BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DENJOY

Sur les fonctions dérivées sommables

Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 161-248
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1915__43__161_0>

SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES SOMMABLES;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

Le présent article est extrait d'une étude assez vaste que ses dimensions m'ont empêché de publier dans un seul Recueil, et dont l'objet serait parfaitement défini par ce titre : *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse*. Cet Ouvrage était à peu près entièrement terminé au mois de juillet 1914. La première partie de mon Mémoire total doit constituer le deuxième fascicule du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* pour l'année 1915. Elle est consacrée à l'analyse de l'opération différentielle, en d'autres termes, aux propriétés des nombres dérivés des fonctions continues. C'est à ces pages du Journal de M. Jordan que j'entendrai inviter le lecteur à bien vouloir se reporter quand, au cours de cet article, je ferai usage de cette simple référence : « 1re Partie ».

La seconde partie de mon travail, l'étude du calcul inverse de la dérivation, comporte elle-même deux subdivisions d'inégale importance, ayant pour objets respectifs : l'une les opérations inverses les plus connues à ce jour, savoir l'intégration riemannienne et la sommation besgienne (indéfinies); l'autre la *totalisation*, celle-ci permettant d'obtenir la primitive de la fonction dérivée la plus générale. Les recherches développées ci-après constituent la première subdivision, consacrée principalement à l'étude de fonctions dérivées sommables, mais inintégrables dans tout intervalle. La dernière section de mes recherches relatives à ces questions paraîtra ailleurs (1).

Bien que la possession des résultats de la première partie ne soit pas entièrement nécessaire pour l'intelligence des raisonnements qui vont suivre, je crois utile de rappeler ici les conclusions essentielles de cette étude initiale.

---

(1) Probablement dans les *Annales de l'École Normale*, 1916.

Une fonction continue quelconque de x étant donnée, sur une épaisseur pleine [1] ses quatre *nombres dérivés extrêmes*, considérés comme *associés* s'ils sont relatifs aux mêmes côtés, comme *opposés* s'ils sont propres à des côtés et à des rangs différents, satisfont aux lois suivantes (1re Partie, n° 57) : *Deux dérivés*

---

[1] J'appelle *épaisseur* d'un ensemble sur un intervalle ou sur un segment ab, le quotient par $b-a$ de la mesure de la portion de l'ensemble comprise entre a et b. L'*épaisseur* de l'ensemble *en un point* agrégé ou étranger à lui, est par définition la limite, si elle est unique, de l'épaisseur de l'ensemble sur un intervalle quelconque contenant ce même point et tendant indifféremment vers zéro en longueur. Si la limite n'est pas unique, sa plus grande et sa plus petite valeur sont respectivement l'*épaisseur maximum* et l'*épaisseur minimum* de l'ensemble en ce point. Il y a lieu également d'envisager en un point quelconque x les deux *épaisseurs droites supérieure* et *inférieure*, et les deux *épaisseurs gauches supérieure* et *inférieure* d'un même ensemble E. Ce sont les quatre dérivés extrêmes de même côté et de même rang pour la fonction de x égale à la mesure de E entre un point fixe situé à gauche de x et ce dernier point variable. Ces quatre nombres sont agrégés au segment 0, 1. J'appelle ensemble *épais* tout ensemble possédant une mesure positive, ensemble *mince* tout ensemble de mesure nulle, ensemble *épais en lui-même* tout ensemble épais dans chaque intervalle contenant au moins un point de l'ensemble; *pleine épaisseur* (sous-entendu du continu) un ensemble dont le complémentaire est mince, ou encore dont l'épaisseur est un sur tout intervalle, *pleine épaisseur d'un ensemble* E tout ensemble agrégé à E et ayant même mesure que E.

On dit aujourd'hui assez souvent qu'une propriété d'une fonction est vérifiée « presque partout » si elle est exacte sur un ensemble dont le complémentaire a la mesure zéro. Comme il me paraît non moins légitime de dire qu'une fonction limite de fonctions continues est « presque partout » continue, et que cependant l'ensemble de ses points de continuité qui est un résiduel (*voir* ci-après) peut être mince, pour notre usage nous substituons à la locution habituelle « presque partout » l'expression « sur une épaisseur pleine ».

Les notions définies jusqu'ici dans cette Note me paraissent jouer un rôle essentiel dans l'étude *métrique* des ensembles et des fonctions. On les trouvera assez longuement étudiées au Chapitre initial de la 1re Partie (nos 16 à 22). J'explique au même endroit les différences séparant les deux points de vue métrique et descriptif, l'un et l'autre pareillement usuels dans ce genre d'études. Les notions descriptives (1re Partie, Chap. I, nos 1 à 15) reposent sur l'idée de la *densité* d'un ensemble (sur le continu ou sur tout autre ensemble parfait P).

E étant un ensemble préalablement réduit à sa partie commune avec P, l'usage est de qualifier E de *non dense* sur P, lorsque, dans toute portion ϖ de P (ϖ est un ensemble parfait agrégé à P et contenant tous les points de P situés entre les extrémités de ϖ), il en existe une autre ne contenant aucun point de P. En ce cas, l'ensemble (E, P) commun à E et à P a son dérivé D(E, P) lui aussi non dense sur P. E est dit *dense* sur P si D(E, P) contient au contraire une portion de P. E est dit *partout dense* sur P si D(E, P) coïncide avec P.

On sait que P ne peut pas être épuisé par l'extraction d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur lui. Je dis que E est *gerbé* sur P ou forme *associés sont égaux s'ils sont finis, inégaux si l'un au moins est infini; deux dérivés opposés sont simultanément finis et égaux ou infinis et inégaux.*

Ou encore, si l'on trace la courbe C représentative de la fonction continue et si en un point M de C on construit, pour chacun des deux arcs de C séparés par M, l'angle dérivé de sommet M, c'est-à-dire l'angle des positions limites possibles des demi-droites MM', M' tendant vers M continûment ou discontinûment, mais sans quitter l'un et le même des deux arcs, alors ou bien ces deux angles valent l'un et l'autre deux droits et leurs côtés sont confondus avec la perpendiculaire à Ox menée par M; ou bien ces deux angles sont adjacents et supplémentaires, leur côté commun étant la perpendiculaire ascendante ou la perpendiculaire descendante (deux cas à distinguer), leurs deux autres côtés étant inclinés sur Ox et dans le prolongement l'un de l'autre; ou bien l'un et l'autre sont nuls et ils se réduisent à deux demi-droites se prolongeant et inclinées sur Ox (tangente à pente finie). En toute précision, ces quatre cas fondamentaux des nombres dérivés peuvent être tous en défaut en certains points M, mais l'ensemble de ces derniers se projette certainement sur Ox en un ensemble mince.

---

sur P une *gerbe*, si E est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P (ensembles de première catégorie de M. Baire). J'appelle *résiduel* de P un ensemble agrégé à P et dont le complémentaire relativement à P est gerbé sur P. Un ensemble quelconque non gerbé sur P est qualifié d'*inexhaustible* sur P (ensemble de deuxième catégorie). Tout résiduel est inexhaustible, mais la réciproque n'est pas exacte. Les résiduels doivent leurs principales propriétés aux trois caractères suivants appartenant également aux pleines épaisseurs d'un ensemble parfait continu ou discontinu P, non mince et (au moins pour l'exactitude du premier caractère) épais en lui-même :

1° Un résiduel de P est partout dense sur P;

2° Une infinité dénombrable de résiduels de P ont en commun un résiduel de P;

3° Tout résiduel d'un ensemble parfait contient lui-même un ensemble parfait (et par suite une infinité).

Je crois enfin utile de rappeler que je distingue systématiquement sous les noms d'*intervalle ab* et de *segment ab* les ensembles respectifs $a < x < b$ et $a \leq x \leq b$.

Je renvoie également pour ces définitions à deux Notes des *Comptes rendus* (31 mai et 14 juin 1915).

Tout comme dans la 1re Partie et pour les mêmes raisons de commodité, j'emploie les seules initiales *L. I.* en guise de référence aux *Leçons sur l'intégration* de M. Lebesgue (Gauthier-Villars, collection Borel), ouvrage dont les théories doivent être parfaitement familières au lecteur désireux de suivre aisément le présent exposé.

On peut donner une troisième forme au même énoncé. Tout nombre intermédiaire aux deux dérivés extrêmes relatifs à un côté étant qualifié de *dérivé médian* pour ce côté (1re Partie, p. 145), une fonction continue satisfait en chaque point d'une épaisseur pleine aux conditions suivantes : ou bien tout nombre fini en est un dérivé médian bilatéral en ce point (dérivés extrêmes $+\infty$ et $-\infty$ de chaque côté) ; ou bien tout nombre fini, sauf un, est dérivé médian unilatéral, le nombre exceptionnel étant dérivé extrême bilatéral (deux dérivés opposés finis et égaux, les deux autres étant infinis et inégaux) ; ou bien aucun nombre fini n'est dérivé médian, un seul est dérivé extrême bilatéral (cas de la dérivée ordinaire finie).

Tous ces résultats se déduisent de deux propositions essentielles que j'appelle les *Premier* et *Second Théorèmes des nombres dérivés* et dont les conséquences théoriques sont longuement développées dans la première partie. J'ai établi enfin que les quatre cas fondamentaux peuvent être réalisés par une même fonction continue sur des pleines épaisseurs de quatre ensembles quelconques dont la réunion forme le continu.

Voici maintenant un bref aperçu des résultats ci-après développés. J'entreprends d'abord une analyse *a priori* d'une notion dont l'aide m'a été des plus utiles dans les pages ultérieures, celle de *fonction approximativement continue*. La définition purement métrique de ces fonctions (on la trouvera un peu plus bas) entraîne des conséquences descriptives d'une précision presque inattendue, à mon sens du moins. Ainsi, d'une part, une fonction de l'espèce dite prend toute valeur comprise entre deux de ses valeurs particulières, et, second caractère, elle est limite de fonctions continues. Ces deux propriétés créent déjà une analogie profonde de ces fonctions avec les dérivées. Il y a plus : toute fonction approximativement continue bornée est une fonction dérivée. Et cependant, les deux classes sont différentes l'une de l'autre. Car je donne l'exemple de deux fonctions, l'une approximativement continue, l'autre dérivée, coïncidant en tous les points étrangers à un ensemble parfait mince, et différant entre elles d'une unité en tous les points de ce dernier.

L'usage de cette nouvelle espèce de fonctions m'a permis de démontrer de diverses manières assez commodes le théorème de

M. Lebesgue énonçant l'identité sur une épaisseur pleine du coefficient différentiel d'une somme besgienne indéfinie avec la dérivée de cette dernière.

La suite et la fin de l'article sont consacrées à l'étude de plusieurs exemples de fonctions dérivées bornées présentant les deux signes dans tout intervalle. L'emploi des fonctions approximativement continues est fondamental pour mes recherches sur ce sujet. Il me paraît jeter un jour très vif sur cette question, où Köpcke fut un initiateur souvent fautif. Je reprends son exemple par mes méthodes, je crois en simplifier beaucoup l'exposé, la justification, et j'en élargis notablement les hypothèses. Enfin, je construis des fonctions dérivées partout nulles en dehors d'un ensemble parfait épais en lui-même et variantes en tout point de celui-ci, ce qui donne pour leurs primitives (dont je n'ai d'ailleurs pas besoin de chercher les expressions) des fonctions continues constantes dans les contigus à un ensemble parfait, variant sur celui-ci et possédant une dérivée finie (et même bornée) en tout point de l'ensemble.

Il ne m'est pas possible de reprendre par le détail au début de cet article toutes les définitions de termes et tous les commentaires accompagnant celles-ci, déjà fournis dans la première partie. Je me permets d'adresser le lecteur à celle-ci, notamment pour éclaircir la distinction entre les points de vue descriptif et métrique dans la théorie des fonctions et des ensembles et pour justifier divers changements que je crois utile d'apporter à la terminologie habituelle.

LES FONCTIONS APPROXIMATIVEMENT CONTINUES.

1. Nous dirons qu'*une fonction $f(x)$ est approximativement continue en un point x_0 si, quel que soit le nombre positif ε, l'ensemble* $\mathrm{E}(x_0, \varepsilon)$ *des points x donnant lieu à l'inégalité*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

est d'épaisseur égale à UN *en x_0.*

D'après cette définition, quel que soit le nombre ε, donné d'avance, il est possible, à tout nombre positif ε', de faire correspondre un nombre positif η tel que, sur tout intervalle de longueur inférieure à η et contenant x_0, l'épaisseur de l'ensemble $E(x_0, \varepsilon)$ surpasse $1 - \varepsilon'$. Il est aisé de voir que l'on ne restreint en rien la généralité de la définition, si l'on prend pour ε' *une fonction particulière quelconque de* ε, *infiniment petite avec* ε. Soit en effet $\theta(\varepsilon)$ l'une d'elles. Supposons qu'il existe, pour toute valeur de ε, un nombre η tel que l'épaisseur de l'ensemble $E(x_0, \varepsilon)$ à l'intérieur de tout intervalle de longueur inférieure à η et contenant x soit supérieure à $1 - \theta(\varepsilon)$. Je dis qu'alors l'ensemble $E(x_0, \varepsilon)$ est d'épaisseur égale à un en x_0, quel que soit ε. En effet, un ensemble a en un point quelconque une épaisseur au moins égale à celle de toute partie de lui-même. Or, l'ensemble $E(x_0, \varepsilon)$ contient $E(x_0, \varepsilon_1)$ quel que soit ε_1 inférieur à ε. Mais l'épaisseur de $E(x_0, \varepsilon_1)$ en x_0 est au moins $1 - \theta(\varepsilon_1)$. Donc $E(x_0, \varepsilon)$ a au moins cette épaisseur en x_0. $\theta(\varepsilon_1)$ étant infiniment petit avec ε_1, l'épaisseur de $E(x_0, \varepsilon)$ en x_0 est un. On peut en particulier définir ainsi la continuité approximative d'une fonction : c'est *la condition qu'à tout nombre* ε *on puisse faire correspondre un nombre* η *tel que, dans tout intervalle contenant* x_0 *et de longueur inférieure à* η, *l'épaisseur de l'ensemble*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

soit supérieure à $1 - \varepsilon$.

2. La même classe de fonctions peut encore se caractériser par la définition suivante équivalente aux deux premières. Selon l'usage, convenons de dire qu'une fonction est continue sur un ensemble E au point x_0, si $f(x)$ n'a pas d'autre limite que $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 sans quitter E. Cela étant, supposons qu'une fonction f soit continue sur un ensemble E ayant en x_0 l'épaisseur un. Il est évident qu'elle sera approximativement continue. Car, quel que soit ε, f étant continue sur E, il existe un nombre h tel que sur la partie $E(h)$ de l'ensemble E agrégée à l'intervalle $x_0 - h, x_0 + h$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Donc, $E(h)$ fait partie de $E(x_0, \varepsilon)$. Or $E(h)$ ne différant de E qu'à distance finie de x_0, possède en x_0 la même épaisseur que E. $E(x_0, \varepsilon)$ a donc bien pour toute valeur de ε l'épaisseur 1 en x_0. f est en x_0 approximativement continue selon notre première définition.

Réciproquement, je dis que si $E(x_0, \varepsilon)$ a l'épaisseur 1 en x_0, quel que soit ε, il est possible de construire un ensemble E ayant en x_0 l'épaisseur un et sur lequel f est continue au point x_0. Soit ε_n un nombre positif décroissant tendant vers zéro. Soit h_n un nombre positif tel que dans tout intervalle contenant x_0 et de longueur inférieure à h_n, l'épaisseur de $E(x_0, \varepsilon_n)$ surpasse $1 - \varepsilon_n$. h_n ne pouvant être borné inférieurement par un nombre positif, nous pouvons toujours prendre h_n inférieur à h_{n-1}. Cela étant, désignons par E'_n l'ensemble restant dans $E(x_0, \varepsilon_n)$ quand on retranche de ce dernier les points distants de x_0 de moins de h_n et de plus de $\varepsilon_n h_{n+1}$. E'_n est donc l'ensemble des x_0 simultanément agrégés à $E(x_0, \varepsilon_n)$ et aux deux segments définis par les inégalités

$$\varepsilon_n h_{n+1} \leqq |x - x_0| \leqq h_n.$$

E'_{n+p} étant agrégé à $E(x_0, \varepsilon_{n+p})$ l'est donc aussi à $E(x_0, \varepsilon_n)$ quel que soit p.

Soit E la réunion des E'_n. Je dis que f est continue sur E et que l'épaisseur de E en x_0 est un. Montrons d'abord le premier point. Si, x étant agrégé à E, on a

$$|x - x_0| < \varepsilon_n h_{n+1},$$

x fait partie de l'un au moins des ensembles $E'_{n+1}, E'_{n+2}, \ldots,$ tous agrégés à $E(x_0, \varepsilon_n)$. Donc

$$|f(x) - f(x_0)|$$

est inférieur à ε_n. De là résulte évidemment l'égalité limite

$$f(x) = f(x_0),$$

x tendant vers x_0, indifféremment, mais sans quitter E.

En second lieu, montrons que sur un intervalle ayant l'une de ses extrémités fixe en x_0, l'autre tendant vers x_0, l'épaisseur de E tend vers un. Tout intervalle contenant x_0 et dont la longueur tend vers zéro, étant la réunion de deux intervalles de l'espèce précédente, relativement au premier la même propriété de E subsistera. Supposons par exemple que l'intervalle i ait pour extrémités x_0 et $x_0+\delta$, δ étant positif et tendant vers zéro. Si δ est entre h_{n+1} et h_n, E contenant E'_n contient sur l'intervalle i tous les points de $E(x_0, \varepsilon_n)$ à l'exception d'une partie de ceux qui sont compris entre x_0 et $x_0+\varepsilon_n h_{n+1}$. Or, d'après $\delta < h_n$, $E(x_0, \varepsilon_n)$ a sur i une épaisseur supérieure à $1-\varepsilon_n$; donc sur i, $E(x_0, \varepsilon_n)$ a une mesure supérieure à $(1-\varepsilon_n)i$. Les points de $E(x_0, \varepsilon_n)$ étrangers à E sont dans l'intervalle x_0, $x_0+\varepsilon_n h_{n+1}$. Ils ont donc une mesure inférieure à $\varepsilon_n h_{n+1} < \varepsilon_n i$. Donc, E'_n et *a fortiori* E ont sur i une mesure supérieure à $(1-2\varepsilon_n)i$, et par suite une épaisseur supérieure à $1-2\varepsilon_n$. Or, quand δ tend zéro, $\frac{1}{n}$ et ε_n, dépendant de δ, tendent vers zéro. Donc, E a l'épaisseur 1 en x_0.

En résumé, nous avons cette nouvelle définition équivalente aux deux premières : *Une fonction est dite approximativement continue quand elle est continue sur un ensemble ayant l'épaisseur un en x_0*. Le mode de raisonnement employé dans cette démonstration sera rappelé en d'autres endroits de ce Mémoire.

3. Enfin, il est manifeste que les ensembles $f(x) > f(x_0)+\varepsilon$ et $f(x) < f(x_0)-\varepsilon$ ont l'épaisseur zéro en x_0. Car l'un et l'autre sont inclus dans le complémentaire de $E(x_0, \varepsilon)$. Au contraire, $E(x_0, \varepsilon)$ étant dans chacun des ensembles $f(x) < f(x_0)+\varepsilon$ et $f(x) > f(x_0)-\varepsilon$, ceux-ci ont l'épaisseur un en x_0, pour toute valeur positive de ε. Il résulte de là que les ensembles $f(x) < \alpha$ et $f(x) > \alpha$ ont chacun l'épaisseur un en leurs propres points (et par suite, comme il sont entièrement étrangers l'un à l'autre, l'épaisseur zéro chacun aux points de l'autre). Je dis que, réciproquement, une fonction remplissant cette dernière condition est approximativement continue.

