E. BOREL

Sur la classification des ensembles de mesure nulle

Bulletin de la S. M. F., tome 47 (1919), p. 97-125
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1919__47__97_0>

SUR LA CLASSIFICATION DES ENSEMBLES DE MESURE NULLE;

PAR M. ÉMILE BOREL.

J'ai indiqué, en 1911 et 1912, dans deux Notes des *Comptes rendus* (¹), les principes sur lesquels me paraît devoir reposer la classification et l'étude systématique des ensembles de mesure nulle. Quelques-unes des conséquences de ces principes ont été développées dans une Conférence, faite en octobre 1912, à l'inauguration de l'Institut Rice, à Houston (²); je me propose aujourd'hui d'utiliser les propriétés élémentaires des fractions décimales pour étudier et classer certains ensembles de mesure nulle, et de montrer comment les résultats ainsi obtenus, en apparence très particuliers, s'appliquent, en fait, à des cas très généraux.

I. — LES ENSEMBLES DÉCIMAUX DE L'ESPÈCE (A).

Nous désignerons par n un entier positif quelconque et par $\lambda(n)$ ou plus brièvement par λ, un entier positif fonction de n; nous supposerons que cette fonction n'est pas décroissante, c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda(n+1) \geq \lambda(n). \tag{1}$$

Nous dirons que la fonction λ appartient au type décimal convergent si la série

$$\sum \frac{1}{10^{\lambda(n)}} \tag{2}$$

est convergente.

A chaque type de série convergente, telle que

$$\sum \frac{1}{n^{1+\alpha}} \qquad (\alpha > 0). \tag{3}$$

$$\sum \frac{1}{n(\log n)^{1+\alpha}} \qquad (\alpha > 0), \tag{4}$$

$$\sum \frac{1}{n \log n (\log \log n)^{1+\alpha}} \qquad (\alpha > 0), \tag{5}$$

(¹) *Comptes rendus*, t. CLII, p. 579, et t. CLIV, p. 568.

(²) *Aggregates of zero measure* apud *The Book of the Opening of the Rice* on peut faire correspondre une série convergente telle que (2), en prenant pour λ la plus grande valeur entière vérifiant les inégalités

$$(3)' \qquad 10^\lambda < n^{1+\alpha},$$

$$(4)' \qquad 10^\lambda < n(\log n)^{1+\alpha},$$

$$(5)' \qquad 10^\lambda < n \log n(\log \log n)^{1+\alpha}.$$

Les fonctions λ, ainsi définies, seront dites appartenir au type décimal convergent correspondant aux séries (3), (4), (5).

Étant donnée une fonction λ déterminée du type décimal convergent [par exemple, pour fixer les idées, la fonction correspondant à la série (4) avec $\alpha = 1$], nous définirons, à l'aide de cette fonction, un ensemble décimal de l'espèce (A), de la manière suivante :

Cet ensemble E comprend :

1° *tous les nombres décimaux* (1) *compris entre* 0 *et* 1 ;

2° *les fractions décimales illimitées* ω *comprises entre* 0 *et* 1, *satisfaisant à la condition suivante: une telle fraction décimale étant écrite*

$$(6) \qquad 0,4500399996973000400 5\ldots,$$

à chaque valeur de l'entier n *on fait correspondre un nombre* μ *ainsi défini : si le chiffre décimal qui suit le* $n^{\text{ième}}$ *n'est ni un* 0 *ni un* 9, *on prend* $\mu = 0$; *si le chiffre qui suit le* $n^{\text{ième}}$ *est* 0 *ou* 9, *on prend* $\mu = h$, h *étant le nombre de chiffres* 0 *consécutifs* (*ou de chiffres* 9 *consécutifs*) *qui suivent le* $n^{\text{ième}}$. *Par exemple, pour la fraction* (6), *on a :*

$$\mu(1) = 0, \quad \mu(2) = 2, \quad \mu(3) = 1, \quad \mu(4) = 0, \quad \mu(5) = 4,$$
$$\mu(6) = 3, \quad \mu(7) = 2, \quad \mu(8) = 1, \quad \mu(9) = 0, \quad \mu(10) = 1,$$
$$\mu(11) = 0, \quad \mu(12) = 0, \quad \mu(13) = 3, \quad \mu(14) = 2, \quad \mu(15) = 1,$$
$$\mu(16) = 0, \quad \mu(17) = 2, \quad \mu(18) = 1, \quad \mu(19) = 0.$$

Le nombre ω *appartient à l'ensemble* E *si l'on a, pour une*

Institute, t. I (Houston, Texas). Le texte français a paru dans le *Bulletin de la Société mathématique*, 1913, sous le titre : *Les ensembles de mesure nulle*.

(1) Dans certaines applications, il peut y avoir intérêt à laisser de côté les nombres décimaux; l'ensemble ainsi modifié sera dit d'espèce (A').

infinité de valeurs de n,

$$(7) \qquad \mu(n) \geqq \lambda(n)$$

ou, ce qui revient au même, ω *n'appartient pas à* E *s'il existe un entier m tel que la relation*

$$(8) \qquad n > m$$

entraîne

$$(9) \qquad \mu(n) < \lambda(n).$$

Nous conviendrons de dire, pour abréger, que dans le cas où ω appartient à E, *l'approximation asymptotique de* ω *par les nombres décimaux est supérieure* [1] *ou au moins égale à* λ. Ce langage équivaut, par définition, à la propriété exprimée par l'inégalité (7), vérifiée pour une infinité de valeurs de n.

Les ensembles décimaux de l'espèce (A) sont, par définition, tous les ensembles E définis au moyen d'une fonction λ du type décimal convergent. Il est clair que si une fonction λ est asymptotiquement supérieure à λ', l'ensemble E défini par λ est intérieur à l'ensemble E$'$ défini par λ'. On peut donc, en considérant des fonctions λ croissant de plus en plus rapidement, définir des ensembles E de plus en plus étroits. On sait qu'une suite énumérable quelconque $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots$ de fonctions croissantes étant donnée, on peut définir une fonction croissante λ asymptotiquement supérieure à chacune des λ_p. On en conclut que l'ensemble E$'$ intérieur à une infinité énumérable quelconque $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$ d'ensemble du type (A) comprend un ensemble E du type (A).

Les ensembles de l'espèce (A) sont visiblement de mesure nulle; nous reviendrons plus loin sur leur définition au moyen de points fondamentaux (les nombres décimaux) et d'intervalles d'exclusion. On arrive plus simplement à l'étude de leurs propriétés principales au moyen de la théorie des probabilités énumérables.

---

(1) De même que l'on dit habituellement qu'une formule approchée donne une *plus grande* approximation qu'une seconde formule, lorsque la différence avec la valeur exacte est *plus petite* pour la première formule que pour la seconde, de même nous disons ici que l'approximation est supérieure à λ lorsque l'erreur est inférieure à $10^{-\lambda}$.

Rappelons les définitions essentielles de cette théorie et le théorème fondamental.

Considérons une infinité énumérable d'événements éventuels $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ pour chacun desquels on a défini deux éventualités opposées, s'excluant mutuellement, l'éventualité favorable dont la probabilité est p_n pour S_n et l'éventualité défavorable dont la probabilité est $q_n = 1 - p_n$. On suppose que les événements sont indépendants ([1]) et l'on distingue deux cas, le *cas de convergence*, où la série

$$(10) \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$$

est convergente, et le cas de *divergence*, où cette série (10) est divergente.

