

BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

**Sur les polynômes se rattachant à l'équation
différentielle $y'' = 6y^2 + x$**

Bulletin de la S. M. F., tome 45 (1917), p. 150-153

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__150_0

© Bulletin de la S. M. F., 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR DES POLYNÔMES
SE RATTACHANT A L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y'' = 6y^2 + x$;

PAR M. PAUL APPELL.

I. On connaît les belles recherches de M. Painlevé ⁽¹⁾ et de ses disciples ⁽²⁾ sur les équations différentielles à points critiques fixes. Dans l'intégration par séries de la plus simple d'entre elles,

$$(1) \quad y'' = 6y^2 + x,$$

interviennent d'une façon particulière les multiples de 5, comme l'a montré M. Boutroux ⁽³⁾ en étudiant deux solutions particulières remarquables.

II. M. Painlevé a étudié le premier (*loc. cit.* : *Bulletin de la Société mathématique*) une solution de la forme

$$(2) \quad y = \frac{1}{(x - x_0)^2} - \frac{x_0}{10}(x - x_0)^2 - \frac{1}{6}(x - x_0)^3 + h(x - x_0)^4 + \dots,$$

où x_0 est une constante quelconque; il a montré que le coefficient h est arbitraire. Les coefficients suivants sont des polynômes en x_0 et h , sur lesquels je voudrais présenter quelques remarques. Je me borne ici au cas où $x_0 = 0$, laissant le cas général pour une autre étude. Il s'agit alors d'une solution de la forme

$$(3) \quad y = \frac{1}{x^2} + x^3(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1} + \dots).$$

La substitution dans l'équation donne les premiers coefficients, a_2 étant arbitraire ($a_2 = h$). D'une façon générale, on a la formule

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVIII, 1900, p. 201-261, et *Acta mathematica*, t. XXV, 1902, p. 1-85.

⁽²⁾ Nous renverrons pour la bibliographie à l'intéressante Thèse de M. Garnier *Sur des équations différentielles de troisième ordre* Paris, Gauthier-Villars; 1911.

⁽³⁾ *Recherches sur les transcendentes de M. Painlevé (Annales de l'École Normale supérieure, 3^e série, t. XXX, 1913, p. 336-340).*

récurrente

$$(4) \quad (n-2)(n+5)a_n = 6[2a_1a_{n-5} + 2a_2a_{n-6} + \dots],$$

où le dernier terme entre crochets est $2a_{\frac{n-5}{2}}a_{\frac{n-3}{2}}$ quand n est impair et $a_{\frac{n-4}{2}}$ quand n est pair.

L'application répétée de la formule (4) fournit les coefficients successifs; nous donnons ci-dessous le Tableau des premiers d'entre eux, rangés en cinq colonnes verticales; dans la première figurent les coefficients a_n pour lesquels $n \equiv 1 \pmod{5}$; dans la deuxième les coefficients pour lesquels $n \equiv 2 \pmod{5}$, etc., dans la cinquième les coefficients pour lesquels $n \equiv 0 \pmod{5}$.

$n = 5k + 1.$	$n = 5k + 2.$	$n = 5k + 3.$	$n = 5k + 4.$	$n = 5k.$
$a_1 = -\frac{1}{2.3}$	$a_2 = h$	$a_3 = 0$	$a_4 = 0$	$a_5 = 0$
$a_6 = \frac{1}{2^3.3.11}$	$a_7 = -\frac{h}{2.3.5}$	$a_8 = \frac{h^2}{13}$	$a_9 = 0$	$a_{10} = 0$
$a_{11} = -\frac{1}{2^6.3^3.11}$	$a_{12} = \frac{37h}{2^2.3.5^2.11}$	$a_{13} = -\frac{2h^2}{5.11.13}$	$a_{14} = \frac{h^3}{13.19}$	$a_{15} = 0$
$a_{16} = \frac{5}{2^4.3^4.7^2.11^2}$	$a_{17} = -\frac{ph}{q}$	$a_{18} = \frac{p'h^2}{q'}$	$a_{19} = -\frac{p''h^3}{q''}$	$a_{20} = \frac{3h^4}{5.13^2.19}$