En effet, l'ensemble

$$f \geqq f(x_0)+\varepsilon$$

a l'épaisseur zéro en x_0, sinon l'ensemble

$$f < f(x_0)+\varepsilon$$

n'aurait point, contrairement à notre hypothèse, l'épaisseur un en x_0 qui lui est évidemment agrégé. Pareillement, l'ensemble

$$f \leqq f(x_0) - \varepsilon$$

a l'épaisseur zéro en x_0. Donc, l'ensemble complémentaire de la somme des deux premiers et caractérisé par les conditions

$$f(x_0) - \varepsilon < f < f(x_0) + \varepsilon,$$

cet ensemble a l'épaisseur un en x_0. Voici donc une quatrième définition équivalente aux trois premières :

Une fonction f est dite approximativement continue si, quel que soit α, les ensembles $f > \alpha$ et $f < \alpha$ ont respectivement l'épaisseur UN *en chacun de leurs points.*

On voit encore qu'en tous les points de l'ensemble mince où l'épaisseur de l'agrégat $f > \alpha$ n'est ni un ni zéro, on ne peut avoir ni $f > \alpha$, ni $f < \alpha$. On a donc $f = \alpha$. De même si en x_1, l'épaisseur de l'ensemble $f < \beta$ n'est ni un ni zéro, on a $f(x_1) = \beta$. Nous aurons l'occasion prochaine d'utiliser ces remarques.

4. Voici une propriété importante des fonctions approximativement continues en un point :

Toute fonction continue d'une fonction approximativement continue en x_0 est elle aussi approximativement continue au même point.

Par exemple, le carré d'une fonction de cette sorte, un polynome dont elle est la variable (ou même un polynome à plusieurs variables constituées par de telles fonctions) sont encore des fonctions approximativement continues. Établissons le théorème dans sa généralité.

Soit $\varphi(y)$ une fonction définie dans un intervalle entourant y_0 et continue pour $y = y_0 = f(x_0)$. Supposons $f(x)$ approximativement continue en x_0. Je veux montrer que $\varphi[f(x)] = \psi(x)$ jouit de cette même propriété en x_0. En effet, ε étant donné, je peux, à cause de la continuité de φ, déterminer un nombre α, tel que l'inégalité $|y - y_0| < \alpha$ entraîne

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon.$$

Donc en tout point x où

$$(1) \qquad |f(x) - f(x_0)| < \alpha,$$

on a

$$(2) \qquad |\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon.$$

Mais, f étant approximativement continue, l'ensemble $E(x_0, \alpha)$ défini par l'inégalité (1) a une épaisseur égale à un en x_0. Et nous voyons que l'ensemble défini par la condition (2) contient tous les points de $E(x_0, \alpha)$. Il a donc lui aussi, quel que soit ε, une épaisseur égale à un en x_0. Donc $\psi(x)$ est approximativement continue en x_0.

Nous appliquerons ce théorème à la fonction $\varphi(y) = y^{\alpha + i\beta}$, où y est positif ou nul et où α est positif. (L'introduction d'une imaginaire ne crée aucune difficulté.) Ly étant le logarithme népérien réel de y, $y^\alpha(\cos \beta Ly + i \sin \beta Ly)$, est continue en y dans tout le champ où nous la considérons. Si donc f est approximativement continue, jamais négative, $f^\alpha(\cos \beta Lf + i \sin \beta Lf)$ est aussi approximativement continu, α et β étant fixes, le premier positif.

5. Je dis qu'*une fonction mesurable quelconque f est approximativement continue sur une épaisseur pleine.*

Je rappelle qu'une fonction mesurable est par définition une fonction telle que l'ensemble des points x définis par $\alpha < f < \beta$ soit mesurable, quels que soient les nombres fixes α et β. On voit sans peine qu'il en est alors ainsi des ensembles caractérisés par les relations $\alpha \leqq f$, $\alpha = f$ (*L. I.*, p. 111). La démonstration que nous avons en vue reposera sur un théorème fondamental dans l'étude métrique des ensembles : l'épaisseur d'un ensemble mesurable est un sur une pleine épaisseur de lui-même. En d'autres termes, l'ensemble des points de E (supposé mesurable) où l'épaisseur de E est soit non définie, soit définie et inférieure à un, cet ensemble est mince (1re Partie, n° 20). Soit, ε étant un nombre positif, une progression de raison $\frac{\varepsilon}{2}$, indéfinie dans les deux sens, ..., r_{-n}, ..., r_1, r_2, ..., r_n, ... Soit E_p l'ensemble des points où $r_{p-1} < f < r_{p+1}$. Cet ensemble est d'épaisseur un en chacun de ses points, sauf éventuellement en un ensemble mince R_p. Soit $R(\varepsilon)$ la réunion de tous les R_p. R est encore de mesure nulle comme étant la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de cette espèce. Soit ξ un point n'appartenant pas à $R(\varepsilon)$. ξ appartient visiblement à au moins un des ensembles E_p. Si, en effet, $f(\xi)$ ne coïncide avec aucun terme de la progression, s'il est par suite compris entre deux termes consécutifs r_p, r_{p+1}, ξ appartient à la fois à E_p et à E_{p+1}. Si f coïncide avec l'un des termes, soit r_p, ξ appartient à E_p et seulement à lui. Supposons donc que ξ soit dans E_p. L'ensemble $E(\xi, \varepsilon) : |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ contient évidemment tout l'ensemble E_p. Car l'intervalle $r_{p-1}\, r_{p+1}$, de longueur ε, renfermant $f(\xi)$ est inclus dans l'intervalle de milieu $f(\xi)$ et de longueur 2ε. Donc, tout nombre f intérieur à l'intervalle $r_{p-1}\, r_{p+1}$ diffère de $f(\xi)$ de moins de ε en valeur absolue. Donc, tout point de E_p est un point de $E(\xi, \varepsilon)$. ξ n'appartenant pas à $R(\varepsilon)$, n'appartient pas à R_p, donc l'épaisseur de E_p en ξ et *a fortiori* celle de $E(\xi, \varepsilon)$ en ξ est égale à un. En résumé, l'ensemble des points ξ en lesquels $E(\xi, \varepsilon)$ n'a pas l'épaisseur un est de mesure nulle. Car cet ensemble est inclus dans $R(\varepsilon)$. Nous avons déjà remarqué que $E(\xi, \alpha)$ contient $E(\xi, \alpha')$ si α' est inférieur à α. Donc, $E(\xi, \alpha)$ a en ξ au moins la même épaisseur que $E(\xi, \alpha')$. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, une suite de nombres positifs tendant vers zéro. Formons $R(\varepsilon_1)$, $R(\varepsilon_2)$, ..., $R(\varepsilon_n)$, ..., et soit R leur réunion. R est de mesure nulle. Soit ξ un nombre n'appartenant pas à R. Quel que soit n, l'épaisseur de $E(\xi, \varepsilon_n)$ en ξ est égale à un. Donc, quel que soit ε, il en est de même de l'épaisseur de $E(\xi, \varepsilon)$ puisque ε_n, tendant vers zéro, est à partir d'une certaine valeur de n inférieur à ε. Donc, en dehors de R, f est partout approximativement continue.

Ce théorème ne doit pas affaiblir aux yeux du lecteur la portée du caractère présenté par les fonctions approximativement continues *en tout point d'un intervalle*. Car, dans la théorie des fonctions dérivées, les ensembles de mesure nulle sont loin de jouer un rôle négligeable, comme on le montre (1re Partie, nos 63 et 64) par des exemples de fonctions variant et même oscillant dans tout intervalle et possédant toutefois une dérivée nulle sur une épaisseur pleine. Il n'est pas inutile de rappeler ici qu'une fonction continue dont la dérivée doit coïncider avec une fonction donnée, sauf éventuellement en un ensemble mince inconnu, comporte au moins toute l'indétermination d'une fonction continue arbitraire à nombres dérivés finis. Signalons encore, pour justifier que tous les caractères propres d'une fonction peuvent être rassemblés sur un ensemble de mesure nulle, cette proposition qu'un mode de raisonnement entièrement analogue au précédent permettrait d'établir : *Toute fonction mesurable finie ou infinie coïncide avec une certaine fonction de classe* 2 (au sens de M. Baire) *sur une épaisseur pleine.* La démonstration se développe aisément avec ce départ qu'une fonction constante finie ou infinie sur un ensemble parfait et nulle en dehors de celui-ci est de classe 1. Or, il existe des fonctions de classe supérieure à 2 (1).

Anticipant sur la définition, étudiée plus loin, de la sommation besgienne et sur certaines propriétés de calcul résultant immédiatement des règles de cette opération, j'établirai d'abord le théorème essentiel suivant :

6. *Une fonction $\varphi(x)$ mesurable bornée est la dérivée de son intégrale besgienne indéfinie en tout point où cette fonction $\varphi(x)$ est approximativement continue.*

En effet, posons

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = f(x).$$

Soit ε un nombre positif quelconque. Si φ est approximativement continue en x_0, l'épaisseur de l'ensemble E défini par la condition

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

est égale à un en x_0. Il y a donc un nombre η tel que, dans tout intervalle $\alpha\beta$ de longueur inférieure à η et entourant x_0, l'épaisseur de l'ensemble précédent surpasse $1 - \frac{\varepsilon}{2M}$, M étant la borne supérieure des valeurs absolues de f dans l'intervalle où $\varphi(x)$ est

(1) Au sujet de ce théorème, consulter BOREL, *Comptes rendus*, 7 déc. 1913; LEBESGUE, *Comptes rendus*, 28 déc. 1903 et aussi voir *L. I.*, p. 125.

considéré. Soit, sur $\alpha\beta$, E' l'ensemble complémentaire de E. La mesure de E' est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2M}(\beta-\alpha)$. Formons la différence

$$f(\beta)-f(\alpha)=\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx=(\beta-\alpha)\,\varphi(x_0)+\int_\alpha^\beta [\varphi(x)-\varphi(x_0)]\,dx.$$

Le second terme est égal à la somme des intégrales de φ prises la première sur E (c'est-à-dire après avoir annulé φ hors de E), la seconde sur E' (signification analogue). Dans la première, le coefficient différentiel $\varphi-\varphi_0$ est en valeur absolue inférieur à ε et l'ensemble base d'intégration E a une mesure inférieure à $\beta-\alpha$. Cette intégrale est donc, d'après la définition de la somme besgienne, moindre en valeur absolue que $\varepsilon(\beta-\alpha)$. Pour la seconde,

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|$$

est inférieur évidemment à 2M. Mais la mesure de l'ensemble d'intégration E' est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2M}(\beta-\alpha)$. On a donc

$$f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)[\varphi(x_0)+2\delta\varepsilon],$$

δ^2 étant certainement inférieur à un. La relation précédente ayant lieu pour toutes les valeurs α et β satisfaisant aux seules conditions $\alpha\leqq x_0\leqq\beta$, $\beta-\alpha<\eta$, le nombre positif η étant calculable au moyen de ε, il est évident que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers $\varphi(x_0)$ en même temps que x vers x_0. Nous avons ainsi la conséquence suivante très importante :

Toute fonction bornée approximativement continue en chaque point est une fonction dérivée. En conformité de ce principe, nous établirons, pour certaines fonctions remarquables étudiées plus loin, la propriété d'être des dérivées, *et nous n'aurons point besoin pour cela de connaître explicitement leur primitive.*

7. Il est essentiel pour l'exactitude de ce théorème que φ soit borné. Prenons en effet pour φ une fonction paire qui, pour x positif, est nulle en dehors de tous les intervalles i_n d'extrémités $\frac{1}{n}$,

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$. Les i_n forment un ensemble sans épaisseur à l'origine, car leur longueur totale entre o et x supposé compris entre $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{m-1}$, est au plus égale à $\sum_m^\infty \frac{1}{n^3}$, lui-même comparable à $\frac{1}{m^2}$, donc à x^2. Donc, quelles que soient les valeurs attribuées à φ en dehors de ces intervalles, cette fonction est approximativement continue à l'origine si elle y est nulle. Or, supposons-la continue sur chacun des intervalles i_n et représentée sur le $n^{\text{ième}}$ par les deux côtés d'un triangle ayant sa base coïncidant avec i_n et sa hauteur positive, égale à $2n$, donc son aire égale à $\frac{1}{n^2}$, φ est continue en dehors de l'origine. Or, si $\frac{1}{m} \leqq x < \frac{1}{m-1}$, on a

$$f(x) = \int_0^x \varphi\, dx = \sum_{m+1}^\infty \frac{1}{n^2} + \int_{\frac{1}{m}}^x \varphi\, dx.$$

La dernière intégrale est positive et au plus égale à $\frac{1}{m^2}$. La série antécédente a pour somme $\frac{1}{m}$ à un facteur près tendant vers un pour m infini. Donc $f(x)$ admet à l'origine pour dérivée droite l'unité. f étant une fonction impaire a la même dérivée gauche. Or, le coefficient différentiel φ de l'intégrale indéfinie $f(x)$, à l'origine est nul et non pas égal à un, et cependant, la fonction sommable φ est approximativement continue en ce même point.

Cet exemple montre donc une différence typique des deux notions de fonctions dérivées et de fonctions approximativement continues. En effet, d'une part, la fonction continue f est l'intégrale indéfinie d'une fonction φ partout approximativement (ou exactement) continue, et possède partout une dérivée f' (puisque φ en dehors de l'origine est continu). D'autre part, l'identité $f' = \varphi$ n'est pas en tout point satisfaite.

Nous allons montrer par d'autres exemples caractéristiques les oppositions des deux notions de fonction dérivée et de fonction approximativement continue, ce qui donnera ensuite plus d'intérêt à diverses propriétés remarquables communes à ces deux classes de fonctions.

8. Nous venons de voir que si, x étant agrégé au segment $(0, 2)$, nous faisons $\theta(x) = 0$ en dehors de tous les intervalles $\frac{1}{n}$ à $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$, (soit i_n), θ sur ceux-ci étant figuré par les deux côtés d'un triangle isoscèle admettant i_n pour base et la hauteur positive $2n$, la fonction θ est sommable. De plus, 1° $\int_0^x \theta\,dx = x[1 + \varepsilon(x)]$; 2° l'ensemble des i_n a sur l'intervalle $0x$ une mesure égale à

$$x^2[1 + \varepsilon_1(x)],$$

$\varepsilon(x)$ et $\varepsilon_1(x)$ tendant vers zéro avec x. Cela étant, soit P un ensemble parfait mince dont les contigus u_n ou $a_n b_n$ sont tous inférieurs à 4. Considérons une fonction ψ ainsi définie. Sur P, $\psi = 0$. Sur u_n de milieu c_n, pour $a_n < x \leqq c_n$, $\psi = \theta(x - a_n)$, pour $c_n \leqq x < b_n$, $\psi = \theta(b_n - x)$. ψ est continu en tout point intérieur à l'intervalle u_n. Posons

$$\int_{a_n}^x \psi\,dx = (x - a_n)[1 + \eta(x - a_n)].$$

Pour $a_n < x \leqq c_n$, nous avons $\eta = \varepsilon(x - a_n)$. Pour $c_n \leqq x < b_n$, écrivons

$$\int_x^{b_n} \psi\,dx = (b_n - x)[1 + \varepsilon(b_n - x)],$$

$$\int_{a_n}^x \psi\,dx = \int_{a_n}^{b_n} - \int_x^{b_n} = u_n\left[1 + \varepsilon\left(\frac{u_n}{2}\right)\right] - (b_n - x)[1 + \varepsilon(b_n - x)]$$

$$= (x - a_n) + u_n\,\varepsilon\left(\frac{u_n}{2}\right) - (b_n - x)\,\varepsilon(b_n - x) = (x - a_n)(1 + \eta),$$

avec

$$\eta = \frac{u_n}{x - a_n}\,\varepsilon\left(\frac{u_n}{2}\right) - \frac{b_n - x}{x - a_n}\,\varepsilon(b_n - x).$$

D'après

$$u_n < 2(x - a_n) \quad \text{et} \quad 0 < b_n - x < x - a_n,$$

$|\eta|$ est, pour toute position de x sur u_n, inférieur à la valeur pour $u = x - a_n$ d'une certaine fonction $\eta_1(u)$ calculable au moyen de la fonction $\varepsilon(x)$ et infiniment petite avec u.

La série

$$\int_{a_n}^{b_n} \psi\,dx = v_n = u_n\left[1 + \varepsilon\left(\frac{u_n}{2}\right)\right]$$

étant convergente, ψ est sommable. Posons, a étant l'extrémité gauche de P,

$$\int_a^x \psi\, dx = f(x).$$

Utilisons la notation suivante introduite dans la 1re Partie (n° 10) : V_n étant un nombre quelconque défini pour chacun des contigus u_n de P, si la série V_n est absolument convergente, nous désignerons par $(x\Sigma x')V_n$ la série des nombres V_n relative à tous les intervalles u_n *entièrement agrégés* à l'intervalle $xx'\,(x < x')$. Ceci posé, on a évidemment

$$f(x) = (a\Sigma x)v_n + \omega\,\mathrm{I}_m,$$

ω étant nul quand x est sur P et égal à un quand x est intérieur à u_m, avec

$$\mathrm{I}_n = \int_{a_n}^x \psi\, dx = (x - a_n)[1 + \eta(x - a_n)].$$

Soit maintenant ξ un point quelconque de P et x un point extérieur à P. α étant un très petit nombre positif indépendant, soit h un nombre tel que, pour toute valeur de u inférieure à h, $\eta_1(u)$ soit inférieur à α. Soit toujours $|x - \xi| < h$. 1° Si $x - \xi$ est positif, on a

$$f(x) - f(\xi) = (\xi\Sigma x)v_n + \omega\,\mathrm{I}_m.$$

Or d'après $x - \xi < h$, on a

$$v_n = u_n(1 + \delta_n\alpha), \quad \mathrm{I}_m = (x - a_m)(1 + \delta'\alpha),$$

avec δ_n^2 et $\delta'^2 < 1$. Donc

$$f(x) - f(\xi) = [(\xi\Sigma x)u_n + \omega(x - a_m)](1 + \delta''\alpha)$$

avec $\delta''^2 < 1$. Or, la mesure de P étant nulle, le premier crochet est exactement $x - \xi$. Donc, la correspondance de h à α étant possible, f possède en ξ la dérivée droite 1. 2° Pour $x < \xi$, on montre par l'égalité

$$f(\xi) - f(x) = (x\Sigma\xi)v_n + \omega'\mathrm{J}_m,$$

avec $\omega' = 0$ si x est sur P, $\omega' = 1$ et

$$\mathrm{J}_n = \int_x^{b_n} \psi\, dx = (b_n - x)|1 + \eta(b_n - x)|$$

pour $a_m < x < b_m$, que f possède en ξ la dérivée gauche 1. Si donc, une fonction φ coïncide avec ψ hors de P et vaut 1 sur P, cette fonction est la dérivée de f aussi bien sur P qu'en dehors de P, où elle est continue.

Montrons que ψ nul sur P est approximativement continu en tout point de P. Il suffit de faire voir qu'en tout point de P l'épaisseur de l'ensemble E défini par $\psi \neq 0$ est nulle. Or, sur u_n entre a_n et $x < c_n$, la mesure de cet ensemble vaut

$$(x - a_n)^2 \,|\, 1 + \varepsilon_1(x - a) \,|.$$

Si x est compris entre c_n et b_n, la mesure de cet ensemble est inférieure à sa mesure entre a_n et b_n, soit deux fois sa mesure entre a_n et c_n, donc à

$$\frac{u_n^2}{2}\left[1 + \varepsilon_1\left(\frac{u_n}{2}\right)\right] < 2(x - a_n)^2 \left[1 + \varepsilon_1\left(\frac{u_n}{2}\right)\right],$$

d'après $x - a_n > \frac{u_n}{2}$. Donc, quel que soit x sur u_n, les mesures de E sur l'intervalle $a_n x$ et sur l'intervalle $x b_n$ sont respectivement inférieures à $k(x - a_n)^2$ et $k(b_n - x)^2$, k étant le maximum de $2[1 + \varepsilon_1(x)]$ pour $1 < x < 2$. k est une constante numérique. Or, la mesure de E entre un point ξ de P et un point x à sa droite est $(\xi \Sigma x)\mu_n + \omega\mu_m(x)$ avec $\mu_n =$ mes. de E sur u_n, $\mu_n(x) =$ mes. de E entre a_n et x situé sur u_n, $\omega = 0$ si x est sur P, $\omega = 1$ si x est intérieur à u_m. Donc, la mesure de E entre ξ et x est inférieure à

$$k(\xi \Sigma x) u_n^2 + k(x - a_m)^2 < k[(\xi \Sigma x) u_n + (x - a_m)]^2 = k(x - \xi)^2.$$

On trouve la même borne si x est à gauche de ξ. Donc, l'épaisseur de E en ξ est bien zéro. Donc, la fonction *sommable* ψ est approximativement continue sur P et d'ailleurs elle l'est exactement hors de P. Et cependant ψ n'est pas une fonction dérivée. Car une fonction dérivée qui coïncide avec ψ en tous ses points de continuité diffère de ψ d'une unité en tout point de P.