Le théorème fondamental de la théorie des probabilités énumérables est le suivant :

Théorème fondamental. — *La probabilité pour que le cas favorable se produise une infinité de fois est égale à* 0 *dans le cas de convergence et à* 1 *dans le cas de divergence* ([2]).

Il est essentiel de remarquer que, les cas possibles étant en nombre infini, probabilité 0 ne signifie pas impossibilité rigoureuse et probabilité 1 ne signifie pas certitude absolue.

La probabilité p_n, pour que les λ chiffres qui suivent le $n^{\text{ième}}$ soient tous égaux à zéro, est

$$(11) \qquad p_n = \frac{1}{10^\lambda}.$$

([1]) Dans certains cas, l'indépendance complète n'est pas réalisée, mais les démonstrations faites en supposant l'indépendance restent valables, avec de légères modifications (*voir*, par exemple, la Note V de mes *Leçons sur la Théorie des fonctions*, 2e édition). On pourrait convenir de dire que les événements sont quasi indépendants lorsque la probabilité p_n étant définie dans l'hypothèse où les événements précédents $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$ ont été défavorables, la production d'un événement favorable E_n modifie seulement un nombre limité des probabilités consécutives.

([2]) *Voir*, pour la démonstration, mes *Leçons sur la Théorie des fonctions*, 2e édition, ou mon Mémoire *Sur les probabilités dénombrables* (*Rendiconti di Palermo*, t. XXVII, 1909).

La probabilité pour qu'il y ait au moins λ zéros serait

$$\frac{1}{10^\lambda} + \frac{1}{10^{\lambda+1}} + \frac{1}{10^{\lambda+2}} + \ldots = \frac{10}{9}\,\frac{1}{10^\lambda}.$$

Il faudrait doubler la probabilité, si l'on regarde comme favorable le cas où il y a au moins λ zéros *ou* λ chiffres 9.

La série (10) est donc identique à la série (2); elle est conververgente dans le cas où la fonction λ appartient au type décimal convergent. La probabilité, pour qu'un nombre ω appartienne à l'ensemble E (c'est-à-dire soit tel que son approximation asymptotique par les nombres décimaux soit supérieure à λ), est donc égale à zéro.

Si l'entier λ fonction de l'entier n est tel que la série (2) soit divergente, la série (10) est également divergente et la probabilité pour que le cas favorable se produise une infinité de fois est égale à 1. Ceci revient à dire que la probabilité pour que l'approximation asymptotique d'un nombre ω soit supérieure à λ est maintenant égale à 1.

On peut tirer de là une conséquence intéressante, tout à fait analogue au théorème que j'ai démontré à propos des fractions continues dans les Mémoires cités.

Soient λ_1 et λ_2 deux fonctions de n (λ_1 sera supposé asymptotiquement inférieur à λ_2; λ_1 et λ_2 sont des nombres entiers non décroissants); nous dirons que l'approximation asymptotique d'un nombre ω par les nombres rationnels est comprise entre λ_1 et λ_2 si, la fonction $\mu(n)$ étant définie comme plus haut, il existe un entier m tel que l'inégalité

$$n > m \tag{12}$$

entraîne

$$\mu(n) < \lambda_2(n) \tag{13}$$

et si, d'autre part, on a, pour une infinité de valeurs de n,

$$\mu(n) \geqq \lambda_1(n). \tag{14}$$

Considérons les deux séries

$$\sum \frac{1}{10^{\lambda_1(n)}}, \tag{15}$$

$$\sum \frac{1}{10^{\lambda_2(n)}}. \tag{16}$$

Si ces deux séries sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes, *la probabilité* pour que l'approximation asymptotique de ω par les nombres décimaux soit comprise entre λ_1 et λ_2 *est égale à zéro*. *Cette probabilité est*, au contraire, *égale à un*, si la série (15) est divergente et la série (16) convergente. On voit donc que, si étroite que puisse paraître la différence de croissance entre les séries convergentes et les séries divergentes, c'est cependant dans cet intervalle que se range un nombre pris au hasard ω, avec une probabilité égale à l'unité. D'une manière précise, si lentement que croisse la fonction $\varphi(n)$, on peut trouver une série divergente à termes positifs

$$\Sigma p_n, \tag{17}$$

telle que la série

$$\sum \frac{p_n}{\varphi(n)} \tag{18}$$

soit convergente.

On pourra, d'autre part, choisir λ_1 tel que la série (15) soit divergente, mais moins divergente que la série (17), et la série (16) convergente, mais moins convergente que la série (18); on aura, par suite,

$$10^{\lambda_2-\lambda_1} < \varphi(n), \tag{19}$$

c'est-à-dire

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\log 10 < \log\varphi(n). \tag{20}$$

La différence entre λ_2 et λ_1 est donc une fonction croissante, mais qui a pu être choisie croissant aussi lentement que l'on veut. Quelque lente que soit la croissance de $\varphi(n)$, du moment que la série (15) est divergente et la série (16) convergente, la probabilité est *un* pour qu'un nombre ω soit tel que la fonction μ correspondante vérifie l'inégalité (14) pour une infinité de valeurs de n, tandis que l'inégalité (13) est vérifiée sous la condition (12).

A toute fraction décimale illimitée ω, on peut faire correspondre une fonction croissante $n(\sigma)$ définie pour toute valeur entière positive de σ, comme étant la plus petite valeur de n telle que, parmi les n premiers chiffres décimaux de ω, figurent σ zéros consécutifs (qui sont nécessairement les derniers de ces n premiers chiffres, sinon n devait être pris plus petit). Si le nombre ω est tel qu'il ne renferme aucun groupe de plus de $\sigma' - 1$ zéros consécutifs, la fonction $n(\sigma)$ devient infini pour $\sigma \geqq \sigma'$; la probabilité pour qu'il en soit ainsi est égale à zéro. Dans le cas contraire, la fonction $n(\sigma)$ croit indéfiniment avec σ puisque on a $n \geqq \sigma$; dans le cas d'un nombre décimal, on a $n = \sigma + h$ (h étant une constante); la fonction inverse $\sigma(n)$ est donc une fonction non décroissante, qui augmente indéfiniment avec n. On peut, dans les définitions (13) et (14) données plus haut, remplacer $p(n)$ par $\sigma(n)$.

II. — Les ensembles décimaux de l'espèce (B) et de l'espèce (C).

Les ensembles de l'espèce (A) étaient définis dans l'intervalle

(21) $$0 < x < 1;$$

pour les ensembles de l'espèce (B), il nous sera plus commode de considérer l'intervalle

(22) $$0,1 < x < 1.$$

A tout nombre entier positif n, nous pouvons faire correspondre un nombre décimal appartenant à l'intervalle (22) et obtenu en divisant ce nombre entier par une puissance de 10 égale au nombre de ces chiffres. Par exemple, à 17 correspondra 0,17, à 3452 correspondra 0,3452, à 345200 correspondra 0,345200. Nous considérerons 0,3452 et 0,345200 comme des nombres décimaux distincts; le premier a 4 chiffres décimaux, le second en a 6. Nous attacherons à 0,3452 l'intervalle

(23) $$0,3451 < x < 0,3453$$

et à 0,345200 l'intervalle

(24) $$0,345199 < x < 0,345201.$$

Un ensemble décimal de l'espèce (B) est défini par une suite illimitée S d'entiers croissants, ou plutôt par les intervalles tels que (23) ou (24), qui sont attachés aux nombres décimaux correspondant à ces entiers; un point appartient à l'ensemble s'il appartient à une infinité de tels intervalles.

