal{E}\,\eta')$$

soit résiduel essentiel de $q_j(\mathfrak{a}_j)$ dans $\mathcal{E}$, relatif à l'idéal à gauche $\mathcal{E}\,\eta' = \left(q_j(\mathcal{E}_j)\right)\eta' \subseteq q_j(\mathcal{E}_j)$.

La relation (2) donne :

$$(3) \qquad \mathcal{P} = \left[\bigoplus_{i \neq j} q_i(\mathcal{E}_i)\right] \oplus q_j\left(\mathfrak{a}_j \;\dot{\cdot}\; \left(\mathcal{E}_j\, p_j(\eta')\right)\right) \qquad ;$$

observons que $\eta' \notin q_j(\mathfrak{a}_j)$ entraine $p_j(\eta') \notin \mathfrak{a}_j$, car $\eta' \in q_j(\mathcal{E}_j)$; et que $\eta' \in q_j(\mathcal{E}_j\,\eta_j)$ entraine $p_j(\eta') \in \mathcal{E}_j\,\eta_j$. Il nous reste à montrer que $\mathfrak{a}_j \;\dot{\cdot}\; \left(\mathcal{E}_j\, p_j(\eta')\right) = \mathcal{P}_j$ est résiduel essentiel de $\mathfrak{a}_j$ relatif à l'idéal à gauche $\mathcal{E}_j\, p_j(\eta')$ de $\mathcal{E}_j$. Soit pour cela un idéal à gauche $\mathfrak{q}_j$ de $\mathcal{E}_j$ tel que :

$$\mathfrak{q}_j \subseteq \mathcal{E}_j\, p_j(\eta') \quad , \quad \mathfrak{q}_j \not\subseteq \mathfrak{a}_j$$

ce qui entraine :

$$q_j(\mathfrak{q}_j) \subseteq \mathcal{E}\,\eta' \quad , \quad q_j(\mathfrak{q}_j) \not\subseteq q_j(\mathfrak{a}_j) \qquad ;$$

$\mathcal{P}$ étant résiduel essentiel de $q_j(\mathfrak{a}_j)$ dans $\mathcal{E}$, relativement à $\mathcal{E}\,\eta'$:

$$\mathcal{P} = q_j(\mathfrak{a}_j) \;\dot{\cdot}\; q_j(\mathfrak{q}_j) = \left[\bigoplus_{i \neq j} q_i(\mathcal{E}_i)\right] \oplus q_j(\mathfrak{a}_j \;\dot{\cdot}\; \mathfrak{q}_j)$$

(3) entraine alors :

$$\mathfrak{a}_j \;\dot{\cdot}\; \mathfrak{q}_j = \mathfrak{a}_j \;\dot{\cdot}\; \left(\mathcal{E}_j\, p_j(\eta')\right) = \mathcal{P}_j$$

ce qu'il fallait montrer.

<u>Réciproquement</u> : supposons que chaque anneau $\mathcal{E}_i$ vérifie la condition (E) pour ses idéaux à gauche, et montrons que tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{E}$ vérifie (E) . Soit donc $\eta \in \mathcal{E}$, $\eta \notin \mathfrak{a}$. Il existe au moins un indice j pour lequel $p_j(\eta) \notin p_j(\mathfrak{a})$, car $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i=1}^{n} q_i\left(p_i(\mathfrak{a})\right)$ et $\eta = \sum_{i=1}^{n} q_i\left(p_i(\eta)\right)$.

La condition (E) appliquée à l'idéal à gauche $p_j(\mathfrak{a})$ de l'anneau $\mathcal{E}_j$, assure l'existence d'un élément η'_j de $\mathcal{E}_j$ tel que : $\eta'_j \notin p_j(\mathfrak{a})$, $\eta'_j \in \mathcal{E}_j\, p_j(\eta)$, $\mathcal{P}_j = p_j(\mathfrak{a}) \;\dot{.}\; (\mathcal{E}_j \eta'_j)$ est résiduel essentiel de $p_j(\mathfrak{a})$ dans $\mathcal{E}_j$ relativement à $\mathcal{E}_j \eta'_j$. Observons que $q_j(\eta'_j) \in \left(q_j(\mathcal{E}_j)\right) q_j\left(p_j(\eta)\right) \subseteq \mathcal{E}\eta$ car $q_j\left(p_j(\eta)\right) = q_j(\mathcal{E}_j)\eta$, ε_j étant l'élément <u>unité</u> de $\mathcal{E}_j$.

Nous avons d'autre part $q_j(\eta'_j) \notin \mathfrak{a}$ car $\eta'_j \notin p_j(\mathfrak{a})$. Montrons que $\mathcal{P} = \mathfrak{a} \;\dot{.}\; \left(\mathcal{E}\, q_j(\eta'_j)\right)$ est résiduel essentiel de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{E}$ relativement à l'idéal à gauche $\mathcal{E}\, q_j(\eta'_j)$. Considérons un idéal à gauche $\mathfrak{q}$ de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\mathfrak{q} \nsubseteq \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \mathfrak{q} \subseteq \mathcal{E} q_j(\eta'_j) = q_j(\mathcal{E}_j \eta'_j) .$$

Comme $\mathfrak{q} \subseteq q_j(\mathcal{E}_j)$, nous avons :

$$p_j(\mathfrak{q}) \nsubseteq p_j(\mathfrak{a}) \quad \text{et} \quad p_j(\mathfrak{q}) \subseteq \mathcal{E}_j \eta'_j$$

et il résulte : $\mathcal{P}_j = p_j(\mathfrak{a}) \;\dot{.}\; p_j(\mathfrak{q})$. La relation (2) donne alors :

$$\mathfrak{a} \;\dot{.}\; \mathfrak{q} = \left[\bigoplus_{i \neq j} q_i(\mathcal{E}_i)\right] \oplus q_j(\mathcal{P}_j) = \mathfrak{a} \;\dot{.}\; q_j(\mathcal{E}_j \eta'_j) = \mathcal{P}.$$

Il existe des modules U vérifiant la condition (E) pour tous leurs sous-modules, et ne vérifiant pas les conditions de chaîne (D) de L. LESIEUR et R. CROISOT (cf. p. 82 et 83 de [13] , I) , comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE 2.2 (1) - $\mathcal{P}$ étant l'ensemble des nombres premiers p de N , considérons le Z-module U somme directe des Z-modules quotients $Z_p = Z/pZ$:

$$U = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} Z_p$$

U est un Z-module semi-simple -cf n° 3, § 3, chap. 8, BOURBAKI [3]-, et vérifie la condition (E) en vertu de la proposition 2.2.

---

(1) cf. un autre exemple à la fin de ce chapitre.

Le sous-module 0 de U ne vérifie cependant pas la condition de chaîne descendante pour ses résiduels à gauche, car soit $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ une suite infinie de nombres premiers p_n de $\mathcal{P}$, deux à deux distincts ; les résiduels :

$$\mathfrak{H}_n = 0 \,{}^{\bullet}\!.\, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} p_i Z = p_1 p_2 \ldots p_n Z$$

(où a_i est un générateur du sous-module Z_{p_i} de U) forment une suite infinie strictement décroissante.

Observons que tout idéal premier pZ de Z est résiduel à gauche propre premier de 0 , car :

$0 \,{}^{\bullet}\!.\, a_p = pZ$; a_p étant un générateur du sous-module Z_p .

2. SOUS-MODULES TERTIAIRES D'UN MODULE VERIFIANT LA CONDITION (E).

PROPOSITION 2.4 - Le radical tertiaire $\mathfrak{R}$ d'un sous-module $X \neq U$ est l'intersection des résiduels essentiels de X , pas nécessairement en nombre fini. $\mathfrak{R}$ est un résiduel à gauche propre de X ; si X est tertiaire, $\mathfrak{R}$ est idéal premier (cf. Proposition 2.1 de [8] , II)(1) .

Observons tout d'abord que tout résiduel essentiel de X est élémentaire : si $\mathcal{P} = X \,{}^{\bullet}\!.\, Y$ est essentiel par rapport à Y , pour tout $y \in Y$, $y \notin X$ on a $\mathcal{P} = X \,{}^{\bullet}\!.\, (y)$ et $\mathcal{P}$ est essentiel par rapport à (y) .

Soit $\mathfrak{H}$ l'intersection des résiduels essentiels de X (il en existe d'après la condition (E)) ; Considérons un élément $\rho \in \mathfrak{R}$ et un résiduel essentiel $\mathcal{P} = X \,{}^{\bullet}\!.\, (y)$ de X relatif à (y) .

$y \notin X$ et $\rho \in \mathfrak{R} \Longrightarrow \exists\, y' \in (y)$ tel que $y' \notin X$ et $\rho\,\mathfrak{E}^* y' \subseteq X$; d'où $\rho \in X \,{}^{\bullet}\!.\, (y') = \mathcal{P}$, car $\mathcal{P}$ est essentiel ; par suite $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{H}$.

Inversement soit $\alpha \in \mathfrak{H}$ et $y \notin X$; d'après la condition (E) il existe $y' \in (y)$, $y' \notin X$ tel que $\mathcal{P}' = X \,{}^{\bullet}\!.\, (y')$ soit résiduel essentiel de X relativement à (y') ; comme $\alpha \in \mathfrak{H}$ on a bien $\alpha\,\mathfrak{E}^* y' \subseteq X$ et $\alpha \in \mathfrak{R}$.

---

(1) Cette proposition est appliquée à l'exemple 2.2, à la fin de ce chapitre.

L'ensemble des résiduels à gauche de X est une famille de Moore sur les parties de $\mathcal{E}$ (cf. par ex. la définition p. 8 du § 4 de [5]). $\mathfrak{R}$ est donc résiduel à gauche (propre) de X , et il est premier d'après la proposition 1.4, lorsque X est tertiaire. En particulier cela prouve le théorème 2 de [8] , I [(1)] .

Cette proposition 2.4 a le même énoncé que le théorème 1.4 de [13], III , établi au moyen de l'axiome (D) de [13] , I , et elle permet de caractériser, sous la seule condition (E), les sous-modules tertiaires de U , au moyen des résiduels essentiels comme il est fait dans [14] au théorème 1 et dans [13] , III , au théorème 3.1 , à savoir :

THEOREME 2.1 - Le sous-module $X \neq U$ est $\mathfrak{R}$-tertiaire[(2)] si, et seulement si, il possède un et un seul résiduel essentiel. Ce résiduel essentiel unique est $\mathfrak{R}$, et $\mathfrak{R}$ est un idéal premier (cf. théorème 2.1 de [8] , II)

Si $X \neq U$ est $\mathfrak{R}$-tertiaire, $\mathfrak{R}$ contient tout résiduel essentiel $\mathfrak{P}$ de X (d'après le a) de la proposition 1.4) ; la proposition précédente 2.4 montre que $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}$.

Inversement, supposons que X ait un résiduel essentiel unique $\mathfrak{P}$. La proposition 2.4 montre que $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}(X)$. Montrons que X est tertiaire : soient $\alpha \in \mathcal{E}$ et $y \in U$ tels que $\alpha\, \mathcal{E}^* y \subseteq X$ et $y \notin X$.

La condition (E) entraine l'existence de $y' \in (y)$ tel que $y' \notin X$ et $\mathfrak{P}' = X \,{}^{\bullet}.\, (y')$ est résiduel essentiel de X ; donc $\mathfrak{P} = X \,{}^{\bullet}.\, (y')$ et :

$$\alpha \in X \,{}^{\bullet}.\, (y) \subseteq X \,{}^{\bullet}.\, (y') = \mathfrak{P} = \mathfrak{R}(X)$$

THEOREME 2.2 - La définition d'un sous-module tertiaire (1.2 de la présente étude) est équivalente à la définition donnée dans [13] , I , (cf. le rappel (1) donné à la proposition 1.3).

---

(1) Si l'anneau $\mathcal{E}$ est artinien à gauche, le radical tertiaire d'un sous-module tertiaire $T \neq U$ est un résiduel à gauche propre premier de T .

(2) i.e. X est tertiaire, et son radical tertiaire est $\mathfrak{R}$.

La deuxième définition entraine la première d'après la proposition 1.3 . Réciproquement, soit un sous-module $X \neq U$ tertiaire au sens de la définition 1.2 . Si X n'était pas tertiaire au sens de [13] , I , il existerait un idéal bilatère $\mathfrak{B}$ et un sous-module Y tels que :

$$(X \,.\!\cdot\, \mathfrak{B}) \cap Y \subseteq X \quad , \quad X \,.\!\cdot\, \mathfrak{B} \supset X \quad , \quad Y \nsubseteq X \quad .$$

Soit alors $y \in Y$, $y \notin X$; en vertu de la condition (E) il existe $y' \in (y)$, $y' \notin X$, avec $\mathfrak{P}' = X \,\cdot.\, (y')$ résiduel essentiel de X relatif à (y') . D'après le théorème 2.1, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{R}$, radical tertiaire de X .

D'autre part $X \,.\!\cdot\, \mathfrak{B} \supset X$ et la proposition 1.5 entrainent $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}$. Donc $\mathfrak{R} = X \,\cdot.\, (y')$ entraine $y' \in X \,.\!\cdot\, \mathfrak{R} \subseteq X \,.\!\cdot\, \mathfrak{B}$; compte tenu de $y' \in Y$ et de $(X \,.\!\cdot\, \mathfrak{B}) \cap Y \subseteq X$, on aurait $y' \in X$, ce qui est impossible.

DEFINITION 2.2 - Un sous-module $X \neq U$ est dit <u>unirésidué</u> s'il possède un, et un seul, résiduel à gauche propre premier. Si $\mathfrak{P}$ est ce résiduel unique, on dit aussi que X est <u>$\mathfrak{P}$-unirésidué</u>.

C'est la définition donnée par exemple au théorème 3.1 de [13] , III .

THEOREME 2.3 - Tout sous-module <u>$\mathfrak{P}$-unirésidué</u> est <u>$\mathfrak{P}$-tertiaire</u> (cf. théorème 2.2 de [8] , II) .

C'est l'énoncé du théorème 7.2 de [13] , I ; mais la démonstration de ce théorème utilise la condition maximale sur les résiduels à gauche du sous-module, par conséquent ne peut s'appliquer ici.

Soit donc un sous-module X , $\mathfrak{P}$ -unirésidué ; $X \neq U$ sans quoi X n'aurait pas de résiduel propre (premier). Comme tout résiduel essentiel de X est premier (proposition 2.1), et que X possède des résiduels essentiels en vertu de la condition (E), il résulte que X possède un résiduel essentiel, et un seul, qui est $\mathfrak{P}$. X est alors $\mathfrak{P}$-tertiaire d'après le théorème 2.1.

Rappelons la définition d'un sous-module primal donnée au § 4 de [13], I , DEFINITION 2.3 - Un sous-module X est dit <u>primal</u> si les relations : $X .^{\circ} \mathfrak{B}_1 \supset X$ et $X .^{\circ} \mathfrak{B}_2 \supset X$ impliquent : $(X .^{\circ} \mathfrak{B}_1) \cap (X .^{\circ} \mathfrak{B}_2) \supset X$; $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ étant des idéaux bilatère de $\mathcal{E}$.

On obtient alors, comme à la propriété 7.1 de [13] , I , le théorème :

THEOREME 2.4 - Tout sous-module <u>tertiaire</u> est <u>primal</u>.

C'est une conséquence immédiate de l'équivalence des définitions donnée par le théorème 2.2.

Indiquons une proproété des résiduels essentiels minimaux, sous une hypothèse plus forte que la condition (E) ;

PROPOSITION 2.5 - Soit X un sous-module de U , distinct de U , vérifiant la <u>condition (E)</u> et la condition <u>minimale (m)</u> sur ses résiduels à gauche ; dans ces conditions, X ne possède qu'un nombre <u>fini</u> de résiduels à gauche propres premiers minimaux (en tant que résiduels à gauche propres premiers), et qu'un nombre <u>fini</u> de résiduels essentiels minimaux.

$X \neq U$ possède des résiduels à gauche propres premiers en vertu de (E) , et des résiduels à gauche propres premiers minimaux en vertu de (m) . Supposons que l'ensemble Φ des résiduels à gauche propres premiers minimaux de X soit infini. Il existerait alors une famille infinie dénombrable $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n, \ldots$ d'éléments de Φ , deux à deux distincts. Considérons alors la suite décroissante :

$$(1)\ \mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \supseteq \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_n \supseteq \ldots$$

Supposons que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$; $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \ldots \mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_{n+1}$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ premier entrainent l'existence de $i \leqslant n$ tel que $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}_{n+1}$; et d'après la minimalité de $\mathcal{P}_{n+1}$, $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{n+1}$ ce qui est contraire à l'hypothèse "deux à deux distincts".

(1) est alors une suite strictement décroissante et infinie de résiduels à gauche propres de X , ce qui contredit (m) .

Même méthode pour prouver que X n'admet qu'un nombre fini de résiduels essentiels minimaux.

REMARQUES -

1) Le radical tertiaire de X est alors intersection d'un nombre fini de résiduels essentiels de X.

2) Les conditions de la proposition 2.5 sont en particulier réalisées lorsque $\mathcal{E}$ est artinien à gauche ; le résultat se trouve alors renforcé par la proposition 3.3 du chapitre III.

Terminons ce paragraphe par une propriété qui sera utilisée plus loin.

PROPOSITION 2.6 - Soit X un sous-module $\mathcal{P}$-tertiaire de U, distinct de U ; X à la propriété suivante :

$$\mathcal{E}y \not\subseteq X \text{ entraine } \mathcal{P} = X \stackrel{\bullet}{.}\, \mathfrak{a}y \text{ et } \mathfrak{a}y \not\subseteq X$$

$\mathfrak{a}$ désignant l'idéal à gauche $\mathfrak{a} = (X \stackrel{\circ}{.}\, y) \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{P}$; $\mathcal{P}$ est alors résiduel essentiel de X relativement à $\mathfrak{a}y$.

Il existe $\lambda \in \mathcal{E}$ tel que $\lambda y \notin X$; D'après la condition (E) on peut trouver $y' \in (\lambda y)$ tel que $y' \notin X$ et que $X \stackrel{\bullet}{.}\, (y')$ soit résiduel essentiel de X relatif à (y'). On a alors $\mathcal{P} = X \stackrel{\bullet}{.}\, (y')$ (cf. théorème 2.1).

Mais $(y') = (\lambda'| \, y$ avec $\lambda' \in (\lambda|$, par suite $\mathcal{P}(\lambda'| \, y \subseteq X$, ou $(\lambda'| \subseteq (X \stackrel{\circ}{.}\, y) \mathbin{.^{\bullet}} \mathcal{P} = \mathfrak{a}$ et $(\lambda'| \, y \subseteq \mathfrak{a}y$; $\mathfrak{a}y \not\subseteq X$ car $(\lambda'| \, y \not\subseteq X$;

$$\mathcal{P} = X \stackrel{\bullet}{.}\, (\lambda'| \, y \supseteq X \stackrel{\bullet}{.}\, \mathfrak{a}y .$$

D'autre part, par définition de $\mathfrak{a}$, $\mathcal{P} \subseteq X \stackrel{\bullet}{.}\, \mathfrak{a}y$. Enfin $\mathcal{P} = X \stackrel{\bullet}{.}\, \mathfrak{a}y$ est résiduel essentiel de X par rapport à $\mathfrak{a}y$, car il est résiduel à gauche propre maximum de X.

EXEMPLE 2.3 - Module vérifiant la condition (E) pour tous ses sous-modules, en lequel le sous-module nul ne vérifie aucune des deux conditions de chaîne pour ses résiduels à gauche.

Considérons, comme à l'exemple 2.2 le groupe additif :

$$U = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} Z_p$$

Soit $\mathcal{E} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{E}_n$ l'anneau produit des anneaux $\mathcal{E}_p$, identiques à l'anneau des entiers Z , pour tout indice $p \in \mathcal{P}$.

Pour $(\alpha_p)_{p \in \mathcal{P}} = \alpha \in \mathcal{E}$ et $(\bar{x}_p)_{p \in \mathcal{P}} = x \in U$, ($\bar{x}_p$ étant la classe modulo pZ de l'élément x_p de Z) définissons αx par :

$$\alpha x = (\overline{\alpha_p \, x_p})_{p \in \mathcal{P}}$$

Pour cette loi de composition externe U est alors un $\mathcal{E}$-module unitaire.

Z_p s'identifie à un sous $\mathcal{E}$-module de U , et est un $\mathcal{E}$-module simple (puisque c'est un Z-module simple) ; le $\mathcal{E}$-module U est semi-simple, donc <u>vérifie la condition (E)</u> pour tous ses sous-modules (d'après la proposition 2.2, c).

Indexons les nombres premiers de $\mathcal{P}$ par les entiers naturels, $\mathcal{P} = \{p_1 , p_2 , \ldots , p_n , \ldots\}$, $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$.

Pour chaque entier n désignons par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble fini $\mathcal{P}_n = \{p_1 , p_2 , \ldots , p_n\}$, et considérons le sous-module Y_n de U constitué des éléments $y = (\bar{y}_p)_{p \in \mathcal{P}}$ tels que $\bar{y}_p = 0$ pour tout indice $p \in \mathcal{P}_n$; (le support fini de y est contenu dans le complémentaire de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathcal{P}$) ; par des identifications évidentes :

$$Y_n = \bigoplus_{p \notin \mathcal{P}_n} Z_p \; ,$$

et nous trouvons aisément que $\mathfrak{K}_n = 0 \,^{\circ}.\, Y_n = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}_n} \mathcal{E}_p \right) \times \left(\prod_{p \notin \mathcal{P}_n} pZ \right)$

Le sous-module nul 0 possède donc une <u>chaîne ascendante</u> stricte <u>infinie</u> de résiduels à gauche propres :

$$\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{K}_n \subset \ldots$$

D'autre part, définissons les sous-modules de U :

$$Y'_n = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_n} Z_p \; ;$$

les résiduels $\mathfrak{K}'_n = 0 \cdot. Y'_n = \left(\prod_{p\in\mathcal{P}_n} p\,Z\right) \times \left(\prod_{p\notin\mathcal{P}_n} \mathcal{E}_p\right)$ constituent une <u>chaîne</u> <u>descendante</u> <u>infinie</u> :

$$\mathfrak{K}'_1 \supset \mathfrak{K}'_2 \supset \dots \supset \mathfrak{K}'_n \supset \dots \;;$$

Z_p étant identifié à un sous-module de U , les résiduels essentiels de 0 sont en nombre infini et donnés par :

$$0 \cdot. Z_p = \mathcal{B}_p = (p\,z) \times \left(\prod_{\pi\in\mathcal{P}-\{p\}} \mathcal{E}_\pi\right) \quad .$$

Le radical tertiaire $\mathcal{R}$ de 0 est, d'après la proposition 2.4,

$$\mathcal{R} = \prod_{p\in\mathcal{P}} (p\,Z)$$

-:-

CHAPITRE III

-:-

COMPARAISON DES SOUS-MODULES TERTIAIRES ET UNIRESIDUES

-:-

Dans le cas abstrait traité dans [13] , I , il existe des exemples pour lesquels un élément tertiaire n'est pas unirésidué (cf. exemple d) , p. 111 de [13] , I). Mais dans le cas des modules ou anneaux satisfaisant aux conditions de l'axiome (D) de [13] , I , il n'a pas encore été possible de trouver des exemples pour lesquels les deux notions se séparent (un élément tertiaire qui ne soit pas unirésidué). L'équivalence des deux notions est par contre connue dans le cas d'un anneau artinien à gauche (cf. théorème 7.3 p. 467 de [13] , II). Le présent paragraphe a pour objet l'étude, dans certains autres cas, de cette équivalence.

