

BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur un problème d'algèbre

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 26-30

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__26_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur un problème d'Algèbre; par M. LAGUERRE.

(Séance du 10 janvier 1877.)

1. En désignant par S_μ la somme des puissances d'ordre μ des racines, de l'équation de degré n , $f(x) = 0$, on peut se proposer de déterminer le polynôme $f(x)$ connaissant $S_1, S_2, \dots, S_{2n-1}$.

Comme on a ainsi n équations de condition pour déterminer les coefficients du polynôme, il est clair que le problème est généralement déterminé. Il peut se faire néanmoins qu'il y ait une infinité de solutions; car, si l'on satisfait à la question, ce qui, dans certains cas, sera évidemment possible, en prenant pour $f(x)$ un polynôme de *degré inférieur à n* , en désignant par $\varphi(x^2)$ un polynôme quelconque ne renfermant que des puissances paires de x , on y satisfera aussi en remplaçant $f(x)$ par $f(x) + \varphi(x^2)x^m$, les coefficients de $\varphi(x^2)$ et l'exposant m étant du reste arbitraires, pourvu que le degré de l'expression précédente soit égal à n .

2. Pour poser d'une façon plus précise le problème à résoudre, je l'énoncerai ainsi :

Déterminer un polynôme $f(x)$, de degré égal ou inférieur à n , jouissant de la propriété énoncée et tel, que $f(x)$ et $f(-x)$ n'aient aucun facteur commun.

Il est facile alors de démontrer que, si le problème a une solution, le polynôme $f(x)$ est parfaitement déterminé.

A cet effet, posons $f(-x) = \varphi(x)$; d'après ce que je viens de dire, la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ sera irréductible. Soient de plus $a, b, c, \dots$ les racines de l'équation $f(x) = 0$, on aura évidemment

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} &= \sum \frac{1}{x+a} - \sum \frac{1}{x-a} = \sum \frac{-2a}{x^2 - a^2} \\ &= -\frac{2S_1}{x^2} - \frac{2S_3}{x^4} - \dots - \frac{2S_{2n-1}}{x^{2n}} + \left(\frac{1}{x^{2n+2}} \right), \end{aligned}$$

l'expression $\left(\frac{1}{x^m} \right)$ désignant, en général, sans que je me préoccupe des valeurs des coefficients, une série développée suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ et commençant par un terme d'un degré au plus égal à $-m$.

En intégrant l'équation précédente entre les limites x et ∞ , il viendra

$$\log \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 2 \left[\frac{S_1}{x} + \frac{S_3}{3x^3} + \dots + \frac{S_{2n-1}}{(2n-1)x^{2n-1}} \right] + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right),$$

ou en posant, pour abréger,

$$W = \frac{S_1}{x} + \frac{S_3}{3x^3} + \dots + \frac{S_{2n-1}}{(2n-1)x^{2n-1}};$$

et en passant des logarithmes aux nombres,

$$(1) \quad e^{2W} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right).$$

3. La détermination du polynôme $f(x)$ est donc ramenée à la question suivante :

Déterminer une fraction rationnelle irréductible dont le dénominateur et le numérateur soient d'un degré au plus égal à n , et qui soit égale au développement de e^{2W} , en négligeant les termes d'un ordre supérieur à celui de $\frac{1}{x^{2n}}$. Il faut, en outre, qu'en désignant par $f(x)$ ce dénominateur, le numérateur de la fraction soit égal à $f(-x)$; mais, comme je le ferai voir, il n'y a pas à se préoccuper de cette condition, qui sera satisfaite d'elle-même si la première condition est remplie.

Je démontrerai d'abord qu'il ne peut exister qu'un seul polynôme $f(x)$ qui y satisfasse; en effet, si $f_1(x)$ était une autre solution, on aurait évidemment

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right),$$

d'où

$$\varphi(x)f_1(x) - f(x)\varphi_1(x) = f(x)f_1(x) \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right),$$

relation évidemment impossible, à moins que le premier membre ne soit nul; car c'est un polynôme entier en x , tandis que le second membre (s'il n'est pas nul) se développe suivant une série commençant par un terme en $\frac{1}{x}$, puisque chacun des polynômes $f(x)$ et $f_1(x)$ est d'un degré au plus égal à n .