On peut dire aussi qu'un nombre décimal ω appartient à l'ensemble si, parmi les nombres entiers que l'on obtient successivement, en écrivant à la suite les uns des autres les chiffres décimaux de ω, dans leur ordre naturel, une infinité appartiennent à la suite S. Par exemple, pour le nombre $\pi - 3 = 0,14159265\ldots$, ces entiers sont 1, 14, 141, 1415, 14159, 141592, ...

Soient

$$n_1 < n_2 < n_3 \ldots < n_p < n_{p+1} < \ldots, \tag{25}$$

les entiers croissants qui composent la suite S; cette suite sera dite du type convergent si la série

$$\sum \frac{1}{n_p} \tag{26}$$

est convergente, et du type divergent si cette série est divergente. Soit α_h le nombre des n_p satisfaisant à la condition

$$10^{h-1} \leqq n_p < 10^h. \tag{27}$$

Les indices p correspondants vérifient l'inégalité

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{h-1} < p < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h$$

et la somme des termes correspondants de la série (26) est, par suite, comprise entre $\frac{\alpha_h}{10^{h-1}}$ et $\frac{\alpha_h}{10^h}$.

On en conclut immédiatement que la série (26) est convergente ou divergente en même temps que la série

$$\sum \frac{\alpha_h}{10^h}. \tag{28}$$

Le nombre de tous les entiers qui peuvent vérifier l'inégalité (27) est 9.10^{h-1}; la probabilité pour que l'un d'eux, pris au hasard, soit l'un des n_p est donc

$$v_h = \frac{\alpha_h}{9.10^{h-1}}. \tag{29}$$

La série

$$\Sigma p_h \tag{30}$$

est donc convergente ou divergente en même temps que la série (26).

Si donc des entiers successifs de 1, 2, 3, ..., h, ... chiffres étant pris au hasard, on convient de dire, pour chacun d'eux, que le cas favorable est celui où il coïncide avec l'un des n_p, la probabilité pour que le cas favorable se produise une infinité de fois sera zéro dans le cas de la convergence et l'unité dans le cas de la divergence. Ceci suppose les entiers successifs indépendants; mais il en est de même dans le cas de la convergence, lorsqu'ils sont dérivés d'un certain nombre irrationnel, c'est-à-dire lorsque chacun d'eux s'obtient en écrivant à la droite du précédent un chiffre pris au hasard; dans le cas de la divergence, si la suite d'entiers donnés est spéciale, il n'en est pas de même. Il est nécessaire d'introduire la notion de convergence ou de divergence par intervalles, correspondant à la notion de densité. On dira que la suite des n_p est asymptotiquement homogène, si les séries déduites des séries (26) ou (28), en ne conservant que les termes correspondant à un intervalle donné quelconque $\alpha\beta$ intérieur à l'intervalle fondamental (22) convergent ou divergent *de la même manière* que ces séries (26) ou (28). *Nous réservons le nom d'ensembles de l'espèce* (B) *aux ensembles pour lesquels la suite des n_p est asymptotiquement homogène;* sinon ils seront dits de l'espèce (C). Certains ensembles de l'espèce (C) peuvent être considérés comme sommes d'ensembles partiels dont chacun est de l'espèce (B); ceux qui ne le peuvent pas appartiennent proprement à l'espèce (C).

Les ensembles de l'espèce (A) sont un cas particulier des ensembles de l'espèce (B); les nombres n_p de $h+\mu$ chiffres sont formés de tous les nombres de h chiffres à la droite desquels on a inscrit μ zéros, μ étant une fonction non décroissante de h. L'homogénéité est donc ici aussi grande que possible, sous réserve de l'ordre dans lequel on écrit les nombres de h chiffres; c'est là un point sur lequel nous reviendrons.

Comme exemple d'ensembles de l'espèce (B), on peut citer ceux que l'on obtient en prenant des nombres n_p dans lesquels la fréquence de l'un des chiffres, par exemple du chiffre 7, est constamment supérieure à une fraction supérieure à $\frac{1}{10}$ ou constamment inférieure à une fraction inférieure à $\frac{1}{10}$. Supposons, pour fixer les idées, que la fréquence du chiffre 7 soit inférieure à $\frac{99}{1000}$. Cela signifie que, pour un nombre de k chiffres, le nombre des chiffres 7 est inférieur à $\frac{99k}{1000}$. Si l'on prend $k = 1000$, on voit que les nombres de 1000 chiffres peuvent renfermer 99 chiffres 7, de sorte que leurs 99 premiers chiffres peuvent être pris *d'une manière entièrement arbitraire;* cette remarque est utile pour l'étude de l'homogénéité de l'ensemble.

On obtient aussi des ensembles de l'espèce (B) en prenant, au contraire, les nombres n_p dans lesquels les 10 chiffres décimaux figurent tous exactement le même nombre de fois, à une unité près. En d'autres termes, la différence entre le nombre de chiffres 3, par exemple, et le nombre de chiffres 7 est égale à 0, à $+1$ ou à -1.

Les ensembles de l'espèce (B) peuvent être classés d'après le mode de croissance de n_p, mode arbitraire sous réserve de la convergence de la série (26). On aura des valeurs régulières de n_p en prenant les critères de convergences classiques, par exemple :

$$n_p = \mathrm{E}(p^{1+\alpha}) \tag{31}$$

$$n_p = \mathrm{E}[p(\log p)^{1+\alpha}] \tag{32}$$

$$n_p = \mathrm{E}[p \log p(\log_2 p)^{1+\alpha}], \tag{33}$$

$\mathrm{E}(n)$ désignant la partie entière de n et α un nombre *positif* quelconque. Si α était négatif, on aurait des suites du type divergent.

III. — L'APPROXIMATION DES NOMBRES PAR LES NOMBRES DÉCIMAUX.

Les nombres décimaux compris entre 0 et 1 peuvent être rangés en série simple, d'après la règle suivante : un nombre entier n de p chiffres étant donné, le nombre correspondant est égal à $\frac{n}{10^p}$ si n ne se termine pas par un zéro, et à $\frac{n}{10^{p+h}}$ si n se termine par h zéros. Par exemple, à 34507 correspond 0,34507, et à 245000 correspond 0,000245.

Étant donnée une fraction décimale illimitée comprise entre 0 et 1, par exemple

$$\alpha = \pi - 3 = 0,14159265\ldots, \tag{34}$$

les nombres décimaux approchés par défaut sont

$$(35)\qquad \begin{cases} n_1 &= 0,1 \\ n_{14} &= 0,14 \\ n_{141} &= 0,141 \\ n_{1415} &= 0,1415. \end{cases}$$

D'une manière générale, l'indice du nombre approché à $\frac{1}{10^m}$ près est la partie entière de $10^m\alpha$. Il y a exception lorsque cette partie entière se termine par un zéro ou par plusieurs zéros; si la partie entière de $10^m\alpha$ se termine par h zéros, le nombre u_n, dont l'indice n est la partie entière de $10^{m-h}\alpha$, est approché à $\frac{1}{10^m}$ près.