1. RESIDUELS A GAUCHE PROPRES PREMIERS DE X .

PROPOSITION 3.1 - Soit $X \neq U$ un sous-module <u>$\mathcal{P}$-tertiaire</u> vérifiant la <u>condition</u> <u>(E)</u>

et la <u>condition minimale (m)</u> pour ses résiduels à gauche[1] ; si $\mathcal{P}' = X \,{}^{\circ}\!.\, Y$ est un <u>résiduel</u> à gauche propre <u>premier</u> de X, <u>distinct</u> de $\mathcal{P}$, alors il existe un élément $y \in Y$ tel que :

a) $\mathcal{P}' = X \,{}^{\circ}\!.\, (y)$, $\mathcal{P} = X \,{}^{\bullet}\!.\, \mathfrak{A}y$ avec $\mathfrak{A} = (X \,{}^{\bullet}\!.\, y) \,.^{\circ}\, \mathcal{P}$ et $\mathfrak{A}y \nsubseteq X$,
$\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \nsubseteq \mathfrak{A}$.

b) l'idéal à gauche $\mathfrak{M} = X \,{}^{\circ}\!.\, y$ est $\mathcal{P}$-tertiaire et $\mathcal{P}' \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$.

c) $\mathcal{P}' = \mathfrak{A} \,{}^{\circ}\!.\, \mathcal{E} = \mathfrak{M} \,{}^{\circ}\!.\, \mathcal{E}$, $\mathcal{P} = \mathfrak{M} \,{}^{\bullet}\!.\, \mathfrak{A}$.

d) $\mathfrak{A}y = (X \,.^{\circ}\, \mathcal{P}) \cap \mathcal{E}y$,

et : " $\mathfrak{B}$ est idéal bilatère et $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$" entraine " $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}'$ ".

<u>Preuve de a)</u> : $\mathcal{P}' \neq \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ entraine $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$. La condition (m) et l'$\cap$-irréductibilité de l'idéal premier $\mathcal{P}'$ sur les idéaux bilatères de $\mathcal{E}$, montrent que $\mathcal{P}'$ est résiduel élémentaire de X :

$$\mathcal{P}' = X \,{}^{\circ}\!.\, (y) \quad \text{avec} \quad y \in Y \quad \text{et} \quad y \notin X .$$

On a $\mathcal{E}y \nsubseteq X$, car $\mathcal{E}y \subseteq X$ entraine $\mathcal{E}(y) \subseteq X$ et $\mathcal{E} = \mathcal{P}'$; la proposition 2.6 s'applique et $\mathcal{P} = X \,{}^{\bullet}\!.\, \mathfrak{A}y$ avec $\mathfrak{A}y \nsubseteq X$.

Enfin supposons $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{A}$; cela entraine :

$$\mathcal{P}^2(y) = \mathcal{P}^2 y \subseteq \mathcal{P}\,\mathfrak{A}\, y \subseteq X \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}^2 \subseteq \mathcal{P}' ,$$

ce qui est impossible car $\mathcal{P}'$ est premier ne contenant pas $\mathcal{P}$.

<u>Preuve de b)</u> : $\mathfrak{M}$ est $\mathcal{P}$-tertiaire d'après la proposition 1.6. On a $\mathcal{P}' \subseteq \mathfrak{M}$ car $\mathcal{P}'y = \mathcal{P}'(y) \subseteq X$; mais $\mathcal{P}' = \mathfrak{M}$ est impossible puisque $\mathcal{P}'$ est premier distinct de $\mathcal{P}$ et que $\mathfrak{M}$ est $\mathcal{P}$-tertiaire. ($\mathcal{P}$ serait résiduel propre de $\mathcal{P}'$), donc $\mathcal{P}' \subset \mathfrak{M}$.

D'autre part, par définition de $\mathfrak{A}$, on a $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$, et $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ est impossible car alors $\mathfrak{A}y = \mathfrak{M}y \subseteq X$.

---

(1) ce qui est en particulier réalisé par l'axiome de chaîne (D).

Preuve de c) : Posons $\mathcal{B} = \mathcal{O}\!\!\mathcal{C} \overset{\cdot}{\cdot} \mathcal{E}$; $\mathcal{P}' \subset \mathcal{O}\!\!\mathcal{C}$ entraine $\mathcal{P}'\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}' \subsetneq \mathcal{O}\!\!\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{B}$. D'autre part $\mathcal{B}\mathcal{E} \subseteq \mathcal{O}\!\!\mathcal{C}$ entraine $\mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{E}y \subseteq X$, $\mathcal{P}\mathcal{B}(y) \subseteq X$, $\mathcal{P}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}'$ avec $\mathcal{P} \not\subseteq \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}'$ premier, d'où $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}'$.

Pour montrer la seconde relation observons de même que $\mathcal{P}' \subset \mathfrak{M}$ entraine $\mathcal{P}' \subseteq \mathfrak{M} \overset{\cdot}{\cdot} \mathcal{E}$; de $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}\!\!\mathcal{C}$ on déduit $\mathfrak{M} \overset{\cdot}{\cdot} \mathcal{E} \subseteq \mathcal{O}\!\!\mathcal{C} \overset{\cdot}{\cdot} \mathcal{E} = \mathcal{P}'$, d'où $\mathcal{P}' = \mathfrak{M} \overset{\cdot}{\cdot} \mathcal{E}$.

Enfin $\mathfrak{M}$ étant $\mathcal{P}$-tertiaire, $\mathcal{P}$ est résiduel à gauche propre de $\mathfrak{M}$:

$$\mathcal{P} = \mathfrak{M} \overset{\cdot}{\cdot} (\mathfrak{M} \overset{\cdot}{\circ} \mathcal{P}) = \mathfrak{M} \overset{\cdot}{\cdot} \mathcal{O}\!\!\mathcal{C} \quad .$$

Preuve de d) : Soit $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{O}\!\!\mathcal{C}$; on a $\mathcal{P}\mathfrak{A}y \subseteq \mathcal{P}\mathcal{O}\!\!\mathcal{C}y \subseteq X$, par suite $\mathcal{P}\mathfrak{A}(y) \subseteq X$ et $\mathcal{P}\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}'$ entraine $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}'$.

D'après la définition de $\mathcal{O}\!\!\mathcal{C}$: $\mathcal{O}\!\!\mathcal{C}y \subseteq (X \overset{\cdot}{\cdot} \mathcal{P}) \cap \mathcal{E}y$; soit alors $z \in (X \overset{\cdot}{\cdot} \mathcal{P}) \cap \mathcal{E}y$; z est la forme $z = \lambda y \in X \overset{\cdot}{\cdot} \mathcal{P}$, d'où $\lambda \in \mathcal{O}\!\!\mathcal{C}$ et $\lambda y \in \mathcal{O}\!\!\mathcal{C}y$.

Une première conséquence de cette proposition est le théorème de transfert suivant :

THEOREME 3.1 - U est un $\mathcal{E}$-module à gauche vérifiant les conditions (E) et (m) de la proposition 3.1 , pour tous ses sous-modules(1) .

Si, dans l'anneau $\mathcal{E}$, tout idéal à gauche (propre) tertiaire est unirésidué, dans le module U les notions de sous-module ($\neq$ U) tertiaire et de sous-module unirésidué coïncident.

Le radical tertiaire du sous-module est alors le seul résiduel à gauche propre premier de ce sous-module (cf. Théorème 3.3 de [8] , II).

La condition (E) étant réalisée, tout sous-module $\mathcal{P}$ -unirésidué (donc sous-module propre) est $\mathcal{P}$-tertiaire (cf. théorème 2.3).

Inversement, si $X \neq U$ était $\mathcal{P}$-tertiaire, sans être unirésidué, X possèderait un résiduel à gauche propre premier $\mathcal{P}'$ distinct de $\mathcal{P}$. D'après la proposition 3.1 il existerait un idéal à gauche $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{E}$, distinct de $\mathcal{E}$, qui serait $\mathcal{P}$-tertiaire et admettrait $\mathcal{P}' = \mathfrak{M} \overset{\cdot}{\cdot} \mathcal{E}$ comme résiduel à gauche

---

(1) ce qui est en particulier réalisé par l'axiome de chaîne (D) .

propre premier ; et par suite $\mathfrak{M}$ serait tertiaire sans être unirésidué, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous allons étudier quelques cas de coïncidence des deux précédentes notions.

2. CAS D'UN ANNEAU $\mathcal{E}$ ARTINIEN A GAUCHE.

Les conditions (E) et (m) sont réalisées pour tout $\mathcal{E}$-module à gauche U. De plus, il est montré dans [13], II, au théorème 7.3, que si $\mathcal{E}$ est artinien à gauche, pour qu'un idéal à gauche propre soit $\mathcal{P}$-tertiaire il faut et il suffit qu'il soit $\mathcal{P}$-unirésidué. Le théorème 3.1 s'applique donc et :

THEOREME 3.2 - U étant un $\mathcal{E}$-module à gauche sur un anneau <u>artinien</u> à gauche, pour que le sous-module $T \neq U$ soit <u>$\mathcal{P}$-tertiaire</u> il faut et il suffit qu'il soit <u>$\mathcal{P}$-unirésidué</u>.

Ce théorème est le théorème 3 de [8], I -cf. aussi remarque suivant le corollaire 3.1-. Des résultats beaucoup plus précis peuvent être obtenus, à l'exemple de ceux obtenus dans [13], II, aux théorèmes 8.2 et 8.3 qui s'énoncent :

<u>Théorème 8.2</u> : Dans l'anneau $\mathcal{E}$ artinien à gauche, pour $\mathcal{P} \neq \mathcal{E}$ les quatre notions d'idéal à gauche $\mathcal{P}$-primal, $\mathcal{P}$-tertiaire, $\mathcal{P}$-unirésidué et $\mathcal{P}$-secondaire coïncident.

<u>Théorème 8.3</u> : si l'anneau artinien à gauche $\mathcal{E}$ possède un élément unité à gauche, les quatre notions d'idéal à gauche primal, tertiaire, unirésidué et secondaire coïncident.

A cette fin, utilisons le théorème 8.1 de [13], II :
Dans un anneau artinien à gauche, <u>tout idéal bilatère propre premier est</u> <u>maximal</u> (en tant qu'idéal bilatère propre).

On en déduit :

PROPOSITION 3.2 - L'ensemble Φ des résiduels à gauche propres <u>premiers</u> d'un sous-module $X \neq U$ est <u>fini</u> et <u>non vide</u> ($\mathcal{E}$ artinien à gauche).

En effet Φ n'est pas vide en vertu de la condition (E) , et Φ vérifie la condition maximale (et minimale) d'après le théorème 8.1 de [13] , II . La démonstration du théorème 2.1 de [13] , I (tout élément n'admet qu'un nombre fini de résiduels à gauche propres premiers) utilise la condition maximale sur les résiduels à gauche propre <u>premiers</u> de X , et la condition maximale sur les résiduels à droite de X (équivalente à la condition minimale sur les résiduels à gauche de X en vertu de la proposition 1.1 de [13] , I). Ces conditions se trouvaıt réalisées lorsque $\mathcal{E}$ est artinien à gauche, la preuve de la proposition 3.2 en résulte.

La propriété 2.4 de [13] , I , appliquée au cas des modules :

Quel que soit le sous-module X , on peut trouver un nombre <u>fini</u> d'idéaux bilatères <u>premiers</u> $\mathcal{P}_i$ (i = 1, 2,..., k) tels que :

$$\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i \subseteq X \cdot_{\circ} U \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i$$

est valable, car elle n'exige que la condition maximale sur les résiduels à droite de X .

D'autre part, la condition (E) et la Proposition 3.2 entrainent que tout résiduel à gauche propre de $X \neq U$ est contenu dans un résiduel à gauche propre maximal de X (deux possibilités selon que $\mathcal{E}$ est ou n'est pas résiduel à gauche propre de X) ; il résulte que le théorème 2.2 de [13] , I , est aussi valable :

Pour tout sous-module X , la condition $X \,{}_{\circ}\!\cdot \mathcal{B} = X$ équivaut à la condition $\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{M}$ pour tout résiduel à gauche propre maximal $\mathcal{M}$ de X .

Il résulte de ces diverses observations que les théorèmes de [13] , I , sur la caractérisation des éléments secondaires et primaux par leurs résiduels à gauche propres premiers, sont valables ici. Rappelons-les (cas des modules) :

<u>Théorème 4.1</u> de [13] , I : Pour que le sous-module $X \neq U$ soit <u>primal</u>, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre maximal. Si $\mathcal{P}$ est ce résiduel, on dit que X est <u>$\mathcal{P}$-primal</u>.

<u>Théorème 6.1</u> de [13] , I : Pour que le sous-module $X \neq U$ soit <u>secondaire</u>, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre $\mathcal{P}$ premier qui soit idéal bilatère premier maximal contenant $X \cdot_{\circ} U$. On dit que X est <u>$\mathcal{P}$-secondaire</u>.

Il est maintenant possible de montrer le théorème :

THEOREME 3.3 - U étant un $\mathcal{E}$-module à gauche sur l'anneau <u>artinien</u> à gauche $\mathcal{E}$, pour $\mathcal{P} \neq \mathcal{E}$ les quatre notions de sous-module ($\neq U$), <u>$\mathcal{P}$-primal</u>, <u>$\mathcal{P}$-tertiaire</u>, <u>$\mathcal{P}$ unirésidué</u>, <u>$\mathcal{P}$-secondaire</u> coïncident (c'est le théorème 4 de [8], I).

En effet, les implications :
$\mathcal{P}$-secondaire $\Longrightarrow$ $\mathcal{P}$-unirésidué $\Longrightarrow$ $\mathcal{P}$-tertiaire $\Longrightarrow$ $\mathcal{P}$-primal
résultent : la première du théorème 6.1 de [13], I, déjà cité, la deuxième du théorème 2.3, la troisième du théorème 2.4 et du théorème 4.1 de [13], I, déjà cité.

Inversement soit $X \neq U$ un sous-module $\mathcal{P}$-primal avec $\mathcal{P} \neq \mathcal{E}$. Tout résiduel à gauche propre premier de X est distinct de $\mathcal{E}$ (d'après $\mathcal{P} \neq \mathcal{E}$ et le théorème 4.1 de [13], I) et est résiduel à gauche propre maximal de X (théorème 8.3 de [13], II), par suite est confondu avec $\mathcal{P}$ (théorème 4.1 de [13], I). X est donc $\mathcal{P}$-unirésidué ; mais $\mathcal{P}$ ne contient strictement aucun idéal bilatère premier de $\mathcal{E}$ (théorème 8.3 de [13], II), X est alors $\mathcal{P}$-secondaire (théorème 6.1 de [13], I).

COROLLAIRE 3.1 - U étant un $\mathcal{E}$-module à gauche <u>unitaire</u> sur l'anneau unitaire $\mathcal{E}$ artinien à gauche, les quatre notions de sous-module ($\neq U$) <u>$\mathcal{P}$-primal</u>, <u>$\mathcal{P}$-unirésidué</u>, <u>$\mathcal{P}$-secondaire</u>, <u>$\mathcal{P}$-tertiaire</u>, coïncident.

Dans ce cas, en effet, il n'existe pas de sous-module distinct de U et admettant $\mathcal{E}$ comme résiduel à gauche propre.

REMARQUE - Le théorème 3.2 peut aussi s'établir sans utiliser le théorème de transfert 3.1, lorsque $\mathcal{E}$ est artinien à gauche. En effet tout résiduel à gauche propre premier $\mathcal{P}' = X^{\cdot}.\,Y$ du sous-module $\mathcal{P}$-tertiaire $X(\neq U)$ est de la forme $\mathcal{P}' = X^{\cdot}.\,S$, S étant un sous-ensemble <u>fini</u> non vide de Y tel que $S \cap X = \emptyset$. Si $\mathcal{E}S \subseteq X$, alors $\mathcal{P}' = \mathcal{E} = \mathcal{P}$. Si $\mathcal{E}S \nsubseteq X$, le théorème 1.4 montre que $\mathcal{P}' = X^{\cdot}.\,S$ est $\mathcal{P}$-tertiaire ce qui exige alors que $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$. X est bien $\mathcal{P}$-unirésidué.

3. CAS D'UN ANNEAU NOETHERIEN $\mathcal{E}$ DONT TOUS LES IDEAUX A GAUCHE SONT BILATERES.

THEOREME 3.4 - Dans un anneau noethérien à gauche $\mathcal{E}$ en lequel tous les idéaux à gauche sont bilatères, les notions d'idéal à gauche propre (bilatère), $\mathcal{P}$-tertiaire à droite (en tant qu'idéal à gauche) et d'idéal à gauche propre $\mathcal{P}$-unirésidué, coïncident (cf. théorème 3.1 de [8] , II).

Les conditions d'application (E) et (m) de la proposition 3.1 sont vérifiées pour la structure de $\mathcal{E}$-module à gauche de l'anneau $\mathcal{E}$. Si un idéal à gauche $X \neq \mathcal{E}$, $\mathcal{P}$-tertiaire, admettait un résiduel à gauche propre premier $\mathcal{P}' = X \,\dot{.}\, Y$ distinct de $\mathcal{P}$, il existerait (d'après la proposition 3.1) un idéal à gauche $\mathcal{M} \neq \mathcal{E}$ qui ne serait pas bilatère ; (si $\mathcal{M}$ était bilatère il serait confondu avec $\mathcal{P}'$ d'après le d) de cette même proposition).

COROLLAIRE 3.2 - Soit U un module à gauche sur l'anneau $\mathcal{E}$ vérifiant les conditions du théorème 3.4 ; si U satisfait à la condition minimale (m) pour les résiduels à gauche de ses sous-modules, les notions de sous-module ($\neq$ U) $\mathcal{P}$-tertiaire et de sous-module $\mathcal{P}$-unirésidué coïncident.

$\mathcal{E}$ étant noethérien à gauche, U satisfait à la condition (E) pour tous ses sous-modules. Il suffit alors d'appliquer le théorème 3.1, compte tenu du théorème 3.4.

4. CAS D'UN ANNEAU NOETHERIEN A DROITE.

L'étude est alors possible pour les idéaux bilatères de $\mathcal{E}$. Auparavant établissons la proposition :

PROPOSITION 3.3 - Soit $\mathcal{A}$ un idéal bilatère d'un anneau $\mathcal{E}$, vérifiant la condition maximale (M) pour ses résiduels à droite $\mathcal{A} \,.\!\dot{}\, S$, où S est un sous-ensemble non vide quelconque de $\mathcal{E}$. L'idéal $\mathcal{A}$ à la propriété : "$\mathcal{E}S \not\subseteq \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est $\mathcal{P}$-tertiaire à droite" $\Longrightarrow$ "$\mathcal{A} \,\dot{.}\, S$ est $\mathcal{P}$-tertiaire (à droite)".

(M) est équivalente à la condition minimale sur les résiduels $\mathcal{A} \,\dot{.}\, S$, car les applications :

$$S \longrightarrow \mathfrak{A} \cdot\!.\, S \qquad \text{et} \qquad S \longrightarrow \mathfrak{A} .\!\cdot S$$

définissent (par leurs restrictions) une application biunivoque anti-isotone de l'ensemble des résiduels à gauche $\mathfrak{A} \cdot\!.\, S$ (qui sont des idéaux à gauche) sur l'ensemble des résiduels à droite $\mathfrak{A} .\!\cdot S$ (qui sont des idéaux à droite).

Supposons alors que $\mathfrak{A}$ soit $\mathfrak{P}$-tertiaire à droite (en tant qu'idéal à gauche) et que $\mathfrak{C} S \not\subseteq \mathfrak{A}$. D'après la condition minimale précédente il existe une partie <u>finie</u> S_o telle que $S_o \subseteq S$, $S_o \cap \mathfrak{A} = \emptyset$, $\mathfrak{A} \cdot\!.\, S = \mathfrak{A} \cdot\!.\, S_o$ et $\mathfrak{A} \cdot\!.\, S_o$ est $\mathfrak{P}$-tertiaire d'après le théorème 1.4.

THEOREME 3.5 - Soit $\mathfrak{C}$ un anneau <u>noethérien à droite</u> ; un idéal propre <u>bilatère</u> $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{C}$ est <u>$\mathfrak{P}$-unirésidué</u> si et seulement si il est <u>$\mathfrak{P}$-tertiaire</u> à droite (en tant qu'idéal à gauche). (cf. théorème 3.2 de [8] , II).

La condition (E) est vérifiée par la structure de $\mathfrak{C}$-module à gauche de l'anneau $\mathfrak{C}$; tout idéal à gauche $\mathfrak{P}$-unirésidué est alors $\mathfrak{P}$-tertiaire d'après le théorème 2.3.

Inversement, soit $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{C}$ un idéal bilatère $\mathfrak{P}$-tertiaire. Soit aussi $\mathfrak{P}' = \mathfrak{A} \cdot\!.\, Y'$ un résiduel à gauche propre premier de $\mathfrak{A}$. On a $\mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{P}$. Si $\mathfrak{C} Y' \subseteq \mathfrak{A}$, alors $\mathfrak{P}' = \mathfrak{C} = \mathfrak{P}$. Si $\mathfrak{C} Y' \not\subseteq \mathfrak{A}$ d'après la proposition 3.3, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{A} \cdot\!.\, Y'$ est $\mathfrak{P}$-tertiaire, ce qui entraine $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$. $\mathfrak{A}$ est bien $\mathfrak{P}$-unirésidué.

-:-

CHAPITRE IV

-:-

SIMILITUDE DANS LES TREILLIS MODULAIRES

-:-

1. HYPOTHESES ; NOTATIONS ; DEFINITIONS.

Tout au long des chapitres qui suivent, (L) désigne un <u>treillis modulaire</u>, <u>$\cap$-continu</u> et <u>complet</u> ; nous renvoyons pour les définitions et propriétés usuelles aux "Leçons sur les treillis" de M.L.DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT [6] .

Les éléments de (L) sont notés par les capitales d'imprimerie A, B,..., X,... L'union (borne supérieure) et l'intersection (borne inférieure) de (L) sont respectivement écrites $\cup$ et $\cap$. L'élément universel et l'élément nul de (L) sont désignés par U et 0 .

En raison des applications au treillis des sous-modules d'un module, ou à celui des sous-groupes distingués stables d'un groupe à opérateurs, la relation d'ordre $A \leqslant B$ dans (L) se lira indistinctement : A est inférieur ou égal à B , A est contenu (ou plongé) dans B , B contient A , B est une extension de A dans (L) .

On appelle <u>quotient</u> A/B le couple formé de deux éléments de (L) tels que $B \leqslant A$; l'ensemble $(\mathcal{Z})$ des quotients de (L) est ordonné en treillis par restriction à $(\mathcal{Z})$ de l'ordre du treillis produit (L) × (L) (1) ; au quotient A/B est associé le sous-treillis de (L) , ou <u>segment</u>, constitué de tous les éléments X de (L) tels que $B \leqslant X \leqslant A$; ce segment sera noté aussi A/B ; pour l'ordre induit par celui de (L) , A/B est modulaire, $\cap$-continu et complet.

Deux quotients A/B et C/D sont dits <u>transposés</u> (cf. G. BIRKHOFF p. 72 [2]) si l'un des couples de conditions suivantes est réalisé :

a) $B = A \cap D$ et $C = A \cup D$

b) $D = B \cap C$ et $A = B \cup C$

On sait que, dans ces conditions, l'application $T \longrightarrow T \cup D$ (resp. $T \longrightarrow T \cap C$) réalise un isomorphisme des treillis A/B et C/D (cf. la propriété 3 p. 63 de [6] , ou le théorème 6 p. 73 de [2]). Dans le cas particulier du treillis des sous-groupes distingués stables d'un groupe à opérateurs, deux groupes quotients transposés A/B et C/D sont <u>isomorphes</u> en tant que groupes à opérateurs (cf. par exemple le théorème 6 p. 83 du chapitre I de [3]) .