Les coefficients $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}$ sont de même des constantes numériques multipliées respectivement par h^0, h, h^2, h^3, h^4 . En général le coefficient a_n est un polynome en h . Si

$$n \equiv p \pmod{5}; \quad p = 1, 2, 3, 4, 5,$$

le coefficient a_n contient uniquement des puissances de h de la forme h^{5k+p-1} ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$); a_n peut donc s'écrire

$$(5) \quad a_n = h^{p-1}P_n(h^5),$$

$P_n(h^5)$ désignant un polynome contenant uniquement des puissances de h^5 et ayant tous ses coefficients du signe de $(-1)^n$.

On démontre cette proposition en montrant que, si la propriété est vraie pour $a_{n-5}, a_{n-10}, a_{n-15}, \dots$, elle l'est aussi pour a_n . Comme elle est vraie, d'après le Tableau, pour les premiers coefficients, elle le sera alors pour tous.

Dans la formule récurrente (4), en supposant $n \equiv p \pmod{5}$, on voit que tous les termes du second membre $a_1 a_{n-5}$, $a_2 a_{n-6}$, ... sont de la forme $h^{p-1} P(h^5)$ d'après la formule (5) supposée vraie pour a_1 et a_{n-5} , a_2 et a_{n-6} , a_3 et a_{n-7} , ...; cette forme est donc vraie pour a_n .

Soit ω une racine cinquième de l'unité : si l'on remplace x par ωx et h par ωh , y est remplacée par $\omega^3 y$. On peut vérifier directement, sur l'équation différentielle, que le changement de x en ωx , et de y en $\omega^3 y$ n'altère pas l'équation.

Si l'on donne à h la valeur zéro, $h=0$, le développement devient (voir BOUTROUX, *loc. cit.*)

$$Y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{264}x^8 - \frac{1}{19008}x^{13} + \frac{5}{7683984}x^{18} + \dots,$$

où ne figurent que des puissances de x de la forme $5k - 2$.

On peut aussi calculer directement les coefficients de Y , en cherchant une solution de la forme

$$Y = \frac{1}{x^2} + x^3 \varphi(x^5);$$

puis les premiers coefficients a_n pour lesquels $n = 5k + 2$, en remarquant que la fonction $Y_1 = \left(\frac{\partial Y}{\partial h}\right)_0$, détermination de $\frac{\partial Y}{\partial h}$ pour $h=0$, vérifie l'équation

$$Y_1'' = 12 Y Y_1.$$

Le cas où x_0 est différent de zéro, se traite de la même façon en faisant d'abord $x - x_0 = t$, ce qui donne

$$y'' = 6y^2 + t + x_0,$$

les dérivées étant prises par rapport à t .

III. La seconde équation de M. Painlevé

$$(6) \quad y'' = 2y^3 + xy + \alpha$$

conduit à des résultats de même nature, le nombre 3 jouant un rôle analogue à celui du nombre 5 pour l'équation (1). C'est ce qu'on voit *a priori* en remarquant que, si ω est une racine cubique de l'unité, l'équation (6) ne change pas si l'on remplace x par ωx et y par $\omega^2 y$.

On voit, en particulier, que l'équation (6) admet une solution de la forme

$$y = \frac{1}{x} + x^2 F(x^3),$$

$F(x^3)$ étant une série entière en x^3 :

$$F(x^3) = a_0 + a_1 x^3 + a_2 x^6 + \dots$$

Un calcul facile donne, en substituant dans (6) et réduisant, la relation

$$\begin{aligned} 9x^6 F''(x^3) + 18x^3 F'(x^3) \\ = 4F(x^3) + 6x^3 F^2(x^3) + 2x^6 F^3(x^3) + x^3 F(x^3) + 1 + \alpha, \end{aligned}$$

qui, en posant $x^3 = z$, permet de calculer les coefficients de la série $F(z)$.