Par exemple, pour le nombre

$$(36)\qquad \beta = \pi - 3,000092 = 0,14150065\ldots,$$

le nombre u_{1415} est approché à $\frac{1}{10^4}$, à $\frac{1}{10^5}$ et à $\frac{1}{10^6}$ près.

Dans le cas où la virgule est suivie de h zéros, par exemple pour

$$(37)\qquad \gamma = \frac{\pi}{10^{h+1}} = 0,00\ldots03141592\ldots,$$

l'indice du nombre approché à 10^{-n} près est la partie entière de $10^{n+h}\lambda$.

On déduit aisément de là, étant donné un nombre α, l'étude de la fonction qui, pour toutes les valeurs de la variable continue t, est égale au plus petit indice n tel que l'on ait

$$(38)\qquad 0 < \alpha - u_n < \frac{1}{t}.$$

On posera

$$x = \log_{10} t \qquad \text{et} \qquad y = \log_{10} n.$$

Pour $t = 10^m$, soit $x = m$, on a, si α est compris entre $0,1$ et 1,

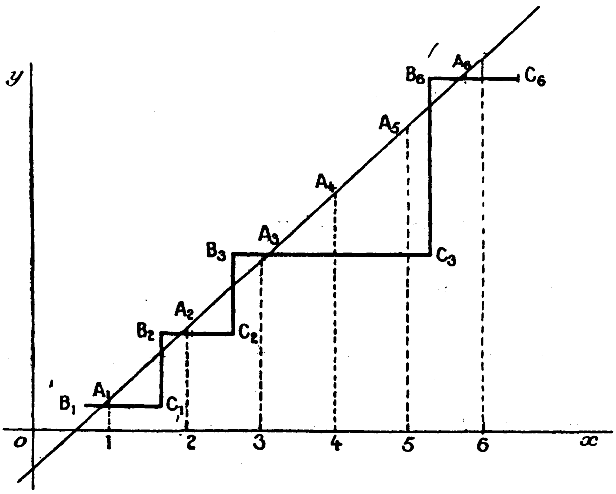
$$n = E(10^m\alpha) = 10^m\alpha - \theta \qquad 0 < \theta < 1,$$
$$y = \log n = \log\alpha + m + \log\left(1 - \frac{\theta}{10^m\alpha}\right),$$

c'est-à-dire que la courbe se compose de traits horizontaux B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, ... situés respectivement au-dessous des points A_1,

A_2, A_3, ... dont les coordonnées sont

$$(A_m) \qquad x = m, \qquad y = \log \alpha + m,$$

la distance du point A_m à la droite $B_m\,C_m$ étant $\log\left(1 + \frac{\theta}{10^m \alpha}\right)$, c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{1}{10^m}$. La position des ordonnées B_2C_1, B_3C_2, ..., par lesquelles on passe d'un trait horizontal au suivant, dépend de la valeur des chiffres successifs de α. Dans le cas où il y a plusieurs zéros consécutifs, le trait horizontal correspondant au dernier chiffre significatif qui précède les zéros se prolonge au moins jusqu'à l'ordonnée qui correspond au rang du dernier zéro. Par exemple, la figure correspond à un nombre α



pour lequel les quatrième et cinquième chiffres décimaux sont des zéros.

On peut utiliser cette représentation géométrique pour la définition des ensembles de mesure nulle de l'espèce (A); je n'y insiste pas, mon but actuel étant l'étude de l'approximation des nombres α les plus généraux (c'est-à-dire ne renfermant pas asymptotiquement un nombre exceptionnel de zéros consécutifs). Pour un tel nombre, le nombre décimal u_n, dont l'indice est la partie entière de $10^m\alpha$, donne une erreur $\frac{1}{t}$ qui est, en général, comprise entre $\frac{1}{10^m}$ et $\frac{1}{10^{m+1}}$. L'indice n du nombre u_n qui vérifie les inégalités (38) vérifie donc, en général, les inégalités

$$(39) \qquad t\alpha < n,$$

$$(40) \qquad n < 10t\alpha.$$

Si le nombre α ne renferme pas de zéros, les inégalités (39) et (40) sont toujours vérifiées ; s'il renferme des zéros, l'inégalité (40) subsiste toujours ; mais, pour certaines valeurs de t, l'inégalité (39) ne subsiste pas.

L'inégalité (40), combinée avec (38), donne

$$(41) \qquad 0 < \alpha - u_n < \frac{10\alpha}{n}.$$

Étant donné un nombre *quelconque* α, il existe une infinité d'entiers n donnant lieu aux inégalités (41).

La série

$$(42) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10\alpha}{n}$$

est divergente ; il est évident qu'il n'est pas possible de définir les u_n de telle manière que, pour tout nombre α, on ait les inégalités

$$(43) \qquad 0 < \alpha - u_n < \varphi(n),$$

la série

$$(44) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$$

étant convergente. Mais on peut se demander s'il est possible de prendre pour $\varphi(n)$ le terme général d'une série divergente quelconque à termes positifs, c'est-à-dire d'une série dont la divergence est plus lente que celle de la série (42) ; de prendre, par exemple,

$$\varphi(n) = \frac{1}{n \log n},$$

ou encore

$$\varphi(n) = \frac{1}{n \log n \log_2 n}.$$

Ceci exige, bien entendu, qu'on modifie les conventions que nous avons faites pour le numérotage des u_n.

Si la série (44) est divergente, on peut trouver une infinité de groupes successifs de termes dont la somme soit supérieure à 10; soit, par exemple,

$$(45) \qquad \sum_{n=h}^{n=k} \varphi(n) > 10.$$

Considérons les valeurs de n satisfaisant à cette condition, et recouvrons l'intervalle 0 — 1 avec des intervalles consécutifs égaux à $\frac{\varphi(n)}{10}$. L'étendue de l'un quelconque de ces intervalles est comprise entre deux puissances consécutives de 10, soit

$$(46) \qquad \frac{1}{10^{p+1}} < \frac{\varphi(n)}{10} < \frac{1}{10^p}.$$

Il y a donc un nombre décimal $\frac{A}{10^{p+1}}$, A étant un entier, compris dans cet intervalle; c'est ce nombre que nous désignerons par u_n, et nous lui attacherons l'invervalle qui a ce point pour milieu et qui a pour dimension $\varphi(n)$. Les intervalles assignés ainsi aux nombres u_n dont l'indice est compris entre h et k recouvrent complètement l'intervalle 0 — 1; tout point α appartient donc à l'un au moins de ces intervalles ([1]); d'où l'existence d'un nombre n vérifiant l'inégalité (43) et compris entre h et k. Afin de numéroter tous les nombres décimaux, nous assignerons dans l'ordre naturel les numéros supérieurs à k aux nombres qui se trouvent ne pas être encore numérotés et dont le nombre de chiffres décimaux ne dépasse pas celui des nombres déjà numérotés; on épuisera ainsi les numéros jusqu'à un certain rang h', à partir duquel on prendra dans la série divergente un nombre suffisant de termes pour vérifier l'inégalité (45) (en y remplaçant h par h' et k par k'); et l'on opérera sur ces termes comme sur les précédents, et ainsi indéfiniment; il y aura donc pour tout α une infinité de valeurs de n vérifiant l'inégalité (43).