Deux quotients A/B et C/D sont dits <u>semblables</u> (cf. O. ORE p. 430 , I [19]) ou projectifs (cf. G. BIRKHOFF p. 72 [2]) s'il existe une suite finie de quotients X_1/Y_1 ,..., X_i/Y_i ,..., X_n/Y_n , telle que deux quotients successifs soient transposés, et que $A/B = X_1/Y_1$, $C/D = X_n/Y_n$; les treillis A/B et C/D sont alors isomorphes. En particulier, lorsque deux quotients A/B et

---

(1) $A/B < C/D$ signifie : $A \leqslant C$ et $B \leqslant D$.

C/D vérifient : $A \cap D = B \cap C$ et $A \cup D = B \cup C$ (A/B et C/D sont des segments correspondants de A. CHATELET), ces deux quotients sont semblables.

2. UN THEOREME DE SIMILITUDE.

Dans la suite, il sera fait usage de la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1 - Soient A , B , H , trois éléments de (L) tels que :

$$H \cap A = H \cap B \quad (= N)$$

Posons : $A_1 = (H \cup B) \cap A \qquad B_1 = (H \cup A) \cap B$

1°) Les quotients A_1/N et B_1/N sont semblables, et l'isomorphisme correspondant : $T \longrightarrow (T \cup H) \cap B$ laisse invariant tous les éléments de $(A \cap B)/N$.

2°) Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

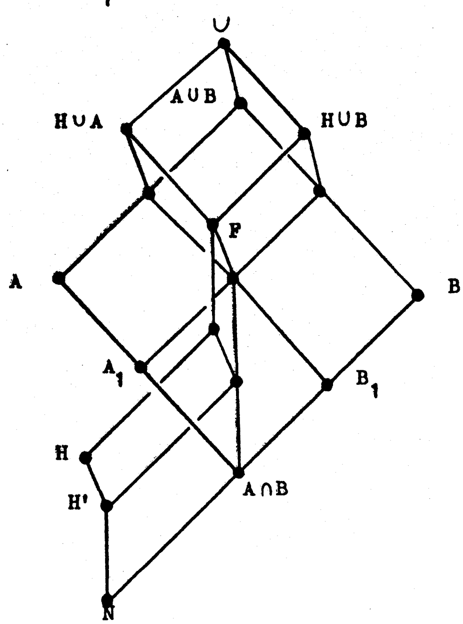
a) $A_1 = A \cap B$

b) $B_1 = A \cap B$

c) $N = H \cap (A \cup B)$

Preuve : Posons $F = (H \cup A) \cap (H \cup B)$;

1°) A_1/N et F/H sont des quotients transposés car :



$$H \cap A_1 = H \cap (H \cup B) \cap A = H \cap A = N ,$$

$$H \cup A_1 = H \cup [A \cap (H \cup B)] = (H \cup A) \cap (H \cup B) = F ,$$

puisque (L) est modulaire ; et $T \longrightarrow T \cup H$ est l'isomorphisme associé.

De même, les quotients F/H et B_1/N sont transposés, l'isomorphisme associé étant : $T \longrightarrow T \cap B$, car :

$$T \cap B_1 = T \cap (H \cup A) \cap B = T \cap B ,$$

lorsque $T \leqslant F$.

A_1/N et B_1/N sont donc semblables, l'isomorphisme associé $\sigma : T \longrightarrow (T \cup H) \cap B$ étant le composé des deux isomorphismes précédents.

σ laisse invariant tout élément Z de $(A \cap B)/N$; en effet, $Z \leqslant B$,

$N = H \cap B \leqslant Z$, et la modularité de (L) entraînent :

$$(Z \cup H) \cap B = Z \cup (H \cap B) = Z .$$

2°) Montrons tout d'abord que l'élément $H' = H \cap (A \cup B)$ peut remplacer H dans les expressions définissant A_1 et B_1 . Soit $T \leqslant A \cup B$,

$$(T \cup H') \cap A = \{T \cup [H \cap (A \cup B)]\} \cap A = (T \cup H) \cap (A \cup B) \cap A = (T \cup H) \cap A$$

De même :

$$(T \cup H') \cap B = (T \cup H) \cap B .$$

Il suffit alors de faire respectivement $T = B$ et $T = A$ dans chacune des égalités précédentes pour obtenir :

$$A_1 = (H' \cup B) \cap A \qquad\qquad B_1 = (H' \cup A) \cap B .$$

Supposons maintenant que $A_1 = A \cap B$. (L) étant modulaire :

$$B = B \cup (A \cap B) = B \cup A_1 = B \cup [A \cap (B \cup H')] = (B \cup A) \cap (B \cup H') ,$$

mais : $H' \leqslant A \cup B$, $B = H' \cup [B \cap (A \cup B)] = H' \cup B$, ce qui entraîne :

$$H' = H' \cap B = H \cap (A \cup B) \cap B = H \cap B = N .$$

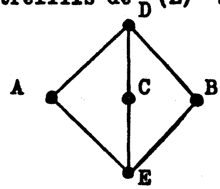
Inversement, supposons que $H' = N$, alors :

$$A_1 = (H' \cup B) \cap A = (N \cup B) \cap A = B \cap A .$$

On démontre de même l'équivalence des conditions b) et c) .

REMARQUE - La proposition 4.1 se transforme aisément en une proposition duale, le principe de dualité étant valable dans (L) (cf. M.L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, p. 59 [6]).

COROLLAIRE 4.1 - Lorsqu'un sous-treillis de (L) a pour diagramme :



les six quotients A/E , B/E , C/E , D/A , D/B , D/C , sont deux à deux semblables.

Il suffit d'appliquer la Proposition 4.1, ou sa duale. Par exemple, avec le choix :

$$H \longrightarrow C \qquad A \longrightarrow A \qquad B \longrightarrow B ,$$

on obtient la similitude de A/E et B/E .

3. DECOMPOSITIONS DIRECTES.

La plupart des définitions et propriétés de ce paragraphe ne sont pas originales ; elles sont néanmoins rappelées et numérotées pour la commodité des renvois aux références.

DEFINITION 4.1 - Z étant un élément donné de (L) , un élément A de (L) est <u>union directe sur Z</u> des n éléments $A_1, A_2, \dots, A_n$, de (L) lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

1°) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$;

2°) $A_1, A_2, \dots, A_n$, sont $\cup$-indépendants sur Z , c'est-à-dire :

$$\forall i \ , \quad A_i \cap \left(\bigcup_{\lambda \neq i} A_\lambda \right) = Z \ , \quad A_i \neq Z \ .$$

(cf. G. BIRKHOFF p. 94 et 74 de [2]) .

Lorsque $Z = 0$ (cas usuel), on écrira : $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$.

PROPOSITION 4.2 - Pour que n éléments $A_1, A_2, \dots, A_n$, de (L) soient $\cup$-indépendants sur Z , il faut et il suffit que :

$$A_i \neq Z \quad \text{et} \quad A_i \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{i-1}) = Z \ , \quad (i = 2, 3, \dots, n) \ .$$

C'est, sous une forme équivalente, le théorème 21 p. 435 de O. ORE, I [19]. Sa démonstration utilise l'axiome de modularité. Un corollaire de cette proposition sera fréquemment utilisé par la suite :

COROLLAIRE 4.2 - Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) $A_1 \cap A_2 = A_3 \cap (A_1 \cup A_2)$.

b) $A_2 \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$.

c) $A_3 \cap A_1 = A_2 \cap (A_3 \cup A_1)$.

Si l'une d'elles est réalisée, les six éléments ainsi écrits sont égaux, et :

$A_1 = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$; $A_2 = (A_2 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_1)$; $A_3 = (A_3 \cup A_1) \cap (A_3 \cup A_2)$.

En effet l'une des conditions écrites exprime que A_1, A_2, A_3, sont $\cup$-indépendants sur $Z = A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_3 \cap A_1$. Pour obtenir les trois dernières relations il suffit d'utiliser la modularité de (L) , par exemple :

$$(A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3) = A_1 \cup [A_2 \cap (A_1 \cup A_3)] = A_1 \cup (A_3 \cap A_1) = A_1 \quad .$$

PROPOSITION 4.3 - Soient n éléments $A_1, A_2, \ldots, A_n$, <u>$\cup$-indépendants sur Z</u> . Posons $\bar{A}_i = \bigcup_{\lambda \neq i} A_\lambda$.

a) Pour deux sous-ensembles non vides <u>disjoints</u> $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$,

$$Z = \left(\bigcup_{i \in \mathcal{A}} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i \in \mathcal{B}} A_i\right) \quad .$$

b) Pour toute <u>partition</u> de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en deux composants non vides $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$:

$$\bigcap_{i \in \mathcal{A}} \bar{A}_i = \bigcup_{i \in \mathcal{B}} A_i \ .$$

c) $$Z = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n \ .$$

<u>Preuve</u> :

a) On procède par récurrence sur card. $\mathcal{A}$. Si card. $\mathcal{A} = 1$, la propriété résulte de la définition de l' $\cup$-indépendance. Supposons la propriété établie pour les valeurs 1, 2,..., h-1, de card. $\mathcal{A}$, et établissons la pour card. $\mathcal{A} = h$ $(h \geqslant 2)$. Soit $i_o \in \mathcal{A}$, et posons $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - \{i_o\}$. Par définition de l' $\cup$-indépendance sur Z :

$$Z = A_{i_o} \cap \left[\left(\bigcup_{i \in \mathcal{A}'} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathcal{B}} A_i\right)\right] \ .$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$Z = \left(\bigcup_{i\in\mathcal{A}'} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in\mathcal{B}} A_i\right) .$$

D'où il résulte (cf. corollaire 4.2) :

$$Z = \left(\bigcup_{i\in\mathcal{A}} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in\mathcal{B}} A_i\right) .$$

b) On procède également par récurrence sur card. $\mathcal{A}$. La relation à montrer résulte de la définition de $\overline{A}_i$ lorsque card. $\mathcal{A} = 1$.

Avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses d'induction qu'en a) , on obtient :

$$\bigcap_{i\in\mathcal{A}} \overline{A}_i = \left(\bigcap_{i\in\mathcal{A}'} \overline{A}_i\right) \cap \overline{A}_{i_o} = \left(\bigcup_{i\in\mathcal{B}\cup\{i_o\}} A_i\right) \cap \overline{A}_{i_o} =$$

$$\left[\left(\bigcup_{i\in\mathcal{B}} A_i\right) \cup A_{i_o}\right] \cap \overline{A}_{i_o} = \left(\bigcup_{i\in\mathcal{B}} A_i\right) \cup \left(A_{i_o} \cap \overline{A}_{i_o}\right) = \left(\bigcup_{i\in\mathcal{B}} A_i\right) \cup Z = \bigcup_{i\in\mathcal{B}} A_i .$$

c) D'après ce qui précède, en prenant $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ et $\mathcal{B} = \{n\}$,

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-1} = A_n$$
$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-1} \cap \overline{A}_n = A_n \cap \overline{A}_n = Z .$$

La définition 4.1 et les propriétés qui la suivent se doublent des notions duales correspondantes. Explicitons seulement la définition duale.

DEFINITION 4.2 - Z étant un élément donné de (L) , un élément A de (L) est <u>intersection</u> <u>directe</u> <u>sur</u> <u>Z</u> des n éléments A_1 , A_2 ,..., A_n , de (L) , lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

1°) $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

2°) A_1 , A_2 ,..., A_n , sont $\cap$ -indépendants sur Z , c'est-à-dire :

$$\forall i \ , \ A_i \cup \left(\bigcap_{\lambda\neq i} A_\lambda\right) = Z \ , \ A_i \neq Z .$$

La proposition 4.3 et sa duale permettent d'énoncer :

PROPOSITION 4.4 - Si A est union (resp. intersection) directe sur Z des n éléments $A_1, A_2, \ldots, A_n$, alors Z est intersection (resp. union) directe sur A des n éléments $\overline{A}_i = \bigcup_{\lambda \neq i} A$ (resp. $A_i^* = \bigcap_{\lambda \neq i} A_i$) .

-:-

CHAPITRE V

-:-

ELEMENTS INJECTIFS DE (L)

-:-

1. EXTENSIONS ESSENTIELLES.

La notion d'extension essentielle d'un module introduite par ECKMANN et SCHOEF [7] , s'étend sans modification aux éléments de (L) (cf. aussi P. GABRIEL p. 17.02 de [9]) :

DEFINITION 5.1 - L'élément $B \geqslant A$ est extension essentielle de A dans (L) si, X étant un élément inférieur ou égal à B , la relation $A \cap X = 0$ implique $X = 0$. Dans ces conditions, on dit que A est essentiel dans B .

De même, pour deux éléments B, A ($B \geqslant A$) du quotient C/D , B est dit être extension essentielle de A dans C/D , si : "$X \leqslant B$, $X \cap A = D$ " implique "$X = D$" . On dit aussi que A est essentiel dans B/D .

REMARQUE - Dans le treillis des sous-objets d'un objet d'une catégorie, R. DEHEUVELS définit un sous-objet épais E d'un objet C par la propriété :

H sous-objet de C , et $H \cap E = 0 \Longrightarrow H = 0$,

ce qui équivaut à dire que C est extension essentielle de E , ou que E est élément essentiel du treillis des sous-objets (cf. définition 2.3 de ce chapitre V).

Un couple $A \subset B$ de sous-objets de C est dit épais si A est épais dans B (ce qui signifie que B est extension essentielle de A dans C)

Lorsque le treillis des sous-objets de C satisfait à l'axiome :

Toute famille filtrante croissante (B_i) de sous-objets a une borne supérieure $\bigcup_i B_i$, et quel que soit le sous-objet H , on a :
$H \cap (\bigcup_i B_i) = \bigcup_i (H \cap B_i)$

pour tout sous-objet A , il existe alors au moins un couple épais maximal $(A \subset B)$ (cf. le théorème 2.1 de ce chapitre V) et il est ainsi possible d'introduire et d'étudier des sous-objets injectifs et des enveloppes injectives (R. DEHEUVELS, cours d'analyse supérieure, Lille 1958-59, non publié).

PROPOSITION 5.1 - Soient A, B, C trois éléments du quotient E/D , tels que

$$A \leqslant B \leqslant C .$$

Pour que C soit extension essentielle de A dans E/D , il faut et il suffit que C soit extension essentielle de B dans E/D et que B soit extension essentielle de A dans E/D (vérification aisée).

PROPOSITION 5.2 - Pour que E soit extension essentielle de A dans C/D , il faut et il suffit que, pour tout $C' \geqslant C$ et tout $D' \leqslant D$, E soit extension essentielle de A dans C'/D' .

Seule la condition nécessaire est à prouver. Soit donc $X \in (L)$ tel que $X \leqslant E$, $X \cap A = D'$. (L) étant <u>modulaire</u> :

$$(D \cup X) \cap A = D \cup (X \cap A) = D \cup D' = D ;$$

E étant extension essentielle de A dans C/D :

$D \cup X = D$, ce qui entraine $X \leqslant D \leqslant A$, $D' = X \cap A = X$.

PROPOSITION 5.3 - Soit $(P) = \prod_{i \in I} (L_i)$ le treillis <u>produit</u> cardinal général de la famille $\{(L_i)\}_{i \in I}$ de treillis (L_i) (cf. déf. p. 15 [6]) . Pour que l'élément $E = (E_i)_{i \in I}$ de (P) soit extension essentielle dans (P) de $A = (A_i)_{i \in I}$, il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, E_i soit extension essentielle de A_i dans (L_i) .

La condition est <u>nécessaire</u> ; soit $X_j \in (L_j)$ tel que $X_j \leqslant E_j$, $X_j \cap A_j = 0$. Soit $Y = (Y_i)_{i \in I}$ l'élément de (P) défini par : $Y_j = X_j$ et $Y_i = 0$ si $i \neq j$. On a :

$$Y \leqslant E \quad , \quad Y \cap A = (Y_i \cap A_i)_{i \in I} = 0 \ ;$$

E étant extension essentielle de A dans (P) : $Y = 0$, ce qui entraine bien $X_j = 0$.

La condition est <u>suffisante</u> ; soit $X = (X_i)_{i \in I}$ l'élément de (P) tel que $X \leqslant E$, $X \cap A = 0$.

$\forall i \in I$, $X_i \leqslant E_i$, $X_i \cap A_i = 0$; l'hypothèse entraine :

$$\forall i \in I \ , \ X_i = 0 \ , \ \text{ou} \ X = 0 \ .$$

Certaines propriétés vérifiées par un élément X dans un quotient A/0 , restent valables lorsqu'on remplace A par une extension essentielle E de A dans U/X , U étant l'élément universel de (L) . Les deux propositions qui suivent en sont deux exemples :

PROPOSITION 5.4 - Pour que X soit <u>$\cap$-irréductible</u> dans A/0 ($X \leqslant A$) , il faut et il suffit qu'il le soit dans tout quotient E/0 , E étant une extension essentielle arbitraire de A dans U/X .

Soit $X = X_1 \cap X_2$ une $\cap$-décomposition de X dans E/0 (X_1 et $X_2 \leqslant E$) ; montrons qu'elle est triviale ;

$$X = (X_1 \cap A) \cap (X_2 \cap A) \ ;$$

X étant $\cap$-irréductible dans A/0 , cela entraine (par exemple) :

$$X = X_1 \cap A \quad , \quad \text{avec} \quad X_1 \leqslant E \ ,$$

et aussi $X = X_1$, puisque E est extension essentielle de A dans U/X .

Supposons que (L) soit une <u>($\mathcal{C}$)-algèbre modulaire</u>, ($\mathcal{C}$) étant un demi-groupe réticulé quasi-entier complet opérant dans (L) (cf. L. LESIEUR et R. CROISOT p. 25 à 32 de [16])(1) ; il est alors possible d'introduire la notion d'élément <u>$\mathcal{P}$-tertiaire</u> dans (L) , ainsi que dans toute sous-algèbre de (L) (cf. définition 7.4 p. 66 de [16] , ou p. 105 de [13] , I)(2) .

---

(1) cf. aussi chapitre XI , § 2.

(2) cf. aussi définition rappelée à la proposition 1.3.

PROPOSITION 5.5 - (L) étant une $(\mathscr{C})$-algèbre modulaire, pour que X soit un élément $\mathscr{P}$-<u>tertiaire</u> de la sous-algèbre A/0 de (L) $(X \neq A)$, il faut et il suffit qu'il soit élément $\mathscr{P}$-tertiaire de toute sous-algèbre E/0 de (L) , E étant une extension essentielle arbitraire de A dans U/X .

Soit X un élément $\mathscr{P}$-tertiaire de A/0 . Montrons que X est un élément $\mathscr{P}$-primal de E/0 ; il suffit pour cela de montrer que X , considéré comme élément de la $(\mathscr{C})$-algèbre E/0 , admet un seul résiduel à gauche propre maximal (d'après la proposition 4.2 p. 37 de [16]).

Pour éviter toute confusion les résiduations de A/0 seront notées $.^{\bullet}$ et $^{\bullet}.$, et celles de E/0 seront notées $.\!:^{\bullet}$ et $^{\bullet}\!:.$.

Soit donc $\mathfrak{A} = X \;^{\bullet}\!:. \; A'$ un résiduel à gauche propre de X $(A' \nleq X$, $A' \leqslant E)$. Posons $N = A' \cup X$, nous avons :

$$X < N \leqslant E \quad , \quad \mathfrak{A} = X \;^{\bullet}\!:.\; N .$$

D'autre part, $\mathscr{P} = X \;^{\bullet}.\; Y$ avec $X < Y = X \;.^{\bullet} \mathscr{P} \leqslant A$. Nous avons $Y \cap N > X$ car $Y \cap X = X$ entraine :

- $(X \;.^{\bullet} \mathscr{P}) \cap N \cap A = X$,
- $N \cap A = X$, car X est élément $\mathscr{P}$-tertiaire de A/0 ,
- $X = N$, car E est extension essentielle de A dans U/X , ce qui est en contradiction avec $X < N$.

De $Y \cap N > X$ nous déduisons que $\mathscr{P} = X \;^{\bullet}.\; (Y \cap N)$, puisque $\mathscr{P}$ est résiduel propre maximum de X dans A/0 , et

$$\mathfrak{A} = X \;^{\bullet}\!:.\; N \leqslant X \;^{\bullet}\!:.\; (N \cap Y) = X \;^{\bullet}.\; (N \cap Y) = \mathscr{P} \;;$$

$\mathscr{P}$ est bien résiduel à gauche propre maximum de X dans E/0 . Pour achever de montrer que X est $\mathscr{P}$-tertiaire de E/0 , considérons $Z \in E/0$ tel que : $(X \;.\!:^{\bullet} \mathscr{P}) \cap Z = X$; puisque $X \;.^{\bullet} \mathscr{P} \leqslant X \;.\!:^{\bullet} \mathscr{P}$, $(X \;.^{\bullet} \mathscr{P}) \cap Z \cap A = X$. Mais X est $\mathscr{P}$-tertiaire de A/0 : $Z \cap A = X$, et $Z = X$ (E extension essentielle de A dans U/X).

Il suffit, pour terminer, d'appliquer la propriété 7.4 p. 67 de [16] (ou bien la propriété 7.1 p. 105 de I , [13]).

2. ELEMENTS INJECTIFS DE (L) .

Lorsque (L) est le treillis des sous-modules d'un module <u>injectif</u> M , l'ensemble des sous-modules injectifs Q de M est identique à l'ensemble des sous-modules n'ayant pas d'extension essentielle propre (cf. B. ECKMANN et A. SCHOPF [7] , ou L. LESIEUR et R. CROISOT p. 98, 99 [16]). Il est ainsi légitime de poser :

DEFINITION 5.2 - L'élément Q de (L) est dit <u>injectif</u> s'il ne possède pas d'extension essentielle propre dans (L) .

O et U sont des injectifs de (L) . Cette définition s'étend ainsi au cas des quotients de (L) :

$Q \in C/D$ est dit injectif de C/D , s'il ne possède pas d'extension essentielle propre dans C/D . Ceci est équivalent à :

$$"Q < A \leqslant C" \Longrightarrow "\exists X \ , \ X \in (L) \ , \ D < X \leqslant A \ , \ Q \cap X = D" .$$

Les éléments S de (L) qui possèdent l'élément universel U de (L) comme extension essentielle, jouent un rôle particulier dans la présente étude ; ils peuvent être définis de la manière suivante :

DEFINITION 5.3 - On appelle élément <u>essentiel</u> de (L) ou <u>épais</u> (cf. terminologie de R. DEHEUVELS, remarque suivant la définition 5.1), un élément S ayant la propriété suivante : $S \cap X = 0 \Longrightarrow X = 0$. Cela équivaut à dire que S est un élément <u>essentiel</u> de U/O (cf. définition 5.1) .

R.E. JOHNSON introduit ces éléments particuliers dans [11] (p. 537, II) , les nomme "large éléments" (cf. p. 710, III, [11]), et leur associe des "singular submodules" qui les contiennent (cf. p. 260 [12]).

L'élément universel U de (L) est essentiel ; si (L) a plus de un élément, O n'est pas essentiel. Tous les éléments différents de O de (L) peuvent être essentiels, par exemple lorsque (L) est totalement ordonné. Pour qu'un injectif de (L) soit <u>non</u> essentiel il faut et il suffit qu'il soit distinct de U .