En prenant pour P un ensemble parfait mince ou épais, en prenant pour fonction génératrice $\theta(x)$ celle qui est nulle aux mêmes points que la première, mais qui, sur les intervalles $\frac{1}{n}$ à $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$, est représentée par les deux côtés d'un triangle de base i_n et de hauteur positive supérieure à n^2, $\theta(x)$ continue dans l'intervalle $(0, 2)$ n'est pas sommable à l'origine. En définissant dans chaque contigu à P la fonction ψ au moyen de θ par la même règle que ci-dessus, et en faisant $\psi = 0$ sur P, on a toujours une fonction approximativement continue sur P et exactement continue hors de P, mais non sommable au voisinage d'aucun point de P. Or, une fonction dérivée positive est toujours sommable.

9. Il y a donc des fonctions approximativement continues, et naturellement non bornées, qui ne sont pas des fonctions dérivées. Pareillement il y a des fonctions dérivées, même bornées qui ne sont pas des fonctions approximativement continues.

Ainsi, désignons par $\varphi(x)$ la dérivée de $x^2 \sin \frac{1}{x}$. φ est nul pour $x = 0$; pour $x \neq 0$, $\varphi(x)$ vaut $-\cos \frac{1}{x} + 2x \sin \frac{1}{x}$. Le second terme étant continu, φ est ou non approximativement continu en même temps que le premier terme. L'ensemble des points où l'on a $\left| \cos \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$, ou $\left| \frac{1}{x} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \right| < \arcsin \varepsilon$ (n entier), cet ensemble a au voisinage de l'origine une épaisseur sensiblement égale à $\frac{2\varepsilon}{\pi}$ quand ε est petit, comme le lecteur le verra sans peine. Donc, φ n'est pas approximativement continue à l'origine. Par la méthode de la condensation des singularités, on peut rendre partout dense l'ensemble des points, où une fonction dérivée est non approximativement continue.

D'ailleurs toute fonction continue de φ n'est pas nécessairement une fonction dérivée. Ainsi, le carré d'un nombre étant bien une fonction continue de ce nombre, formons φ^2. Si φ^2 est la dérivée d'une fonction continue Φ, φ étant borné avec un seul point de discontinuité (l'origine), donc intégrable au sens de Riemann, n a

$$\begin{aligned}\Phi(x) - \Phi(0) &= \int_0^x \varphi^2 \, dx \\ &= \int_0^x \cos^2 \frac{1}{x} \, dx - 2\int_0^x x \sin \frac{2}{x} \, dx + 4\int_0^x x^2 \sin^2 \frac{1}{x} \, dx \cdot\end{aligned}$$

Examinons si le quotient de ces intégrales par x a une limite pour $x = 0$. Pour les deux dernières, il en est bien ainsi et la limite cherchée est zéro. La première intégrale est

$$\frac{x}{2} + \int_0^x \cos\frac{2}{x}\, d\frac{x}{2} = 0.$$

Ce second terme $j(x)$ est infiniment petit par rapport à x. En effet, l'intégrale $i(u) = \int_u^\infty \cos u \frac{du}{u^2}$, égale à $j(x)$ pour $x = \frac{2}{u}$, est, si u est compris entre m et $m+1$, la somme d'un terme irrégulier inférieur en valeur absolue à $\frac{2}{u^2}$, et d'une série alternée à termes décroissants dont le terme général est

$$(-1)^n \int_0^\pi \frac{\cos\theta}{(n\pi+\theta)^2}\, d\theta,$$

le terme initial correspondant à $n = m+1$. Cette série est inférieure en valeur absolue à son premier terme, lui-même moindre que $\frac{1}{u^2}$. $ui(u)$ est donc infiniment petit quand u croît indéfiniment. Il en est de même de $\frac{j(x)}{x}$ pour $x = 0$. Donc $\frac{F(x) - F(0)}{x}$ tend vers $\frac{1}{2}$ pour $x = 0$, et non pas vers $\varphi^2(0) = 0$. $\varphi^2(x)$ n'est donc pas une fonction dérivée. M. Lebesgue (*L. I.*, p. 96, note) a donné des exemples analogues de fonctions déduites de dérivées par transformation continue, et qui ne sont cependant pas des dérivées. La fonction $|\varphi(x)|$, le lecteur le prouvera sans peine, n'est pas une dérivée à l'origine. Une fonction dérivée coïncidant avec $|\varphi(x)|$ pour $x \neq 0$ (et ceci est possible, $|\varphi(x)|$ étant continue hors de l'origine), prendra à l'origine la valeur $\frac{2}{\pi}$ et non pas $|\varphi(0)| = 0$. Or, $|u|$ est une fonction continue de u.

Ces préliminaires nous servent à justifier l'intérêt des trois propriétés suivantes appartenant aux fonctions approximativement continues quelconques et révélant malgré tout une grande similitude de caractères entre elles et les fonctions dérivées.

10. *Une fonction approximativement continue $\psi(x)$ prend, à l'intérieur d'un intervalle quelconque ab, toute valeur intermédiaire à $\psi(a)$ et $\psi(b)$.*

L'énoncé analogue est vrai de toute fonction dérivée $\varphi(x)$, d'après un théorème bien connu, donné pour la première fois par M. Darboux dans son Mémoire sur les fonctions discontinues (*Annales de l'École Normale*, 1875). On peut même énoncer la proposition plus générale suivante : *Si φ est en tout point un dérivé* BILATÉRAL, *médian ou extrême, fini ou infini, d'une fonction continue $f(x)$, φ prend sur ab toute valeur comprise entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.*

Nous observerons d'abord que, si μ est la variation relative de f entre α et β $\left(\text{savoir } \mathrm{VR}(f, \alpha, \beta) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\right)$, φ prend entre α et β la valeur μ. On montre ceci comme le théorème de Rolle. Considérons la courbe figurative de f entre a et b, P et Q ses points d'abscisses α et β. La plus grande distance à la corde PQ d'un point de l'arc PQ possède un maximum atteint au moins en un point M d'abscisse ξ. La parallèle menée par M à PQ peut rencontrer l'arc PQ en une infinité de points, mais laisse les autres du même côté d'elle-même. Donc en ξ, f ne saurait avoir d'autre dérivé bilatéral que μ. On a donc $\varphi(\xi) = \mu$.

Cela posé, soit L un nombre compris entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ supposés distincts, le premier par exemple étant inférieur au second. Choisissons indifféremment A et B satisfaisant aux conditions

$$\varphi(a) < \mathrm{A} < \mathrm{L} < \mathrm{B} < \varphi(b).$$

D'après la définition des nombres dérivés, il y a entre a et b : 1° un point x_1 tel que $\mathrm{VR}(f, a, x_1)$ soit inférieur à A ; 2° un point x_2 tel que $\mathrm{VR}(f, x_2, b)$ surpasse B. Considérons la fonction de deux variables $\mathrm{VR}(f, x, x') = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$, continue en x et x' aux points x, x' non coïncidants. x étant initialement en a et x' en x_1, faisons passer continûment x' de x_1 en b, puis x de a en x_2. La fonction se trouve être passée continûment de A à B. Donc elle a pris la valeur L pour un couple $x = \alpha$, $x' = \beta$ agrégé au segment ab. Donc, entre α et β, et par suite sur ab, φ prend la valeur L.

Nous établirons cette même propriété pour les fonctions approximativement continues, en utilisant la remarque faite plus haut qu'une fonction $\psi(x)$ étant de telle sorte, l'ensemble défini par l'une des inégalités $\psi(x) < m$ ou $\psi(x) > m$ (égalité exclue dans les deux cas) a en chacun de ses points une épaisseur égale à un. Donc, l'épaisseur de chacun de ces ensembles est en même temps nulle en tout point de l'autre.

Supposons qu'une fonction approximativement continue ψ égale à α en a, à β en b, ($\alpha < \beta$) ne prenne pas entre a et b une certaine valeur γ intermédiaire à α et β. Soit E l'ensemble des points de ab où ψ surpasse γ et E′ celui où ψ est inférieur à γ. ψ n'étant nulle part égal à γ, tout point de ab appartient à E ou à E′. E et E′ sont donc complémentaires sur ab. Or, soit $l(x)$ la longueur de E entre a et x. Dire qu'en un point E possède une épaisseur définie et égale à e, c'est dire qu'en ce même point, $l(x)$ admet une dérivée égale à e. Donc, en tout point de ab, la fonction continue $l(x)$ admet une dérivée $l'(x)$ égale à 0 ou à 1, selon que ce point appartient à E ou à E′, et n'ayant pas d'autre valeur possible puisque tout point de ab est agrégé soit à E soit à E′. Or, a appartenant à E, b à E′, la fonction dérivée $l'(x)$ prendrait en a la valeur un, en b la valeur zéro et ne prendrait aucune valeur intermédiaire. Ceci est absurde, comme nous venons de l'expliquer. Donc, ψ prend entre a et b toute valeur γ intermédiaire à α et β.

11. *Si $\psi(x)$ est une fonction approximativement continue, les points où $\psi(x)$ est compris entre $\psi(a)$ et $\psi(b)$ forment un ensemble épais sur ab.*

En effet, soit γ un point intermédiaire à $\psi(a)$ et $\psi(b)$ supposés distincts. Alors, $\psi(x)$ prend entre a et b, au moins en un point x_0, la valeur γ. ψ étant approximativement continue, l'ensemble des x où ψ est compris entre $\psi(a)$ et $\psi(b)$ a l'épaisseur un en γ. Cet ensemble ne peut donc pas être mince.

Les fonctions dérivées jouissent de cette même propriété.

12. *Une fonction approximativement continue est limite de fonctions continues.*

Montrons pour cela, selon un théorème de M. Baire, que la fonction considérée ψ est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait P. L'hypothèse opposée est l'existence d'un ensemble parfait P, continu ou discontinu, en tout point duquel l'oscillation de ψ sur P surpasse un certain nombre positif fixe 2ω. Autrement dit, x étant un point quelconque de P, l'écart entre la plus grande et la plus petite des limites possibles de $\psi(\xi_n)$, ξ_n tendant vers x *sans quitter* P, surpasse 2ω. Soit $\lambda(x)$ cette plus petite limite ou minimum de ψ sur P en x, définie en tout point x de P. ψ est supposé fini en tout point, mais $\lambda(x)$ [toujours au plus égal à $\psi(x)$, valeur limite correspondant à $\xi_n = x$ quel que soit n] peut être infini négatif. Considérons l'ensemble E_n des points où

$$n\omega \leqq \lambda(x) < (n+1)\omega,$$

n étant positif ou négatif. Tout point x où $\lambda(x)$ est fini appartient à l'un des E_n et à un seul. Si λ est infini, nous plaçons x dans l'ensemble $E_{-\infty}$. L'ensemble P est décomposé en une infinité dénombrable d'ensembles, savoir les E pourvus d'indices. L'un au moins de ces ensembles est partout dense sur P ou sur une portion ϖ de P (¹). Supposons d'abord que cet ensemble ait un indice fini m. Alors $\psi_1(x) = \psi(x) - (m+1)\omega$ a en tout point de cet ensemble E_m dense sur ϖ un minimum (relatif à P, ou à ϖ, ce qui est la même chose, tous les points de P compris entre les extrémités de ϖ étant agrégés à ϖ) négatif, et d'autre part, comme ce minimum est au moins égal à $-\omega$, le maximum de $\psi_1(x)$ en tout point de ϖ surpasse ω. Donc, les deux ensembles entièrement distincts H où ψ_1 est négatif et H′ où ψ_1 surpasse ω, sont l'un et l'autre partout denses sur ϖ. Or, H en chacun de ses points, H′ en chacun de ses points, ont, comme nous l'avons vu, l'épaisseur un. Mais, H étant partout dense sur ϖ, l'ensemble des points de ϖ où l'épaisseur maximum de H est un, est un résiduel de ϖ (²). De

---

(¹) D'après ce principe qu'un ensemble parfait P n'est pas la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur lui. Ou encore, avec la terminologie posée dans la note de la page 162, P n'est pas gerbé sur lui-même, P est à lui-même un de ses résiduels.

(²) En vertu du Premier Théorème des nombres dérivés (1re Partie, nos 28 et suiv.) et grâce à cette observation que $m(x)$ étant la mesure d'un ensemble E entre un point fixe situé à gauche de x et x lui-même, l'épaisseur maximum de E en x est le plus grand des dérivés supérieurs gauche et droit de $m(x)$. [Tout dérivé de $m(x)$ est agrégé au segment $0-1$]. D'après le Premier Théorème, si $m(x)$ possède la dérivée 1 en un ensemble partout dense sur ϖ, $m(x)$ possède le dérivé bilatéral (nécessairement supérieur dans le cas présent) *un* en un résiduel de ϖ.

même en tous les points d'un ensemble résiduel sur ϖ, l'épaisseur maximum de H' est un. Ces deux ensembles résiduels ont en commun un ensemble R de même nature. En tout point ξ de ce dernier ensemble R, les épaisseurs maximums de H et de H' sont un. H et H' étant complètement distincts, l'épaisseur de chacun d'eux en ξ a donc pour minimum zéro et pour maximum un. Or, ψ_1 étant approximativement continue comme l'est ψ, l'épaisseur de $H(\psi_1 < 0)$ ne saurait être indéterminée ou inégale à 0 et à 1 qu'en des points où ψ_1 est nul (3). De même, l'épaisseur de $H'(\psi_1 > \omega)$ ne peut présenter l'un des précédents caractères que si $\psi_1 = \omega$. Nous aboutissons donc à une impossibilité puisque, en tous les points ξ de E, ψ_1 devrait être à la fois 0 et ω. Donc, ψ est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. ψ est limite de fonctions continues ou « de classe un », d'après le théorème de M. Baire.

Il resterait toutefois à examiner le cas où l'ensemble (fermé) $E_{-\infty}$ serait seul dense sur P. Alors, $\psi(x)$ étant fini en tout point x, l'oscillation est partout infinie sur P. Quel que soit n, positif ou négatif, l'ensemble des points de P où ψ est inférieur à n est dense et, d'autre part, l'ensemble G_n des points où $\psi > n$, n'est pas non dense sur P quel que soit n, puisque P est constitué par la réunion des G_n. Si donc G_m est partout dense sur une portion ϖ de P, nous lui faisons jouer le rôle de H', H étant, sur ϖ, l'ensemble $\psi(x) < m - 1$. Les raisonnements faits ci-dessus s'appliquent sans changement à ces deux nouveaux ensembles H et H', ω étant remplacé par 1 [1].

---

[1] On pourrait considérer des fonctions présentant simplement une *prépondérance de continuité*, plus précisément, satisfaisant à cette condition : *Les ensembles* $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ et $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ *ont en* x_0 *l'un et l'autre une épaisseur minimum* μ *supérieure* à $\frac{1}{2}$ (égalité exclue), μ pouvant d'ailleurs dépendre de x_0 et de ε. L'ensemble $|f(x) - f(x_0)| \leqq \varepsilon$ a par suite une épaisseur minimum positive en x_0. Mais cette propriété n'implique pas la définition posée. Celle-ci équivaut au contraire à la suivante : *Quels que soient* α *et* β, *les ensembles* $f < \alpha$ *et* $f > \beta$ *ont en chacun de leurs points une épaisseur minimum supérieure à* $\frac{1}{2}$.

En un point où f surpasse α, l'ensemble $f < \alpha$ ayant une épaisseur minimum supérieure à $\frac{1}{2}$, l'ensemble $f > \alpha$ qui est entièrement étranger au premier, pos-

13. Remarquons immédiatement une conséquence du résultat

sède une épaisseur maximum inférieure à $\frac{1}{2}$, et réciproquement. Si donc, en un point x_1, l'un des ensembles $f < \alpha$ et $f > \alpha$ admet l'épaisseur médiane ou extrême $\frac{1}{2}$ pour au moins un côté, on a $f(x_1) = \alpha$.

De là résulte, par application du premier théorème des nombres dérivés à l'épaisseur des ensembles, que d'une part *les ensembles $f < \alpha$ et $f > \beta$ ne peuvent pas, si $\alpha < \beta$, être simultanément partout denses sur un même ensemble parfait* P, sinon en tout point ξ d'un résiduel R de P, l'un et l'autre posséderaient bilatéralement une épaisseur supérieure au moins égale à $\frac{1}{2}$. Comme ces deux ensembles sont étrangers l'un à l'autre (l'hypothèse $\alpha \leqq \beta$ suffirait à cela), en ξ chacun d'eux aurait aussi bilatéralement une épaisseur inférieure au plus égale à $\frac{1}{2}$. Donc, en ξ, le nombre $\frac{1}{2}$ serait une épaisseur bilatérale médiane ou extrême pour ces deux ensembles. En ξ on devrait donc avoir à la fois $f = \alpha$ et $f = \beta$, ce qui est absurde d'après $\alpha < \beta$ (si α et β sont égaux à un même nombre γ, on serait encore conduit à une impossibilité si f ne pouvait pas prendre sur P la valeur γ, *voir* plus bas).

De là résulte que f est pouctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. *f est limite de fonctions continues.* (Il suffirait même pour cela que la prépondérance de continuité fùt vérifiée unilatéralement en tout point pour un côté *invariable*).

Je dis que *f prend sur ab toute valeur comprise entre $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.* Supposons par exemple $\alpha < \beta$ et soit γ un nombre intermédiaire à α et β. Si f ne prend pas sur ab la valeur γ, les ensembles H et H' définis par $f < \gamma$ et $f > \gamma$ existant l'un et l'autre (puisque H contient α, et H', β) se partagent exclusivement ab, f différant toujours de γ sur ab. H' et H ne peuvent être simultanément partout denses sur aucun ensemble parfait, ni en particulier sur aucun segment intérieur à ab. D'après ceci, leur frontière P est non dense sur ab. Tout contigu à P appartient soit à H soit à H'. D'ailleurs, observons qu'un point d'un ensemble est bilatéralement limite de cet ensemble dès que ce dernier possède en ce point une épaisseur minimum positive. Si donc, tous les points d'un intervalle appartiennent à H, il est impossible que ses extrémités appartiennent à H'. Elles font donc aussi partie de H. Donc, tout *segment* contigu à P est totalement agrégé à un et à un seul des ensembles H et H', Donc, P n'a pas de point isolé. P est parfait. Or, ϖ étant une portion de P qui est frontière de H, il y a entre les extrémités de ϖ au moins un point de H. Ce point, s'il n'est pas sur ϖ, fait partie d'un *segment* contigu à ϖ et entièrement agrégé à H. Donc, ϖ contient toujours au moins un point de H. Donc, H et H' sont partout denses sur P, ce qui est impossible. Par suite, l'égalité $f = \gamma$ est vérifiée entre a et b.

C. Q. F. D.

[Même conclusion si avec la prépondérance unilatérale de continuité en tout point x_0 pour un côté invariable, on ajoute cette condition que, pour l'autre côté en x_0, $f(x_0)$ est toujours une des valeurs limites de $f(x)$. Le même raisonnement montre enfin que la propriété étudiée appartient à toute fonction de classe 1 telle que les ensembles $f < \alpha$, $f > \beta$ soient denses en eux-mêmes et ne contiennent que des points de seconde espèce.]