([1]) Nous supposons $\varphi(n)$ décroissant avec n; tout point α appartient alors à plusieurs intervalles, et l'on a non seulement l'inégalité (43) (approximation à droite), mais l'inégalité analogue à gauche.

Ce résultat est théoriquement intéressant, mais il n'est pratiquement utilisable que si l'on a effectivement le moyen d'effectuer le numérotage pour toute valeur de n. Lorsque l'on donne effectivement la série $\varphi(n)$, il est généralement possible de donner des procédés pratiques plus simples que le procédé théorique qui vient d'être indiqué ; je ne m'y arrêterai pas.

Parmi les applications possibles de ces considérations, je signale un problème fort intéressant, signalé par M. Paul Lévy dans une séance de la Société mathématique de France, en mars 1919 : le problème du numérotage des fonctions d'une série orthogonale. Il est des cas où le numérotage le plus naturel apparaît immédiatement ; il en est d'autres où la question est plus difficile. On voit que le problème du numérotage naturel des nombres décimaux ne peut pas être résolu asymptotiquement d'une manière tout à fait satisfaisante, si l'on a en vue une approximation aussi bonne que possible, c'est-à-dire une série (44) dont la divergence soit aussi lente que possible. Quelque lente que soit cette divergence, on peut définir un numérotage correspondant, mais ce numérotage ou tout autre étant donné, on trouvera une série divergeant encore plus lentement et telle que le numérotage considéré ne fournisse pas, en général, asymptotiquement l'approximation correspondante.

IV. — Les ensembles réguliers de mesure nulle.

Nous savons que tout ensemble de mesure nulle est compris dans un ensemble régulier E, défini par une double infinité énumérable d'intervalles d'exclusion attachés à une infinité énumérable de points fondamentaux A_n. L'ensemble E_h étant défini par les intervalles $\sigma_{n,h}$, on a

$$\sigma_{n,h+1} \leqq \sigma_{n,h}. \tag{47}$$

Cette inégalité signifiant que $\sigma_{n,h+1}$ est intérieur à $\sigma_{n,h}$, on coïncide avec lui ; si l'on pose

$$e_h = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{n,h}, \tag{48}$$

les nombres e_p tendent vers zéro lorsque h augmente indéfiniment. L'ensemble E est, par définition, l'ensemble des points communs à tous les E_h [d'après (47), tous les points de E_{h+1} appartiennent à E_h].

Nous disons qu'un ensemble régulier est *simple* lorsque on a

$$(49) \qquad \sigma_{n,h} = \sigma_{n,1} \quad \text{si} \quad h \leqq n$$

et

$$(50) \qquad \sigma_{n,h} = 0 \quad \text{si} \quad h > n.$$

La convergence de la série e_1 entraîne alors le fait que e_n tend vers zéro. A toute série [1] convergente simple e_1 correspond, d'après les égalités (49) et (50), un ensemble régulier simple que nous appellerons (e_1), tandis que E_1 désigne l'ensemble des points intérieurs à l'ensemble des intervalles e_1. Il est aisé de voir que l'ensemble (e_1) comprend tous les points de l'ensemble régulier E, sauf peut-être les points fondamentaux. Soit, en effet, α un point de E distinct de A_1 ; ce point étant distinct de A_1, il existe un nombre h assez grand pour que α n'appartienne pas à $\sigma_{1,h}$; comme il appartient à E_h, il appartient à $\sigma_{q,h}$, q étant différent de 1 ; il appartient donc à $\sigma_{q,1}$. Donc l'ensemble obtenu en retranchant de E_1 l'intervalle $\sigma_{1,1}$ comprend tous les points de E_1, sauf peut-être A_1, et par suite tous les points de E, sauf peut-être A_1. De même, l'ensemble obtenu en retranchant de E_1 les intervalles $\sigma_{1,1}$, $\sigma_{2,1}$, ..., $\sigma_{h,1}$ comprend tous les points de E, sauf peut-être A_1, A_2, ..., A_n. Donc (e_1) comprend tous les points de E, sauf peut-être les points fondamentaux. Il en est de même, naturellement, de (e_2), (e_3), ..., (e_h), ... Inversement, tout point qui appartient à tous les (e_n) appartient à tous les E_h, et par suite à E. L'ensemble E peut donc être défini, aux points fondamentaux près, comme l'ensemble des points communs aux ensembles réguliers simples (e_1), (e_2), ..., (e_h), ... Appelons (e) cet ensemble ; ceux des points fondamentaux de E qui n'appartiennent pas à (e) seront dits *essentiels*. Lorsque aucun point fondamental n'est essentiel, c'est-à-dire lorsque tous les points fondamentaux de E appartiennent à (e), les ensembles E et (e) sont identiques. Dans ce cas, on peut supprimer un nombre fini quel-

---

[1] Il s'agit, bien entendu, d'une série d'intervalles, c'est-à-dire que chaque terme $\sigma_{n,1}$ de la série est un intervalle *donné* $a_{n,1}$, $b_{n,1}$ d'étendue $\sigma_{n,1}$.

conque de points fondamentaux et les intervalles correspondant dans les E_h sans modifier E. D'une manière générale, d'ailleurs, on peut supprimer un nombre fini quelconque de ceux des points fondamentaux qui ne sont pas essentiels, sans modifier E.

Dans le cas où les points fondamentaux sont essentiels, on obtient un ensemble régulier simple (f) comprenant E en rangeant dans un ordre quelconque, par exemple par ordre de grandeur décroissante, tous les intervalles qui définissent une infinité des E_h (que l'on choisira assez rares pour que la série Σe_h soit convergente), mais l'ensemble (f) est généralement beaucoup plus étendu que E : il comprend tous les points de (e_1), plus les points fondamentaux. Si, au contraire, on prend les intervalles $\sigma_{n,p}$ en prenant pour chaque valeur de n une seule valeur de p, fonction non décroissante de n, on obtient un ensemble régulier simple compris dans E, et l'on ne peut atteindre E comme limite que par une suite transfinie, vu la transfinité des modes de croissance possibles de la fonction $p(n)$.

De l'ensemble (f), on peut déduire des ensembles F_h ayant pour points fondamentaux des points de E choisis avec un arbitraire très large (si l'on admet la possibilité d'effectuer ainsi une infinité énumérable de choix arbitraires), mais la comparaison de ces ensembles avec l'ensemble E n'est pas sans présenter des difficultés. Il est clair qu'à un point quelconque α on peut attacher une suite indéfinie d'intervalles en prenant d'abord l'intervalle d'indice minimum de (f) renfermant α, puis celui d'indice minimum intérieur au précédent et renfermant α, et ainsi de suite. En ayant soin de choisir un premier point α dans le premier intervalle de (f), puis un second point dans le premier des intervalles non utilisés par le choix précédent, et ainsi de suite, on épuisera tous les intervalles de (f). Mais, même en laissant de côté la difficulté qui résulte de l'infinité de choix, on aperçoit immédiatement combien cette introduction de points fondamentaux arbitraires est artificielle. Dans la plupart des applications à la théorie des fonctions où se rencontrent des ensembles réguliers, les points fondamentaux sont nettement définis d'après la nature de la question, et l'on ne peut les modifier qu'en introduisant artificiellement des complications surajoutées.