THEOREME 5.1 - Tout élément non essentiel A de (L) peut être plongé dans un injectif de (L) , distinct de U , et qui est extension essentielle de A dans (L) .

En effet, la famille $\mathcal{F} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{K}}$ des extensions essentielles de A dans (L) est non vide, et est inductive pour l'ordre induit sur $\mathcal{F}$ par celui de (L) . Pour le vérifier, considérons une sous-famille $\mathcal{F}' = \{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{K}'}$ non vide de $\mathcal{F}$, totalement ordonnée. La borne supérieure $E = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{K}'} E_\alpha$ de cette famille $\mathcal{F}'$ existe dans (L) qui est supposé complet. Montrons que E est extension essentielle de A dans (L) :

Soit $X \leqslant E$, $X \cap A = 0$. Par suite : $\forall \alpha \in \mathfrak{K}'$, $X \cap A \cap E_\alpha = 0$ et $X \cap E_\alpha = 0$, puisque E_α est extension essentielle de A dans (L) . Le treillis (L) étant $\cap$-continu, $X = X \cap E = X \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{K}'} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{K}'} (X \cap E_\alpha) = 0$. Donc $E \in \mathcal{F}$; il suffit, en vertu du théorème de ZORN, de choisir un élément maximal Q de $\mathcal{F}$. A étant non essentiel, Q est distinct de U ; enfin Q est injectif de (L) , sinon il existerait dans (L) une extension essentielle propre B de Q , qui serait aussi extension essentielle de A (d'après la proposition 5.1), ce qui contredirait le caractère maximal de Q dans $\mathcal{F}$.

COROLLAIRE 5.1 - Pour que S soit élément essentiel de (L) il faut et il suffit que U soit le seul injectif de (L) qui contienne S .

Il suffit d'appliquer la proposition 5.1 et le théorème 5.1.

Les trois énoncés qui suivent permettent le transfert de la propriété d'être "élément injectif" ;

PROPOSITION 5.6 - Q est un élément injectif du quotient B/A de (L) si et seulement si Q est élément injectif de tout quotient B'/A , B' étant un élément arbitraire du quotient B/Q .

Cette proposition est conséquence directe des définitions.

PROPOSITION 5 7 - Q est un élément injectif du quotient B/A de (L) si et seulement si Q est élément injectif de tout quotient B/A' , A' étant un élément arbitraire du quotient Q/A .

En effet soit E une extension essentielle de Q dans B/A' . E est aussi extension essentielle de Q dans B/A , d'après la proposition 5.2 . Q étant injectif de B/A , alors $E = Q$.

PROPOSITION 5.8 - Pour que l'élément $Q = (Q_i)_{i \in I}$ du produit cardinal général $(P) = \prod_{i \in I} (L_i)$ des treillis (L_i) , soit élément injectif de (P) , il faut et il suffit que chaque composant Q_i soit élément injectif de (L_i) .

Supposons que Q soit élément injectif de (P) , et soit E_j une extension essentielle de Q_j dans (L_j) ; l'élément $A = (A_i)_{i \in I}$, défini par $A_j = E_j$ et $A_i = Q_i$ si $i \neq j$, est alors extension essentielle de Q dans (P) (cf. proposition 5.3). $Q = A$ et $Q_j = E_j$; Q_j coïncide avec toutes ses extensions essentielles ; il est donc injectif.

Inversement, supposons que, $\forall i \in I$, Q_i soit injectif de (L_i) , et considérons une extension essentielle $E = (E_i)_{i \in I}$ de Q dans (P) ; d'après la proposition 5.3 , chaque E_i est extension essentielle de Q_i dans (L_i) , donc $E_i = Q_i$, $E = Q$.

-:-

CHAPITRE VI

-:-

ELEMENTS COMPLEMENTS DE (L)

-:-

1. COMPLEMENTS ET INJECTIFS.

La notion de complément est étroitement liée à celle d'extension essentielle :

- dans le cas des modules (cf. exposé de R. CROISOT au séminaire DUBREIL-PISOT le 10 avril 1961, et G. RENAULT [20]) .

- dans le cas des catégories abéliennes (cf. P. GABRIEL p. 361 de [10]).

- dans le cas des treillis modulaires (cf. R.E. JOHNSON p. 520 , I , de [11]).

DEFINITION 6.1 - Soit A un élément de (L) ; tout élément K de (L) maximal dans l'ensemble des X de (L) tels que $X \cap A = 0$, est appelé un complément relatif (ou plus simplement complément) de A dans (L) . Un élément complément dans (L) est un élément K pour lequel il existe $A \in (L)$ dont K soit complément relatif.

Tout élément A de (L) admet au moins un complément dans (L) car l'ensemble des éléments X de (L) tels que $X \cap A = 0$, est inductif et non vide (le treillis (L) est supposé complet et $\cap$-continu). $\cup$ (resp. 0) a pour seul complément 0 (resp. $\cup$). On voit aisément que :

PROPOSITION 6.1 - Pour qu'un élément S de (L) soit essentiel, il faut et il suffit qu'il possède 0 comme complément (nécessairement unique).

La définition 6.1 s'étend comme suit, aux éléments d'un quotient de (L) :

Soit $A \in C/D$, l'élément K de C/D est dit complément de A dans C/D , s'il est maximal dans l'ensemble des éléments X de C/D tels que $X \cap A = D$.

PROPOSITION 6.2 - La propriété " K est complément de A dans C/D " est invariante par les translations suivantes dans (L) :

a) $T \longrightarrow T \cap H$, lorsque $C \leqslant D \cup H$;

b) $T \longrightarrow T \cup H$, lorsque $H \cap C \leqslant D$.

Il suffit d'observer, pour a) par exemple, que les deux quotients $(D \cup H)/D$ et $H/(D \cap H)$ sont transposés, isomorphes par $T \longrightarrow T \cap H$, et que C/D est sous-quotient de $(D \cup H)/D$.

THEOREME 6.1 - Pour que A soit élément injectif du quotient C/D , il faut et il suffit que A soit élément complément de C/D .

La condition est suffisante : A est complément de B dans C/D . Soit alors $A' \in C/D$ tel que $A' > A$; A étant maximal dans C/D tel que

$A \cap B = D$, $A' \cap B > D$ avec $A' \cap B \cap A = D$; A' n'est pas extension essentielle de A dans C/D , et A est donc injectif dans C/D .

La condition est <u>nécessaire</u> : Soit K un complément de A injectif dans C/D . Montrons que A est complément de K dans C/D . Si non, il existerait $A' \in C/D$ tel que : $A' > A$; $A' \cap K = D$. Mais A étant injectif de C/D , on pourrait trouver $X \in C/D$ tel que :

$$D < X \leqslant A' \qquad \text{et} \qquad A \cap X = D ;$$

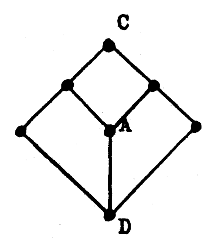
par suite : $D \leqslant K \cap (A \cup X) \leqslant K \cap A' = D$, $K \cap (A \cup X) = D = A \cap X$, et d'après le corollaire 4.2 de la proposition 4.2 ,

$$D = X \cap K = A \cap (X \cup K) .$$

La maximalité de K tel que $A \cap K = D$ entrainerait : $X \cup K = K$ ou $X = X \cap K = D$ en contradiction avec $D < X$.

REMARQUE 1 - Par la suite, tout élément vérifiant l'une des conditions du théorème 6.1 , sera appelé indistinctement injectif ou complément de C/D .

REMARQUE 2 - Lorsque (L) n'est pas modulaire, un élément de (L) peut être injectif sans être complément. Il en est ainsi pour l'élément A du treillis semi-modulaire dual, représenté ci-contre.



Au cours de la démonstration du théorème 6.1 nous avons obtenu :

COROLLAIRE 6.1 - Si un élément K de (L) est complément d'un injectif Q de (L), alors Q est complément de K dans (L) .

Deux tels éléments K et Q compléments l'un de l'autre sont dits <u>compléments réciproques</u>.

Deux éléments A et B de (L) sont dits <u>supplémentaires</u> lorsque $A \cup B = U$ et $A \cap B = 0$; dans ces conditions, A (par exemple) est un <u>supplément</u>

de B dans (L) (par définition). Cette appellation, pour éviter toute confusion, n'est pas celle adoptée dans [5] et [6] (où A est dit "complément" de B).

PROPOSITION 6.3 - Tout supplément S d'un élément A de (L) est un complément de A dans (L) .

Car pour $S' > S$ et $S' \cap A = 0$, on a :

$$S = S \cup (A \cap S') = (S \cup A) \cap S' = S' .$$

S est aussi un élément injectif de (L) , résultat qui, lorsque (L) est le treillis des sous-modules d'un module injectif M , signifie que tout composant direct de M est injectif. (cf. par exemple H. CARTAN et S. EILENBERG, Prop. 3.1 p. 8 de [4]).

2. COMPLEMENTS ET EXTENSIONS ESSENTIELLES.

R.E. JOHNSON a établi les deux résultats suivants (cf. p. 520 de [11] , I) ; énoncés dans le langage adopté ici :

PROPOSITION 6.4 - Soit K un complément de A dans (L) , pour qu'un élément E contenant A soit extension essentielle de A il faut et il suffit que :

$$E \cap K = 0 .$$

PROPOSITION 6.5 - Si K est complément de A dans (L) , $A \cup K$ est alors un élément essentiel de (L) (c'est-à-dire U est extension essentielle de $A \cup K$ dans (L)).

La première de ces propositions permet d'établir :

PROPOSITION 6.6 - Soient A et B deux éléments de (L) tels que $A \leqslant B$. Pour que A et B aient même ensemble de compléments dans (L) , il faut et il suffit que B soit une extension essentielle de A .

La condition est nécessaire en vertu de la proposition 6.4. Réciproquement supposons que B soit extension essentielle de A, alors tout complément de A est complément de B (proposition 6.4) ; soit, d'autre part, K un complément de B : $B \cap K = 0$, et aussi $A \cap K = 0$. Il existe alors au moins un complément K' de A, qui contient K ; K' est aussi complément de B, d'après ce qui précède, ce qui montre que $K = K'$.

PROPOSITION 6.7 - Si K est complément de A dans (L), $A \cup K$ est alors un élément essentiel du quotient U/K.

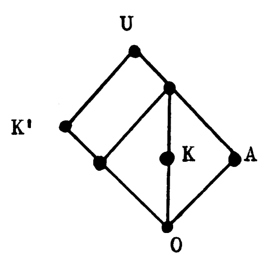
Soit en effet $X \in (L)$ tel que $X \cap (A \cup K) = K$; il résulte :

$$0 = A \cap X = A \cap X \cap (A \cup K) = A \cap X \quad , \quad X \geqslant K ,$$

et la maximalité de K entraine $X = K$.

3. COMPLEMENTS D'UN MEME ELEMENT.

Deux compléments K et K' d'un même élément A de (L) ne définissent pas en général deux quotients $K/0$ et $K'/0$ isomorphes, comme le montre l'exemple suivant (modulaire) :



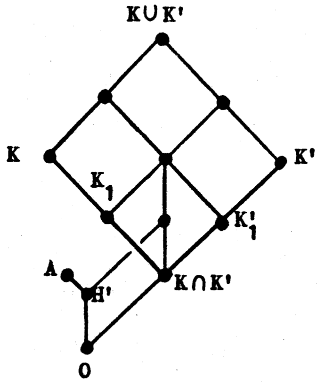
Il est néanmoins possible de trouver des sous-quotients $K_1/0$ dans $K/0$ et $K'_1/0$ dans $K'/0$, semblables et non triviaux (c'est-à-dire contenant en commun le quotient $(K \cap K')/0$ et différents tous deux de ce quotient), dès que $K \neq K'$,

THEOREME 6.2 - Si K et K' sont deux compléments de A dans (L), distincts, on peut alors trouver K_1 et K'_1 tels que :

1) $K \cap K' < K_1 \leqslant K$ et $K \cap K' < K'_1 \leqslant K'$;

2) les quotients $K_1/0$ et $K'_1/0$ soient semblables.

Preuve :



K et K' sont distincts, tous deux compléments de A , donc incomparables :

$$K \cup K' > K' \quad \text{et} \quad K \cup K' > K .$$

En raison de la maximalité de K (ou de K'), l'élément $H' = A \cap (K \cup K')$ est différent de 0 .

La proposition 4.1 appliquée au choix :

$$A \longrightarrow K , \quad B \longrightarrow K' , \quad H \longrightarrow A ,$$

montre que les quotients $K_1/0$ et $K'_1/0$ sont semblables, en posant :

$$K_1 = (A \cup K') \cap K \quad , \quad K'_1 = (A \cup K) \cap K' ,$$

et que : $K \cap K' < K_1$, $K \cap K' < K'_1$,

puisque $A \cap (K \cup K')$ est distinct de $0 = K \cap A = K' \cap A$.

Remarquons que la similitude donnée par ce théorème définit un <u>isomorphisme</u>, lorsqu'il est appliqué au treillis des sous-groupes distingués stables, d'un groupe à opérateur U .

De même, lorsque deux éléments A et B de (L) tels que $A \cap B = 0$, admettent un complément commun K , il est possible de trouver deux sous-quotients de $A/0$ et $B/0$, semblables et non nuls :

THEOREME 6.3 - Soient A et B deux éléments de (L) ayant un <u>complément commun</u> K dans (L) , et vérifiant $A \cap B = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Dans ces conditions, il existe un sous-quotient $A_1/0$ de $A/0$, et un sous quotient $B_1/0$ de $B/0$, <u>semblables</u> et non <u>nuls</u> $(A_1 \neq 0 , B_1 \neq 0)$.

Preuve : Supposons tout d'abord $K = 0$; le seul complément de A est $0 = K$, A est donc essentiel (cf. définition 5.3) et : $A \cap B = 0 \Longrightarrow B = 0$, ce qui est impossible.

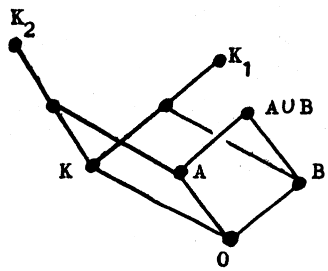
Il est donc assuré que $K > 0$; cela implique $K \cap (A \cup B) > 0$; en effet $K \cap (A \cup B) = 0 = A \cap B$ entraine (cf. corollaire 4.2) :

$(K \cup A) \cap B = (K \cup B) \cap A = 0$; K étant complément de A et de B : A et $B \leqslant K$, d'où $0 = K \cap A = A = K \cap B = B$ ce qui est impossible. $K \cap (A \cup B)$ étant ainsi différent de 0 , la proposition 4.1 du chapitre IV montre que les quotients $A_1/0$ et $B_1/0$ sont semblables $\left(A_1 = (K \cup B) \cap A\right.$ et $\left.B_1 = (K \cup A) \cap B\right)$, et que A_1 et B_1 sont différents de 0 .

Terminons ce paragraphe en indiquant une circonstance en laquelle l'intersection de deux compléments est un complément.

PROPOSITION 6.8 - Lorsque $A \cap B = 0$ $(A \neq 0$ et $B \neq 0)$ il est possible de trouver des compléments K_1 , K_2 , K , de A , B , $A \cup B$, respectivement, tels que :

$$K = K_1 \cap K_2 \quad , \quad K < K_1 \quad , \quad K < K_2 .$$



Soit en effet K un complément de $A \cup B$:

$$K \cap (A \cup B) = A \cap B = 0 .$$

Appliquons le corollaire 4.2 du chapitre IV ,

$$(K \cup A) \cap B = (K \cup B) \cap A = 0 ;$$

nous pouvons alors considérer un complément K_1 de A contenant $K \cup B$, et un complément K_2 de B contenant $K \cup A$;

$$(K_1 \cap K_2) \cap (A \cup B) = K_1 \cap \left[A \cup (B \cap K_2)\right] = K_1 \cap A = 0 .$$

$K_1 \cap K_2 \geqslant K$ et la maximalité de K pour la propriété $K \cap (A \cup B) = 0$, entrainent : $K = K_1 \cap K_2$.

Enfin $K = K_1$ entraine $K \cup B = K$, puis $B = B \cap (K \cup B) = B \cap K = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

4. DEUX CARACTERISATIONS DES ELEMENTS COMPLEMENTS.

G. RENAULT a montré (cf. théorème 1 de [20]) qu'un sous-module X d'un module M est complément dans M si, et seulement si, il est la trace sur M d'un sous-module injectif de l'enveloppe injective $E(M)$ de M .

E(M) est, en particulier, une extension essentielle de M . (cf. ECKMANN-SCHOPT [7]). Il est possible d'étendre cette propriété aux quotients $A/0$ du treillis (L) , et à toute extension essentielle E de A dans (L) :

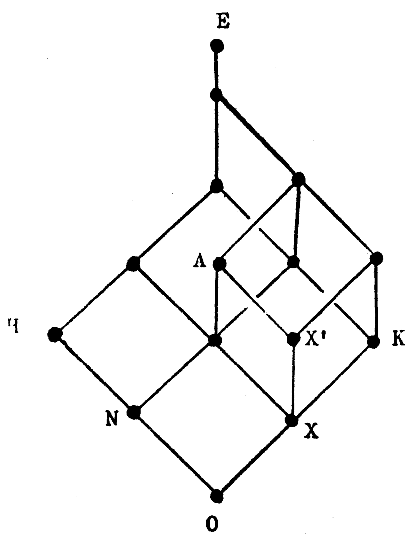
THEOREME 6.4 - Soit E une extension essentielle de A dans (L) ; pour que X soit un élément complément dans le quotient $A/0$, il faut et il suffit que $X = K \cap A$, où K est un élément complément (ou injectif) du quotient $E/0$.

Preuve : La condition est nécessaire : Soit X , complément de l'élément N de $A/0$, $X \cap N = 0$. E étant un élément de (L) contenant A (E extension essentielle ou non), considérons un élément K de $E/0$ qui contienne X et qui soit complément de N dans $E/0$.

$$K \cap N = 0 \quad ; \quad A \cap K \cap N = 0 \quad \text{et} \quad A \cap K \in A/0 \quad , \quad X \leqslant A \cap K \; ;$$

X étant complément de N dans $A/0$: $X = A \cap K$.

La condition est suffisante : Soient E une extension essentielle de A dans (L) , K un complément de H dans $E/0$. Montrons que l'élément $X = K \cap A$ est complément de l'élément $N = H \cap A$ de $A/0$.



Soit donc $X' \in A/X$ tel que $X' \cap N = 0$. (L) étant modulaire :

$$[(X' \cup K) \cap H] \cap A = [X' \cup (K \cap A)] \cap H = X' \cap H = X' \cap A \cap H = X' \cap N = 0 \; ;$$

E est extension essentielle de A :

$$(X' \cup K) \cap H = 0 \; ;$$

K est complément de H dans $E/0$:

$$X' \cup K = K \; ;$$

$$X' = X' \cap K = X' \cap A \cap K = X' \cap X = X$$

(car $X \leqslant X'$).

Le théorème suivant étend de même à (L) la proposition 1 de [20] :

THEOREME 6.5 – Les propriétés suivantes sont équivalentes dans (L) :

1) X est un élément complément de (L) .

2) Quels que soient E et A de (L) contenant X , avec E extension essentielle de A dans (L) , alors E est extension essentielle de A dans U/X .

1) entraine 2) : Soit $Z \in E/X$ tel que $Z \cap A = X$. N étant un élément dont X soit le complément dans (L) : $Z \cap N \cap A = N \cap X = 0$; E étant extension essentielle de A dans (L) : $Z \cap N = 0$ et $Z = X$, puisque X est complément de N et que $X \leqslant Z$.

2) entraine 1) : Soit N un complément de X dans (L) . Montrons que X est complément de N dans (L) . Pour cela considérons $X' \in U/X$ tel que $X' \cap N = 0$. (L) étant modulaire :

$$X = X \cup 0 = X \cup (N \cap X') = (X \cup N) \cap X' .$$

Mais $N \cup X$ est un élément essentiel de (L) d'après la proposition 6.5 de ce chapitre VI ; la propriété 2) de l'énoncé appliquée à $E = U$ et à $A = N \cup X$, entraine que $N \cup X$ est aussi élément essentiel du quotient U/X ; donc $X' = X$.

–:–

CHAPITRE VII

–:–

ENVELOPPES INJECTIVES D'UN ELEMENT

–:–

1. THEOREME FONDAMENTAL.

Lorsqu'un module A est sous-module d'un module injectif Q , nous savons que toute extension essentielle E de A est isomorphe (relativement à A) à un sous-module de Q contenant A (cf. [7] , ou prop. 10.7 de [16]). Pour le treillis (L) , nous obtenons :

LEMME 7.1 - Soient Q un injectif de (L) contenant A, E une extension essentielle de A telle que $E \not\leqslant Q$; dans ces conditions il existe E_1 et Q_1 ayant les propriétés suivantes :

1) $E \cap Q < E_1 \leqslant E$, $E \cap Q < Q_1 \leqslant Q$,

2) Il existe une similitude des quotients $E_1/0$ et $Q_1/0$, laissant invariants tous les éléments de $(E \cap Q)/0$.

$E \cup Q > Q$; Q étant injectif, il existe $X \neq 0$ tel que $X \leqslant E \cup Q$ et $X \cap Q = 0$.

D'autre part : $X \cap E \cap A = X \cap E \cap Q \cap A = 0$, entraine $X \cap E = 0$, car E est extension essentielle de A .

Le lemme 7.1 est alors une conséquence de la proposition 4.1 appliquée au cas : $A \longrightarrow E$, $B \longrightarrow Q$, $H \longrightarrow X$.

THEOREME 7.1 - Dans tout <u>injectif</u> Q contenant un élément donné A de (L) , il existe une extension <u>essentielle</u> de A qui est élément <u>injectif</u> de (L) .

<u>Preuve</u> : Soit E une extension essentielle maximale de A dans le quotient $Q/0$ (existence assurée par le théorème 5.1 et par son corollaire). Nous nous proposons de montrer que E , qui est injectif dans $Q/0$, est aussi injectif dans (L) . Considérons pour cela une extension essentielle E' de A dans (L) , contenant E : $E' \geqslant E' \cap Q \geqslant E \geqslant A$.

$E' \cap Q$ est extension essentielle de A dans $Q/0$ (cf. prop. 5.1 et 5.2) ; la maximalité de E montre que : $E' \cap Q = E$.

Supposons que $E' > E$. Dans ces conditions $E' \not\leqslant Q$, en raison du caractère maximal de E . Le lemme 7.1 montre alors qu'il existe E'_1 et Q_1 ayant les propriétés :

$E < E'_1 \leqslant E'$, $E < Q_1 \leqslant Q$, il existe un isomorphisme de treillis σ : $E'_1/0 \longrightarrow Q_1/0$, laissant invariants tous les éléments de $E/0$ (donc à fortiori ceux de $A/0$).

Mais E'_1 est extension essentielle de A , puisque E' est extension essentielle de A ; en raison de l'isomorphisme σ , Q_1 est aussi extension essentielle de A , telle que $E < Q_1$; ce qui est impossible d'après la définition de E .

Ainsi donc, toute extension essentielle E' de A dans (L) contenant E , est nécessairement confondue avec E . E est donc sans extension essentielle propre dans (L) .