Observons qu'une transformation continue quelconque effectuée sur x, ne conprécédent. L'ensemble des points du continu au voisinage desquels une fonction quelconque de classe un partout finie est non bornée, cet ensemble est non dense, puisqu'en ces points l'oscillation de la fonction est infinie. Soit E l'ensemble évidemment fermé et non dense des points où (pour : au voisinage desquels) une fonction approximativement continue $\psi(x)$ est non bornée. Dans chaque intervalle sans point intérieur ni extrémité agrégé à E, ψ est borné, donc coïncide avec une fonction dérivée. Dans tout intervalle i contigu à E, il existe donc une fonction, continue à l'intérieur de i, discontinue éventuellement aux extrémités de i et dont la dérivée en tout point intérieur à i coïncide avec ψ. Mais en général ces diverses fonctions continues dont chacune comporte l'indétermination d'une constante additive ne pourront pas être prolongées à travers les points de E et jointes entre elles de façon à constituer une fonction continue unique ayant partout comme dérivée ψ.

14. Convenons de dire qu'une fonction ψ est en un point une fonction dérivée si dans tout un intervalle contenant ce point elle coïncide avec une certaine fonction dérivée. L'énoncé suivant borne les oppositions entre fonction dérivée et fonction approximativement continue.

L'ensemble des points au voisinage desquels une fonction approximativement continue n'est pas une fonction dérivée est non dense. D'ailleurs, une fonction dérivée, comme une fonction mesurable quelconque, est approximativement continue sur une épaisseur pleine.

Le lecteur qui a pu observer dans la première partie de ce Mémoire combien l'intervention des ensembles irréguliers de

servant même pas le caractère d'épaisseur des ensembles, les fonctions à continuité prépondérante ne s'échangent pas entre elles par une telle substitution. Celle-ci cependant respecte les deux propriétés établies à l'instant pour cette sorte de fonctions. Nous aurons ailleurs l'occasion d'observer fréquemment qu'une condition remplie par une fonction aux abords de tout point, sur une épaisseur minimum supérieure à $\frac{1}{2}$, entraîne bon nombre des mêmes conséquences que si elle était obligatoirement vérifiée sur un intervalle complet entourant ce point.

Les considérations précédentes paraîtront peut-être bien abstraites au lecteur. Celui-ci voudra cependant m'accorder qu'elles rendent à la fois sensibles d'une part la complexité de l'idée de fonction et la diversité de ses espèces, d'autre part l'existence entre ces dernières de parentés assez inattendues.

mesure nulle rend illusoires les propriétés descriptives des fonctions, ne manquera pas de noter à quelles conséquences d'une précision inattendue, pour le point de vue descriptif, aboutit la définition purement métrique de la continuité approximative.

Je vais maintenant rappeler les définitions et les propriétés essentielles des deux opérations principales inversant la dérivation. Je m'excuse auprès du lecteur de développer bien des points qui lui sont extrêmement familiers. Mais il me paraît utile, à la facile intelligence de cette étude, que toutes les notions fondamentales y soient entièrement élucidées.

LES OPÉRATIONS INVERSES DE LA DÉRIVATION.

L'intégrale de Riemann.

15. Je rappelle sa définition. Une fonction φ définie en tout point d'un intervalle ab est dite *intégrale* au sens de Riemann si, les nombres a, ξ_1, x_1, ξ_2, x_2, $\ldots$, x_{n-1}, ξ_n, b formant une suite croissante, à termes intercalaires quelconques, avec coïncidence possible de deux nombres consécutifs, la somme

$$(\mathrm{S}) \qquad \varphi(\xi_1)(x_1 - a) + \varphi(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \varphi(\xi_n)(b_n - x_{n-1})$$

tend vers une limite indépendante du choix des x_i et des ξ_i sous la seule condition que le nombre des points intercalés croisse indéfiniment, le plus grand écart d'un couple quelconque d'entre eux tendant en même temps vers zéro. Pour qu'une fonction soit (au sens de Riemann) intégrable dans un intervalle ab, il faut et il suffit : 1° qu'elle soit bornée; 2° que l'ensemble des points où son oscillation [1] est positive soit de mesure nulle.

[1] Je rappelle sommairement au lecteur que le *maximum* d'une fonction φ, continue ou discontinue *dans un intervalle*, est la borne stricte supérieure des valeurs de φ dans l'intervalle, c'est-à-dire le plus petit nombre qui n'est surpassé par φ en aucun point de l'intervalle. Le *minimum* de φ dans l'intervalle est de même la borne inférieure stricte des mêmes valeurs. *L'oscillation* de φ dans l'intervalle est la différence toujours positive des deux nombres précédents (l'oscillation est cependant nulle dans le cas unique où φ est constant dans l'intervalle). Le *maximum*, le *minimum*, *l'oscillation de φ en un point* sont les valeurs limites des mêmes nombres dans un intervalle entourant ce point et tendant vers lui. Ce sont aussi respectivement la plus grande, la plus petite et la

Je renvoie pour les détails d'exposition aux livres classiques où sont éclaircies les notions d'intégrale supérieure et d'intégrale inférieure de φ entre a et b [respectivement limites de la somme S quand $\varphi(\xi_i)$ y est remplacé par le maximum ou par le minimum de φ entre x_{i-1} et x_i], et où est démontré le théorème de M. Darboux sur l'existence de ces deux intégrales coïncidant ou non entre elles en même temps que φ est intégrable ou ne l'est pas, et surtout au Chapitre consacré à la définition de Riemann dans l'Ouvrage de M. Lebesgue sur l'intégration (Chapitre V).

Une fonction φ dérivée d'une fonction f peut parfaitement n'être ni continue ni intégrable au sens de Riemann. En effet, la fonction nulle sur un ensemble parfait épais en lui-même P et, sur l'intervalle u_n ou $a_n b_n$ contigu à P, égale à $g(x, a_n, b_n)$ avec

$$g(x, a, b) = \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{(b-a)^2} \sin \frac{1}{(b-x)(x-a)}$$

cette fonction ainsi définie a partout une dérivée, qui est nulle sur P, finie et bornée hors de P, possédant au voisinage de tout point de P une oscillation égale à 2 et par suite, P étant épais en lui-même, inintégrable dans tout intervalle contenant des points de P. Cet exemple a été donné, à une légère modification près, par M. Volterra (*Giorn. de Battaglini*, t. LI, 1881, p. 93).

Nous donnerons plus loin des exemples de fonctions dérivées possédant les deux signes dans tout intervalle et discontinues sur une épaisseur pleine. Ces fonctions ne sont donc intégrables au sens de Riemann dans aucun intervalle. Par contre, on peut énoncer le théorème suivant (*L. I.*, p. 81) :

Si une fonction φ intégrable est la dérivée d'une fonction continue f, la variation de f entre deux valeurs quelconques a et b de x est égale à l'intégrale riemannienne de φ entre a et b.

En effet, intercalons entre a et b une suite quelconque de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. D'après le théorème des accroissements

---

plus grande des limites de $\varphi(x)$, de $\varphi(x')$, de $\varphi(x') - \varphi(x)$ quand x et x' tendent vers le point considéré (avec faculté de coïncider une infinité de fois avec lui).

finis, on a

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

ξ_i étant un certain nombre compris entre x_{i-1} et x_i. Écrivant ces égalités pour $i = 1, 2, \ldots, n$ (avec $x_0 = a$, $x_n = b$), et les ajoutant membre à membre, nous avons

$$f(b) - f(a) = \sum_1^n \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Or, d'après la définition des fonctions intégrables à laquelle φ satisfait par hypothèse, si n croît et si en même temps la plus grande des différences $x_i - x_{i-1}$ tend vers zéro, la simple condition que ξ_i soit compris entre x_{i-1} et x_i oblige le second membre à tendre vers le nombre appelé intégrale de $\varphi\,dx$ entre a et b. La valeur de ce second membre étant toujours égale à $f(b) - f(a)$, on a

$$f(b) - f(a) = \int_b^a \varphi(x)\,dx.$$

Enfin, en vertu de ce principe (*L. I.*, p. 70) que la variation relative d'une fonction continue dans un intervalle est comprise entre les maximum et minimum de l'un quelconque de ses quatre nombres dérivés extrêmes dans l'intervalle, $f(b) - f(a)$ est compris entre l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure de chacun d'eux prise entre a et b. Un raisonnement analogue au précédent le montre. Si donc un des quatre nombres dérivés extrêmes de f est intégrable sur ab, son intégrale riemannienne est égale à la variation de f entre a et b. Pareillement, les quatre dérivés extrêmes d'une fonction continue ayant même maximum et même minimum dans tout intervalle, si φ est une fonction intégrable, son intégrale riemannienne entre a et b est $f(b) - f(a)$, dès que φ est un dérivé médian ou extrême de f en tout point, *pour un côté invariable*.

Il résultera de la III^e Partie de ce Mémoire que le même énoncé vaudra encore, si φ est un nombre dérivé extrême pour un rang et un côté quelconques, *inconnus et pouvant varier d'un point à un autre*. Mais si l'on sait seulement de φ que c'est un dérivé médian ou extrême de côté inconnu et variable, il n'y a pas de relation certaine entre l'intégrale de φ, entre a et b et la différence $f(b) - f(a)$ comme le montre l'exemple (Ire Partie, n° 65) d'une fonction variante dans tout intervalle et possédant néanmoins en tout point au moins d'un côté, le dérivé médian ou extrême zéro.

Intégrale de M. Lebesgue.

16. Je rappelle la définition de l'intégrale par M. Lebesgue. Donnons-nous une suite de valeurs, progressant de $-\infty$ à $+\infty$ avec un accroissement inférieur à un nombre positif ε, quand on passe de chacune à la suivante. Soit l_n un quelconque de ces nombres pourvu d'un numéro d'ordre entier positif, négatif ou nul, l_n et son indice croissant simultanément. φ étant une fonction mesurable, désignons par E_n la mesure de l'ensemble où l'on a

$$l_n \leqq \varphi < l_{n+1}.$$

Selon M. Lebesgue, φ est dit *sommable entre a et b*, si la série infinie dans les deux sens $\sum_{-\infty}^{+\infty} l_n E_n$ est absolument convergente. La somme de cette série possède alors, M. Lebesgue l'a démontré, une limite déterminée quand ε tend vers zéro, et *cette limite est par définition l'intégrale* (ou *somme*) *besgienne de φ entre a et b*. l_n peut d'ailleurs dans la même série être remplacé par un nombre λ_n quelconque du segment $l_n l_{n+1}$. Toute fonction bornée, discontinue ou non, mais mesurable, est sommable. On en déduit que toute fonction intégrable au sens de Riemann est sommable. La réciproque n'est évidemment pas vraie, comme le montre l'exemple de toute fonction mesurable bornée possédant un ensemble épais de discontinuités.

Aujourd'hui encore et malgré les services rendus par elle dans de nombreux domaines de l'Analyse, on considère parfois l'opération de M. Lebesgue comme procédant d'une conception assez artificielle. En comparant les deux définitions de l'intégrale sur un exemple très rudimentaire et concret, je voudrais essayer de faire saisir qu'au fond l'idée de M. Lebesgue n'est pas moins naturelle (même pour des fonctions continues) que celle de

Riemann, et qu'elle atteint peut-être plus habilement que celle-ci le but essentiel de l'intégration.

Supposons que l'on veuille, connaissant chaque jour à 1^{cm} près l'étiage d'un cours d'eau dont le flux varie assez lentement, déterminer son niveau moyen dans une année non bissextile. Un premier procédé consistera à ajouter les étiages de tous les jours de l'année et à diviser la somme obtenue par 365. Un second procédé sera de compter pour chaque étiage évalué en centimètres le nombre de jours où le fleuve a atteint cette hauteur, puis de faire le produit de ce nombre par l'étiage correspondant, d'ajouter enfin tous les résultats pour les divers échelons centimétriques. Le résultat divisé par 365 donne la moyenne cherchée.

La première méthode rappelle l'opération de Riemann, la deuxième celle de M. Lebesgue. Car, en se conformant l'un et l'autre à la règle de leur calcul intégral, Riemann aurait considéré que chaque jour accroît la moyenne du niveau de la 365^e partie de sa valeur ce jour-là, et M. Lebesgue, groupant au contraire toutes les journées où l'étiage était au même chiffre, observerait que ce dernier contribuera à la moyenne cherchée pour une quantité égale à son produit par la fraction d'année formée des jours où la hauteur de l'eau avait cette valeur. Pour chacune des deux définitions de l'intégrale, c'est en somme dans l'esprit des deux méthodes précédentes que l'on peut faire résider leur idée primitive. Quand il s'agit d'intégrer des fonctions continues simples, l'ensemble

$$l_n \leq \varphi \leq l_{n+1}$$

est constitué de segments en nombre fini. Sa longueur totale est alors évidente. Bien entendu, pour que l'idée originelle exposée à l'instant fût susceptible de conduire à la sommation besgienne, il fallait, préalablement, que la mesure d'un ensemble quelconque, même discontinu et partout dense, fût une notion aussi claire, aussi familière que celle de la longueur totale d'un nombre fini ou infini d'intervalles deux à deux distincts, à laquelle on réduit d'ailleurs la première. Dans la troisième Partie de ce Mémoire, nous définirons une nouvelle sorte d'intégrale procédant des deux points de vue signalés. Nous subdiviserons d'abord le champ d'intégration en intervalles (et ensembles fermés) juxtaposés et dans chacun de ceux-ci nous intégrerons, selon la méthode besgienne, les résultats obtenus pour les divers éléments du champ étant ajoutés ensuite les uns aux autres.

17. Montrons par quel moyen l'intégrale de M. Lebesgue peut se ramener à celle de Riemann.

Il y a d'abord un cas où les deux définitions sont identiques, savoir celui où la fonction φ à intégrer est unioscillante (1), croissante par exemple, bornée et continue. En effet, ab étant l'intervalle d'intégration, soit a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b une suite croissante et soient ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n des points intercalés entre les premiers. La définition de Riemann nous donne pour valeur approchée de l'intégrale de φ dans ab, au moyen de cette subdivision x_i, la somme

$$\varphi(\xi_1)(x_1-a)+\varphi(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+\varphi(\xi_n)(b-x_{n-1}).$$

Or l'intervalle de variation de $\varphi(x)$ va de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$. Il est divisé en parties dont la plus grande tend vers zéro pour n infini (à cause de la continuité de φ) par les nombres croissants $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, ..., $\varphi(x_{n-1})$ qui jouent le rôle des divisions l_n. La mesure de l'ensemble où l'on a

$$\varphi(x_{i-1}) \leqq \varphi(x) \leqq \varphi(x_i)$$

est précisément $x_i - x_{i-1}$ (les signes $=$ pouvant être supprimés à volonté, φ étant toujours croissant). L'expression précédente peut donc être considérée comme fournie aussi bien par la définition de M. Lebesgue que par celle de Riemann (2).

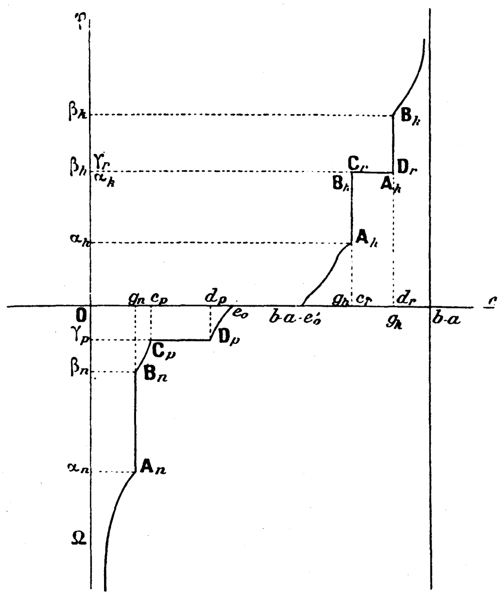
---

(1) Je dis *unioscillant* au lieu de *monotone* (*Voir* Ire Partie, n° 7 et *Comptes rendus*, 31 mai 1915).

(2) Si φ unioscillant et borné était discontinu, on aboutirait à la même conclusion, à la condition que tous les points de discontinuité (ils sont en infinité dénombrable) finissent obligatoirement par figurer et demeurer dans la suite x_n, cette dernière pouvant de plus présenter des termes successifs coïncidants, la valeur de φ en un point de discontinuité étant convenablement et multiplement choisie entre le maximum et le minimum de φ en ce même point. On pourrait eneore considérer la variable auxiliaire $y = x + \omega\varphi(x)$ ($\omega > 0$ si φ croît), définie pour toute valeur de continuité de φ. Si l'on fait ensuite varier continûment y de $\alpha = a + \omega\varphi(a)$ à $\beta = b + \omega\varphi(b)$, et correspondre un segment cntier du champ y à un même point de discontinuité de $\varphi(x)$, φ devient, comme il est aisé de le voir, une fonction continue de y, linéaire sur chacun des segments

18. Nous allons maintenant établir des identités entre l'intégrale de M. Lebesgue de toute fonction finie sommable φ et certaines intégrales riemanniennes de fonctions unioscillantes liées à φ, en supposant toutefois étendue la notion d'intégrale de Riemann soit à des champs infinis, soit à des fonctions devenant infinies aux extrémités d'un intervalle d'intégration fini ([1]).

Fig. 1.



Traçant deux axes de coordonnées Oe, $O\varphi$, nous allons caractériser deux régions généralement infinies de dimensions, mais possédant des aires bornées, susceptibles d'être évaluées par des intégrales de Riemann et dont la somme algébrique sera préci-

précédents. On considère l'intégrale $\int_\alpha^\beta \varphi\, dy$, présentant les mêmes définitions riemanniennes et besgiennes, et l'on observe qu'elle tend dans les deux cas vers $\int_a^b \varphi\, dx$ quand ω supposé positif tend vers zéro.

([1]) Les formules et résultats des numéros 18 à 20 *bis* inclus, qui ne jouent d'ailleurs aucun rôle indispensable dans le présent Mémoire et que j'ai eu incidemment l'occasion d'obtenir, ont déjà été tous publiés par M. Young dans son Ouvrage *General Theory of Integration*.

sément l'intégrale besgienne de φ entre a et b. Considérons la région du plan dont les inéquations sont $0 < e < m(\varphi)$, $m(u)$ étant la mesure de l'ensemble $\varphi(x) < u$ limité à sa partie située sur ab. Étudions la frontière C de ce continuum. Sur une parallèle à l'axe des e, e varie de o au maximum $m(\varphi)$. Ce dernier nombre n'est jamais décroissant en φ. Quand φ décroît à $-\infty$, $m(\varphi)$ tend en décroissant vers la mesure de l'ensemble où φ est inférieur à $-A$, si grand que soit A, ensemble inexistant si φ est fini en tout point. $m(\varphi)$ tend donc vers zéro et peut d'ailleurs prendre cette dernière valeur en deçà d'un point fini (inclus) β de φ. De même quand φ tend vers $+\infty$, $m(\varphi)$ tend vers la mesure de l'ensemble formé des points où φ est inférieur à A pour au moins une valeur de A, ensemble coïncidant avec ab si φ est partout fini. La limite de $m(\varphi)$ est donc $b-a$ et l'on pourra avoir $m(\varphi) = b-a$, au delà de $\varphi = \alpha$ (inclus ou non), si la mesure de $\varphi > \alpha + \varepsilon$ est nulle, si petit que soit ε, celle de $\varphi > \alpha - \varepsilon$ étant positive.

Les points où $m(\varphi)$ est constant forment des intervalles deux à deux distincts et par suite en infinité dénombrable. Soit $\alpha_n\beta_n$ l'un d'eux. On a

$$m(\alpha_n + \varepsilon) = m(\beta_n) = g_n,$$

si petit que soit ε positif et inférieur à $\beta_n - \alpha_n$. L'ensemble $\alpha_n < \varphi(x) < \beta_n$ est métriquement nul sur ab. Le segment $A_n B_n$ d'abscisse $e = g_n$ se projetant sur $O\varphi$ en $\alpha_n \beta_n$ appartient à la frontière C. Si γ_p est un point de discontinuité de $m(\varphi)$, la limite de $m(\gamma_p - \varepsilon)$, soit $m(\gamma_p)$, étant c_p, la limite de $m(\gamma_p + \varepsilon)$ étant d_p [$d_p - c_p =$ mes. (ens. $\varphi(x) = \gamma_p$)], le segment d'ordonnée $\varphi = \gamma_p$ et de projection $c_p d_p$ sur Oe appartient à C. La projection de la courbe C sur $O\varphi$, abstraction faite des intervalles $\alpha_n \beta_n$ projetant les segments rectilignes de C parallèles à $O\varphi$, est facile à caractériser. C'est un ensemble Ω, fermé sur tout segment fini, et dont aucun point ψ ne peut être entouré d'un intervalle $\psi'\psi''$, tel que l'ensemble $\psi' < \varphi(x) < \psi''$ soit mince sur ab. Ω est l'ensemble des *valeurs d'épaisseur* de $\varphi(x)$, c'est-à-dire des valeurs ψ telles que l'ensemble $|\varphi(x) - \psi| < \varepsilon$ soit épais pour toute valeur positive de ε. Ω est évidemment fermé sur tout segment fini. Si un point γ_r de Ω est isolé, γ_r coïncide avec deux points β_h, α_k, et les ensembles

$$\alpha_h < \varphi(x) < \beta_h = \gamma_r, \qquad \gamma_r = \alpha_k < \varphi(x) < \beta_k$$

étant minces, l'ensemble $\varphi = \gamma_r$ est épais, puisque γ_r agrégé à Ω est une valeur d'épaisseur de φ. Ω peut être illimité dans les deux sens, sinon il a un ou deux points extrêmes à distance finie, les points β et α caractérisés plus haut.