Étant donné un ensemble régulier simple défini par une infinité d'intervalles formant une série convergente, les points de l'ensemble étant ceux qui appartiennent à une infinité d'intervalles, on peut, parmi ces intervalles, en choisir une infinité, tels que tout point de l'ensemble soit intérieur à l'un d'eux et reste intérieur à une infinité des intervalles non choisis. Mais l'application indéfinie de ce procédé ne conduit pas, en général, à une définition déterminée au moyen de points fondamentaux. Par exemple, pour les ensembles de l'espèce B, tels que celui de le page 105, il n'y a pas de raison naturelle pour regarder certains points comme fondamentaux plutôt que d'autres. La distinction entre les ensembles réguliers pour lesquels les points fondamentaux sont essentiels et ceux pour lesquels les points fondamentaux sont arbitraires mériterait d'être approfondie ; elle est essentielle dans certaines applications à la théorie des fonctions.

V. — La comparaison des ensembles de mesure nulle avec les ensembles décimaux et leur classification.

Dans le cas d'ensembles réguliers à points fondamentaux essentiels partout denses, j'ai indiqué (1) comment on pouvait, en établissant une correspondance biunivoque entre les points de deux ensembles énumérables denses, ramener l'étude des propriétés d'un tel ensemble et des ensembles réguliers correspondants au cas particulier où l'ensemble énumérable est déterminé d'une manière simple, coïncidant par exemple avec l'ensemble des nombres rationnels ou l'ensemble des nombres décimaux.

Je vais donc, ici, me borner au cas des ensembles réguliers simples, pour lesquels les points fondamentaux ne sont pas donnés. Nous allons faire voir qu'un tel ensemble peut être considéré comme compris entre deux ensembles décimaux de l'espèce (B) différant peu l'un de l'autre et, d'une manière précise, tels que les séries qui leur correspondent ne diffèrent que par un facteur constant (égal d'ailleurs à 100).

Par hypothèse, nous parlons d'un ensemble E défini par une infinité d'intervalles $a_p\, b_p$ dont les longueurs σ_p forment une série convergente ; les points de E sont les points intérieurs à une infinité de ces intervalles.

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, 1913, Mémoire cité.

La série $\Sigma\sigma_p$ étant convergente, elle a un nombre limité de termes satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{3}{10^{n+1}} < \sigma_p < \frac{3}{10^n}, \tag{51}$$

dans laquelle n désigne un nombre donné. Un tel intervalle σ_p est compris dans un intervalle

$$\frac{A_p - 1}{10^{n-1}}, \quad \frac{A_p + 1}{10^{n-1}}, \tag{52}$$

A étant un nombre entier et comprenant à son intérieur un intervalle

$$\frac{B_p - 1}{10^{n+1}}, \quad \frac{B_p + 1}{10^{n+1}}, \tag{53}$$

B_p étant également un nombre entier.

Si nous désignons par m_n le nombre des σ_p qui satisfont à l'inégalité (51), le nombre des intervalles (52) ou (53) sera également m_n. L'ensemble des intervalles (52) a comme somme

$$S = \sum \frac{10^{n-1}}{m_n} \tag{54}$$

et l'ensemble des intervalles (53) a comme somme

$$S' = \sum \frac{10^{n-1}}{m_n} = \frac{S}{100}. \tag{55}$$

La somme des σ_p est comprise entre $\frac{3S}{10}$ et $\frac{3S}{100}$.

La suite des A_p définit un ensemble décimal de l'espèce B ou de l'espèce (C), suivant qu'elle est ou non asymptotiquement homogène ; de même la suite des B_p ; l'ensemble E est compris dans le premier de ces ensembles et comprend le second ; les séries correspondantes S et S' sont identiques au point de vue de la convergence, de sorte que la classification, à ce point de vue, de tous les ensembles réguliers simples se ramène à celle que nous avons faite pour les ensembles décimaux. Nous dirons qu'ils appartiennent à l'espèce (B) ou à l'espèce (C), suivant que l'ensemble décimal correspondant appartient lui-même à l'espèce (B) ou à l'espèce (C). Cette classification revient à considérer, en définitive, la rapidité de la convergence de la série

$$\sigma = \Sigma \sigma_p \tag{56}$$

et des séries qui s'en déduisent lorsqu'on ne conserve que les σ_p correspondant à certains intervalles. Si toutes ces séries ont des convergences eomparables, l'ensemble de mesure nulle sera dit asymptotiquement homogène et sa *densité asymptotique* pourra être représentée par un symbole représentant la convergence de la série (56), c'est-à-dire le mode de décroissance de la fonction

$$\sigma - \sum_1^n \sigma_p = \theta(n). \tag{57}$$

Cette fonction $\theta(n)$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; son ordre de croissance est, par définition ([1]), opposé à celui de la fonction inverse $\frac{1}{\theta(n)} = \varphi(n)$; si $\varphi(n) = n^k$, l'ordre de $\varphi(n)$ est k et celui de $\theta(n)$ est $-k$.

Les ensembles que l'on peut définir au moyen de classes particulières de nombres, tels que les nombres rationnels, les nombres algébriques, présentent une homogénéité asymptotique analogue à celle des nombres décimaux. Au sujet de l'approximation d'un nombre arbitraire α par les nombres algébriques, par exemple, on pourrait répéter les remarques analogues à celles que nous avons faites pour les nombres décimaux.

Les nombres rationnels réels et positifs sont les racines des équations

$$qx - p = 0. \tag{56}$$

Donnons à p et q les valeurs satisfaisant aux inégalités

$$0 < p \leqq n, \tag{57}$$
$$0 < q \leqq n \tag{58}$$

et cherchons combien de valeurs de p et de q fournit pour l'équation (56) une racine comprise entre n_1 et n_2. Le nombre des valeurs possibles de p et de q est n^2; lorsque n est très grand,

([1]) Voir mes *Leçons sur les séries à termes positifs.*

le nombre des valeurs cherchées est asymptotiquement égal à

$$\frac{n^2}{2}(x_2 - x_1)$$

si $x_1 < x_2 < 1$ et à

$$\frac{n^2}{2x_1 x_2}(x_2 - x_1)$$

si $1 < x_1 < x_2$. Ceci revient à dire que la valeur asymptotique de la probabilité pour que l'équation (56) ait une racine comprise entre x et $x + dx$ est

$$\frac{dx}{2} \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1,$$

$$\frac{dx}{2x^2} \quad \text{pour} \quad 1 < x < \infty,$$

cette valeur asymptotique étant définie, bien entendu, par rapport aux inégalités (57) et (58); elle prendrait une autre valeur si l'on prenait un domaine d'une forme différente.

Le résultat serait le même si l'on adjoignait aux inégalités (57) et (58) la condition que p soit premier avec q.

Considérons maintenant une équation du second degré à coefficients entiers

$$rx^2 + 2qx + 2p = 0 \tag{59}$$

et considérons les inégalités

$$0 < p \leqq n, \tag{57}$$

$$0 < q \leqq n, \tag{58}$$

$$-n \leqq r \leqq n, \tag{60}$$

la condition pour que l'équation ait une racine et une seule comprise dans l'intervalle $x_2 - x_1$ se traduira par l'inégalité

$$(rx_1^2 + 2qx_1 + 2p)(rx_2^2 + 2qx_2 + 2p) < 0 \tag{61}$$

qui, dans l'espace p, q, r, représente le dièdre de deux plans dont l'angle est donné par la formule

$$\sin\varphi = \frac{2\,|x_1 - x_2|\,(x_1 x_2 + 2)}{(x_1^2 + 2)(x_2^2 + 2)}. \tag{62}$$

Lorsque φ est infiniment petit, la probabilité pour que l'équation (59) ait *deux* racines dans l'intervalle $x_2 - x_1$ est du troisième ordre, car cette probabilité correspond au volume compris entre la surface du cône

$$(63) \qquad q^2 - 2pr = 0$$

et deux plans tangents infiniment voisins à ce cône.