De même que pour les résultats connus dans le cas des modules, (cf. P. GABRIEL p. 17.03 de [9] , ou L. LESIEUR et CROISOT Théor. 10.2 de [16]) nous obtenons :

THEOREME 7.2 - A étant un élément donné de (L) , il <u>existe</u> un élément E de (L) , contenant A , et ayant les propriétés <u>équivalentes</u> suivantes :

1) E est maximal dans l'ensemble des extensions essentielles de A dans (L) .

2) E est extension essentielle de A , et E est élément complément dans tout quotient E'/0 , E' étant une extension arbitraire de E dans (L) .

3) E est extension essentielle de A , et élément injectif de (L) .

4) E est minimal dans l'ensemble des injectifs de (L) contenant A .

L'existence d'un élément E ayant la propriété 1) est assurée par le théorème 5.1 . (Si A est essentiel dans (L) , alors U = E).

L'équivalence de 1) et 3) résulte de la définition 5.2 d'un injectif, et de la proposition 5.1 .

L'équivalence de 2) et 3) est assurée par la proposition 5.6 et par le théorème 6.1.

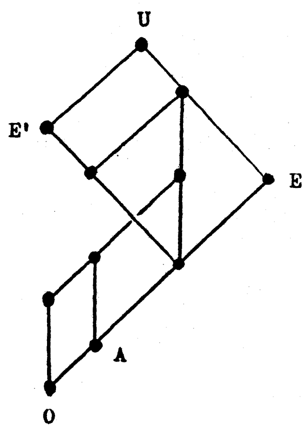
3) entraine 4) car E est extension essentielle de tout élément du quotient E/A .

Enfin, soit E un élément minimal dans l'ensemble des injectifs de (L) contenant A . En vertu du théorème 7.1 , il existe dans E une extension essentielle E' de A qui est élément de (L) . Donc E = E' vérifie les conditions 3).

DEFINITION 7.1 - Un élément E de (L) satisfaisant aux propriétés du théorème 7.2 est appelé une <u>enveloppe</u> <u>injective</u> de A dans (L) .

Avec cette définition, le théorème 7.1 exprime que dans tout injectif de (L) contenant A , il existe une enveloppe injective de A .

Un élément A peut admettre plusieurs enveloppes injectives E, E',... dans (L) sans que les quotients E/0 , E'/0 ,... soient semblables (isomorphes) deux à deux. Nous pouvons le voir dans l'exemple de treillis modulaire suivant :



Deux enveloppes injectives distinctes E et E' de A dans (L) sont cependant partiellement isomorphes, au sens suivant :

Il existe deux éléments E_1 et E'_1 contenus respectivement dans chacune d'elles, contenant strictement $E \cap E'$ $(\geq A)$, et tels que les quotients $E_1/0$ et $E'_1/0$ soient semblables. En effet E et E' ont même ensemble de compléments dans (L) , celui des compléments de A (cf. Proposition 6.6) ; soit K l'un de ces compléments ; E et E' sont alors deux compléments distincts de K (cf. corollaire 6.1). Il suffit d'appliquer le théorème 6.2 pour obtenir les éléments E_1 et E'_1 désirés.

2. PREMIERES APPLICATIONS.

PROPOSITION 7.1 - Si K est un complément de A dans (L) , l'ensemble $\mathcal{E}(A)$ des enveloppes injectives de A coïncide avec l'ensemble $\mathcal{C}_A(K)$ des compléments de K qui contiennent A .

L'inclusion $\mathcal{E}(A) \subseteq \mathcal{C}_A(K)$ résulte de ce que nous avons dit à la fin du paragraphe précédent (prop. 6.6 et corollaire 6.1).

D'autre part, tout élément E de $\mathcal{C}_A(K)$ est injectif dans (L) , et est extension essentielle de A (en vertu de la proposition 6.4) ; donc $E \in \mathcal{E}(A)$ d'après le théorème 7.2 .

PROPOSITION 7.2 - Pour qu'un élément $E = (E_i)_{i\in I}$ d'un produit $(L) = \prod_{i\in I} (L_i)$ de treillis (L_i) modulaires, $\cap$-continus et complets, soit une enveloppe injective d'un élément $A = (A_i)_{i\in I}$ de (L), il faut et il suffit que, $\forall i \in I$, E_i soit une enveloppe injective de A_i dans (L_i).

C'est une conséquence directe des propositions 5.3 et 5.8, et du théorème 7.2.

PROPOSITION 7.3 - Soit $B \leqslant A$. Dans toute enveloppe injective E de A dans (L), il existe une enveloppe injective E' de A dans le quotient U/B.

Il suffit d'observer que E est élément injectif du quotient U/B (proposition 5.7) ; E' est alors donné par le théorème 7.1.

PROPOSITION 7.4 - Soient $\mathcal{E}(A)$, $\mathcal{E}(B)$, l'ensemble des extensions essentielles de deux éléments A et B de (L) tels que $B \leq A$. Les conditions suivantes sont <u>équivalentes</u> :

1) A est extension essentielle de B,

2) $\mathcal{E}(A) \subseteq \mathcal{E}(B)$,

3) $\mathcal{E}(A) \Cap \mathcal{E}(B) \neq \emptyset$.

La vérification (aisée) se fait en utilisant les diverses caractérisations d'une enveloppe injective données par le théorème 7.2.

3. ELEMENTS CO-IRREDUCTIBLES DE (L).

Rappelons la définition d'éléments co-irréductibles (cf. P. GABRIEL, p. 359 de [10]) :

DEFINITION 7.2 - Un élément A de (L), $A \neq 0$, est dit <u>co-irréductible</u>, lorsque 0 est $\cap$-irréductible dans le quotient $A/0$.

Cela signifie que les relations : $X \leqslant A$, $Y \leqslant A$, $0 = X \cap Y$, entraînent ou $X = 0$, ou $Y = 0$.

Les propriétés des sous-modules co-irréductibles (E. MATLIS, prop. 2.2 de [18]), ou des objets co-irréductibles (prop. 11 p. 361 de [10]), se transposent aux éléments co-irréductibles de (L) de la façon suivante :

PROPOSITION 7.5 - $\mathcal{E}(A)$ étant l'ensemble des enveloppes injectives d'un élément A de (L), les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est co-irréductible.

2) Tout élément de $\mathcal{E}(A)$ est un injectif minimal de (L) -c'est-à-dire élément minimal de l'ensemble des injectifs non nuls de (L)-.

3) Tout élément E de $\mathcal{E}(A)$ est enveloppe injective de tous les éléments non nuls du quotient E/0 .

4) $\mathcal{E}(A)$ contient au moins un élément E ayant l'une des propriétés suivantes :

α) E est co-irréductible.

β) E est un élément injectif minimal de (L) .

γ) E est enveloppe injective de tous les éléments non nuls de E/0 .

Montrons que 1) entraine les conditions 2), 3), et 4) : Soit $E \in \mathcal{E}(A)$ et Q un injectif de (L) vérifiant :

$$0 < Q \leqslant E ;$$

alors $Q = E$, sinon il existerait $X \neq 0$ tel que :

$$X \leqslant E \qquad \text{et} \qquad 0 = X \cap Q ,$$

ce qui est impossible car E, en tant qu'extension essentielle de A, est aussi co-irréductible (cf. proposition 5.4).

De plus, E étant co-irréductible, est extension essentielle de tous les éléments Z non nuls de E/0 , donc enveloppe injective de Z .

Supposons maintenant qu'un élément E de $\mathcal{E}(A)$ soit injectif minimal de (L). Si 0 était $\cap$-réductible dans A/0 , il existerait X , Y tels que : $0 < X \leqslant A$, $0 < Y \leqslant A$, $0 = X \cap Y$. Soit E' une enveloppe injective de X contenue dans E (théorème 7.1) ; $Y \nleqslant E'$, car E' est extension essentielle de X , et $0 = X \cap Y$; nous aurions donc $0 < E' < E$, ce qui serait contraire au caractère minimal de l'injectif E .

Enfin supposons que l'élément E de $\mathcal{E}(A)$ soit enveloppe injective de tous les éléments non nuls de E/O . Tous ces éléments sont essentiels dans E/O , et O est $\cap$-irréductible dans E/O , à fortiori dans A/O .

-:-

CHAPITRE VIII

-:-

ELEMENTS INJECTIFS EXTREMAUX DE (L)

-:-

Un élément <u>injectif</u> (ou complément) <u>minimal</u> de (L) a été défini à la proposition 7.5. De même, un <u>injectif</u> (ou complément) <u>maximal</u> de (L) , est un élément maximal de l'ensemble des injectifs de (L) distincts de l'élément universel U .

1. INJECTIFS (COMPLEMENTS) MINIMAUX.

Pour un sous-module A d'un module M , la propriété d'être complément minimal est équivalente à celle d'être complément co-irréductible (cf. G. RENAULT [20]). Cela s'étend au treillis (L) et se précise ainsi :

THEOREME 8.1 - Soit A un élément de (L) . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est <u>co-irréductible</u> <u>maximal</u> (c'est-à-dire élément maximal de l'ensemble des co-irréductibles de (L)).

2) A est <u>injectif</u> (complément) <u>minimal</u>.

3) A est <u>injectif</u> (complément) et <u>co-irréductible</u>.

L'équivalence de 2) et de 3) est assurée par la Proposition 7.5, car, lorsque A est injectif, l'ensemble $\mathcal{E}(A)$ de ses enveloppes injectives est réduit à $\{A\}$. (cf. Théorème 7.2). Les implications 1) $\Longrightarrow$ 3) et 2) $\Longrightarrow$ 1) sont également assurées par la Proposition 7.5.

REMARQUE - Lorsqu'il n'est pas vide, l'ensemble des éléments co-irréductibles de (L) contenus dans un élément B donné de (L) , est inductif pour la relation $\leqslant$. En effet soit $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ la borne supérieure dans (L) d'une famille totalement ordonnée $\{A_i\}_{i \in I}$ d'éléments A_i co-irréductibles de (L) contenus dans B , et soit une $\cap$-décomposition non triviale de 0 dans A/0 :

$$0 = X \cap Y \quad , \quad 0 < X \leqslant A \quad , \quad 0 < Y \leqslant A \; .$$

En utilisant l'$\cap$-continuité de (L) :

$$X = X \cap A = X \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \cap A_i) \; .$$

Il existe donc $\alpha \in I$ (resp. $\beta \in I$) tel que $X \cap A_i > 0$ (resp. $Y \cap A_j > 0$) pour tout $A_i \geqslant A_\alpha$ (resp. $A_j \geqslant A_\beta$) ; il existe aussi $A_\mu \geqslant A_\alpha$ et A_β tel que :

$$(X \cap A_\mu) \cap (Y \cap A_\mu) = 0$$

réalise une $\cap$-décomposition non triviale de 0 dans $A_\mu/0$, ce qui est impossible.

2. INJECTIFS (COMPLEMENTS) MAXIMAUX.

Nous savons qu'un sous-module A complément maximal dans un module M , est nécessairement sous-module $\cap$-irréductible minimal de M (cf. Théorème 3, G. RENAULT, [20]). L'introduction de la notion d'élément essentiel dans (L) (cf. définition 5.3), et de celle (cf. définition suivante 8.1) de complément universel dans (L) , permet de caractériser avec précision ces éléments injectifs maximaux de (L) .

DEFINITION 8.1 - Un élément K de (L) est appelé complément universel dans (L) , s'il n'est pas essentiel dans (L) , et s'il est complément de tout élément Z de (L) satisfaisant à : $Z > 0$ et $Z \cap K = 0$.

THEOREME 8.2 - Soit A un élément de (L) ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1) A est $\cap$-irréductible et non essentiel dans (L) .

2) A est injectif (complément) maximal.

3) A est <u>maximal</u> dans l'ensemble des éléments <u>non</u> <u>essentiels</u> de (L) .

4) A est <u>complément</u> <u>universel</u>.

De plus, lorsque l'une des conditions précédentes est réalisée, A est alors <u>minimal</u> dans l'ensemble des <u>$\cap$-irréductibles</u> de (L) .

<u>Preuve</u> : Elle suivra le cycle d'implications :

$$2) \Longrightarrow 1) \Longrightarrow 4) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 2) .$$

a) <u>Preuve de</u> 2) $\Longrightarrow$ 1) : A , injectif maximal par hypothèse, est complément d'un élément N de (L) , <u>non</u> <u>nul</u>, car $A < U$. Soit une $\cap$-décomposition de A dans (L) (triviale ou non) :

$$A = A_1 \cap A_2 \text{ , qui entraine } A_1 \cap A_2 \cap N = 0 \text{ ;}$$

considérons un complément K de $A_2 \cap N$ dans (L) , contenant A_1 ; A étant complément maximal dans (L) :

- ou bien $K = A$, et par suite $A = A_1$,
- ou bien $K = U$, qui entraine $A_2 \cap N = 0$, et par suite $A = A_2$ (puisque A est complément de N) ;

l'$\cap$-décomposition de A est donc triviale.

b) <u>Preuve de</u> 1) $\Longrightarrow$ 4) : Considérons A , $\cap$-irréductible et non essentiel. Soit Z tel que $Z > 0$, $A \cap Z = 0$. (il existe dans (L) de tels éléments puisque A n'est pas essentiel). Montrons que A est complément de Z ; soit donc $A' \in (L)$, $A' \geqslant A$, $A' \cap Z = 0$. (L) étant modulaire :

$$(A \cup Z) \cap A' = A \cup (Z \cap A') = A \text{ .}$$

Mais A est $\cap$-irréductible, et $A \cup Z > A$ (sinon $Z = A \cap Z = 0$) ; par suite $A' = A$.

c) <u>Preuve de</u> 4) $\Longrightarrow$ 3) : Soit A un complément universel dans (L) . A est non essentiel par définition. Considérons un élément non essentiel A' de (L) tel que $A' \geqslant A$; il existe alors $X \in (L)$ ayant les propriétés :

$$X > 0 \quad , \quad X \cap A' = 0 \qquad \text{(donc : } X \cap A = 0 \text{) ;}$$

A étant complément de X : $A' = A$.

d) <u>Preuve de</u> 3) $\Longrightarrow$ 2) : Soit A un élément maximal dans l'ensemble des éléments non essentiels de (L). Toute enveloppe injective E de A dans (L) est distincte de U, puisque A est non essentiel ; il existe donc des injectifs (soit Q l'un d'entre eux) de (L) tels que :

$$A \leqslant Q < U .$$

Nous affirmons que $Q = A$. En effet Q est complément (théorème 6.1) d'un élément N de (L), <u>non nul</u> (car $Q \neq U$) :

$$Q \cap N = 0 = A \cap N ,$$

et si Q était distinct de A, il serait essentiel, et il en résulterait $N = 0$.

Considérons, pour terminer, un élément A vérifiant les précédentes conditions, et montrons qu'il est $\cap$-irréductible <u>minimal</u>. Si $A = 0$, il n'y a rien à montrer. Si $A > 0$, A est alors complément d'un élément $N > 0$ et $0 = N \cap A$; dans ce cas, le caractère minimal de A résulte de la propriété suivante des treillis modulaires (appliquée pour $X = A$, $Y = N$, $Z = 0$) :

LEMME 8.1 - Soient trois éléments X, Y, Z de (L), tels que :

$$Z = X \cap Y \quad , \quad X > Z \quad , \quad Y > Z .$$

Dans ces conditions, il n'existe aucun élément $\cap$-irréductible de (L) distinct de X et Y, dans les quotients X/Z et Y/Z.

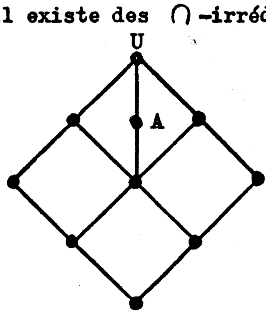
En effet, si T vérifie par exemple : $Z \leqslant T < X$, alors :

$$T = T \cup Z = T \cup (Y \cap X) = (T \cup Y) \cap X \quad \text{avec} \quad T \cup Y > T .$$

(sinon, $T \geqslant Y$ entrainerait $Y = Y \cap T \leqslant Y \cap X = Z$, ce qui est en contradiction avec $Y > Z$).

REMARQUES -

1) Il existe des $\cap$-irréductibles minimaux qui ne sont pas injectifs : c'est le cas de l'élément A du treillis modulaire ci-contre, qui est essentiel et distinct de U.



2) Il peut arriver que tous les éléments non nuls de (L) soient tous essentiels, et les seuls injectifs sont alors 0 et U . C'est le cas du treillis des idéaux de l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$.

3. CARACTERISATION DES INJECTIFS EXTREMAUX AU MOYEN DE LEURS COMPLEMENTS.

PROPOSITION 8.1 - Pour un élément non essentiel A de (L) , les conditions suivantes sont équivalentes :

1) A est co-irréductible.

2) Tous les compléments de A sont des injectifs maximaux de (L) .

3) A possède un complément qui est injectif maximal de (L) .

1) entraine 2) : Soit K un complément de A ; $K > 0$, car A est non essentiel ; $A > 0$, puisque A est co-irréductible ; il en résulte que K est non essentiel. Montrons que K est $\cap$-irréductible :
$K = K_1 \cap K_2$, $K_1 > K$, $K_2 > K$, entraineraient (puisque K est complément de A) :

$$K_1 \cap A > 0 \quad , \quad K_2 \cap A > 0 \quad , \quad 0 = (K_1 \cap A) \cap (K_2 \cap A) \ ,$$

ce qui contredirait le fait que 0 est $\cap$-irréductible dans A/0 . K est complément maximal de (L) d'après le théorème 8.2 .

2) entraine 3) : Evident.

3) entraine 1) : Soit K un complément de A , K étant complément maximal de (L) ; alors $K < U$ et $K > 0$ (puisque A est non essentiel). Si 0 était $\cap$-décomposable dans A/0 , alors K serait $\cap$-décomposable dans $(K \cup A)/K$, car les deux quotients A/0 et $(K \cup A)/K$ sont transposés (cf. 1. chap. IV) . A est bien co-irréductible.

REMARQUE - Un élément est essentiel si et seulement si l'ensemble de ses compléments est $\{0\}$.

PROPOSITION 8.2 - Pour un élément <u>non essentiel</u> A de (L) , les conditions suivantes sont équivalentes :

1) A est <u>$\cap$-irréductible</u>.

2) A est <u>injectif</u> et tous ses compléments sont des injectifs <u>minimaux</u>.

3) A est <u>injectif</u> et possède un complément qui est injectif <u>minimal</u>.

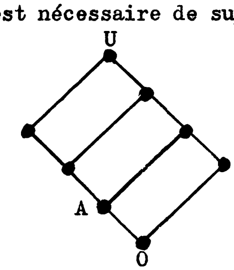
1) <u>entraine</u> 2) : Soit A un $\cap$-irréductible non essentiel de (L) ; A est alors injectif (cf. théorème 8.2). Si $A = 0$, tous les éléments non nuls de (L) sont essentiels et les seuls injectifs de (L) sont 0 et U ($0 \neq U$ car U est essentiel dans (L)) , et le seul complément de $A = 0$ est U , lequel est bien, dans ce cas, injectif minimal de (L) .

Si $A > 0$, considérons un complément K de A ; $K > 0$, car A n'est pas essentiel. Les quotients K/0 et $(K \cup A)/A$ sont transposés, par suite 0 est $\cap$-irréductible dans K/0 ; de plus K n'est pas essentiel. K est complément co-irréductible, donc injectif minimal (cf. théorème 8.1).

2) <u>entraine</u> 3) : Evident.

3) <u>entraine</u> 1) : Soit A injectif possédant un complément K qui est injectif minimal de (L) . A est alors complément de K (corollaire 6.1) qui est co-irréductible non essentiel (cf. théorème 8.1). La proposition 8.1 montre alors que A est injectif maximal, et aussi $\cap$-irréductible non essentiel (cf. théorème 8.2).

REMARQUE - Il est nécessaire de supposer A injectif en 2) et 3) , car un élément peut avoir tous ses compléments qui soient injectifs minimaux de (L) , être non essentiel, sans pour cela être $\cap$-irréductible (cf. l'élément A du treillis modulaire ci-contre).



Lorsque deux éléments K et K' de (L) sont compléments <u>réciproques</u> l'un de l'autre, dès que l'un d'eux, K par exemple, est essentiel alors

$K' = 0$ et $K = U$; si nous exceptons ce cas, les deux théorèmes et les deux propositions précédentes montrent que si K est injectif minimal (resp. maximal), alors K' est injectif maximal (resp. minimal) ; Dans ces conditions, nous dirons que K et K' sont des <u>compléments extrêmaux réciproques</u>.

-:-

CHAPITRE IX

-:-

APPLICATIONS

-:-

1. APPLICATION AUX $\cap$ -DECOMPOSITIONS.

Supposons qu'un élément X de (L) , $X \neq U$, soit l'intersection <u>réduite</u> d'une famille collective (X_i , $i \in I$, et $i \neq j$ entraine $X_i \neq X_j$) non vide, finie ou infinie, d'éléments $\cap$-irréductibles X_i de (L) :

$$X = \bigcap_{i \in I} X_i \quad ; \quad \forall i \in I \quad \overline{X}_i = \bigcap_{\lambda \in I - \{i\}} X_\lambda \nleq X_i \ ;$$

ce qui, <u>lorsque X n'est pas $\cap$-irréductible</u>, équivaut à :

$$\forall i \in I \quad , \quad X = X_i \cap \overline{X}_i \quad , \quad X < X_i \quad , \quad X < \overline{X}_i \ .$$

Dans le quotient U/X , l'élément X_i est donc $\cap$-irréductible et non essentiel ; X_i possède ainsi, dans U/X , toutes les propriétés données au théorème 8.2 , et c'est en particulier un élément <u>minimal</u> dans l'ensemble des $\cap$-irréductibles de (L) qui contiennent X .

Si X est en outre <u>complément</u> dans (L) , les composantes X_i sont des compléments maximaux non seulement dans le quotient U/X , mais encore dans le treillis (L) lui-même. En effet, soit $N > 0$ un élément de (L) dont X soit le complément ; $\overline{X}_i > X$ entraine alors :

$$\overline{X}_i \cap N > 0 \qquad \text{et} \qquad X_i \cap (\overline{X}_i \cap N) = 0 \ ,$$

X_i étant $\cap$-irréductible et non essentiel dans (L) , est bien complément maximal dans (L) (cf. Théorème 8.2). Nous avons donc montré :

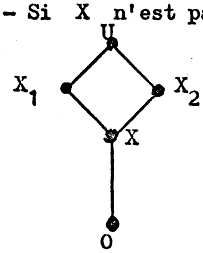
PROPOSITION 9.1 - Soit un élément X de (L) , $\cap$-réductible, représentable en intersection réduite d'éléments $\cap$-irréductibles X_i de (L) :

$$X = \bigcap_{i \in I} X_i$$. Dans ces conditions :

1) Tous les X_i sont minimaux dans l'ensemble des $\cap$-irréductibles de (L) qui contiennent X .

2) Si X est complément dans (L) , tous les X_i sont des compléments (injectifs) maximaux de (L) .

REMARQUE - Si X n'est pas complément dans (L) , les composantes X_i ne sont pas nécessairement des compléments dans (L) . Dans l'exemple ci-contre : $X = X_1 \cap X_2$, et X_1 et X_2 sont essentiels dans (L) .



La proposition 9.1 prend effet lorsque la représentation de tout élément en intersection réduite d'éléments $\cap$-irréductibles, en nombre fini, est assurée ; c'est en particulier le cas lorsque (L) est noethérien, c'est-à-dire vérifie la condition de chaîne ascendante (cf. p. 12 , [6]) ; mais cette représentation est aussi assurée lorsque (L) est artinien, c'est-à-dire vérifie la condition de chaîne descendante ; (cf. L. LESIEUR et R. CROISOT, théorème 8.1 de [16]) .