Tout pareillement C est la frontière de l'ensemble

$$b - a > e > m'(\varphi),$$

$m'(u)$ étant la mesure sur ab de l'ensemble $\varphi(x) > u$. Pour une valeur donnée de φ le minimum de e' est $m'(\varphi)$. $e(\varphi) + e'(\varphi)$ est égal à $b - a$ si l'ensemble $\varphi(x) = \varphi$ est mince, sinon la somme considérée est inférieure à $b - a$, la différence étant la mesure de ce dernier ensemble $\varphi(x) = \varphi$.

Nous allons voir que, si φ est sommable, l'aire comprise entre C, l'axe des φ négatifs et l'axe des e d'une part, l'aire comprise entre C, la demi-droite : $e = b - a$, $\varphi > 0$ et l'axe des e d'autre part, sont l'une et l'autre finies et que l'excès de la seconde sur la première est la somme besgienne de φ entre a et b. Or, ces aires s'expriment aussi avec des intégrales riemanniennes à coefficients différentiels unioscillants, si l'on admet l'extension de la définition de Riemann à des fonctions devenant infinies aux extrémités de l'intervalle d'intégration, ou au contraire à un champ d'intégration infini avec un coefficient différentiel infiniment petit aux extrémités de l'intervalle.

Examinons d'abord la fonction inverse de $e = m(\varphi)$. Étant donnée une valeur de e comprise entre o et $b - a$, s'il y a au moins deux nombres φ', φ'' satisfaisant à cette relation, l'ensemble $\varphi' \leqq \varphi(x) < \varphi''$ est métriquement nul. e est un des points g_n. φ est indéterminé entre a_n et b_n. On a

$$e = m(b_n) = \text{mes.}(\text{ens. } \varphi \leqq a_n).$$

Par convention, toutes ces valeurs de φ (le segment $a_n b_n$ éventuellement diminué de a_n) correspondront indifféremment à e. S'il y a un seul nombre φ satisfaisant à l'équation $e = m(\varphi)$, pour cette valeur de e, l'inversion est faite. Supposons qu'il n'y en ait aucun. $m(\varphi)$ tendant vers o pour $\varphi = -\infty$ et vers $b - a$ pour $\varphi = +\infty$, il y a des nombres φ' tels que $m(\varphi') < e$ et des nombres φ'' tels que $m(\varphi'') > e$. D'ailleurs tout nombre ψ donne à m une valeur inférieure ou supérieure à e, jamais égale par hypothèse. ψ se range donc toujours dans l'une des classes φ' ou φ'', et d'ailleurs tout nombre inférieur à un nombre de la première classe est dans la première classe, tout nombre supérieur à un nombre de la deuxième classe appartient à la même classe. Soit φ le nombre coupure séparant les deux classes. On a $m(\varphi) \leqq e$, d'après $m(\varphi') < e$ et $\varphi =$ lim supérieure φ' et, l'égalité étant supposée impossible,

$$m(\varphi) = e - \omega \qquad (\omega > 0).$$

On a aussi

$$\text{mes. [ens. } \varphi(x) \leqq \varphi] \geqq e,$$

d'après $\varphi =$ lim inférieure φ'' et $m(\varphi'') > e$. Donc, la mesure de l'ensemble $\varphi(x) = \varphi$ vaut au moins ω. φ est un point γ_p et e est un point du segment $c_p d_p$ [diminué de c_p, car $c_p = m(\gamma_p)$]. Nous posons, pour cette valeur de e, $\varphi = \gamma_p$. Dans tous les cas, à e nous faisons correspondre au moins un nombre φ, tel que l'on ait : soit

$$e = m(\varphi), \qquad \text{soit} \qquad m(\varphi) < e \leqq \text{mes. [ens. } \varphi(x) \leqq \varphi].$$

La relation

$$(1) \qquad m(\varphi) \leqq e \leqq \text{mes. [ens. } \varphi(x) \leqq \varphi]$$

équivaut à $e = m(\varphi)$ si l'ensemble $\varphi(x) = \varphi$ est mince, donc si φ n'est pas l'un des points γ_p, donc si e n'est pas agrégé à un intervalle $c_p d_p$ accru de d_p. Dans cette dernière hypothèse les termes extrêmes de la relation sont bien distincts, mais il n'y a qu'un seul nombre φ la satisfaisant.

Si e et e_1 sont distincts, e_1 surpassant e, l'homologue φ_1 de e_1 est au moins égal à φ, quels que soient les choix de φ_1 et de φ quand ces nombres comportent une ambiguïté. En effet, si l'on avait $\varphi_1 < \varphi$, on aurait

$$m(\varphi) \geqq \text{mes. ens. } [\varphi(x) \leqq \varphi_1].$$

Or, d'après la relation (1), le premier membre est au plus égal à e et le second au moins égal à e_1, ce qui est absurde d'après $e < e_1$. Donc, φ choisi en stricte conformité de nos indications et avec toutes les latitudes laissées par celles-ci, φ est une fonction non décroissante de e.

19. Je dis que *l'intégrale besgienne de* φ *entre* a *et* b *est l'intégrale riemannienne* $\int_0^{b-a} \varphi\, de$, généralisée cependant en ce qui touche les valeurs infiniment grandes du coefficient différentiel au voisinage des extrémités de l'intervalle.

En effet, appelant *pas* de la chaîne l_n (croissant en même temps que son indice n de $-\infty$ à $+\infty$) le maximum supposé fini de la différence $l_{n+1} - l_n$, formons une chaîne quelconque l_n de pas inférieur à ε. Soit $e_n = m(l_n)$. [e_n est donc la mesure de l'ensemble des points où $\varphi(x)$ est inférieur à l_n]. L'ensemble $l_n \leqq \varphi(x) < l_{n+1}$ est mesuré par $e_{n+1} - e_n = E_n$. Donc, l'intégrale besgienne de $\varphi(x)$ est par sa définition la limite supposée existante pour $\varepsilon = 0$ de

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n (e_{n+1} - e_n),$$

sous la seule condition imposée à λ_n, $l_n \leqq \lambda \leqq l_{n+1}$. Cette limite ne peut avoir un sens que si les deux séries, à termes tous de mêmes signes à partir d'un certain rang, correspondant l'une aux n positifs, l'autre aux n négatifs ou nuls, sont convergentes séparément. On sait que la convergence est indépendante du choix des λ_n dans les limites fixées (1). D'autre part, sur l'intervalle de variation

(1) Je rappelle les propositions suivantes, aidant à fonder la définition de la somme besgienne : si une valeur particulière quelconque du nombre positif a, une suite particulière l_n de pas inférieur à a, et un système quelconque de nombres λ_n, agrégés aux segments correspondants $l_n l_{n+1}$, nous donnent une série $|\lambda_n| E_n$ convergente : 1° cette même série sera encore convergente pour toute autre chaîne l_n de pas inférieur à un nombre positif fixe quelconque, et pour un choix quelconque des λ_n sur les nouveaux segments $l_n l_{n+1}$; 2° la somme de la série $\lambda_n E_n$, doublement infinie dans le cas général, tend vers une limite unique indépendante de la chaîne l_n, quand le pas de cette dernière tend vers zéro. Cette limite unique est précisément l'intégrale à définir.

Une autre conséquence de la même hypothèse est la convergence de la série $\lambda_n E'_n$, pour toute chaîne de pas fini, E'_n étant la mesure de l'ensemble

$$l_n < \varphi \leqq l_{n+1},$$

comme E_n est celle de l'ensemble $l_n \leqq \varphi < l_{n+1}$. En résumé, moyennant l'hypothèse première, quelle que soit la chaîne l_n à pas fini, si l_{n_0} est le dernier terme négatif, ou si l_{n_0+1} est le premier terme positif de la suite l_n, chacune des séries à de e, allant de o à $b-a$, considérons les points de division e_n, croissant de zéro à $b-a$, quand n croît de $-\infty$ à $+\infty$. Plusieurs points de division consécutifs $e_p, \ldots, e_q$ peuvent coïncider. Cela se produit quand l'ensemble des points où $l_p \leqq \varphi(x) < l_q$ a une mesure nulle. Car cet ensemble a toujours pour mesure $e_q - e_p$. La valeur commune des $e_p, e_{p+1}, \ldots, e_q$ est alors un nombre g_n.

Je dis que dans tous les cas, l'intégrale de Riemann, bien définie puisque son coefficient différentiel est non décroissant, $\int_{e_n}^{e_{n+1}} \varphi \, de$ est égale à $\lambda_n(e_{n+1} - e_n)$, λ_n étant un certain nombre compris entre l_n et l_{n+1}, et φ étant une détermination quelconque de la fonction de e définie plus haut. Deux cas sont à distinguer : 1° $e_n = e_{n+1}$. La relation à établir est alors vérifiée quel que soit λ_n. C'est le cas où l'ensemble $l_n \leqq \varphi(x) < l_{n+1}$ a une mesure nulle. 2° $e_n < e_{n+1}$, l'ensemble $l_n \leqq \varphi(x) < l_{n+1}$ a une mesure positive. Soit e un nombre quelconque compris entre e_n et e_{n+1}. D'après ce que nous avons vu de la non-décroissance de la fonction φ en e, qui prend en e_n et e_{n+1} les valeurs l_n et l_{n+1}, nous avons $l_n \leqq \varphi \leqq l_{n+1}$; d'où l'égalité à prouver. On déduit de là que $\varphi(x)$ étant supposé sommable, l'intégrale prise au sens de Riemann et Cauchy $\int_0^{b-a} \varphi \, de$ a un sens même si φ est infini aux deux extrémités de l'intervalle d'intégration. Car, $\int_{e_{-N}}^{e_P} \varphi \, de$ tend alors vers une limite, N et P croissant indéfiniment par valeurs positives. Or, φ n'étant jamais décroissant en e, ceci est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de l'intégrale de $\varphi \, de$ entre o et $b-a$, limites respectives de e_{-N} et e_P. Inversement, si l'intégrale précédente existe, la série $\lambda_n E_n$ est absolument convergente et la fonction $\varphi(x)$ est sommable; de plus, l'intégrale riemannienne est égale à la somme de la série. Cette dernière est donc constante, et comme elle ne

---

termes tous de mêmes signes, $\sum_{-\infty}^{n_0} E'_n l_n$ et $\sum_{n_0}^{\infty} E_n l_{n+1}$ est convergente, et la somme de ces deux séries tend vers l'intégrale besgienne de φ sur ab, quand le pas de la chaîne l_n tend vers zéro. Ces séries représentent respectivement le minimum de la somme des termes négatifs de la série $\lambda_n E'_n$, et le maximum de la somme des termes positifs de la série $\lambda_n E_n$.

saurait, quand ε tend vers zéro, avoir d'autre limite que l'intégrale besgienne de $\varphi\, dx$ entre a et b, cette dernière est bien égale à l'intégrale riemannienne généralisée de $\varphi\, de$ entre o et $b - a$, ce ce que nous voulions démontrer.

L'indétermination de φ en e sur un ensemble dénombrable de valeurs de e n'influe pas sur le résultat. L'intégrale riemannienne d'une fonction non décroissante est indépendante des valeurs choisies pour celle-ci en son ensemble dénombrable de discontinuité, dès qu'elle est donnée en l'ensemble complémentaire. Le maximum en e_0 d'une telle fonction ψ est la limite et la borne inférieure pour $\varepsilon = 0$ de $\psi(e_0 + \varepsilon^2)$, son maximum étant la limite et la borne supérieure de $\psi(e_0 - \varepsilon^2)$, $\psi(e_0)$ étant agrégé au segment de ces deux nombres si ψ est croissant.

En somme, pour déterminer φ, nous substituons à x une autre variable indépendante e. Nous caractérisons φ non par l'intervalle séparant le point x d'une certaine origine, mais par la mesure e d'un ensemble $\mathrm{E}(e)$ satisfaisant à cette condition qu'en tout point x agrégé à $\mathrm{E}(e)$, φ est plus petit (ou mieux non plus grand) qu'en tout point étranger à $\mathrm{E}(e)$, la valeur de φ pour e étant alors par définition la borne supérieure des valeurs de $\varphi(x)$ prises sur $\mathrm{E}(e)$.

La notation $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ pour l'intégrale de M. Lebesgue n'est pas très satisfaisante, puisque ce nombre n'est pas, avec une approximation indéfinie, la somme des produits de φ par des accroissements dx.

C'est en réalité l'opération que je viens d'étudier que la notation de l'intégrale besgienne devrait rappeler, puisqu'elle est bien la limite d'une somme de produits de valeurs de la fonction φ par les accroissements métriques donnés aux ensembles où la fonction prend des valeurs inférieures à φ. En désignant par (φ, e) une quelconque des déterminations de la fonction inverse de la fonction e de φ délimitée par les inégalités

$$(1) \qquad \text{mes. ens.}[\varphi(x) < \varphi] \leqq e \leqq \text{mes. ens.}[\varphi(x) \leqq \varphi] \qquad (a < x < b),$$

l'intégrale besgienne de φ sur ab devrait donc s'écrire

$$\int_0^{b-a} (\varphi, e)\, de.$$

Pour ne pas troubler les habitudes du lecteur nous conserverons la notation habituelle [1].

20. Nous allons par un changement de variable évident évaluer autrement les deux aires limitées par C, l'axe des e et, d'une part, la partie négative de l'axe des φ, d'autre part la partie aux φ positifs de la droite $e = b - a$.

Soient e_0 et $b - a - e'_0$ les mesures des ensembles $\varphi(x) < 0$ et $\varphi(x) \leqq 0$. Posons $e' = b - a - e$, en sorte que e' est relié à $\varphi = (\varphi, e)$ par des relations telles que

$$\text{mes. ens.}[\varphi(x) \geqq \varphi] \geqq e' \geqq \text{mes. ens.}[\varphi(x) > \varphi].$$

L'intégrale besgienne de $\varphi(x)dx$ peut alors s'écrire

$$\int_0^{e_0} \varphi\, de + \int_0^{e'_0} \varphi\, de',$$

φ étant négatif dans la première intégrale et positif dans la seconde. $|\varphi|$ n'étant jamais croissant dans l'une ni l'autre intégrales, une première condition pour que ces intégrales aient un sens est que, quelles que soient les déterminations choisies pour φ en e et en e', dans le premier cas $e\varphi$, dans le second cas $e'\varphi$ tendent vers zéro avec e et e' respectivement. En donnant à φ des valeurs entières

[1] Observons que. pour intégrer un coefficient différentiel f infini, il n'est pas possible de se cantonner dans le point de vue de Riemann en subdivisant le champ d'intégration sans s'inquiéter des valeurs prises par la fonction sur chaque intervalle élémentaire. Il n'est pas possible, si une fonction f définie sur ab devient infinie au voisinage de b et même en ce seul point, de décomposer indifféremment ab en une infinité d'intervalles juxtaposés, dont aucun ne contienne b (ainsi sur chacun d'eux le maximum et le minimum de f sont alors bornés, les sommes supérieures S et inférieures s relatives à f et à cette famille F d'intervalles sont des séries de termes tous finis) et cela de manière que : 1° S et s convergent pour toute famille F et 2° aient la même limite, sous la seule condition que le plus grand intervalle de la subdivision F tende vers zéro. Quel que soit f, intégrable au sens de Cauchy il sera possible de placer sur ab une suite de familles F d'intervalles subdivisionnaires satisfaisant aux conditions dites, et pour lesquelles la somme supérieure S si f tend vers $+\infty$, la somme inférieure s si f tend vers $-\infty$, l'une et l'autre si f a des valeurs infiniment grandes des deux signes, peuvent avoir des valeurs limites, respectivement aussi grandes positives, aussi grandes négatives, aussi indéterminées qu'on le veut. Il faut donc subdiviser ab en s'informant de l'oscillation de f sur chaque intervalle de la famille subdivisante. C'est se rapprocher autant du point de vue de M. Lebesgue que s'éloigner de celui de Riemann.

croissantes, on voit encore que, e_{-N} étant la mesure de l'ensemble $\varphi(x) < -N$, et e'_P celle de l'ensemble $\varphi(x) > P$, avec toujours bien entendu $a < x < b$, la convergence des séries e_{-N} et e'_P est la condition nécessaire et suffisante de la sommabilité de $\varphi(x)$. Mais calculons par parties les deux intégrales en nous rappelant que $e\psi$ et $e'\psi$ tendent respectivement vers zéro pour $\varphi = +\infty$ et $\varphi = -\infty$. Nous avons l'identité suivante où *le premier membre est une somme besgienne et le second la différence de deux intégrales riemanniennes à coefficients différentiels uni-oscillants*

$$(2) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_0^{\infty} e'\,d\varphi - \int_{-\infty}^{0} e\,d\varphi,$$

e et e' pouvant être quel que soit φ *choisis respectivement égaux aux mesures des ensembles* $\varphi(x) < \varphi$ et $\varphi(x) > \varphi$.

20 *bis*. Cette dernière formule peut s'établir directement à partir de la définition

$$I = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \lim \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n E_n,$$

moyennant les remarques suivantes : 1° $e(\alpha)$ et $e'(\alpha)$ désignant respectivement les mesures des ensembles $\varphi < \alpha$ et $\varphi > \alpha$, je dis que les produits $\alpha e(\alpha)$ et $\alpha e'(\alpha)$ tendent vers zéro, le premier quand α tend vers $+\infty$, le second quand α tend vers $-\infty$, à la condition suffisante que φ soit sommable. En effet, formons une suite l_n du type mainte fois indiqué, de pas inférieur à ε, et *pour laquelle l_0 est nul* (*voir* la note de la page 196). Posant

$$e_n = e(l_n) \qquad \text{et} \qquad e'_n = e'(l_n),$$

nous avons

$$E_n = e_{n+1} - e_n \qquad \text{et} \qquad E'_n = e'_n - e'_{n+1},$$

E_n et E'_n étant comme plus haut les mesures respectives des ensembles

$$l_n \leqq \varphi(x) < l_{n+1} \qquad \text{et} \qquad l_n < \varphi(x) \leqq l_{n+1}.$$

Les séries $l_n E'_n$ à termes et indices négatifs, et $l_{n+1} E_n$ à termes et indices positifs sont l'une et l'autre convergentes, leur somme algébrique tendant vers l'intégrale besgienne de φ sur ab, soit I, quand ε tend vers zéro. Il suit de là que

$$\sum_{m}^{\infty} l_{n+1} \mathrm{E}_n$$

tend vers zéro quand m croît, et *a fortiori* également $l_{m+1} \sum_{m}^{\infty} \mathrm{E}_n$, et aussi $l_{m+1}\, e'_m$ au plus égal à ce dernier nombre.

Or, α croissant indéfiniment par valeurs positives, déterminons m par l'inégalité

$$l_m \leqq \alpha < l_{m+1}.$$

On a

$$e'(\alpha) \leqq e'(l_m) = e'_m.$$

Donc

$$\alpha e'(\alpha) < l_{m+1} e'_m.$$

Donc, $\alpha e'(\alpha)$ tend vers zéro pour $\alpha = +\infty$. On montre tout pareillement que $\alpha e(\alpha)$ tend vers zéro pour $\alpha = -\infty$.