Pour étendre aux équations algébriques de degré n les considérations géométriques sur lesquelles nous nous sommes appuyés pour les équations des deux premiers degrés, il y aurait lieu de considérer dans l'espace à $n+1$ dimensions la représentation paramétrique du cône à deux dimensions décrit par le point représentatif des $n+1$ coefficients, lorsque l'équation a n racines égales et des développables successives qui s'en déduisent et correspondent aux cas de $n-1$, $n-2$, ..., 2 racines égales. Je signale en passant les avantages que présente l'introduction de ces figures géométriques dans l'étude des équations algébriques au point de vue de l'égalité des racines.

VI. — La valeur absolue de la classification asymptotique des ensembles de mesure nulle et ses applications a la théorie des fonctions.

La classification asymptotique qui vient d'être donnée pour les ensembles de mesure nulle repose sur leur définition au moyen d'un choix particulier d'intervalles ; on peut se demander si cette classification a une valeur absolue, c'est-à-dire si, étant donné un ensemble de mesure nulle défini au moyen d'intervalles satisfaisant à une certaine loi asymptotique, il n'est pas possible d'obtenir le même ensemble au moyen d'une loi asymptotique différente. L'étude complète de cette question paraît présenter des difficultés transfinies, si l'on veut y faire intervenir les modes de décroissance non comparables entre eux ; mais il est cependant possible de montrer que la classification asymptotique a effectivement une valeur absolue. D'une manière précise, nous allons prouver sur un exemple qu'*étant donné un ensemble de mesure nulle* E *bien déterminé et une série à termes positifs également bien déterminé, il est des cas où il n'est pas possible d'enfermer tous les points de* E *dans des intervalles asymptotiquement inférieurs à ceux de la série donnée.*

L'ensemble E sera donné, par exemple, sur l'intervalle $0 - 1$; la série à termes positifs donnée ayant pour terme général u_n, nous prouverons que, *quels que soient les nombres* v_n *satisfaisant à la condition*

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots < 1 \tag{64}$$

et tel de plus qu'il existe un entier m *tel que l'inégalité*

$$n > m \tag{65}$$

entraîne

$$v_n < u_n, \tag{66}$$

il n'est pas possible d'enfermer tous les points de E *dans des intervalles de dimensions* $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$.

Nous allons prendre pour E l'ensemble décimal d'espèce A défini par la condition que pour tout α faisant partie de E il arrive pour une infinité de valeurs de p que les chiffres décimaux, dont le rang est compris entre 10^p et $10^p + p^2$, sont tous des zéros [1]; et, d'autre part, nous allons prendre

$$u_n = \frac{1}{10^n}. \tag{67}$$

Nous allons démontrer d'abord qu'il n'est pas possible d'enfermer tous les points de E dans des intervalles v_n satisfaisant tous à l'inégalité (66).

En effet, étant donné un intervalle v_n satisfaisant à l'inégalité

$$v_n < \frac{1}{10^n}, \tag{68}$$

---

[1] En réalité, l'ensemble E que nous considérons est un cas particulier des ensembles de l'espèce (A); au lieu de $10^p + p^2$, nous pourrions considérer $10^p + \log p$, car ici nous portons notre attention seulement sur les groupes de chiffres 0 qui commencent à des rangs assignés d'avance, à savoir les rangs 10^p; nous devons donc considérer seulement les probabilités correspondantes et, pour que l'ensemble soit de mesure nulle, il suffit que la série de ces probabilités soit convergente, ce qui serait le cas, par exemple, pour la série

$$\sum \frac{1}{10^{\log p}} = \sum \frac{1}{p^{\log 10}}.$$

cet intervalle est compris à l'intérieur d'un intervalle décimal d'étendue $\frac{2}{10^n}$ dont les extrémités sont $\frac{A_n - 1}{10^n}$ et $\frac{A_n + 1}{10^n}$, A_n étant un nombre entier. Si donc tous les points de E sont intérieurs aux intervalles v_n, ils sont *a fortiori* intérieurs à ces intervalles décimaux. Il suffit donc de montrer que, étant donnée une suite quelconque d'entiers

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \tag{69}$$

tels que l'on ait $A_n < 10^n$, il y a des points de E extérieurs à tous les intervalles

$$\frac{A_n - 1}{10^n}, \quad \frac{A_n + 1}{10^n}. \tag{70}$$

Nous allons construire un nombre α appartenant à E et n'appartenant à aucun de ces intervalles. Pour qu'un nombre α appartienne à E, il suffit de prendre égaux à zéro ses chiffres décimaux de rangs 10 et 11, de rangs compris entre 100 et 104, entre 1000 et 1009, entre 10000 et 10016, et généralement entre 10^p et $10^p + p^2$, les autres chiffres étant arbitraires. Or, si l'on considère les intervalles (70) correspondant aux valeurs de $n \leqq 11$, il est manifestement possible de choisir les neuf premiers chiffres décimaux de α de manière qu'ils n'appartiennent à aucun de ces intervalles ; on choisira de même les chiffres décimaux dont le rang est compris entre 12 et 99, de manière que le nombre α n'appartienne à aucun des intervalles (70) pour $12 \leqq \alpha \leqq 104$, et ainsi de suite. Nous disposons de tous les chiffres décimaux dont le rang vérifie les inégalités

$$10^{p-1} + (p-1)^2 < q < 10^p \tag{71}$$

de manière que le nombre α n'appartienne à aucun des intervalles (70) dont le rang vérifie les inégalités

$$10^{p-1} + (p-1)^2 < n \leqq 10^p + p^2. \tag{72}$$

Posons, pour un instant :

$$10^{p-1} + (p-1)^2 = a,$$
$$10^p = b ;$$

l'ensemble des chiffres décimaux dont le rang q vérifie les inégalités (71) constitue un nombre N de $b - a - 1$ chiffres ; ce nombre est entièrement arbitraire, c'est-à-dire peut être choisi de 10^{b-a-1} manières différentes [1]. Pour que le nombre α correspondant puisse appartenir à l'intervalle (70) pour $n = a + 1$, il faudrait, tout au moins, que le premier des chiffres de N coïncidât avec le dernier chiffre de $A_{a+1} - 1$ ou avec le dernier chiffre de A_{a+1} ; les nombres N qui satisfont à cette condition sont au nombre de 2.10^{b-a-2} ; il y a de même 2.10^{b-a-3} nombres N tels que α puisse appartenir à l'intervalle (70) pour $n = a + 1$; il y en a deux tels que α puisse appartenir à l'intervalle (70) pour $n = b$; il y en a également deux au plus pour chacun des intervalles (70) dont le rang est compris entre b et $b + p^2$; en définitive, nous serons sûrs que α n'appartient à aucun des intervalles (70) pour n vérifiant les inégalités (72) si nous excluons pour N un nombre de valeurs égal à

$$2(10^{b-a-2} + 10^{b-a-3} + \ldots + 10 + 1) + 2^2,$$

nombre manifestement inférieur à 10^{b-a-1}, qui est le nombre des choix possibles pour N. Il sera donc possible de choisir N, d'une manière déterminée [2], et le même choix pourra être fait pour chaque valeur de p ; on définit donc un nombre α de E qui n'appartient à aucun des intervalles (70).