THEOREME 9.1 - Si (L) est noethérien (ou artinien), tout élément complément K de (L) , distinct de U , est l'intersection réduite d'un nombre fini n de compléments maximaux de (L) ; et cet entier n ($\geqslant 1$) ne dépend que de K .

Le fait que deux telles décompositions de K , en intersection réduite finie de compléments maximaux, aient même nombre n de composantes, résulte du théorème de KUROSH-ORE (p. 122, [6]) , et du fait que tout complément maximal de (L) est $\cap$-irréductible (théorème 8.2).

COROLLAIRE 9.1 - Si Q est A-module injectif noetherien (ou artinien), tout sous-module injectif K de Q , distinct de Q , est l'intersection réduite d'un nombre fini n de sous-modules injectifs maximaux de Q ; et cet entier n ne dépend que de K . (voir plus loin la démonstration de la proposition 9.2).

2. UNE EXTENSION D'UN THEOREME D'AZUMAYA.

Rappelons que G. AZUMAYA, dans [1] , a montré en particulier le théorème suivant :

Soit M un A-module qui est somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables. Pour deux décompositions de M en somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables :

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n = M'_1 \oplus \dots \oplus M'_{n'} ,$$

on a $n = n'$ et il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2,\dots, n\}$ telle que M_i soit isomorphe à $M'_{\sigma(i)}$ pour tout i. (cf. aussi théorème 10.4 de [16]).

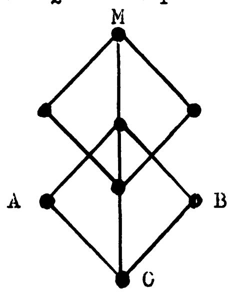
Nous nous proposons d'étendre ce résultat à un treillis (L) modulaire, $\cap$-continu, complet, d'élément universel U , et vérifiant la condition : (S) , deux compléments maximaux réciproques de (L) sont toujours supplémentaires (leur union est U).

Cette condition est vérifiée par le treillis des sous-modules d'un module injectif (au sens habituel) :

PROPOSITION 9.2 - Soit Q un module injectif ; la propriété suivante $(\overline{S})$ est vérifiée par le treillis des sous-modules de Q : $(\overline{S})$, tout sous-module complément de (L) admet un supplémentaire dans (L) .

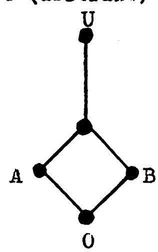
Preuve : Soit K un sous-module de Q , complément. K est sans extension essentielle propre dans Q injectif, ils est donc lui-même module injectif, (cf. théorème 10.2 de [16]) . K est par suite facteur direct dans Q (prop. 3.4 p. 10 de [4]) .

REMARQUE - Si Q n'est pas un module injectif, la condition (S) -et à fortiori la condition plus forte $(\overline{S})$- n'est pas nécessairement vérifiée. C'est ainsi le cas du treillis des sous-groupes du groupe produit $M = (Z/4Z) \times (Z/2Z)$, dont le diagramme est représenté ci-contre (Z étant l'anneau des entiers).



Les éléments A et B sont $\cap$-irréductibles, non essentiels car $A \cap B = 0$, co-irréductibles maximaux. Ils sont donc tous les deux compléments maximaux et minimaux, réciproques l'un de l'autre, mais non supplémentaires.

Pour un treillis modulaire (abstrait) on peut prendre plus simplement :



Donnons maintenant l'énoncé du théorème annoncé :

THEOREME 9.2 - Soit U l'élément universel du treillis (L) $\cap$-continu, modulaire et complet, et vérifiant la condition (S). Pour deux décompositions de U en <u>union directe</u> d'un nombre fini d'éléments <u>injectifs minimaux</u> de (L) :

$$U = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n = M'_1 \oplus M'_2 \oplus \dots \oplus M'_{n'} ,$$

on a $n = n'$ et il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que le quotient $M_i/0$ soit <u>semblable</u> au quotient $M'_{\sigma(i)}/0$ pour tout i.

<u>Preuve</u> : Si $n = 1$ (ou $n' = 1$), le théorème est vrai. Soit donc $n > 1$ et $n' > 1$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\overline{M}_i = \bigcup_{\lambda \neq i} M_\lambda$ est $\cap$-irréductible dans $(L) = U/0$, car $U = M_i \oplus \overline{M}_i$ entraine la similitude des quotients $U/\overline{M}_i$ et $M_i/0$, et 0 est $\cap$-irréductible dans $M_i/0$ (cf. théorème 8.1).

Posons également : $\overline{M'_j} = \bigcup_{\lambda \neq j} M'_\lambda$ $(j = 1, 2, \ldots, n')$. La proposition 4.4 montre que :

$$0 = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \ldots \cap \overline{M}_n = \overline{M'_1} \cap \overline{M'_2} \cap \ldots \cap \overline{M'_{n'}}$$

sont deux $\cap$-décompositions directes de 0, donc sans élément superflu. Nous savons que, dans ces conditions, $n = n'$, et que tout $\overline{M}_i$ (soit par exemple $\overline{M}_i = \overline{M}_1$) est remplaçable par un $\overline{M'_j}$ convenablement choisi (supposons $\overline{M'_j} = \overline{M'_1}$), la nouvelle décomposition de 0 en intersection d'$\cap$-irréductibles :

$$(*) \qquad 0 = \overline{M'_1} \cap \overline{M}_2 \cap \ldots \cap \overline{M}_n ,$$

n'ayant pas d'élément superflu (cf. théorème 11 et 12, O. ORE, I, [19]).

Cette décomposition s'écrit aussi : $0 = \overline{M'_1} \cap M_1$, car $M_1 = \overline{M}_2 \cap \ldots \cap \overline{M}_n$ (cf. proposition 4.3). $\overline{M'_1}$ est $\cap$-irréductible non essentiel, donc complément de M_1 (cf. Théorème 8.2). $\overline{M'_1}$ et M_1 sont par suite compléments extrêmaux réciproques, et : $U = \overline{M'_1} \oplus M_1$, d'après la condition (S), ce qui donne alors une nouvelle décomposition de U en union directe d'injectifs minimaux :

$$U = M_1 \oplus M'_2 \oplus \ldots \oplus M'_n = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n ,$$

$M_1/0$ étant semblable à $M'_1/0$ (tous deux sont semblables à $U/\overline{M'_1}$).

Pour poursuivre un raisonnement par récurrence sur n, il faut nous assurer que les conditions de l'énoncé sont vérifiées par les deux quotients semblables (à U/M_1) $\overline{M'_1}/0$ et $\overline{M}_1/0$. Nous utiliserons pour cela les deux lemmes suivants :

LEMME 9.1 - Soit A un élément <u>injectif</u> (complément) du treillis (L), et soit Q un élément contenu dans A. Pour que Q soit un élément <u>injectif</u> de (L) il faut et il suffit qu'il soit élément <u>injectif</u> du quotient $A/0$.

En effet, si Q est injectif de (L), il est sans extension essentielle propre dans (L), donc à fortiori dans $A/0$ (A injectif ou non).

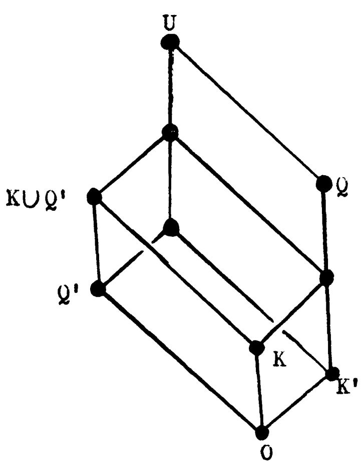
Inversement, soit Q un injectif de $A/0$. A étant injectif de (L), il existe dans A une enveloppe injective E de Q relative à (L) (cf. théorème 7.1) : $Q \leqslant E \leqslant A$, E est extension essentielle de Q dans $A/0$; Q étant injectif de $A/0$, $Q = E$.

COROLLAIRE 9.2 - Q est injectif minimal de (L) si et seulement si Q est injectif minimal de $A/0$.

Il suffit d'observer que 0 est $\cap$-irréductible dans $Q/0$ (cf. théorème 8.1).

LEMME 9.2 - Si la condition (S) est vérifiée par (L), elle est vérifiée dans le quotient $Q/0$, pour tout injectif extrêmal Q de (L).

Lorsque Q est injectif minimal de (L), la propriété annoncée est triviale puisque le quotient $Q/0$ n'a que deux éléments injectifs 0 et Q (d'après le corollaire 9.2).



Supposons maintenant que Q soit injectif maximal de (L) ; tout complément Q' de Q dans (L) est injectif minimal de (L) (cf. proposition 8.2) et la condition (S) donne : $U = Q \oplus Q'$.

Considérons deux compléments extrêmaux réciproques K et K' dans le quotient $Q/0$ (K maximal et K' minimal). K étant $\cap$-irréductible dans $Q/0$, $K \cup Q'$ est $\cap$-irréductible dans le quotient semblable U/Q', donc dans (L) ; de plus :

$$(K \cup Q') \cap K' = (K \cup Q') \cap Q \cap K' = [K \cup (Q' \cap Q)] \cap K' = K \cap K' = 0 ;$$

$K \cup Q'$ n'est pas essentiel et est complément (injectif) maximal dans (L) (théorème 8.2). D'autre part K' est complément (injectif) minimal de (L) d'après le corollaire 9.2. Il résulte alors de $0 = (K \cup Q') \cap K'$ que $K \cup Q'$

et K' sont compléments extrêmaux réciproques dans (L) ; d'après la condition (S) :

$$U = K \cup Q' \cup K' \quad , \quad \text{et}$$

$$Q = U \cap Q = (K \cup K' \cup Q') \cap Q = (K \cup K') \cup (Q' \cap Q) = K \cup K' \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Suite de la démonstration du théorème 9.2 : Nous supposons que ce théorème est vrai pour $1, 2, \ldots, n-1$, $\cup$-composants directs (injectifs minimaux) de U , et nous nous proposons de l'établir pour n composants. Reprenons la démonstration à l'endroit où nous l'avions temporairement suspendue, et désignons par $\varphi : T \longrightarrow (T \cup M_1) \cap \overline{M}_1$ l'isomorphisme de treillis associé à la similitude définie par la suite de quotients : $\overline{M}'_1/0$, U/M_1 , $\overline{M}_1/0$. De $\overline{M}'_1 = M'_2 \oplus \ldots \oplus M'_n$ on déduit :

$$\overline{M}_1 = \varphi(\overline{M}'_1) = \varphi(M'_2) \oplus \ldots \oplus \varphi(M'_n) \qquad \text{(union directe)} .$$

Pour $j = 2, \ldots, n$, M'_j est injectif minimal dans le quotient $\overline{M}'_1/0$ (cf. corollaire 9.2) ; $\varphi(M'_j)$ est injectif minimal dans le quotient $\varphi(\overline{M}'_1/0) = \overline{M}_1/0$. Dans ce quotient $\overline{M}_1/0$, on obtient donc deux décompositions de $\overline{M}_1$ en union directe de $n-1$ injectifs minimaux de $\overline{M}_1/0$:

$$\overline{M}_1 = \varphi(M'_2) \oplus \ldots \oplus \varphi(M'_n) = M_2 \oplus \ldots \oplus M_n \ ;$$

comme la condition (S) est valable dans $\overline{M}_1/0$ (lemme 9.2), notre hypothèse d'induction assure qu'il existe une permutation τ de $\{2, \ldots, n\}$ telle que pour tout $i \geqslant 2$, $M_i/0$ soit semblable à $\varphi(M'_{\tau(i)})/0$, donc à $M'_{\tau(i)}/0$. La permutation σ définie par : $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(i) = \tau(i)$ pour $i \geqslant 2$, répond alors aux conditions demandées.

REMARQUE - Ce théorème 9.2, appliqué au cas des modules, donne bien l'énoncé de G. AZUMAYA (rappelé au début de ce paragraphe). En effet M , étant somme directe finie de sous-modules injectifs, est lui-même module injectif, et le treillis (L) des sous-modules de M vérifie la condition (S) d'après la proposition 9.2 .

D'autre part les sous-modules injectifs indécomposables de M coïncident avec les éléments compléments (injectifs) minimaux du treillis (L) .

Enfin toute similitude définit, dans le cas des modules, un isomorphisme de modules quotients.

En l'absence de la condition (S) , la démonstration du théorème 9.2 montre que l'on a cependant la propriété :

PROPOSITION 9.3 - Pour deux décompositions de l'élément universel U de (L) en union directe d'un nombre fini d'éléments injectifs minimaux de (L) :

$$U = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n = M'_1 \oplus M'_2 \oplus \dots \oplus M'_{n'} ,$$

on a $n = n'$, et pour chaque M_i (resp. M'_i) il existe au moins un M'_j (resp. M_j) tel que $M_i/0$ soit semblable à un sous quotient $N'_j/0$ de $M'_j/0$.

En effet, au cours de cette démonstration, nous avons obtenu :

$$0 = \overline{M}'_1 \cap M_1 = \overline{M}'_1 \cap M'_1 .$$

La proposition 4.1 appliquée au choix :

$$A \longrightarrow M_1 \quad , \quad B \longrightarrow M'_1 \quad , \quad H \longrightarrow \overline{M}'_1 ,$$

montre que $M_1/0$ est semblable à $\left[(\overline{M}'_1 \cup M_1) \cap M'_1\right] /0$.

Nous ne savons pas si le théorème 9.2 reste valable (ou non) en l'absence de la condition (S) .

3. UNE CARACTERISATION DES MODULES INJECTIFS.

Nous nous proposons d'étudier, dans ce paragraphe, une caractérisation des modules injectifs Q dans la classe $\mathcal{C}_A$ de tous les A-modules unitaires (A étant un anneau unitaire donné) ; caractérisation qui n'utilise aucun homomorphisme de A-modules, qui n'introduit que des extensions de Q aisées à construire, enfin qui s'exprime uniquement en une propriété du treillis des sous-modules de ces extensions.

THEOREME 9.3 - Pour qu'un A-module à gauche unitaire Q soit injectif, il faut et il suffit que, pour tout idéal à gauche $\mathfrak{A}$ de A , le sous-module $Q' = Q \times \{0\}$ du module produit $P_{\mathfrak{A}} = Q \times (A/\mathfrak{A})$ ait la propriété (P) suivante :

(P) , tout <u>complément</u> (relatif) de Q' dans $P_{\mathfrak{a}}$ est <u>supplémentaire</u> de Q' .

<u>La condition est nécessaire</u> : Soit K un sous-module complément de Q' dans $P_{\mathfrak{a}}$; supposons que K ne soit pas supplémentaire de Q' dans $P_{\mathfrak{a}}$, alors : $K + Q' \subset P_{\mathfrak{a}}$, $K \cap Q' = 0$ ($\subset$ est l'inclusion <u>stricte</u>).

Q' est isomorphe à $(K + Q')/K$ et $(K + Q')/K \subset P_{\mathfrak{a}}/K$; $(K + Q')/K$ est donc un A-module injectif, il est sans extension essentielle propre (cf. [7]) ; par suite il existe un sous-module $Z \subseteq P_{\mathfrak{a}}$ tel que : $K \subset Z \subseteq P_{\mathfrak{a}}$ et $Z \cap (Q' + K) = K$, d'où $0 = Q' \cap K = Q' \cap Z$; ce qui est en contradiction avec le fait que K est complément de Q' dans $P_{\mathfrak{a}}$.

Remarquons que ce raisonnement est également valable en remplaçant $P_{\mathfrak{a}}$ par une extension <u>quelconque</u> de Q .

<u>La condition est suffisante</u> : Soit Q un A-module qui, pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A , vérifie la propriété (P) ; il nous suffit de montrer que Q est sans extension essentielle propre, c'est-à-dire qu'il coïncide avec son enveloppe injective (cf. [7]) . Supposons en effet que Q admette une extension essentielle <u>propre</u> E , $Q \subset E$; il existe alors $a \in E$, $a \notin Q$. Soient $\mathfrak{a} = 0 \,^{\circ}\!. \, a$ l'annulateur de a (ensemble des $\alpha \in A$ tels que $\alpha a = 0$), et $P_{\mathfrak{a}}$ le module produit $Q \times (A/\mathfrak{a})$. Posons $Q' = Q \times \{0\}$ et considérons l'homomorphisme :

$$\varphi : P_{\mathfrak{a}} \longrightarrow E$$

défini par $(q, \lambda + \mathfrak{a}) \longrightarrow q + \lambda a$. Le noyau N de φ a les propriétés :

$$N \cap Q' = 0 \quad \text{et} \quad N + Q' \neq P_{\mathfrak{a}} .$$

(en effet $N + Q' = P_{\mathfrak{a}}$ entraine : $Q + A\,a =$ Image de $\varphi = \varphi(Q') = Q$, et a appartiendrait à Q) .

Soit K un sous-module complément de Q' dans $P_{\mathfrak{a}}$, contenant N . K est supplémentaire de Q' dans $P_{\mathfrak{a}}$ d'après la propriété (P) , par suite $N \subset K$ (inclusion <u>stricte</u>), et :

$$N = N + (Q' \cap K) = (N + Q') \cap K .$$

En appliquant l'homomorphisme φ :

$$0 = Q \cap \varphi(K) \quad \text{avec} \quad \varphi(K) \neq 0 ,$$

ce qui contredit le fait que E soit extension essentielle de Q .

-:-

CHAPITRE X

-:-

ELEMENTS Γ-ISOTYPIQUES D'UN TREILLIS MODULAIRE NOETHERIEN (OU ARTINIEN)

-:-

Dans ce chapitre et le suivant, le treillis (L) est supposé noethérien ou artinien (cf. chapitre IX, § 1), afin que soit assurée la représentation de tout élément de (L) comme intersection finie d'éléments $\cap$-irréductibles.

Nous désignerons par T la classe[1] des isomorphismes de treillis portant sur les quotients du treillis (L) . Un objet de T est défini par la donnée de deux quotients A/B , A'/B' , et par celle d'un isomorphisme de treillis appliquant A/B sur A'/B' :

$$A/B \xrightarrow{f} A'/B' .$$

De même $\sum$ désignera la classe des similitudes, portant sur les quotients du treillis (L) . Comme toute similitude définit un isomorphisme de treillis, de façon naturelle (cf. Chapitre IV), nous écrirons : $\sum \subseteq T$.

Nous considérons, dans ce chapitre, une classe intermédiaire

$$\sum \subseteq \Gamma \subseteq T ,$$

ayant en outre les propriétés suivantes :

α) Γ est stable pour la loi de composition des isomorphismes ;

β) si $f : A/B \longrightarrow A'/B'$ est de la classe Γ , alors l'isomorphisme inverse $f^{-1} : A'/B' \longrightarrow A/B$ est de la classe Γ ;

---

(1) T est un ensemble, somme d'une famille d'ensembles indexée par l'ensemble $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ ($\mathcal{Z}$ étant l'ensemble des quotients de (L)).

γ) si $f : A/B \longrightarrow A'/B'$ est de la classe Γ , toutes les restrictions de f aux sous-quotients C/D de A/B sont aussi dans Γ .

Au chapitre XI nous utiliserons certaines classes importantes Γ .

1. QUOTIENTS CO-IRREDUCTIBLES PARTIELLEMENT Γ-ISOMORPHES.

DEFINITION 10.1 - Un quotient A/B de (L) est dit co-irréductible lorsque A est un élément co-irréductible du treillis A/B .

Cela signifie (cf. définition 7,2) que B est $\cap$-irréductible dans le quotient A/B et que $A > B$.

Précisons qu'un quotient A/B est non trivial lorsque $A > B$ $(A \neq B)$; et que A'/B' est sous-quotient de A/B lorsque $A' \in A/B$, $B' \in A/B$, $A' \geqslant B'$.

DEFINITION 10.2 - Deux quotients non triviaux A_1/B_1 et A_2/B_2 sont dits partiellement Γ-isomorphes lorsqu'il existe un sous-quotient non trivial C_1/B_1 de A_1/B_1 (de même dénominateur B_1) , et un sous quotient non trivial C_2/B_2 de A_2/B_2 (de même dénominateur B_2) , tels que les treillis C_1/B_1 et C_2/B_2 soient isomorphes au moyen d'un isomorphisme $f : C_1/B_1 \longrightarrow C_2/B_2$ de la classe Γ .(1)

Cette relation entre quotients, ainsi définie, n'est pas transitive en général. Elle l'est cependant dans les conditions suivantes :

PROPOSITION 10.1 - Dans l'ensemble $\mathcal{C}$ des quotients co-irréductibles de (L) , la relation "$A_1/B_1 \equiv A_2/B_2$ modulo Γ , si, et seulement si, A_1/B_1 et A_2/B_2 sont partiellement Γ-isomorphes", est une relation d'équivalence (dite Γ-équivalence).

De plus, pour qu'une famille finie de quotients de $\mathcal{C}$:

$$A_1/B_1 \ , \ A_2/B_2 \ , \dots , \ A_n/B_n \ ,$$

---

(1) cf. remarque à la fin de ce paragraphe.

appartienne à une même classe d'équivalence, il faut et il suffit qu'il existe des sous-quotients :

$$C_1/B_1 \ , \ C_2/B_2 \ ,\ldots, \ C_n/B_n \ ,$$

<u>non triviaux</u>, deux à deux isomorphes par un <u>isomorphisme de Γ</u> .

<u>Preuve</u> : Seule, la transitivité de la relation $\equiv$ est à vérifier. Soient donc pour cela : $A_1/B_1 \equiv A_2/B_2$ et $A_2/B_2 \equiv A_3/B_3$ (mod. Γ) .

Il existe donc des sous-quotients non triviaux : D_1/B_1 sous quotient de A_1/B_1 , D_2/B_2 et F_2/B_2 sous-quotients de A_2/B_2 , F_3/B_3 sous-quotient de A_3/B_3 ; et des isomorphismes de la classe Γ :

$$f : D_1/B_1 \longrightarrow D_2/B_2 \quad , \quad g : F_2/B_2 \longrightarrow F_3/B_3 \ .$$

Posons : $C_2 = D_2 \cap F_2$, $C_1 = f^{-1}(C_2)$, $C_3 = g(C_2)$;

A_2/B_2 étant co-irréductible : $C_2 > B_2$. Les sous-quotients C_1/B_1 et C_3/B_3 sont alors non triviaux et isomorphes par restriction de $g \circ f$ à C_1/B_1 . Cette restriction étant de la classe Γ (propriétés α) et γ) de Γ), $A_1/B_1 \equiv A_3/B_3$; $\equiv$ est bien une équivalence dans $\mathcal{C}$.

Observons de plus que les trois sous-quotients non triviaux ainsi obtenus : C_1/B_1 , C_2/B_2 , C_3/B_3 , sont deux à deux isomorphes en tant que treillis au moyen d'isomorphismes de la classe Γ , ce qui permet d'obtenir aisément par récurrence la dernière partie de la proposition (la condition suffisante étant évidente).

Nous dirons, par définition, que deux quotients co-irréductibles de $\mathcal{C}$ sont de <u>même type</u> par rapport à Γ (ou de même Γ-type), si et seulement si, ils sont Γ-équivalents . Chaque classe d'équivalence (mod. Γ) dans $\mathcal{C}$, définit ainsi un <u>Γ-type</u> de quotient co-irréductible, et un seul.

Tout quotient co-irréductible A/B de $\mathcal{C}$ peut être considéré comme sous-quotient d'un quotient A_o/B tel que A_o soit élément co-irréductible maximal du treillis U/B[1] , A_o contenant A ; A_o est élément injectif (complément) minimal du treillis U/B , et est une enveloppe injective dans

(1) cf. le théorème 8.1 et sa remarque.