2° Transformons les séries $l_{n+1} \mathrm{E}'_n (n > 0)$ et $l_n \mathrm{E}_n (n < 0)$, dont la somme tend, si ε décroît à zéro, vers l'intégrale besgienne de φ sur ab. On a

$$\sum_{0}^{m} l_{n+1} \mathrm{E}'_n = \sum_{0}^{m} l_{n+1} (e'_n - e'_{n+1})$$
$$= e'_0 l_1 + e'_1 (l_2 - l_1) + \ldots + e'_m (l_{m+1} - l_m) - e'_{m+1} l_{m+1}.$$

Le dernier terme tendant vers zéro pour n infini, la série

$$e'_n (l_{n+1} - l_n)$$

est convergente, comme l'est la série $l_{n+1} \mathrm{E}'_n$ d'après la sommabilité de φ et, en tenant compte de $l_0 = 0$, on a

$$\sum_{0}^{\infty} l_{n+1} \mathrm{E}'_n = \sum_{0}^{\infty} e'_n (l_{n+1} - l_n) = \mathrm{S}'(\varepsilon).$$

Et de même

$$\sum_{-\infty}^{0} l_n \mathrm{E}_n = \sum_{-\infty}^{0} l_n (e_{n+1} - e_n) = -\sum_{-\infty}^{0} e_n (l_n - l_{n-1}) = -\,\mathrm{S}(\varepsilon).$$

L'intégrale de φ sur ab est donc la limite pour $\varepsilon = 0$ de $\mathrm{S}'(\varepsilon) - \mathrm{S}(\varepsilon)$.

Le lecteur déduira immédiatement de ceci l'équivalence de l'énoncé suivant à la définition habituelle de la somme besgienne :

Soit $\ldots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \ldots$ *une suite de segments juxtaposés, de longueurs inférieures à un même nombre* ε, *couvrant la totalité du champ réel et pourvus d'indices entiers croissant de* $-\infty$ *à* $+\infty$, *l'intervalle* u_0 *contenant l'origine. Si* μ_n *et* μ'_n *sont respectivement les mesures sur ab des ensembles* $\varphi(x) < \lambda_n$ *et* $\varphi(x) > \lambda_n$. λ_n *étant un nombre arbitraire agrégé au segment* u_n, *la somme besgienne de* φ *entre a et b est la limite unique pour* $\varepsilon = 0$ *de la différence*

$$\sum_{0}^{\infty} \mu'_n u_n - \sum_{-\infty}^{0} \mu_n u_n,$$

ces deux séries étant supposées séparément convergentes. Établissons la formule (2).

Les fonctions $e(\varphi)$ et $e'(\varphi)$ étant unioscillantes, dans tout champ fini les intégrales de $e\,d\varphi$ et $e'\,d\varphi$ ont un sens riemannien. Posons

$$I_n = \int_{l_{n-1}}^{l_n} e\,d\varphi \qquad \text{et} \qquad I'_n = \int_{l_n}^{l_{n+1}} e'\,d\varphi.$$

Les intégrales

$$\int_0^{\alpha} e'\,d\varphi \qquad \text{et} \qquad \int_{\alpha'}^{0} e\,d\varphi$$

sont croissantes en α et décroissantes en α'. Pour qu'elles aient un sens pour $\alpha = +\infty$ et $\alpha' = -\infty$, il faut et il suffit qu'elles soient bornées, la première supérieurement, la seconde inférieurement. Pour cela, il faut et il suffit que les séries I'_n à indices positifs et I_n à indices négatifs soient convergentes et les deux intégrales seront alors respectivement

$$J = \sum_{-\infty}^{0} I_n \qquad \text{et} \qquad J' = \sum_{0}^{\infty} I'_n.$$

Or, si φ est agrégé au segment $l_n l_{n+1}$, on a

$$e_n \leqq e(\varphi) \leqq e_{n+1}, \qquad e'_n \geqq e'(\varphi) \geqq e'_{n+1}.$$

Donc

$$I_n \leqq e_n(l_n - l_{n-1}) \qquad \text{et} \qquad I'_n \leqq (l_{n+1} - l_n)e'_n.$$

Pour les valeurs positives de l'indice n la convergence de la série $e'_n(l_{n+1} - l_n)$ entraîne celle de la série I'_n. De même pour les valeurs négatives de n, la convergence de la série I_n résulte de celle de la série $e_n(l_n - l_{n-1})$. Donc, J et J' existent. D'ailleurs, la quantité positive $e_n(l_n - l_{n-1}) - I_n$ est inférieure à

$$(e_n - e_{n-1})(l_n - l_{n-1})$$

puisque dans le champ d'intégration $l_{n-1}\, l_n$ correspondant à I_n, e vaut au moins e_{n-1}. De même $e'_n(l_{n+1} - l_n) - I'_n$ est inférieur à $(e'_{n+1} - e'_n)(l_{n+1} - l_n)$. Finalement, en tenant compte de la condition $0 < l_{n+1} - l_n < \varepsilon$, on a

$$0 < S(\varepsilon) - J < e_0\varepsilon < (b-a)\varepsilon$$

et

$$0 < S'(\varepsilon) - J' < e'_0\varepsilon < (b-a)\varepsilon.$$

Donc

$$S'(\varepsilon) - S(\varepsilon) = J' - J + \delta(b-a)\varepsilon,$$

δ^2 étant inférieur à *un*.

La somme besgienne de φ entre a et b étant la limite de $S'(\varepsilon) - S(\varepsilon)$ quand ε tend vers zéro, cette intégrale vaut donc $J' - J$. C'est l'identité (2).

21. Nous allons examiner les relations entre l'intégrale besgienne et le coefficient différentiel au point de vue de la dérivation.

Énumérons tout d'abord quelques propriétés essentielles de l'opération de M. Lebesgue. Appelons *intégrale d'une fonction* φ *sur un ensemble* E l'intégrale d'une fonction auxiliaire φ_1 égale à φ sur E et nulle hors de E.

1° Une fonction sommable dans un intervalle (ou sur un ensemble) l'est dans tout ensemble situé sur l'intervalle (ou partiel du premier ensemble).

2° Une fonction sommable séparément sur deux ensembles distincts E_1 et E_2 est sommable sur l'ensemble $E_1 + E_2$ réunissant leurs points, et a pour intégrale sur ce dernier la somme de ses intégrales sur les deux premiers.

3° Si une fonction φ est sommable sur E, réunion de E_1, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$, l'intégrale de φ sur E est la somme de la série absolument convergente formée par ses intégrales sur les E_n. Ce théorème se rattache visiblement à la propriété d'une série simple à termes tous de mêmes signes d'être égale à une série double obtenue en remplaçant chaque terme de la première par une série de termes de mêmes signes l'admettant pour somme. Il se démontre immédiatement en séparant sur les bases d'intégration l'ensemble des valeurs positives ou nulles de l'ensemble des valeurs négatives de la fonction intégrée.

Passons maintenant à cette proposition capitale dans la théorie de M. Lebesgue : *L'intégrale entre a et x d'une fonction sommable admet pour dérivée cette dernière fonction sur une épaisseur pleine.* Un théorème établi plus haut équivaut à celui-ci pour les fonctions bornées puisque toute fonction mesurable est approximativement continue sur une épaisseur pleine (6). Mais les exemples des nos 7 et 8 montrent que le cas des fonctions sommables non bornées est tout différent du premier. Nous allons donner diverses démonstrations de ce théorème fondamental, en le scindant en deux parties, la première relative à l'ensemble des valeurs nulles de φ, la seconde s'appliquant à l'ensemble complémentaire du premier.

I. 1° Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une fonction φ sommable entre a et b, nulle sur un ensemble parfait P épais et situé sur ab. Je dis que $f'(x)$ existe et est nul sur une pleine épaisseur de P. En effet, supposons a situé en l'extrémité gauche de P, ce qui ne modifie f que par une constante additive. Soit u_n un intervalle contigu à P et w_n l'intégrale besgienne de $|\varphi|\,dx$ sur u_n. La série w_n est convergente puisque φ est sommable. Posons

$$\int_{a_n}^{x} \varphi\,dx = y_n(x),$$

x étant sur le segment u_n et $y_n(b_n) = V_n$. On a

$$|y_n(x)| \leqq w_n$$

et d'ailleurs, d'après la propriété de l'intégrale besgienne, φ étant nul sur P,

$$f(x) = (a \Sigma x) V_n + \omega y_m(x),$$

ω étant nul si x est sur P, égal à un si x est inférieur à u_m.

Or, j'ai démontré dans la première Partie (n° 23) que toute fonction $f(x)$ douée d'une expression du type précédent où la série V_n est absolument convergente, d'une part est continue en tout point de seconde espèce de P sous la seule condition que le maximum w_n de $|y_n(x)|$ (ou, en toute équivalence, que l'oscillation de f sur u_n, au plus égale à $2w_n$) tende vers zéro pour n infini, d'autre part possède sur une pleine épaisseur de P la dérivée zéro si la série w_n est convergente (sans même supposer la continuité de f sur les contigus à P).

On déduit immédiatement de là le théorème pour l'ensemble des points où φ est nul, en décomposant celui-ci en une infinité dénombrable d'ensembles parfaits épais en eux-mêmes, accrus d'un ensemble de mesure nulle (1^re Partie, n^os 18 et 19).

Le théorème sur l'épaisseur des ensembles apparaît comme un cas particulier du précédent. Car la mesure d'un ensemble E dans un intervalle est l'intégrale dans ce même intervalle d'une fonction φ égale à *un* sur E et à zéro hors de E, et par suite l'épaisseur de E en un point est la dérivée, si elle existe, de l'intégrale indéfinie de φ.

2° Supposons φ sommable sur l'intervalle ab où est situé E, et nul sur E. Démontrons l'existence de f' et son égalité à φ sur E.

Posons

$$y = x + \int_a^x |\varphi| \, dx;$$

y est une fonction continue et croissante de x. Il y a donc correspondance biunivoque et réciproque entre les points x compris entre a et b et les points y compris entre a et $a + \int_a^b |\varphi| \, dx$. Soient H en x et H′ en y deux ensembles homologues. Remarquons d'abord que la mesure de H′ est égale à celle de H augmentée de l'intégrale de $|\varphi| \, dx$ sur H. Pour le prouver, il suffit d'observer que cette proposition est vraie a) pour tout ensemble H coïncidant avec un intervalle, puis, la sommation besgienne sur un ensemble étant une opération distributive entre les agrégats distincts en infinité dénombrable constituant le premier ensemble, *b*) pour tout ensemble H coïncidant avec la réunion d'une infinité d'intervalles distincts, ou *c*) complémentaire d'une telle famille d'intervalles, donc *d*) pour toute réunion d'ensembles fermés et pour l'ensemble complémentaire d'une telle réunion (épais ou mince), enfin *e*) pour tout ensemble mesurable. En particulier, les ensembles de mesure nulle se correspondent en x et en y. Soit G en y l'ensemble homologue de E en x. G et E ont même mesure dans deux intervalles homologues quelconques, puisque φ est nul sur E. Soient e' l'ensemble des points x de E où l'épaisseur de E est inégale à *un*, g' son homologue en y, g'' l'ensemble des y agrégés à G où G a une épaisseur inégale à *un*, e'' son homologue en x. Ces quatre ensembles ont une mesure nulle. Soient e et g les complémentaires respectifs sur E et G de $e'+e''$ et de $g'+g''$. Tout point de e a son homologue sur g et réciproquement. En deux points homologues de e et de g, les épaisseurs respectives de E et de G sont en même temps un. Soient ξ, η un de ces couples, ξ', ξ'' deux points entourant ξ et η', η'' leurs homologues. Les premiers tendent vers ξ et simultanément les seconds vers η. Je dis d'abord que $\frac{\eta''-\eta'}{\xi''-\xi'}$ tend vers *un*. Car, si μ est la mesure commune de E et de G sur les deux intervalles homologues, $\frac{\mu}{\eta''-\eta'}$ et $\frac{\mu}{\xi''-\xi'}$ tendent vers *un*, valeur de l'épaisseur de G en η et de E en ξ. Or

$$\eta''-\eta'=\xi''-\xi'+\int_{\xi'}^{\xi''}|\varphi|\,dx;$$

donc

$$\frac{1}{\xi''-\xi'}\int_{\xi'}^{\xi''}|\varphi|\,dx$$

tend vers zéro. Il en est *a fortiori* de même de $\frac{f(\xi'')-f(\xi')}{\xi''-\xi'}$, puisque le numérateur de ce quotient est en valeur absolue inférieur à l'intégrale de $|\varphi|$ prise entre ξ' et ξ''. Donc, en ξ, f possède une dérivée nulle. Il est donc établi que, φ étant nul sur E, l'ensemble des points de E où f a une dérivée nulle a même mesure que E. Car cet ensemble contient e, dont le complémentaire est métriquement nul sur E.

Soit maintenant φ une fonction sommable quelconque.

II. 1° Si φ n'est jamais négatif, f n'admet évidemment en aucun point de dérivé négatif. Soit E l'ensemble $\varphi \leqq 0$. Soit ψ une fonction égale à $-\varphi$ sur E et à zéro hors de E. La somme indéfinie de $\psi + \varphi$ a la dérivée zéro sur une pleine épaisseur de E. Donc, f a tous ses dérivés non positifs sur une pleine épaisseur de E. On en déduit sans peine que, sur de pleines épaisseurs des ensembles $\varphi \leqq \alpha$, $\varphi \geqq \alpha$, $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$, on a respectivement $f \leqq \alpha$, $f \geqq \beta$, $\alpha \leqq f \leqq \beta$ et l'on achève comme au n° 5 la démonstration de l'égalité $f = \varphi$ sur une pleine épaisseur du continu.

2° Désignons par H(A) l'ensemble des points de ab où $-A < \varphi < A$. La mesure du complémentaire K(A) de H(A) tend vers zéro avec $\frac{1}{A}$ si φ est fini en tout point. Considérons les fonctions φ_1 et φ_2, la première égale à φ sur H(A) et nulle sur K(A), l'autre au contraire égale à φ sur K et nulle sur H. On a

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi.$$

φ_1 est borné et φ_2 est sommable comme φ lui-même. Soient Φ_1 et Φ_2 les intégrales de $\varphi_1\, dx$ et $\varphi_2\, dx$ entre a et x. On a

$$f = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Or φ_1 est, comme toute fonction mesurable, approximativement continu en une épaisseur pleine, mais de plus *borné*. Donc, sur une pleine épaisseur, Φ'_1 existe et vaut φ_1. φ_2 est sommable et nul sur H(A). Donc, sur une pleine épaisseur de H(A), Φ'_2 existe et est égal à $\varphi_2 = 0$. Donc, sur une pleine épaisseur de H(A) on a

$$\Phi'_1 + \Phi'_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi.$$

Donc, l'ensemble h des points de ab où f' existe et vaut φ contient une épaisseur pleine de tous les H(A). Le complémentaire de h a donc une mesure au plus égale à celle du complémentaire K(A) de H(A), quel que soit A. h est donc mince, la mesure de K(A) tendant vers zéro avec $\frac{1}{A}$. Le théorème est entièrement établi.

3° Supposons qu'en un ensemble G de mesure non nulle, un des dérivés médians ou extrêmes de f d'un côté ou de l'autre diffère de φ. Alors, il existe un nombre positif 2δ tel que, pour un côté déterminé, droit ou gauche, un dérivé diffère de φ d'au moins 2δ

dans un sens déterminé, par excès ou par défaut, sur tout un ensemble. L'inexistence d'un tel ensemble, quels que soient simultanément 2δ, le côté, le sens de la différence, entraînerait la nullité métrique de G. Soit E cet ensemble, où par exemple un dérivé droit de f surpasse $\varphi + 2\delta$ en tout point. Il est impossible, si E n'est pas métriquement nul, que tous les ensembles E_n agrégés à E et caractérisés par la double inégalité

$$n\delta \leqq \varphi < (n+1)\delta$$

soient sans épaisseur. Supposons donc E_m épais. Sur E_m, on a

$$\varphi < (m+1)\delta,$$

et un dérivé droit de f surpasse $(m+2)\delta$. Or, d'une part les points de E où son épaisseur est *un*, d'autre part les points de E où l'intégrale de φ hors de E a pour dérivée zéro (première partie de la démonstration) forment des pleines épaisseurs de E et ont par suite en commun une pleine épaisseur η de E. Soit α un point de η.

Il est possible de trouver à droite de α un point β_n, à une distance de α inférieure à $\frac{1}{n}$, et où

$$f(\beta_n) - f(\alpha) > (m+2)\delta(\beta_n - \alpha).$$

Or, soit e_n l'épaisseur de E sur $\alpha\beta_n$. L'intégrale de φ sur E est inférieure à

$$e_n(\beta_n - \alpha)(m+1)\delta.$$

Soit $v_n(\beta_n - \alpha)$ l'intégrale de φ hors de E sur $\alpha\beta_n$. La somme de ces deux nombres est $f(\beta_n) - f(\alpha)$. On a donc, quel que soit n,

$$e_n(m+1)\delta + v_n > (m+2)\delta,$$

ce qui est absurde, puisque m et δ étant indépendants de n, e_n tend vers *un* et v_n vers zéro, quand n croît.

22. M. Lebesgue (*L. I.*, p. 123) a montré que, *si une fonction à variation bornée possède en tout point ses quatre dérivés extrêmes finis, elle a une dérivée sur une pleine épaisseur*. Il est bien facile d'établir cette même conclusion *pour toute fonc-*

tion à variation bornée, admettant ou non des dérivés infinis. En effet, c'est d'abord une conséquence immédiate du Second Théorème (1^{re} Partie) que, si une fonction est à variation bornée, l'ensemble des points où elle possède un dérivé infini est mince. En effet, en nous appuyant sur cette propriété caractéristique des fonctions à variation totale bornée d'être la différence de deux fonctions croissantes, il suffit de prouver la proposition pour une fonction de cette dernière nature. Or, le Second Théorème nous montre immédiatement l'impossibilité qu'une fonction croissante ait pour aucun côté un dérivé infini, nécessairement positif, sur un ensemble épais. Donc, les nombres dérivés extrêmes d'une fonction croissante sont sur une pleine épaisseur finis. Donc, d'après les résultats de la première Partie rappelés au début de cet article, sur une pleine épaisseur une telle fonction a une dérivée, et il en est de même de toute fonction à variation bornée.

Montrons après M. Lebesgue que *la dérivée d'une fonction à variation bornée*, envisagée en ses seuls points d'existence et complétée ailleurs par des valeurs finies quelconques, *est sommable*. En effet, dans le cas opposé, elle serait non sommable sur l'un des deux ensembles où elle possède un signe donné, par exemple le signe $+$. Désignons par E_n l'agrégat des points où

$$n < \varphi \leqq n + 1 \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

L'hypothèse de la non-sommabilité de φ est identique à celle-ci, que la série $n E_n$ diverge, en désignant par une même lettre l'ensemble et sa mesure. Alors, nous pouvons choisir N de manière que $\sum_1^N n E_n$ surpasse de plus d'une unité la variation totale de f entre a et b augmentée de $|f(a) - f(b)|$. Remplaçons tout ensemble E_n pour $n = 1, 2, \ldots, N$ par un ensemble parfait K_n agrégé à lui et dont la longueur surpasse $E_n - \frac{1}{Nn}$ (1^{re} Partie, n° 18). Les ensembles $K_1, \ldots, K_N$ sont deux à deux distincts. La plus petite distance de deux quelconques d'entre eux surpasse une partie aliquote de $b - a$, soit $\frac{b-a}{M}$. Partageons ab en M parties équivalentes, et soient ξ_h, ξ_{h+1} deux points consécutifs de la subdivision. Entre ξ_h et ξ_{h+1}, un au plus des ensembles K_n possède des points. Si K_p en possède formant un ensemble de mesure λ_h, il est visible (1re Partie, n° 49) que K_p peut être sur $\xi_h\xi_{h+1}$ enfermé dans un nombre fini d'intervalles où la variation relative de f surpasse p et, par suite, que $f(\xi_{h+1})-f(\xi_h)$ surpasse $p\lambda_h$ augmenté des variations de f sur certains segments compris dans $\xi_h\xi_{h+1}$ et ne contenant nul point de K_p ni par suite d'aucun ensemble K_n. En ajoutant les résultats de toutes les relations analogues, on trouve que $f(b)-f(a)$ surpasse $\sum_1^N nK_n$ augmenté des variations de f dans un certain nombre de segments deux à deux distincts compris entre a et b, donc

$$\sum_1^N n\left(E_n-\frac{1}{nN}\right)<f(b)-f(a)+V,$$

V étant la variation totale de f entre a et b, ce qui est absurde d'après nos hypothèses. Donc, φ est sommable.