Supposons maintenant que l'inégalité (68) ne soit pas vérifiée pour toute valeur de n, mais seulement pour les valeurs vérifiant l'inégalité (65), on a de plus l'inégalité (64) ; la somme de tous les v_n est donc inférieure à $1 - h$, h étant une longueur déterminée ; l'un au moins des $n + 1$ intervalles qui subsistent sur l'intervalle $0 - 1$ lorsqu'on en exclut $v_1, v_2, \ldots, v_n$ est donc supérieur à $\frac{h}{n+1}$; quelque petit que soit h, on pourra prendre n assez grand pour que l'on ait

$$\text{(67)} \qquad \frac{h}{n+1} > \frac{1}{10^{n-1}};$$

si de plus n est pris assez grand pour vérifier l'inégalité (65), on

---

(1) Chacun des $b - a - 1$ chiffres peut, en effet, être pris de dix manières différentes (y compris zéro).

(2) On pourra prendre, par exemple, pour N le plus petit des nombres entiers parmi tous ceux qui sont possibles d'après les conditions imposées.

n'aura qu'à considérer, à la place de l'intervalle $0 - 1$, l'un des intervalles obtenus en excluant $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et dont l'étendue, d'après (67), est supérieure à $\frac{1}{10^{n-1}}$; on n'aura qu'à raisonner sur cet intervalle comme nous avons fait sur l'intervalle $0 - 1$.

Nous pouvons donc, étant donné un ensemble de mesure nulle E, compris dans l'intervalle $0 - 1$, convenir de dire que sa *mesure asymptotique* est inférieure ou égale à une série convergente donnée Σu_n de somme < 1, s'il est possible d'enfermer les points de E à l'intérieur d'intervalles respectivement égaux à u_n; au contraire, la mesure asymptotique de E sera dite supérieure ou égale à la série Σu_n s'il n'est pas possible d'enfermer tous les points de E dans des intervalles respectivement égaux aux u_n. Si une série Σv_n est telle que le rapport $\frac{v_n}{u_n}$ tend vers zéro, un ensemble dont la mesure asymptotique est *inférieure ou égale* à Σv_n aura, par définition, une mesure asymptotique *inférieure* à Σu_n. On définirait de même une mesure asymptotique *supérieure* à Σu_n comme une mesure *supérieure ou égale* à une série Σv_n telle que $\frac{v_n}{u_n}$ augmente indéfiniment avec n.

La notion de *mesure asymptotique* des ensembles de mesure nulle me paraît avoir, en théorie des fonctions, une importance au moins égale à l'importance de la notion de mesure nulle. On sait, qu'au point de vue des applications à la théorie des fonctions, les ensembles se divisent en deux grandes classes : les ensembles de mesure nulle et les ensembles de mesure non nulle; lorsque la mesure d'un ensemble n'est pas nulle, il importe généralement peu qu'elle ait telle ou telle valeur; de même que, lorsqu'un nombre variable ne devient ni nul ni infini, il importe peu qu'il soit compris entre a et A ou entre b et B.

Il y aurait intérêt à étudier les transformations ponctuelles les plus générales qui laissent invariante la propriété pour un ensemble d'être de mesure nulle (et par suite la propriété d'être de mesure non nulle); ces transformations laisseraient également invariante la mesure asymptotique.

Lorsqu'un ensemble de mesure nulle est défini par une infinité convergente d'intervalles $\Sigma\sigma_n$, telle que tout point de l'ensemble soit intérieur à une infinité des σ_n, on peut définir également la mesure asymptotique comme inférieure ou égale à la série $\Sigma\sigma_n$; il est alors inutile d'introduire la restriction analogue à $\Sigma u_n < 1$.

Dans la théorie de la mesure asymptotique, un rôle essentiel est joué par le théorème de Paul du Bois-Reymond sur les suites dénombrables de fonctions croissantes et les théorèmes qui s'y rattachent, sur les types de convergence et de divergence et la transfinité de ces types. En particulier, si une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle sont tels que la mesure de chacun d'eux E_k est comprise entre deux séries données, $\Sigma u_n^{(k)}$ et $\Sigma v_n^{(k)}$, on peut construire deux séries Σu_n et Σv_n telles que la mesure asymptotique de chacun des E_k soit comprise entre ces deux séries, et la mesure de la somme des E_k est également comprise entre Σu_n et Σv_n..

Un ensemble énumérable a une mesure asymptotique inférieure à toute série donnée à l'avance ; la réciproque me paraît exacte, mais je n'en possède pas de démonstration entièrement satisfaisante.

A la théorie de la mesure asymptotique, on doit rattacher celle de la convergence asymptotiquement uniforme d'une série de fonctions, ou d'une suite convergente. Nous dirons qu'une série de fonctions positives

$$\Sigma f_n(x) \tag{68}$$

a une convergence asymptotiquement uniforme dans un intervalle, s'il existe une série convergente à termes positifs

$$\Sigma u_n \tag{69}$$

telle que, quel que soit x_0 dans les intervalles, on ait

$$\lim \frac{f_n(x_0)}{u_n} = 0. \tag{70}$$

Si l'on prend, par exemple,

$$f_n(x) = \frac{2x[n(n+1)x^2 - 1]}{[1 + n^2x^2][1 + (n+1)^2x^2]},$$

la série (68) a une convergence asymptotiquement uniforme dans tout l'intervalle, car si l'on prend

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

on a bien, pour toute valeur de x_0, la relation (70), bien que la série ne soit pas uniformément convergente dans un intervalle comprenant le point $x = 0$.

Lorsqu'une série a une convergence asymptotiquement uniforme, on peut, évidemment, en groupant ses termes en une infinité de groupes renfermant chacun un nombre fini de termes, arriver à prendre pour la série (69) toute série convergente donnée à l'avance.

On peut « définir » des séries convergentes dont la convergence n'est pas asymptotiquement uniforme. Soit, par exemple, α un nombre irrationnel et

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}$$

son développement en fraction continue. Si ce développement est tel que la série

$$\sum \frac{1}{a_n} \tag{71}$$

soit convergente, nous prendrons

$$f_n(\alpha) = \frac{1}{a_n}; \tag{72}$$

si la série (71) est divergente, nous prendrons

$$f_n(\alpha) = \frac{1}{n^2 a_n}. \tag{73}$$

Il est clair que, quel que soit x compris entre 0 et 1, la série

$$\Sigma f_n(\alpha) \tag{74}$$

est convergente et, d'autre part, il est évident que, étant donnée une série à convergence aussi lente que l'on veut, on peut définir un α tel que la série (74) correspondante converge plus lentement que la série donnée.

Mais les séries ainsi « définies » ne sont pas « bien définies » au sens que l'on doit donner à ce terme lorsqu'on se place au point de vue des définitions constructives. La question reste donc ouverte de savoir si, à ce point de vue, il est ou non possible de construire des séries convergentes de fonctions qui ne soient pas à convergence asymptotiquement uniforme.