U/B de A (cf. théorème 8.1, et proposition 7.5). Chaque classe mod. Γ dans $\mathcal{C}$ peut donc être définie par un tel représentant A_o/B .

Un quotient A_o/B non trivial, co-irréductible, en lequel A_o est injectif minimal de U/B , sera appelé par définition, quotient injectif minimal (ou indécomposable) ; l'ensemble de ces quotients sera désigné par $\mathcal{C}_m$, $(\mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C})$.

D'après ce qui précède, les Γ-types de quotients co-irréductibles de $\mathcal{C}$ peuvent être identifiés aux Γ-types de quotients injectifs indécomposables de $\mathcal{C}_m$.

2. QUOTIENTS INJECTIFS INDECOMPOSABLES ASSOCIES A UN ELEMENT DE (L) .

Considérons un élément X de (L) , $X \neq U$, et une décomposition de X en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles dans (L) , non superflus :

(1) $$X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n \ .$$

Considérons les quotients $\mathcal{Z}_1 = U/X_1$, $\mathcal{Z}_2 = U/X_2$,..., $\mathcal{Z}_n = U/X_n$; les X_i étant $\cap$-irréductibles, ce sont des quotients injectifs indécomposables. Soient π_1 , π_2 ,..., π_n , les Γ-types(1) de ces quotients dans $\mathcal{C}_m$. Nous voulons montrer que ces Γ-types ne dépendent que de X . Soit donc une deuxième décomposition de X en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles de (L) , non superflus :

(2) $$X = X'_1 \cap X'_2 \cap \ldots \cap X'_{n'} \ .$$

Dans ces conditions, O. ORE a montré (cf. dual du théorème 11 p. 270 , II , [19]) que $n = n'$, qu'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, et qu'il existe pour chaque i , deux quotients propres H_i/X_i et $H'_{\sigma(i)}/X'_{\sigma(i)}$ qui soient semblables.

Nous avons donc, pour chaque i : $U/X_i \equiv U/X'_{\sigma(i)}$ modulo Γ , puisque toutes les similitudes sont, par hypothèse, de classe Γ $(\sum \subseteq \Gamma)$.

---

(1) ces Γ-types ne sont pas nécessairement distincts deux à deux.

$U/X'_{\sigma(i)}$ est bien du même Γ-type π_i que $U/X_i = \mathcal{Z}_i$.

DEFINITION 10.3 - Les Γ-types π_1 , π_2 ,..., π_n , ainsi obtenus sont appelés les <u>Γ-types</u> de quotients injectifs indécomposables <u>associés</u> à l'élément X (plus court : les Γ-types de X) .

Ces Γ-types de X sont définis par des quotients U/X_1 , U/X_2 ,..., U/X_n , ayant des dénominateurs X_1 , X_2 ,..., X_n , qui dépendent de la décomposition choisie pour X . Nous nous proposons de définir ces mêmes Γ-types au moyen de quotients ayant comme dénominateur commun X (les numérateurs dépendant cette fois-ci du choix de l'$\cap$-décomposition de X) .

THEOREME 10.1 - Pour $X \in (L)$, $X \neq U$, les Γ-types de quotients <u>injectifs indécomposables</u> Q/X de dénominateur X , sont en <u>nombre fini</u>, et leur ensemble coïncide avec celui des Γ-types de quotients injectifs indécomposables <u>associés</u> à X .

<u>Preuve</u> : Soit Q un élément injectif minimal du treillis U/X . Si Q est un élément <u>essentiel</u> de U/X , alors U est extension essentielle de Q dans U/X , et $Q = U$. X est alors $\cap$-irréductible dans $Q = U$, et le théorème est vrai dans ce cas.

Si Q n'est pas essentiel, il possède dans U/X au moins un complément Y_1 qui est élément $\cap$-irréductible, Q et Y_1 étant alors des injectifs extrêmaux réciproques dans U/X (cf. proposition 8.1) .

Soit $Q = Y_2 \cap \ldots \cap Y_n$ une décomposition de Q en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles non superflus. La décomposition $X = Y_1 \cap Y_2 \cap \ldots \cap Y_n$ ne comporte pas non plus d'éléments superflus car $Q > X$ et , d'autre part, Q étant complément de Y_1 dans U/X , nous avons :

$$Y_1 \cap (Y_2 \cap \ldots \cap Y_{i-1} \cap Y_{i+1} \cap \ldots \cap Y_n) > X \, .$$

Les Γ-types associés à X , π_1 ,..., π_n , sont donc ceux des n quotients U/Y_1 , U/Y_2 ,..., U/Y_n (définition 10.3). Comme d'autre part les quotients co-irréductibles Q/X et $(Q \cup Y_1)/Y_1$ sont transposés, il en résulte que Q/X est Γ-équivalent à U/Y_1 et est du Γ-type π_1 .

Inversement soit π_i un type de quotient injectif indécomposable associé à X ; c'est le type d'un quotient $\mathcal{Z}_i = U/X_i$ obtenu au moyen d'une décomposition de X en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles de (L), non superflus :

$$(1) \qquad X = X_1 \cap \ldots \cap X_i \cap \ldots \cap X_n \ ;$$

- si $n = 1$, $X = X_i = X_1$ est $\cap$-irréductible dans (L), et $\pi_i = \pi_1$ est le type du quotient $U/X_1 = U/X$ de dénominateur X.

- si $n > 1$, posons :

$$\overline{X_i} = X_1 \cap \ldots \cap X_{i-1} \cap X_{i+1} \cap \ldots \cap X_n \quad , \quad X = X_i \cap \overline{X_i} \ .$$

Considérons une enveloppe injective E_i de $\overline{X_i}$ dans le treillis U/X : $X = X_i \cap E_i$. Les quotients E_i/X et $(E_i \cup X_i)/X_i$ sont co-irréductibles et transposés, par suite les quotients injectifs indécomposables E_i/X et U/X_i sont du même Γ-type π_i dans $\mathcal{C}_m$. Le théorème est démontré.

Le Γ-type d'un quotient co-irréductible étant toujours celui d'un quotient injectif indécomposable (cf § 1 du présent chapitre) nous pouvons énoncer :

COROLLAIRE 10.1 - Pour $X \in (L)$, $X \neq U$, les Γ-types de quotients co-irréductibles A/X de dénominateur X, sont en nombre fini, et leur ensemble coïncide avec celui des Γ-types de quotients injectifs indécomposables associés à X.

Nous pouvons dire, par abus d'expression, que ce théorème 10.1 et son corollaire précisent la structure du treillis "juste au-dessus de X".

Lorsque n est supérieur à 1 (le cas $n = 1$ étant trivial), il est possible de réaliser les n types $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, sous la forme de n quotients injectifs indécomposables E_1/X, $E_2/X, \ldots, E_n/X$, tels que les éléments $E_1, E_2, \ldots, E_n$, soient $\cup$-indépendants sur X (cf. définition 4.1) : Considérons à nouveau les éléments $\overline{X_i}$ associés à la décomposition (1), introduits au cours de l'étude du théorème précédent :

$$X_i \cap \overline{X_i} = X \quad \text{et} \quad \bigcup_{\lambda \neq i} \overline{X}_\lambda \leqslant X_i \qquad \text{impliquent :}$$

$$\overline{X}_i \cap \left[\bigcup_{\lambda \neq i} \overline{X}_\lambda\right] = X \quad , \quad i = 1, 2,\dots, n \,.$$

Les éléments $\overline{X}_1, \overline{X}_2,\dots, \overline{X}_n$, sont donc $\cup$-indépendants sur X, ce qui peut se traduire aussi par (cf. proposition 4.2) :

$$(3)\ \overline{X}_i \cap (\overline{X}_{i+1} \cup \overline{X}_{i+2} \cup \dots \cup \overline{X}_n) = X \quad , \quad i = 1, 2,\dots, n-1 \,.$$

X_1 étant $\cap$-irréductible non essentiel ($n > 1$) de U/X, est injectif maximal de U/X (théorème 8.2) ; il existe donc dans le treillis U/X une enveloppe injective Q_1 de $\overline{X}_2 \cup \overline{X}_3 \cup \dots \cup \overline{X}_n$ contenue dans X_1 (théorème 7.1). Soit, d'autre part, E_1 une enveloppe injective de $\overline{X}_1$ dans U/X. Pour $i = 1$, (3) entraine (les extensions étant essentielles) :

$$E_1 \cap Q_1 = X \,.$$

Procédons par récurrence, et supposons que pour $i = 1, 2,\dots, h$, $(h < n)$ nous ayant trouvé $E_1, E_2,\dots, E_h$, $Q_1, Q_2,\dots, Q_h$, ayant les propriétés :

$$\left.\begin{array}{l} - E_i \text{ est une enveloppe injective de } \overline{X}_i \text{ dans } U/X, \\ - Q_i \text{ est une enveloppe injective de } \overline{X_{i+1}} \cup \dots \cup \overline{X}_n \text{ dans } U/X, \\ - E_i \cap Q_i = X, \end{array}\right\} i = 1,2,\dots,h,$$

$- E_i \leqslant Q_{i-1}$ et $Q_i \leqslant Q_{i-1}$, $i = 2, 3,\dots, h$.

Les conditions (3) donnent pour $i = h + 1$, (si $h + 1 < n$),

$$\overline{X}_{h+1} \cap (\overline{X}_{h+2} \cup \dots \cup \overline{X}_n) = X \,.$$

Q_h est un injectif de U/X contenant $\overline{X}_{h+1}$ et $\overline{X}_{h+2} \cup \dots \cup \overline{X}_n$; il existe donc dans U/X une enveloppe injective E_{h+1} de $\overline{X}_{h+1}$ et une enveloppe injective Q_{h+1} de $\overline{X}_{h+2} \cup \dots \cup \overline{X}_n$, toutes deux contenues dans Q_h, et telles que : $E_{h+1} \cap Q_{h+1} = X$, (si $h+1 = n$, nous choisissons $E_n = Q_{n-1}$ et $Q_n = Q_{n-1}$).

Ce procédé de récurrence permet donc de trouver dans U/X des enveloppes injectives $E_1, E_2,\dots, E_n$, de $\overline{X}_1, \overline{X}_2,\dots, \overline{X}_n$, respectivement, telles que :

$$X \leqslant E_i \cap (E_{i+1} \cup \dots \cup E_n) \leqslant E_i \cap Q_i = X \quad , \quad i = 1, 2,\dots, n-1 \,;$$

E_1, E_2, ..., E_n, sont donc bien $\cup$-indépendants sur X, et de plus

(4) $E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n \leqslant X_1$, $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \nleqslant X_1$,

car $E_1 \cap (E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) = X$, $X_1 \cap E_1 = X$ (E_1 est extension essentielle de $\overline{X}_1$ dans U/X et $X = X_1 \cap \overline{X}_1$) .

3. ELEMENTS Γ-ISOTYPIQUES DE (L) .

Le cas où tous les Γ-types de quotients injectifs indécomposables associés à un élément X de (L) , sont confondus, conduit à la notion d'élément Γ-isotypique :

DEFINITION 10.4 - Un élément X de (L) , $X \neq U$, est dit Γ-isotypique lorsque tous les Γ-types de quotients injectifs indécomposables associés à X sont confondus.

Si π est le type commun à ces quotients, X est dit Γ-isotypique de type π , ou π-Γ-isotypique .

Tout élément $\cap$-irréductible X , distinct de U , est Γ-isotypique ; son Γ-type est celui du quotient U/X . Le corollaire 10.1 permet de caractériser un élément Γ-isotypique par :

PROPOSITION 10.2 - Pour qu'un élément X de (L) , $X \neq U$, soit π-Γ-isotypique, il faut et il suffit que tous les quotients co-irréductibles de dénominateur X soient du Γ-type π .

La propriété suivante, à l'exemple de la propriété 10.9 de [16] , donne une caractérisation des éléments Γ-isotypiques de (L) :

PROPOSITION 10.3 - Pour qu'un élément X de (L) , $X \neq U$, soit Γ-isotypique il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante :

" $X = X_1 \cap X_2$ avec $X_1 > X$, $X_2 > X$ " entraine "il existe des éléments Y_1 et Y_2 tels que :

$$X_1 \geqslant Y_1 > X \quad , \quad X_2 \geqslant Y_2 > X ,$$

les quotients Y_1/X et Y_2/X sont des treillis isomorphes au moyen d'un isomorphisme de la classe Γ ."

En effet, supposons que X soit Γ-isotypique de type π et que nous ayons $X = X_1 \cap X_2$ avec $X_1 > X$, $X_2 > X$.

Si X est $\cap$-irréductible dans le treillis X_1/X , ce quotient X_1/X est co-irréductible et du Γ-type π de X (proposition 10.2) .

Si X est $\cap$-décomposable dans X_1/X , il admet une décomposition en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles de X_1/X , non superflus :

$$X = Z_1 \cap Z_2 \cap \dots \cap Z_n \quad , \quad Z_i \leqslant X_1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \; , \; (n > 1) \; .$$

Posons $\overline{Z}_1 = Z_2 \cap \dots \cap Z_n$; nous avons :

$$X = Z_1 \cap \overline{Z}_1 \quad \text{et} \quad \overline{Z}_1 > X ,$$

et $\overline{Z}_1/X$, transposé du quotient co-irréductible $(\overline{Z}_1 \cup Z_1)/Z_1$, est lui-même co-irréductible, donc est du Γ-type π de X .

X_1/X contient donc un quotient A/X ($A = X_1$ ou $\overline{Z}_1$) co-irréductible du Γ-type π . De même, X_2/X contient un quotient co-irréductible B/X du Γ-type π . Les quotients A/X et B/X sont Γ-équivalents dans $\mathcal{C}$, et l'existence de Y_1 et Y_2 découle immédiatement de la définition de cette Γ-équivalence (proposition 10.1).

Réciproquement, supposons vérifiée la condition de la proposition, et montrons que deux quotients co-irréductibles arbitraires A/X , B/X , de dénominateur X , sont de même Γ-type. (X sera alors Γ-isotypique en vertu de la proposition 10.2).

Si $A \cap B > X$, A/X et B/X sont du même Γ-type, celui du quotient co-irréductible $(A \cap B)/X$.

Si $A \cap B = X$, la condition de l'énoncé montre de suite que A/B et B/X sont Γ-équivalents (proposition 10.1).

4. DECOMPOSITION EN INTERSECTION D'ELEMENTS Γ-ISOTYPIQUES.

PROPOSITION 10.4 - L'intersection de deux éléments π-Γ-isotypiques de (L) est un élément π-Γ-isotypique.

Soient en effet deux éléments π-Γ-isotypiques X et Y. Introduisons des décompositions de X et Y en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles, non superflus :

$$X = X_1 \cap \dots \cap X_n \quad , \qquad (n \geqslant 1)$$
$$Y = Y_1 \cap \dots \cap Y_m \quad , \qquad (m \geqslant 1)$$
$$X \cap Y = X_1 \cap \dots \cap X_n \cap Y_1 \cap \dots \cap Y_m \; .$$

En supprimant les composantes superflues, on obtient :

$$X \cap Y = Z_1 \cap \dots \cap Z_p \; ,$$

où les Z_i sont pris dans $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m\}$. Les quotients $U/Z_1, \dots, U/Z_p$, sont donc tous du Γ-type π.

Cette propriété permet, dans une décomposition d'un élément comme intersection d'un nombre fini d'éléments Γ-isotypiques, de rassembler les éléments de même Γ-type. Une décomposition d'un élément comme intersection <u>finie</u> d'éléments Γ-isotypiques de Γ-types tous différents, sans élément superflu, s'appelle <u>décomposition réduite</u>. La possibilité de décomposer tout élément X de (L), distinct de U en intersection finie d'éléments $\cap$-irréductibles (qui sont Γ-isotypiques) permet alors d'énoncer le théorème d'existence suivant :

THEOREME 10.2 - Tout élément X de (L) noethérien (ou artinien), distinct de U, admet une <u>décomposition réduite</u> comme intersection d'éléments <u>Γ-isotypiques</u>.

Ce théorème est complété par le théorème d'unicité suivant :

THEOREME 10.3 - Soient <u>deux</u> décompositions <u>réduites</u> :

$$(*) \qquad X = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n = J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_m ,$$

d'un élément X de (L) comme intersection d'éléments Γ-isotypiques de (L). Nous avons $n = m$ et les Γ-types des I_i sont les mêmes que ceux des J_j.

<u>Preuve</u> : Décomposons les I_i et les J_j en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles (sans éléments superflus) :

$$I_i = X_{i1} \cap X_{i2} \cap \dots \cap X_{ih_i} \quad , \quad J_j = Y_{j1} \cap Y_{j2} \cap \dots \cap Y_{jk_j} ;$$

substituons ces expressions dans les deux $\cap$-décompositions de X, et supprimons les éléments $\cap$-irréductibles superflus. Après cette suppression, pour chaque i et chaque j il reste <u>au moins une</u> composante X_{i1} de I_i et une composante Y_{j1} de J_j, puisque les deux décompositions $(*)$ sont constituées d'éléments non superflus. Dans l'$\cap$-décomposition de X ainsi obtenue figurent donc (après une éventuelle permutation des indices) :

$$X_{i1} \cap \dots \cap X_{ih'_i} \quad (h'_i \leqslant h_i) \quad , \quad Y_{j1} \cap \dots \cap Y_{jk'_j} \quad (k'_j \leqslant k_j) \quad ;$$

or nous savons (cf. § 2) que pour ces $X_{i\lambda}$ et $Y_{j\mu}$ restants les Γ-types des quotients $U/X_{i\lambda}$ sont les mêmes que ceux des quotients $U/Y_{j\mu}$, et que ce sont les Γ-types associés à X. Les Γ-types <u>distincts</u> sont donc en nombre égal : $n = m$.

Enfin le Γ-type de I_i est celui de U/X_{i1} qui est de même Γ-type que l'un (au moins) des $U/Y_{j\mu}$, donc de même Γ-type que celui d'un I_j (et <u>un seul</u> car les composantes de même Γ-type ont été rassemblées).

-:-

CHAPITRE XI

-:-

ELEMENTS Γ-ISOTYPIQUES DANS LES ($\mathcal{C}$)-ALGEBRES ET LES MODULES

-:-

1. CHANGEMENT DE CLASSE D'ISOMORPHISMES Γ .

Considérons deux classes d'isomorphismes Γ et Γ' , vérifiant les propriétés α) , β) , γ) du chapitre X , et telles que :

$$\Sigma \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma' \subseteq T ,$$

Σ et T étant respectivement la classe des similitudes et la classe des isomorphismes de treillis, portant sur les quotients du treillis (L) .
De $\Gamma \subseteq \Gamma'$ résultent les propriétés suivantes :

Si deux quotients A_1/B_1 et A_2/B_2 , non triviaux, sont partiellement Γ-isomorphes (cf. définition 10.2), ils sont aussi partiellement Γ'-isomorphes.

Dans l'ensemble $\mathcal{C}$ des quotients co-irréductibles de (L) , la classe modulo Γ du quotient co-irréductible A/B est contenue dans la classe de A/B modulo Γ' .

Tout Γ-type de quotient dans $\mathcal{C}$ définit canoniquement (par saturation des classes) un Γ'-type de quotient dans $\mathcal{C}$.

Si un élément X de (L) a pour Γ-types associés π_1 , π_2 ,..., π_n (cf. définition 10.3), X a aussi pour Γ'-types associés les types canoniquement correspondants : π'_1 , π'_2 ,..., π'_n ; de plus, si p (resp. p') est le nombre de types <u>distincts</u> de $\{\pi_1 , \pi_2 ,..., \pi_n\}$ (resp. de $\{\pi'_1 , \pi'_2 ,..., \pi'_n\}$) , nous avons, $p' \leqslant p$.

Enfin, si X est Γ-isotypique, X est alors Γ'-isotypique.

2. QUOTIENTS DANS UNE ($\mathcal{C}$)-ALGEBRE MODULAIRE.

Rappelons qu'une ($\mathcal{C}$)-algèbre modulaire (L) est constituée par deux treillis ($\mathcal{C}$) et (L) satisfaisant aux axiomes suivants (cf. L. LESIEUR et R. CROISOT, Chap. III § 1 de [16]) :

<u>Axiome A</u> : $(\mathcal{C})$ est un demi-groupe réticulé quasi-entier complet : $(\mathcal{C})$ est donc un treillis complet muni d'une structure de demi-groupe multiplicatif satisfaisant aux lois distributives :

$$\mathcal{A}\Big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}\,\mathcal{B}_i \quad , \quad \Big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i\Big)\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i\,\mathcal{A} \; ,$$

et à : $\mathcal{A}\,\mathcal{B} \leqslant \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ (quasi-entier) ;

0 et $\mathcal{E}$ sont l'élément nul et l'élément universel de $(\mathcal{C})$.

<u>Axiome B</u> : (L) est un treillis complet, modulaire et $\cap$-continu.

<u>Axiome C</u> : Les éléments de $(\mathcal{C})$ opèrent dans (L) ; à tout $\mathcal{A} \in (\mathcal{C})$ et à tout $X \in (L)$ correspond un élément $\mathcal{A}X$ de (L) , avec les lois suivantes :

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}X) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\,X \quad ; \quad \mathcal{A}X \subseteq X \; ;$$

$$\Big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i\Big)\,X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i\,X \quad ; \quad \mathcal{A}\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}X_i \; ;$$

$$0\,X = 0 \quad ; \quad \mathcal{A}0 = 0 \; .$$

Il résulte de l'axiome C les deux propriétés suivantes : X et Y étant donnés dans (L) , l'ensemble des éléments $\mathcal{A} \in (\mathcal{C})$ tels que $\mathcal{A}Y \subseteq X$ possède un élément maximum noté $X \,^{\circ}.\, Y$ et appelé <u>résiduel à gauche</u> de X par Y .

X et $\mathcal{A}$ étant donnés $(X \in (L)\, ,\ \mathcal{A} \in (\mathcal{C})\,)$, l'ensemble des éléments $Y \in (L)$ tels que $\mathcal{A}Y \subseteq X$ possède un élément maximum noté $X \,.^{\circ}\, \mathcal{A}$ et appelé <u>résiduel à droite</u> de X par $\mathcal{A}$.

<u>Axiome D</u> : **L'ensemble des résiduels à gauche et l'ensemble des résiduels à droite de tout élément $X \in (L)$ vérifient la condition de chaîne ascendante.**

Soit A/B un quotient de la $(\mathscr{C})$-algèbre (L), A et $B \in (L)$, $B \leqslant A$. A/B est un sous-treillis complet, modulaire et $\cap$-continu de (L), mais n'est pas en général une $(\mathscr{C})$-algèbre pour la loi de composition externe induite par celle de (L) (le composé αX de $\alpha \in (\mathscr{C})$ et de $X \in A/B$, n'appartenant pas nécessairement à A/B). Cependant la loi de composition :

$$(\alpha, X) \longrightarrow \alpha X \cup B \quad , \quad (\text{notée } \alpha . X) ,$$

définit sur A/B une structure de $(\mathscr{C})$-algèbre -la vérification des axiomes C est aisée-. Tout quotient A/B sera considéré, dans la suite, comme muni de cette structure.

Pour X et $Y \in A/B$ et $\alpha \in (\mathscr{C})$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$\alpha . Y \leqslant X \quad ; \quad \alpha Y \cup B \leqslant X \quad ; \quad \alpha Y \leqslant X .$$

Par suite X et Y ont même résiduel à gauche $X \;{}^{\bullet}\!\!. \; Y$ dans les deux $(\mathscr{C})$-algèbres A/B et (L).