La différence

$$f(x)-f(a)-\int_a^x \varphi\,dx$$

est une fonction nulle en a et possédant une dérivée nulle sur une épaisseur pleine. M. Lebesgue supposant de plus que tous les dérivés de f sont finis, en déduit que cette fonction est partout nulle. Nous donnerons ailleurs (3e Partie) une condition plus générale, nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi.

EXEMPLES DE FONCTIONS DÉRIVÉES PRENANT LES DEUX SIGNES DANS TOUT INTERVALLE.

23. Köpcke a donné (35) des exemples de fonctions dérivées prenant les deux signes dans tout intervalle. Il construisait, par une suite d'approximations, une certaine fonction continue dont il montrait que la dérivée existe en tout point et possède la particularité annoncée. Nous allons donner dans ce Chapitre des exemples de fonctions dérivées de la nature précédente, susceptibles d'une expression analytique simple, et nous établirons leur caractère d'être des dérivées, sans rechercher aucune forme explicite de leur primitive.

Notons qu'une fonction dérivée prenant les deux signes dans tout intervalle s'annule également dans tout intervalle (10). Les fonctions dérivées que nous envisagerons seront simplement des fonctions approximativement continues et bornées. Toute fonction continue de l'une de celles-ci est encore une fonction de même espèce, donc encore une fonction dérivée. Nous avons vu que toutes les fonctions dérivées ne sont pas approximativement continues en tout point, et que leur caractère d'être des dérivées n'est pas invariant en général par une transformation continue.

Premier exemple.

24. Considérons un ensemble de points $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, répartis sur un intervalle ab et denses entre a et b.

La série $g_n(x) = \dfrac{u_n}{\sqrt[n]{|x - a_n|}}$ où les u_n sont tous positifs, ne peut être convergente en aucun point x si la série des u_n ne l'est pas. Car le dénominateur admet quel que soit x l'unité pour plus grande limite quand n croît. Supposons au contraire *la série u_n convergente.* Je dis que, *sur une épaisseur pleine, la série $g_n(x)$ est convergente.*

Je montrerai pour cela que, sur une épaisseur pleine, la série $g_n(x)$ a ses termes inférieurs à partir d'un certain rang à $2u_n$. En effet, formons d'abord l'ensemble E_1 des points où l'on a, pour au moins une valeur de n, $g_n(x) > 2u_n$; puis l'ensemble E_2 des points où, pour au moins une valeur de n supérieure à un, on a $g_n(x) > 2u_n$, ..., et généralement l'ensemble E_p des points où, pour au moins une valeur de n surpassant $p-1$, on a $g_n(x) > 2u_n$. E_p est évidemment contenu dans $E_1, E_2, \ldots, E_{p-1}$. Si un point ξ' appartient à une infinité d'ensembles E_p, il appartient donc à tous. Quel que soit p, il y a alors une valeur de n surpassant p et telle que $g_n(\xi') > 2u_n$. ξ' appartient à l'ensemble E commun à tous les E_p. Si au contraire ξ est étranger à E, à partir d'une certaine valeur q de p (q peut être égal à *un*), ξ n'appartient plus à E_p. Si donc, il y a des valeurs de n pour lesquelles $g_n(\xi) > 2u_n$, ces valeurs de n sont toutes inférieures à q. Donc, à partir du rang q, le terme $g_n(\xi)$ est au plus égal à $2u_n$. Donc, la série $g_n(\xi)$ est convergente si tous les termes de rang inférieur à q sont finis, c'est-à-dire si ξ n'est pas l'un des points $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$.

Nous allons montrer que E a une mesure nulle et pour cela que la mesure de E_p tend vers zéro pour p infini. L'ensemble des points de ab étrangers à E existera donc et sera bien une pleine épaisseur de ab.

Évaluons la mesure de E_p. L'ensemble des points où $g_n(x) > 2u_n$ est défini par l'inégalité $|x - a_n| < \frac{1}{2^n}$. C'est un intervalle i_n de milieu a_n et de longueur $\frac{1}{2^{n-1}}$. Les points appartenant à l'un au moins des intervalles $i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{p+m}, \ldots$, forment un ensemble d'intervalles dont la mesure est évidemment au plus égale à la somme

$$\frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{2^{p+m-1}} + \ldots = \frac{1}{2^{p-2}}.$$

Telle est la borne supérieure de la mesure de E_p. Elle tend bien vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Donc E, ensemble commun aux E_p, est de mesure nulle. Ajoutons-lui les points a_n, dont l'ensemble est dénombrable. Nous obtenons un ensemble Ω' de mesure nulle. Ω, ensemble complémentaire de Ω', est une épaisseur pleine, et en tout point de Ω, la série $g_n(x)$ est convergente, comme ayant ses termes, d'abord tous finis (x étant différent des a_n), et ensuite au plus égaux à partir d'un certain rang à ceux de la série $2u_n$. Soit $g(x)$ la somme de cette série en tout point où elle est convergente.

L'ensemble des points de convergence comprend Ω. C'est donc une épaisseur pleine. Mais il peut comprendre d'autres points. Les points de l'ensemble complémentaire Γ comprennent d'abord les points a_n, puis les points ξ' où la série $g_n(\xi')$, bien qu'ayant chacun de ses termes finis, diverge néanmoins.

Aux points de Γ nous posons $g(x) = +\infty$.

25. Montrons maintenant que $g(x)$ est approximativement continue en tout point où elle est finie ([1]). Nous prouverons d'abord

([1]) Bien entendu, nous plaçons toujours x sur le segment ab, la série g_n étant uniformément convergente et g se trouvant par suite continue sur tout segment étranger au premier. La même observation vaut pour les trois autres exemples.

que $g(x)$ est *semi-continue inférieurement* en ces derniers points. Il faut entendre par là que, si petit que soit le nombre positif ε, l'ensemble des points où $g(x)$ surpasse $g(\xi)-\varepsilon$, renferme un intervalle $\xi-\eta$, $\xi+\eta$ comprenant ξ. La démonstration ne repose nullement sur les propriétés particulières des fonctions g, mais uniquement sur ce fait que g est la somme d'une série de fonctions continues (aux points ξ) et positives. g, autrement dit, est en ξ la limite d'une suite de fonctions continues croissantes. Il est connu qu'une telle limite est semi-continue inférieurement aux points ξ.

En effet, il est possible de choisir n de façon que

$$g_{n+1}(\xi)+g_{n+2}(\xi)+\ldots<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme g_n fini ou infini est toujours positif, en posant

$$r_n(x)=g_{n+1}(x)+g_{n+2}(x)+\ldots,$$

on aura

$$r_n(x)-r_n(\xi)>-\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, si

$$s_n(x)=g_1(x)+\ldots+g_n(x),$$

$s_n(x)$ est continue en ξ, point distinct des a_n. Donc, dans un certain intervalle de $\xi-\eta$ à $\xi+\eta$, on a

$$s_n(x)-s_n(\xi)>-\frac{\varepsilon}{2},$$

donc dans ce même intervalle, que g soit fini ou infini,

$$g(x)-g(\xi)=s_n(x)-s_n(\xi)+r_n(x)-r_n(\xi)>-\varepsilon.$$

Si ξ' est sur Γ, $g(\xi')$ est infini. Alors, ou bien ξ' est l'un des points a_n, par exemple celui d'indice m, $\xi=a_m$. Alors, il est possible d'entourer $a_m=\xi'$ d'un intervalle en tout point duquel $g_m(x)$ et *a fortiori* $g(x)$ surpassent $\frac{1}{\varepsilon}$ si g est finie. Ou bien, au contraire, ξ' est distinct de tous les a_n. Mais alors $s_n(\xi')$ croît indéfiniment avec n. Il est donc possible de trouver une certaine valeur de n, pour laquelle $s_n(\xi')$ surpasse $\frac{2}{\varepsilon}$. $s_n(x)$ étant continu en ξ', point distinct des a_n, nous pouvons entourer ξ' d'un intervalle $\xi'-\eta$,

$\xi' + \eta$, en chaque point duquel $s_n(x) - s_n(\xi') > -\frac{1}{\varepsilon}$. Dans cet intervalle on a donc $s_n(x) > \frac{1}{\varepsilon}$ et *a fortiori* $g(x) > \frac{1}{\varepsilon}$.

On dit souvent d'une fonction à laquelle on attribue la valeur conventionnelle $+\infty$ en certains points et en particulier en x_0, qu'elle est continue en ce dernier point si, pour grand que soit le nombre positif A, x_0 est le centre d'un intervalle dans lequel la fonction est en tout point ou bien $+\infty$, ou bien un nombre fini supérieur à A. $g_n(x)$ est donc continue aux points où elle est infinie. D'ailleurs, on ne saurait en de tels points entendre différemment l'une de l'autre la continuité et la semi-continuité inférieure. Moyennant ces conventions, on peut donc énoncer cette proposition connue : une série de fonctions continues, finies ou non, mais toutes positives, a en tout point une somme finie ou infinie, qui est une fonction semi-continue inférieurement. Ce résultat s'applique à $g(x)$.

Le nombre inverse $\frac{1}{f}$ d'une fonction continue f, finie ou infinie, mais supérieure à un nombre positif fixe, est borné, non négatif et continu au sens ordinaire en tout point où f est continue, finie ou non. Si f est partout semi-continue inférieurement, $\frac{1}{f}$ est borné, semi-continu supérieurement, et continu aux points où il est nul. Nous tirerons parti de ces conclusions relativement à la fonction $e^{-g(x)}$.

26. Montrons maintenant qu'aux points ξ où g est finie, l'ensemble défini par l'inégalité $g(x) < g(\xi) + \varepsilon$ a l'épaisseur un en ξ. Comme les points suffisamment voisins de ξ donnent tous lieu à l'inégalité $g(x) > g(\xi) - \varepsilon$, il en résultera bien que l'ensemble $|g(x) - g(\xi)| < \varepsilon$ a une épaisseur égale à un en ξ.

La série $g_n(\xi)$ étant convergente, nous chercherons à mesurer l'ensemble des points où, pour une valeur au moins de n, $g_n(x)$ surpasse $2g_n(\xi)$. En dehors de cet ensemble, il est vraisemblablement possible *a priori* de borner supérieurement $g(x)$ comparativement à $g(\xi)$.

L'ensemble des points où l'on a

$$g_n(x) > 2g_n(\xi),$$

donc

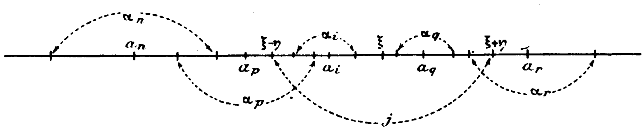
$$|x - a_n| < \frac{|\xi - a_n|}{2^n},$$

constitue l'intervalle α_n de milieu a_n et égal à $\frac{|\xi - a_n|}{2^{n-1}}$. Quel que soit le nombre positif η, cet intervalle aura des points communs avec l'intervalle j limité par $\xi - \eta$ et $\xi + \eta$, à la condition nécessaire et suffisante que les milieux des deux intervalles aient une distance inférieure à la demi-somme de leurs longueurs, donc pour

$$|\xi - a_n| < \eta + \frac{|\xi - a_n|}{2^n}.$$

On a alors certainement $|\xi - a_n| < 2\eta$, donc $\alpha_n < \frac{2\eta}{2^{n-1}}$. Or les points communs à α_n et à j forment un intervalle certainement inférieur à α_n. Donc, *que l'intervalle α_n où l'inégalité $g_n(x) > 2g_n(\xi)$*

Fig. 2.



est vérifiée, ait ou non des points communs avec j, sa partie commune avec j est toujours inférieure à $\frac{2\eta}{2^{n-1}}$.

L'ensemble H_N des intervalles α_n d'indice supérieur à N a donc sur l'intervalle $\xi - \eta$, $\xi + \eta$ une épaisseur inférieure à

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{N-1}}.$$

Nous aboutissons donc à cette conclusion très importante : H_N *étant l'ensemble des points x où pour une valeur au moins de n surpassant* N *l'inégalité $g_n(x) > 2g_n(\xi)$ est vérifiée, sur tout intervalle ayant son milieu en ξ, l'épaisseur de* H_N *est inférieure à $\frac{1}{2^{N-1}}$.*

Donnons-nous un nombre ε' quelconque et calculons un entier N_1

assez grand pour que $\frac{1}{2^{N_1-1}} < \varepsilon'$. La série $g_n(\xi)$ étant convergente, déterminons maintenant le nombre N_2 par la condition que

$$g_{N_2+1}(\xi) + g_{N_2+2}(\xi) + \ldots = r_{N_2}(\xi) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soit N un entier supérieur à N_1 et à N_2. ξ étant distinct des $a_1, a_2, \ldots, a_N$, chacune des fonctions $g_n(x)$ est continue en ξ, pour $n \leq N$. Nous pouvons alors trouver θ de façon que, dans l'intervalle $\xi - \theta$ à $\xi + \theta$,

$$s_N(x) - s_N(\xi) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

D'ailleurs, l'ensemble H_N des intervalles $\alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \ldots, \alpha_{N+p}, \ldots$ a, quel que soit η, sur l'intervalle $\xi - \eta$, $\xi + \eta$ ou j, une épaisseur inférieure à $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon'$. Or, en chaque point de j appartenant au complémentaire de H_N, c'est-à-dire en tous les points de j extérieurs à chacun des $\alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \ldots$, on a $g_n(x) < 2g_n(\xi)$ pour toute valeur de n supérieure à N, donc

$$r_N(x) < 2r_N(\xi) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Prenons η inférieur à θ. Les inégalités (1) et (2) sont simultanément vérifiées et l'on a

$$s_N(x) + r_N(x) = g(x) < s_N(\xi) + \varepsilon < g(\xi) + \varepsilon,$$

en tous les points d'un ensemble qui sur j a une épaisseur supérieure à $1 - \varepsilon'$, quel que soit η inférieur à θ.

ε' pouvant être choisi aussi petit qu'on veut (indépendamment ou non de ε, nous savons que cela est indifférent, n° 1), N_1 et N_2 et par suite θ étant toujours calculables au moyen de ε' et de ε, l'ensemble des points où $g(x) < g(\xi) + \varepsilon$ a bien en ξ une épaisseur égale à *un* [1].

---

[1] Le lecteur prouvera sans peine qu'un ensemble E a l'épaisseur un en un point x_0 à la condition nécessaire et suffisante que, sur un intervalle variable i contenant x_0 et divisé par x_0 en parties égales ou dans un rapport mutuel borné ainsi que son inverse, l'épaisseur de E tende vers *un*, quand la longueur de i tend continûment vers zéro.

27. Donc, la fonction $g(x)$ est positive, approximativement continue en tous les points où elle est finie, ceux-ci formant une épaisseur pleine. En l'ensemble mince complémentaire où $g(x)$ est infinie, elle est continue (ou semi-continue inférieurement). E′ est partout dense (et même résiduel). E′ comprend en particulier les points a_n. La fonction $G(x)$, égale à $e^{-g(x)}$ quand $g(x)$ est finie et à zéro sur E′, est inférieure à un, jamais négative, donc bornée, approximativement continue aux points où elle est positive, continue aux points où elle nulle, puisque chacun de ces derniers points est centre d'un intervalle où la fonction est inférieure à $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, quel que soit ε. Donc $G(x)$ est une fonction dérivée, qui s'annule dans tout intervalle et n'est jamais négative. α étant un nombre positif et β quelconque, la fonction $u^{\alpha+i\beta}$, nulle en même temps que u et définie pour u positif comme égale à $u^\alpha(\cos\beta L u + i\sin\beta L u)$ (en désignant par Lu la détermination réelle du logarithme népérien de u), cette fonction est continue en u. Sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. Donc la fonction $\gamma(x)$ égale à $[G(x)]^{\alpha-i\beta}$, donc nulle sur E′ et égale à $e^{-(\alpha-i\beta)g(x)}$ quand g est fini, γ est bornée et approximativement continue, puisque c'est une fonction continue de la fonction G possédant ces mêmes propriétés. γ est donc aussi une fonction dérivée. Sa partie réelle $e^{-\alpha g(x)}\cos\beta g(x)$ et le coefficient de sa partie imaginaire $e^{-\alpha g(x)}\sin\beta g(x)$ prennent évidemment les deux signes dans tout intervalle. Car, dans un intervalle quelconque, la fonction dérivée $G(x)$ prend toutes les valeurs comprises entre son maximum dans cet intervalle, savoir un certain nombre positif ω, et son minimum nul. Le cosinus et le sinus de $\beta L G(x)$ prennent donc évidemment les deux signes, puisque leur argument prend toutes les valeurs de signes contraires à β et surpassant en valeur absolue $|\beta| L\frac{1}{\omega}$.

Second exemple.

28. Voici d'autres exemples de la même espèce de dérivées :

J'abrégerai les démonstrations, toutes copiées sur le type de la précédente. Elles comprennent deux parties. Dans la première, on montre que l'ensemble des points de divergence d'un certain développement est de mesure nulle; dans la seconde, que la somme du développement aux points de convergence est approximativement continue.

Posons

$$h_n(x) = \frac{u_n}{|x - a_n|^{\frac{1}{Ln}}}.$$

Pour qu'en au moins un point la série $h_n(x)$ soit absolument convergente, il est nécessaire que la série u_n possède ce dernier caractère. Nous supposerons la série u_n à termes tous positifs, afin de connaître le signe des infinis de la série $h_n(x)$:

1° L'ensemble des valeurs de convergence de la série $h_n(x)$ a pour épaisseur un. En effet, la relation $h_n(x) > ku_n$ exige

$$|x - a_n| < k^{-Ln} = \frac{1}{n^{Lk}}.$$

Prenons $k = e^2$.

La relation dite est donc vérifiée pour cette valeur de k, uniquement dans l'intervalle i_n de milieu a_n et de longueur $\frac{2}{n^2}$.

L'ensemble E_p des points où, pour au moins une valeur de n surpassant $p - 1$, la relation précédente est vérifiée a une mesure inférieure à la somme

$$i_p + i_{p+1} + \ldots = 2\sum_p^\infty \frac{1}{n^2}.$$

La série $\frac{1}{n^2}$ étant convergente, la mesure de E_p tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$. E_p contient E_{p+1}. Donc, l'ensemble des points appartenant à une infinité de E_p est leur ensemble commun. Il est mince. Tout point x de son complémentaire, pleine épaisseur du continu, cesse à partir d'une certaine valeur de p, soit $P(x)$, d'appartenir à E. Donc on a en ce point

$$h_n(x) \leqq e^2 u_n$$

pour toute valeur de n surpassant $P(x)$. En un tel point x, s'il est distinct des a_n, la série $h_n(x)$ est convergente.

Soit Γ l'ensemble mince des points de divergence, Ω la pleine épaisseur complémentaire. Nous posons encore

$$s_n(x) = \sum_1^n h_n(x), \qquad r_n(x) = \sum_{n+1}^{\infty} h_n(x),$$

cette dernière fonction étant définie seulement sur Ω; et sur Ω encore,

$$h(x) = \sum_1^{\infty} h_n(x);$$

$h(x) = +\infty$ sur Γ.