La relation précédente ne peut donc avoir lieu que si l'on a

$$\varphi(x)f_1(x) - f(x)\varphi_1(x) = 0,$$

ou encore

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

et, si l'on suppose ces fractions irréductibles, $f_1(x)$ ne doit différer que par un facteur constant de $f(x)$.

Ce polynôme n'étant pas d'ailleurs, par hypothèse, divisible par x , on peut supposer que le terme constant qui y entre est égal à l'unité; il est alors complètement déterminé.

4. Cela posé, il est facile de prouver que, la fraction irréductible $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ayant été déterminée par la condition ci-dessus énoncée, $\varphi(x)$ est égal à $f(-x)$.

En effet, W ne renfermant que des puissances impaires de x , en changeant x en $-x$ dans l'équation (1), il viendra

$$e^{-2W} = e^{\frac{1}{2}W} = \frac{\varphi(-x)}{f(-x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right),$$

d'où, par une transformation facile,

$$e^{2W} = \frac{f(-x)}{\varphi(-x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right);$$

le polynôme $\varphi(-x)$, d'après ce que je viens d'établir, ne peut différer que par un facteur constant de $f(x)$; d'ailleurs, e^{2W} , pour $x = 0$, se réduit à l'unité; donc le premier terme de $\varphi(-x)$ est aussi l'unité et, par suite,

$$\varphi(-x) = f(x).$$

5. Le problème est donc entièrement ramené à trouver un polynôme $f(x)$, de degré au plus égal à n , et satisfaisant à l'équation (1); mais on peut supposer que $f(x)$ soit effectivement de degré n , en faisant abstraction de la condition imposée jusqu'ici, à savoir que $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont premiers entre eux.

Effectivement, si $f(x)$ était d'un degré $m < n$, il suffirait de multiplier les deux termes de la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ par un polynôme arbitraire de degré $(n - m)$ pour obtenir une fraction satisfaisant à la relation (1) et dont le dénominateur soit du degré n .

Nous poserons donc $f(x) = 1 + ax + bx^2 + \dots + lx^n$; $a, b, \dots, l$ désignant n coefficients indéterminés, et nous exprimerons que le produit $e^{2W} f(x)$ manque des termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^n}$; nous aurons ainsi, pour déterminer les n coefficients inconnus, n équations linéaires avec second membre.

Généralement, le déterminant de ces équations étant différent de zéro, elles fourniront pour les coefficients des valeurs bien déterminées; le polynôme $f(x)$ sera donc effectivement du degré n .

Si le déterminant est nul, il se peut que le problème n'ait pas de solution; s'il y en a une infinité, on déterminera l'un quelconque des polynômes $f(x)$ satisfaisant aux équations, et l'on en déduira le numérateur correspondant $\varphi(x)$; on réduira ensuite la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ à sa plus simple expression: le dénominateur de la fraction irréductible ainsi obtenue sera la solution cherchée, et son degré sera inférieur à n .

6. Il est clair que l'on peut remplacer l'expression e^{2W} par toute autre expression dont le développement coïnciderait avec elle jusqu'aux termes de l'ordre de $\frac{1}{x^{2n}}$ inclusivement.

Ainsi, si l'on développe en fraction continue l'expression $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m$, où m désigne un nombre quelconque, et si l'on forme la réduite dont le dénominateur $f(x)$ est de degré n , les racines de l'équation $f(x) = 0$ jouiront de la propriété que les sommes $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ soient toutes égales à m .

7. Les résultats obtenus dans cette Note peuvent s'énoncer ainsi :

Les coefficients d'un polynôme de degré n s'expriment rationnellement en fonction des fonctions symétriques $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ des racines de l'équation $f(x) = 0$. C'est ce qu'il est facile du reste de vérifier au moyen des formules de Newton, au moins pour de petites valeurs du nombre n .