D'autre part, il est facile de montrer que le résiduel à droite $X \,.\!:^{\bullet}\, \alpha$ de $X \in A/B$ par α (résiduel exprimé dans la $(\mathscr{C})$-algèbre A/B) est donné par : $X \,.\!:^{\bullet}\, \alpha = A \cap (X \,.^{\bullet}\, \alpha)$, $X \,.^{\bullet}\, \alpha$ étant le résiduel exprimé dans la $(\mathscr{C})$-algèbre (L).

DEFINITION 11.1 - Nous dirons qu'un <u>isomorphisme</u> (de treillis)

$$f : A/B \longrightarrow C/D$$

de deux quotients de (L), est de la <u>classe</u> $\Gamma_{\mathscr{C}}$ s'il vérifie :

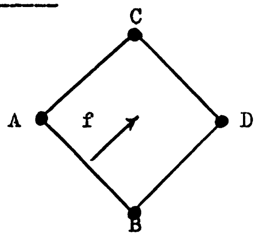
$$\forall \alpha \in (\mathscr{C}) , \quad \forall X \in A/B \quad , \quad f(\alpha . X) = \alpha . f(X) .$$

Un tel isomorphisme est un isomorphisme de $(\mathscr{C})$-algèbres A/B et C/D, au sens donné par L. LESIEUR et R. CROISOT dans [16] (cf. § 5 p. 35) ; cela résulte en particulier du fait que, pour toute famille $\{X_i\}_{i \in I}$ d'éléments X_i de A/B, la borne supérieure $\bigcup_{i \in I} f(X_i)$ existe dans C/D et est égale à $f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)$.

PROPOSITION 11.1 - Toute <u>similitude</u> de deux quotients d'éléments de (L) est un isomorphisme de la <u>classe</u> $\Gamma_{\mathcal{C}}$ (i.e. $\sum \subseteq \Gamma_{\mathcal{C}} \subseteq T$).

<u>Preuve</u> : La classe $\Gamma_{\mathcal{C}}$ vérifie les propriétés $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, qui précèdent le § 1 du chapitre X . Comme toute similitude de deux quotients de (L) est la composée d'un nombre fini d'isomorphismes de treillis associés à deux quotients transposés (cf. chapitre IV), il suffit d'établir que, si deux quotients A/B et C/D sont transposés, l'isomorphisme f associé est de la classe $\Gamma_{\mathcal{C}}$.

<u>Premier cas</u> : $C = A \cup D$ et $B = A \cap D$, l'isomorphisme de treillis



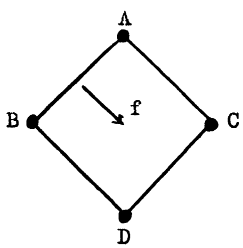
$f : A/B \longrightarrow C/D$ est alors donné par

$$X \longrightarrow X \cup D ,$$

et on contrôle sans difficulté que $f(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot f(X)$.

<u>Deuxième cas</u> : $A = B \cup C$ et $D = B \cap C$, f est donné par :

$$X \longrightarrow X \cap C ;$$



l'isomorphisme inverse f^{-1} est donné par :

$$X \longrightarrow X \cup B ,$$

et est de la classe $\Gamma_{\mathcal{C}}$ d'après le premier cas. La propriété $\beta)$ montre alors que f est aussi de la classe $\Gamma_{\mathcal{C}}$.

REMARQUE - Tout isomorphisme $f : A/B \longrightarrow C/D$ de la classe $\Gamma_{\mathcal{C}}$ a la propriété de conserver les résiduels à gauche :

$$(\mathfrak{R}) \quad , \quad f(X) \mathbin{\dot{.}} f(Y) = X \mathbin{\dot{.}} Y .$$

DEFINITION 11.2 - Tous les isomorphismes de treillis $f : A/B \longrightarrow C/D$ qui vérifient la propriété $(\mathfrak{R})$ pour tous les résiduels à gauche constituent une <u>classe</u> $\Gamma_{\mathfrak{R}}$ vérifiant les conditions $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$; et :

$$\sum \subseteq \Gamma_{\mathcal{C}} \subseteq \Gamma_{\mathfrak{R}} \subseteq T .$$

3. RESIDUELS ESSENTIELS D'UN ELEMENT D'UNE $(\mathscr{C})$-ALGEBRE NOETHERIENNE (OU ARTINIENNE).

Nous supposons désormais que (L) est une $(\mathscr{C})$-algèbre modulaire noethé-rienne (ou artinienne) -cf. le début du chapitre X- et nous nous proposons d'étudier les résiduels essentiels d'un élément X de (L) (cf. définition 2.1) au moyen des Γ-types associés à X , Γ étant une classe intermédiaire d'isomorphismes contenue dans la classe $\Gamma_{\mathfrak{R}}$ définie au paragraphe précédent :

$$\Sigma \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma_{\mathfrak{R}} \subseteq T,$$

(le choix $\Gamma = \Gamma_{\mathfrak{R}}$ étant bien entendu un cas particulier intéressant).

Considérons un quotient co-irréductible A/B de (L) (cf. définition 10.1) ; B étant $\cap$-irréductible dans le treillis A/B , B est alors tertiaire relativement à la $(\mathscr{C})$-algèbre A/B et possède un seul résiduel à gauche essentiel $\mathscr{S}$ qui est résiduel à gauche propre maximum de B dans la $(\mathscr{C})$-algèbre A/B (cf. théorèmes 3.1 et 3.2 de [13] , III). Tout élément $N \in A/B$, $N \neq B$ contient un élément $Z \in A/B$, $Z \neq B$, tel que $B \,^{\bullet}.\, Z = \mathscr{S}$. En effet si $\mathscr{S}$ est résiduel essentiel de B par rapport à Y , $(B < Y \leqslant A)$, la relation $Y \cap N > B$ (puisque A/B est co-irréductible) entraine : $\mathscr{S} = B \,^{\bullet}.\, (Y \cap N)$.

Dans ces conditions, nous dirons que $\mathscr{S}$ est l'annulateur maximum du quotient co-irréductible A/B (B étant l'élément nul de A/B) .

PROPOSITION 11.2 - Les annulateurs maxima de deux quotients co-irréductibles de même Γ-type , $(\Gamma \subseteq \Gamma_{\mathfrak{R}})$, sont égaux.

Soient A/B et A'/B' deux quotients co-irréductibles de même Γ-type (cf. § 1 chap. X) ; il existe un sous-quotient non trivial C/B de A/B et un sous-quotient C'/B' non trivial de A'/B' tels que les treillis C/B et C'/B' soient isomorphes au moyen de un isomorphisme

$$f : C/B \longrightarrow C'/B' \qquad , \qquad \text{de la classe } \Gamma \;;$$

$C \neq B$ entraine l'existence d'un élément Z tel que :

$$B < Z \leqslant C \quad , \quad B \,^{\bullet}\!. \, Z = \mathcal{P} \text{ (annulateur maximum de } C/B) \; ;$$

f étant de la classe $\Gamma_{\mathfrak{R}}$:

$$\mathcal{P} = f(B) \,^{\bullet}\!. \, f(Z) = B' \,^{\bullet}\!. \, f(Z) \; .$$

$\mathcal{P}'$ étant l'annulateur maximum de A'/B' , $f(Z) \neq B'$ entraine : $\mathcal{P} \leqslant \mathcal{P}'$.
En procédant de même avec f^{-1} , $\mathcal{P}' \leqslant \mathcal{P}$.

Cette proposition 11.2 permet de donner la définition suivante :

DEFINITION 11.3 - Etant donné un Γ-type $\mathfrak{T}$ de quotient co-irréductible, on appelle <u>annulateur maximum</u> de $\mathfrak{T}$ l'annulateur maximum d'un quotient co-irréductible du type $\mathfrak{T}$, $(\Gamma \subseteq \Gamma_{\mathfrak{R}})$.

THEOREME 11.1 - Les résiduels essentiels d'un élément X de (L) , $X \neq U$, coïncident avec les annulateurs maxima des Γ-types de quotients injectifs indécomposables associés à X , (si $\Gamma \subseteq \Gamma_{\mathfrak{R}}$) .

Cet énoncé est à rapprocher de celui du théorème 10.7 de [16] qui exprime que les résiduels essentiels d'un sous-module X du module U coïncident avec les annulateurs maxima des facteurs directs indécomposables de l'enveloppe injective de U/X .

<u>Preuve du théorème 11.1</u> : Soit $\mathcal{P} = X \,^{\bullet}\!. \, Y$ un résiduel essentiel de X par rapport à l'élément $Y > X$; le quotient Y/X contient un sous-quotient co-irréductible (non trivial) Y_1/X :

C'est évident si Y/X est co-irréductible ; si Y/X n'est pas co-irréductible, X admet dans Y/X une décomposition en intersection finie d'éléments X_i $\cap$-irréductibles de Y/X ,

$$X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n \quad , \quad n \geqslant 2 \quad , \text{ les } X_i \text{ étant non superflus.}$$

La proposition 8.1 appliquée au treillis Y/X , montre que $Y_1 = X_2 \cap \ldots \cap X_n$ est élément co-irréductible de ce treillis, et Y_1/X

est quotient co-irréductible de (L) .

Ce sous-quotient co-irréductible Y_1/X est d'un Γ-type π_1 ; π_1 étant un Γ-type de quotient injectif indécomposable associé à X (cor. 10.1)

L'annulateur maximum $\mathcal{P}_1$ de Y_1/X est donné par $\mathcal{P}_1 = X \,{}^{\bullet}\!.\, N$ avec $X < N \leqslant Y_1 \leqslant Y$. Ce résiduel $X \,{}^{\bullet}\!.\, N$ relatif à la $(\mathcal{C})$-algèbre Y/X est aussi résiduel $X \,{}^{\bullet}\!.\, N$ de X relatif à la $(\mathcal{C})$-algèbre (L) (cf. § 2 du présent chapitre) ; $\mathcal{P} = X \,{}^{\bullet}\!.\, Y$ étant essentiel pour (L) , il en résulte $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$.

<u>Inversement</u>, si $\mathcal{P}$ est l'annulateur maximum d'un Γ- type π_1 de quotient injectif indécomposable associé à X , $\mathcal{P}$ est annulateur maximum d'un quotient co-irréductible Q/X de dénominateur X (corollaire 10.1) :

$$\mathcal{P} = X \,{}^{\bullet}\!.\, Y \qquad \text{avec} \qquad X < Y \leqslant Q ;$$

et il est évident que $\mathcal{P}$ est résiduel essentiel de X par rapport à Y , dans la $(\mathcal{C})$-algèbre (L) .

Nous savons qu'un élément X de (L) est tertiaire si et seulement si X possède un et un seul résiduel essentiel (cf. théorème 3.1 de [13] III) ; le théorème précédent permet d'établir le théorème suivant :

THEOREME 11.2 - Pour que l'élément X de (L) , $X \neq U$, soit $\mathcal{P}$-tertiaire il faut et il suffit que les Γ-types de quotients injectifs indécomposables associés à X , aient tous le même annulateur maximum $\mathcal{P}$, $(\Gamma \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}})$.

Il en est ainsi lorsque X est Γ-isotypique, puisque X ne possède alors par définition qu'un seul Γ-type π de quotients injectifs indécomposables associé.

PROPOSITION 11.3 - Tout élément X de (L) , $X \neq U$, Γ-isotypique est <u>tertiaire</u> , lorsque $\Gamma \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}}$. L'élément premier $\mathcal{P}$ associé à X est alors l'annulateur maximum de tout quotient co-irréductible Q/X de dénominateur X .

REMARQUE - La démonstration de la proposition 10.4, et le théorème 11.2 montrent que l'intersection de deux éléments $\mathcal{P}$-tertiaires est $\mathcal{P}$-tertiaire (résultat classique de [13]) . Le théorème 10.3 permet alors d'obtenir les théorèmes d'existence et "d'unicité" des décompositions réduites d'un élément X de (L) , $X \neq U$, comme intersection d'éléments tertiaires (cf. § 8 de [13] , I) .

Dans le cas où $(\mathcal{C})$ est un demi-groupe commutatif, nous retrouvons les résultats classiques de la décomposition noethérienne en intersection d'éléments primaires.

4. APPLICATION AU CAS DES MODULES NOETHERIENS (OU ARTINIENS).

Considérons le treillis (L) des sous-modules d'un module U à gauche et unitaire sur un anneau $\mathcal{E}$; $(\mathcal{C})$ étant le treillis des idéaux bilatères de $\mathcal{E}$, (L) est une $(\mathcal{C})$-algèbre. U est supposé noethérien (ou artinien).

T étant toujours la classe des isomorphismes de treillis portant sur les quotients d'éléments de (L) , nous définissons comme précédemment, la classe des similitudes $\sum$ (cf. introduction du chapitre X), la classe $\Gamma_{\mathcal{C}}$ (cf. définition 11.1), la classe $\Gamma_{\mathcal{R}}$ d'isomorphismes compatibles avec la résiduation à gauche (cf. définition 11.2).

Supposons que deux quotients A/B et A'/B' d'éléments de (L) définissent deux modules quotients A/B et A'/B' isomorphes au moyen d'un isomorphisme f de modules sur $\mathcal{E}$. Nous savons que l'homomorphisme canonique $\varphi : A \longrightarrow A/B$ définit un isomorphisme θ du treillis des sous-modules de A qui contiennent B sur le treillis des sous-modules de A/B ; $\varphi' : A' \longrightarrow A'/B'$ définit un isomorphisme analogue θ' . Comme f définit naturellement un isomorphisme σ du treillis des sous-modules de A/B sur celui des sous-modules A'/B' l'application $\bar{f} = \theta'^{-1} \circ \sigma \circ \theta$ est un isomorphisme des sous-treillis A/B et A'/B' de (L) . Nous dirons que $\bar{f}$ est un isomorphisme de treillis associé (canoniquement) à l'isomorphisme f de modules ; nous appellerons classe Γ_M la classe de tous les isomorphismes $\bar{f}$ de T qui peuvent être canoniquement associés à un isomorphisme f de modules (portant sur les quotients).

Considérons deux quotients A/B et A'/B' transposés de (L) ; il est aisé de voir que les deux modules quotients A/B et A'/B' sont isomorphes : $A/B \xrightarrow{f} A'/B'$ de façon naturelle, et que l'isomorphisme $\bar{f}$ canoniquement associé à f coïncide avec l'isomorphisme des treillis A/B et A'/B' défini par le caractère transposé de ces quotients (cf. § 1 du chapitre IV).

D'autre part tout isomorphisme de la classe Γ_M est aussi de la classe $\Gamma_{\mathcal{C}}$.

Ces observations peuvent être traduites par :

$$\sum \subseteq \Gamma_M \subseteq \Gamma_{\mathcal{C}} \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}} \subseteq T .$$

L'importance de la classe Γ_M est mise en évidence par le théorème :

THEOREME 11.3 - Pour qu'un sous-module X soit élément Γ_M-<u>isotypique</u> dans la $(\mathcal{C})$-algèbre (L) , il faut et il suffit qu'il soit sous-module <u>isotypique</u> au sens habituel (cf. définition 10.5 de [16]).

<u>Preuve</u> : <u>Rappelons</u> la notion de sous-module isotypique : U est noetherien (ou artinien) ; soit

$$(1) \qquad X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$$

une décomposition du sous-module X de U en intersection d'un nombre fini de sous-modules $\cap$-irréductibles sans élément superflu. L'enveloppe injective $E(U/X)$ de U/X est somme directe de n sous-modules isomorphes respectivement aux enveloppes injectives indécomposables $E(U/X_i)$ des modules U/X_i :

$$(2) \quad E(U/X) = E(U/X_1) \oplus E(U/X_2) \oplus \dots \oplus E(U/X_n) .$$

(cf. E. MATLIS, théorème 2.3 de [18] et L. LESIEUR et R. CROISOT, théorème 10.3 de [16]).

Les composants directs figurant dans (2) sont indépendants (aux isomorphismes près) du choix de la décomposition (1) pour X , en vertu du théorème suivant de G. AZUMAYA (cf. [1]) :

Soit U un $\mathcal{C}$-module qui est somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables. Pour deux décompositions de U en somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables :

$$U = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n = I'_1 \oplus I'_2 \oplus \dots \oplus I'_n ,$$

On a $n = n'$, et il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que I_α soit isomorphe à $I'_{\sigma(\alpha)}$ pour tout α .

Le sous-module X est dit <u>isotypique</u> si l'enveloppe injective de U/X est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables tous isomorphes.

Cela est équivalent à dire que pour toute (ou pour une seule) $\cap$-décomposition du type (1) , tous les composants $E(U/X_i)$ de la décomposition correspondante (2) sont des modules isomorphes.

Mais les enveloppes injectives indécomposables $E(U/X_i)$ et $E(U/X_j)$ sont isomorphes si, et seulement si, il existe un sous-module non nul Y_i de U/X_i isomorphe à un sous-module non nul Y_j de U/X_j : $Y_i \xrightarrow{\varphi} Y_j$ (cf. corollaire de la propriété 10.8 de [16]) ; c'est-à-dire, s'il existe un sous-module Z_i et un sous-module Z_j de U tels que : $X_i < Z_i$; $X_j < Z_j$; Z_i/X_i et Z_j/X_j sont isomorphes par l'isomorphisme $\bar{\varphi}$ de Γ_M canoniquement associé à $\varphi : Z_i/X_i \longrightarrow Z_j/X_j$ (Y_i et Y_j étant identifiés à Z_i/X_i et Z_j/X_j) ; les quotients co-irréductibles U/X_i et U/X_j sont alors de <u>même</u> Γ_M - type π (qui est un des Γ_M - types associés à X par définition 10.3) .

Inversement si les quotients co-irréductibles U/X_i et U/X_j sont de même Γ_M - type π , il existe alors deux sous-quotients non triviaux Z_i/X_i et Z_j/X_j isomorphes par un isomorphisme $\bar{\psi}$ de la classe Γ_M . $\bar{\psi}$ est donc l'associé canonique d'un isomorphisme de modules quotients :

$$\psi : Z_i/X_i \longrightarrow Z_j/X_j ,$$

et les enveloppes injectives $E(U/X_i)$ et $E(U/X_j)$ sont des modules isomorphes.

REMARQUE 1 - La proposition 10.3 du chapitre X , et la propriété 10.9 de [16] permettent une preuve presque immédiate du théorème 11.3, mais cette preuve a l'inconvénient de masquer les rôles joués par les Γ-types (et types pour les modules).

REMARQUE 2 - Ce théorème 11.3 et sa démonstration montrent que le chapitre X appliqué au treillis (L) des sous-modules d'un module U et au choix $\Gamma = \Gamma_M$, réalise une théorie des types "d'injectifs" indécomposables et des sous-modules isotypiques de U , qui ne porte que sur les éléments de (L) et n'utilise par le plongement d'un module dans un module injectif (enveloppe injective dans la pratique).

-:-

BIBLIOGRAPHIE

-:-

[1] G. AZUMAYA, Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remark-Schmidt's theorem (Nagoya math. j., vol 1, 1950, p. 117-124).

[2] G. BIRKHOFF, Lattice theory (Amer, math. soc., New-York, revised edition 1948).

[3] N. BOURBAKI, Eléments de mathématique, livre II : algèbre (Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris).

[4] H. CARTAN and S. EILENBERG, homological algebra (Princeton, 1956).

[5] P. DUBREIL et M.L. DUBREIL-JACOTIN, leçons d'algèbre moderne (Dunod, Paris 1961).

[6] M.L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques (cahiers scientifiques, Gauthier-Villars, Paris 1953).

[7] B. ECKMANN et A. SCHOPF, Uber injective Moduln (Archiv der Math., vol IV, 1953, p. 75-78).

[8] J. FORT, I , Quelques propriétés des sous-modules tertiaires d'un module sur un anneau non nécessairement commutatif (C. R. Acad. Sc., t. 248, 1959, p. 1748-1750).

II , Quelques propriétés des sous-modules tertiaires (C. R. Acad. Sc., t. 254, 1962, p. 1900-1902).

III, Radical tertiaire d'un sous-module, sous-modules tertiaires dans un module sur un anneau non nécessairement commutatif, (Séminaire Dubreil-Pisot, 11 décembre 1961).

IV , Eléments injectifs (compléments) dans les treillis modulaires (Sém. P. Dubreil, M.L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, C. Pisot, 6 Janvier 1964).

V , Eléments isotypiques dans les ($\mathfrak{C}$)-algèbres modulaires (Sém. P. Dubreil, M.L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, C. Pisot, 13 Janvier 1964).

[9] P. GABRIEL, Objets injectifs dans les catégories abéliennes (Sém. P. Dubreil, M.L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot, t. 17, 1959, p. 17-01 à 17-32).

[10] P. GABRIEL, des catégories abéliennes, thèse Paris 1961 (Bull. Soc. math. Fr., t. 90, 1962, p. 323-448).

[11] R. E. JOHNSON, Structure theory of faithful rings, I Closure operations on lattices (trans. amer. math. soc., vol 84, 2, 1957, p. 508-522). II Restricted rings (ib., p. 523-544), III Irreductible rings (Proc. amer. math. soc., vol 11, 5, 1960, p. 710-717).

[12] R. E. JOHNSON and E. T. WONG, quasi injective modules and irréductible rings (J. London math. soc., t. 36, 1961, p. 260-268).

[13] L. LESIEUR et R. CROISOT, Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I (Colloque d'algèbre supérieure, C.B.R.M., Bruxelles, 1956, p. 79-121), II (Math. ann. t. 134, 1958, p. 458-476), III (Acad. royale de Belgique, t. 44, 1958, p. 75-93).

[14] L. LESIEUR et R. CROISOT, une propriété caractéristique des idéaux tertiaires (C.R. Acad. Sc., t. 246, 1958, p. 517-520).

[15] L. LESIEUR et R. CROISOT, la notion de résiduel essentiel (C.R. Acad. Sc., t. 246, 1956, p. 357-360).

[16] L. LESIEUR et R. CROISOT, Algèbre noethérienne non commutative (Mém. Sc. math. Gauthier-Villars, Paris, 1963).

[17] L. LESIEUR et R. CROISOT, Coeur d'un module I (Séminaire Dubreil-Pisot, 14 Novembre 1960) et II (id., 10 avril 1961).

L. LESIEUR et R. CROISOT, Coeur d'un module (C.R. Acad. Sc., t. 252, 1961, p. 52-54).

L. LESIEUR et R. CROISOT, Coeur d'un module (Journ. de Math. pures et appl., tome XLII, Fasc. 4, 1963).

[18] E. MATLIS, Injective modules over Noetherian rings (Pacific j. math. vol. 8, 3, 1958, p. 511-528).

[19] O. ORE, On the foundation of abstract algebra I (Annals of math., vol. 36, 2, 1935, p. 406-437), II (id. vol 37, 2, 1936, p. 265-292)

[20] G. RENAULT, Sous-modules compléments dans un A-module M (C.R. Acad. Sc., t. 256, 1963, p. 3222-3225).

G. RENAULT, Etude des sous-modules compléments dans un A-module (Sém. P. Dubreil, M.L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, C. Pisot, 11 Avril 1963).

-:-

Jacques Fort

13, rue Louis Vierne, Poitiers

-:-

Erratum :

page 6, 3ème ligne, au lieu de : $a \in X \Longrightarrow \exists \ldots$, lire :
$a \notin X \Longrightarrow \exists \ldots$

page 31, avant dernière ligne, au lieu de : maximal, lire : minimal.