2° La fonction $h(x)$ est semi-continue inférieurement en tout point de Ω, où elle est finie, et continue en tout point de Γ où elle est infinie. ξ étant agrégé à Ω, montrons que l'ensemble des x où

$$h(x) > h(\xi) + \varepsilon$$

est d'épaisseur nulle en ξ. L'ensemble des points où, pour une valeur déterminée de n, $h_n(x) > e^2 h_n(\xi)$, est l'intervalle

$$|x - a_n| < \frac{|\xi - a_n|}{n^2},$$

soit β_n, de milieu a_n et de longueur $2|\xi - a_n| : n^2$. Si β_n a des points communs avec l'intervalle $\xi - \eta$, $\xi + \eta$, ou $j (\eta > 0)$, on a

$$|\xi - a_n| < \eta + |\xi - a_n| : n^2,$$

donc, si n est au moins égal à deux, $|\xi - a_n| < 2\eta$, et la partie commune à β_n et à j, au plus égale à β_n qu'elle existe ou non, est dans tous les cas moindre que $2\eta : n^2$. Les points où l'un au moins des nombres $h_n(x)$ surpasse $e^2 h_n(\xi)$, n surpassant N, forment un ensemble K_N possédant sur l'intervalle j une mesure inférieure à $2\eta \sum\limits_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. L'ensemble K_N a donc sur tout intervalle de centre ξ une épaisseur inférieure à $\sum\limits_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Soit N_1 la plus petite valeur de l'entier N telle que $\sum\limits_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon'$.

N_1 existe si ε' est positif, d'après la convergence de la série $\frac{1}{n^2}$. Quel que soit N au moins égal à N_1, l'ensemble K_N aura sur tout intervalle de centre ξ une épaisseur inférieure à ε'. Nous supposons ε' donné d'avance très petit, indépendant de ε ou au contraire égal à une fonction connue de ε infiniment petite avec lui. Déterminons un entier N_2 tel que $r_{N_2}(\xi) < \frac{\varepsilon}{2e^2}$.

Alors, soit N un nombre supérieur à N_1 et à N_2. A cause de la continuité de $s_N(x)$ en ξ, point distinct des a_n, je peux entourer ξ d'un intervalle $\xi - \theta$ à $\xi + \theta$ (θ positif) en tout point duquel

$$s_N(x) < s_N(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, en tout point x étranger à K_N on a, quel que soit n supérieur à N,

$$h_n(x) \leqq e^2 h_n(\xi),$$

donc

$$r_N(x) \leqq e^2 r_N(\xi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit donc η un nombre positif quelconque inférieur à θ. En tout point x, compris entre $\xi - \eta$ et $\xi + \eta$ et étranger à K_N, on a

$$h(x) = s_N(x) + r_N(x) < s_N(\xi) + \varepsilon < h(\xi) + \varepsilon.$$

K_N ayant sur l'intervalle de $\xi - \eta$ à $\xi + \eta$ une épaisseur inférieure à ε' pour toute valeur positive de η, quel que soit le nombre positif fixe ε, l'ensemble $h(x) < h(\xi) + \varepsilon$ a une épaisseur égale à un en ξ. Comme l'ensemble $h(x) > h(\xi) - \varepsilon$ comprend tout un intervalle contenant ξ, la fonction $h(x)$ est approximativement continue en ξ, point quelconque de l'ensemble Ω où elle est finie. Elle est d'ailleurs continue sur Γ où elle est infinie. La fonction $e^{-g(x)} = H(x)$, nulle aux points de Γ', est approximativement continue en tout point où elle est non nulle, continue ailleurs, jamais négative et toujours inférieure à *un*. C'est une dérivée.

29. Soit maintenant $k(x)$ la fonction $\sum_1^\infty \frac{v_n}{|x - a_n|^{\frac{1}{Ln}}}$, la série v_n étant absolument convergente, mais à termes de signes quel-

conques. Si nous séparons dans k les termes positifs et les termes négatifs, nous obtenons deux séries $k_1(x)$ et $-k_2(x)$, à termes tous de même signe et convergeant l'une et l'autre en dehors des points de deux ensembles de mesure nulle e_1 et e_2. En tout point extérieur à e_1 et à e_2, $k_1(x)$ et $k_2(x)$ sont finies et l'une et l'autre approximativement continues. Il en est de même de $k(x)$ aux mêmes points et aussi de $K(x) = e^{ik(x)}$ dont le module est égal à un. Mais en un point où l'une au moins des séries k_1 ou k_2 diverge, nous ignorons s'il est possible d'y définir K de manière que cette fonction soit là encore approximativement continue. En tous cas, HK est de cette dernière sorte en tous les points où $k_1(x)$ et $k_2(x)$ sont simultanément finis. Mais introduisons maintenant l'hypothèse supplémentaire $|v_n| < A\, u_n$, A étant un nombre positif fixe. Alors, les points de divergence de l'une des séries k_1 ou k_2 sont *a fortiori* des points d'infinitude de $h(x)$. Donc, en ces points, H est nul et continu. K étant borné aux points où elle est définie, et choisie quelconque mais de module *un* si k_1 et k_2 ne sont pas finis simultanément, HK est nul et continu aux points où k n'est pas fini. Donc HK est une fonction bornée, partout approximativement ou exactement continue. C'est une fonction dérivée. On montre comme plus haut qu'elle prend les deux signes dans tout intervalle.

30. Remarquons enfin que tous les raisonnements ont reposé sur la convergence de la série k^{-Ln}, pour une certaine valeur de k, dont l'office a été rempli par e^2. Mais la fonction Ln pourrait être remplacée par toute autre ρ_n croissant indéfiniment avec n de manière que, pour une valeur fixe de k, la série $k^{-\rho_n}$ soit convergente. Évidemment elle l'est alors encore pour toute valeur de k supérieure à la précédente. $k^{-\rho_n}$ décroissant relativement à n, le produit $nk^{-\rho_n}$ doit tendre vers zéro. Donc, le quotient $\frac{Ln}{\rho_n}$ ou μ_n doit, et l'on voit aisément que cette condition suffit, rester inférieur à un nombre fixe pour toutes les valeurs de n.

Donc, λ_n désignant le rapport de v_n à u_n :

Sont des fonctions dérivées bornées, prenant les deux signes dans tout intervalle, la partie réelle et la partie imaginaire des *fonctions*

$$T(x) = e^{-\frac{u_n(1+i\lambda_n)}{|x-a_n|^{\frac{\mu_n}{Ln}}}}$$

où u_n est positif et terme général d'une série convergente, μ_n étant positif et λ_n de signe indifférent, mais l'un et l'autre bornés.

Le premier exemple apparaît alors comme un cas particulier de celui-ci.

Troisième exemple.

31. Le procédé de démonstration change un peu pour établir que la fonction suivante appartient à la même espèce de fonctions dérivées.

Considérons le produit

$$\prod_1^{\infty} |x - a_n|^{\frac{u_n}{Ln}},$$

les u_n étant tous positifs et formant une série convergente :

1° Je dis d'abord que ce produit infini est absolument convergent sur une épaisseur pleine. On sait qu'il y a simultanéité entre la convergence simple ou absolue d'un produit infini et celles de la série ayant pour termes les logarithmes des facteurs de ce produit. En premier lieu, l'ensemble des points où l'on a

$$\frac{L|x-a_n|}{Ln} u_n < -2u_n$$

est l'intervalle

$$|x - a_n| < \frac{1}{n^2}.$$

Les points appartenant à une infinité de ces intervalles ont une mesure nulle, comme le prouve un raisonnement fait plusieurs fois et reposant simplement sur ceci que la série des longueurs de ces intervalles $\left(\text{ici } \frac{1}{n^2}\right)$ est convergente. L'ensemble complémentaire est donc bien une épaisseur pleine. En chacun de ses points, on a, sauf pour un nombre fini de valeurs de n, donc pour toutes les valeurs de n surpassant un certain entier,

$$\frac{\mathrm{L}\,|x-a_n|}{\mathrm{L}n}\,u_n \geqq -2u_n.$$

D'ailleurs, si les a_n et x sont entre a et b, le premier membre est inférieur à u_n, dès que n surpasse $b-a$. Donc, à partir d'une certaine valeur de n, fixe pour l'inégalité de gauche, dépendant de x pour l'inégalité de droite, on a

$$u_n > \frac{\mathrm{L}\,|x-a_n|}{\mathrm{L}n} \geqq -2u_n.$$

Le facteur général du produit infini est donc compris entre ceux de deux produits absolument convergents. Il est donc lui-même absolument convergent. D'ailleurs l'inégalité

$$|x-a_n|^{\frac{u_n}{\mathrm{L}n}} < e^{u_n},$$

pour $n > b-a$, montre que les facteurs surpassant un dans l'expression donnée forment un produit convergent. Donc, s'il y a divergence du produit, c'est uniquement à cause des facteurs inférieurs à un, c'est donc que le produit tend vers zéro.

Soit toujours Ω l'épaisseur pleine où le produit est convergent et différent de zéro (donc les a_n exclus), Γ l'ensemble où il est nul.

Nous désignons dans tous les cas le produit par $\mathrm{P}(x)$.

P étant défini en tout point, nous pouvons supposer que le segment ab contenant les a_n est inférieur à un. S'il en est autrement, soit l un nombre supérieur à $b-a$. Il nous suffit de considérer le produit $\mathrm{P}(lx)=\mathrm{Q}(x)$, qui, moyennant la notation $\frac{a_n}{l}=b_n$, et la convergence du produit $\prod_1^\infty l^{\frac{u_n}{\mathrm{L}n}}=\lambda$, est égal à $\prod_1^\infty |x-b_n|^{\frac{u_n}{\mathrm{L}n}}$, au facteur numérique près λ. Les zéros évidents b_n de Q sont répartis sur un segment inférieur à un. Supposons cette transformation faites dès le début. Tous les facteurs du produit sont inférieurs à un, x étant sur ab.

2° Montrons qu'en tout point ξ de Ω, $f(x)$ est approximativement continue. Le produit des n premiers facteurs de P va en décroissant contrairement à n, donc la limite $P(x)$ est semi-continue supérieurement. En particulier, $P(x)$ est continu sur Γ où il est nul. Prouvons donc simplement la semi-continuité inférieure approximative de P en ξ. Donnons-nous deux nombres positifs ε et ε' dépendants ou non l'un de l'autre, et montrons l'existence d'un nombre positif θ, tel que dans tout intervalle j d'extrémités $\xi - \eta$, $\xi + \eta$ l'épaisseur de l'ensemble x défini par l'inégalité $P(x) - P(\xi) > -\varepsilon$ surpasse $1 - \varepsilon'$ si $\eta < \theta$. Ou plutôt, $P(\xi)$ étant un nombre non nul, nous diviserons préalablement le premier membre par $P(\xi)$ et nous remplaçons $\dfrac{P(x)}{P(\xi)} - 1$ par

$$\operatorname{Log} P(x) - \operatorname{Log} P(\xi).$$

Si en effet nous prouvons l'égalité à *un* de l'épaisseur en ξ pour l'ensemble

$$(1) \qquad \operatorname{Log} P(x) - \operatorname{Log} P(\xi) > -\varepsilon$$

ou encore

$$P(x) > P(\xi)\, e^{-\varepsilon} = P(\xi) - P(\xi)(1 - e^{-\varepsilon}),$$

la semi-continuité inférieure approximative de P en ξ sera bien établie. Considérons donc l'inégalité (1). Formons d'abord l'ensemble des points où l'on a

$$(2) \qquad \frac{u_n}{Ln} \operatorname{Log} |x - a_n| - \frac{u_n}{Ln} \operatorname{Log} |\xi - a_n| < -2u_n.$$

C'est l'intervalle α_n défini par

$$\operatorname{Log} |x - a_n| < -2Ln + \operatorname{Log} |\xi - a_n|$$

ou

$$|x - a_n| < \frac{|\xi - a_n|}{n^2}.$$

Nous trouvons des conditions analogues à celles des exemples antérieurs. L'épaisseur sur tout intervalle de centre ξ de l'ensemble R_N des points où, pour une valeur au moins de n supérieure à N, on a l'inégalité (2) est inférieure à $\displaystyle\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Nous choisissons N_0 et N'_0 par les conditions

$$\sum_{N_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon', \qquad 2\sum_{N'_0}^{\infty} u_n < \frac{\varepsilon}{4};$$

puis N_1 par

$$\sum_{N_1}^{\infty} \frac{u_n}{Ln} \operatorname{Log} |\xi - a_n| > -\frac{\varepsilon}{4},$$

pour faire intervenir l'hypothèse de la convergence du produit P en ξ. Soit maintenant N un entier supérieur à N_0, N'_0, N_1. La somme

$$\sigma_N(x) = \sum_{0}^{N} \frac{u_n}{Ln} \operatorname{Log} |x - a_n|$$

est continue et finie en ξ. Il existe un nombre positif θ tel que, dans l'intervalle limité par $\xi - \theta$ et $\xi + \theta$, on a

$$\sigma_N(x) > \sigma_N(\xi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dans l'ensemble complémentaire de R_N, on a, pour toute valeur de n surpassant N, l'inégalité opposée à la relation (2), donc

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{u_n}{Ln} \operatorname{Log} |x - a_n| > \sum_{N+1}^{\infty} \frac{u_n}{Ln} \operatorname{Log} |\xi - a_n| - 2\sum_{N+1}^{\infty} u_n.$$

D'après les inégalités $N > N_1$ et $N > N_0$, le second membre surpasse $-\frac{\varepsilon}{2}$.

Donc, quel que soit η inférieur à θ, on a, en tous les points étrangers à R_N et intérieurs à l'intervalle $\xi - \eta$ à $\xi + \eta$ ou j,

$$(2) \qquad \operatorname{Log} P(x) > \sigma_N(\xi) - \varepsilon > \operatorname{Log} P(\xi) - \varepsilon.$$

Or, N surpassant N_0, l'ensemble complémentaire de R_N et où l'inégalité (2) est remplie a sur j une épaisseur supérieure à $1 - \varepsilon'$. Il est donc établi que $P(x)$ fonction bornée, non négative, est approximativement continue partout où elle est non nulle, et d'ailleurs continue quand elle est nulle.

32. Soit v_n un nombre à signe indifférent dont la valeur absolue est inférieure à u_n (ou à Au_n, A étant un nombre positif fixe).

Partout où $P(x)$ est différent de zéro, donc sur l'épaisseur pleine Ω,

$$Q(x) = \prod_1^\infty |x - a_n|^{\frac{v_n}{Ln}}$$

est absolument convergent, donc ni nul ni infini, et quelle que soit la valeur donnée à Q hors de Ω, Q est approximativement continu sur Ω, comme étant le produit de deux fonctions de telle nature, formées l'une des facteurs où v_n est positif, l'autre des facteurs où v_n est négatif. Donc, $Q^i(x)$ est déterminé sur Ω et approximativement continu en tout point de ce même ensemble, quelles que soient les valeurs attribuées à cette fonction hors de Ω. [L'expression $Q^i(x)$ se calcule, conformément à la définition donnée plus haut de la fonction u^i pour u positif.] De même le produit des deux fonctions P et Q^i est approximativement continu sur Ω. Sur Γ, complémentaire de Ω, $P(x)$ est nul et continu. Donc, quelles que soient les valeurs de module égal à 1 attribuées indifféremment à Q^i sur Γ, PQ^i est nul et continu sur Γ. PQ^i est donc une fonction dérivée. Cette fonction prend d'ailleurs pour sa partie réelle et sa partie imaginaire les deux signes dans tout intervalle. Donc :

Sont encore des fonctions dérivées prenant les deux signes dans tout intervalle, moyennant les hypothèses que u_n est positif et terme général d'une série convergente, λ_n étant un nombre réel borné, de signe indifférent, la partie réelle et la partie imaginaire du produit infini

$$S(x) = \prod_1^\infty |x - a_n|^{\frac{u_n(1+i\lambda_n)}{Ln}}$$

33. Si les a_n ne sont pas denses partout sur ab, les formules nous donnant les fonctions $T(x)$ et $S(x)$ ont un sens non moins clair que précédemment. Tous les raisonnements subsistent intégralement faits pour démontrer : 1° la nullité métrique de

l'ensemble de divergence des séries ou produits infinis considérés; 2° les propriétés de continuité exacte ou approximative des fonctions $T(x)$ et $S(x)$ aux points de convergence ou de divergence des séries ou produits servant à les exprimer. Sur tout segment ne contenant pas de points a_n, les séries ou produits donnant les fonctions envisagées seraient uniformément convergentes. Cela se voit immédiatement, en remplaçant les $|x - a_n|$ par leurs bornes inférieures supposées positives. Ces fonctions seraient donc continues et différentes de zéro dans les intervalles ne contenant pas de points a_n. Leurs parties réelles et imaginaires n'auraient pas le double signe au voisinage de tout point. Mais dans tout intervalle ω où se trouve, ne fût-ce qu'un point a_n, les fonctions considérées $T(x)$ et $S(x)$ s'annulent. D'autre part, l'ensemble de leurs zéros étant toujours mince, il y a donc des points de l'intervalle ω où leur module est non nul et leur argument fini. Ce dernier, ayant des valeurs infiniment grandes positives ou négatives au voisinage de chaque a_n, prend dans l'un ou l'autre cas sur l'intervalle ω toute valeur réelle supérieure à son minimum ou inférieure à son maximum. Donc, la partie réelle et le coefficient de i dans T et S prennent toujours les deux signes dans l'intervalle ω considéré. L'ensemble des a_n, composé comme on sait (1re Partie, note 3) d'un ensemble clairsemé et d'un noyau dense en lui-même, peut admettre pour dérivé de ce dernier un ensemble parfait discontinu choisi librement.

34. On peut obtenir sans difficulté des fonctions dérivées bornées et tout d'abord jamais négatives, nulles au moins en chaque point a_n, et possédant des logarithmes de la forme

$$\mu(x) = -\sum_{1}^{\infty} A_n \psi_n\left(\frac{1}{|x - a_n|}\right),$$

les A_n étant positifs, et la fonction $\psi_n(u)$ étant croissante en u et infinie avec ce nombre. La série sera convergente sur une pleine épaisseur, si

$$A_n = \frac{v_n}{\psi_n\left(\frac{1}{u_n}\right)},$$

les séries v_n et u_n à termes positifs étant convergentes; car le terme général de $\mu(x)$ ne surpasse v_n qu'en un intervalle

$$|x - a_n| < u_n.$$

Ces intervalles ayant une somme finie, l'ensemble des points appartenant à une infinité d'entre eux a certainement une mesure nulle. En tout point étranger à cet ensemble, nous sommes assurés de la convergence de la série $\mu(x)$.

Posons

$$\mu_n(x) = \frac{v_n}{\psi_n\left(\frac{1}{u_n}\right)} \psi_n\left(\frac{1}{|x - a_n|}\right).$$

Il faudra rechercher si $\mu(x)$ est approximativement continu. En premier lieu, en un point ξ où la série $\mu_n(x)$ convergera, $\mu(x)$ est semi-continu inférieurement, car elle est la limite d'une fonction continue (finie ou infinie) croissant relativement à son rang. Il restera seulement à examiner la condition $\mu(x) < \mu(\xi) + \varepsilon$, et pour cela à étudier les inégalités

$$\mu_n(x) < \lambda_n \, \mu_n(\xi),$$

λ_n étant un facteur borné ou

$$\mu_n(x) < \lambda_n \mu_n(\xi) + w_n,$$

w_n étant le terme général positif d'une série convergente. Le type de démonstration utilisé plus haut trouvera son emploi si l'ensemble des points où l'une au moins des inégalités ci-dessus est vérifiée pour $n > N$ est d'épaisseur infiniment petite avec $\frac{1}{N}$, sur tout intervalle de milieu ξ, si fréquents que soient les a_n autour de ξ. Sinon, il sera nécessaire de porter son attention sur la répartition des infinis évidents a_n, et de la codifier le cas échéant. Je n'entre pas dans de plus amples détails. Le lecteur construira sans difficulté de tels exemples, s'il veut bien tenir compte des indications précédentes.

Quatrième exemple : la fonction de Köpcke.

35. En 1887, Köpcke a donné dans les *Math. Annalen* (t. 28) un exemple de fonction continue pourvue en chaque point (du

moins Köpcke le croyait) d'une dérivée, cette dernière s'annulant et prenant les deux signes dans tout intervalle compris dans son domaine de définition. Ce géomètre revint à plusieurs reprises sur le même sujet (*M. A.*, t. 34 et 35; *Festschritte d. Hamb. Math. Gesells.*, 1890) corrigeant chaque fois des erreurs contenues dans ses démonstrations antérieures. Cette question des fonctions dérivables et partout multi-oscillantes a d'ailleurs provoqué bien d'autres travaux (Pereno, *Giorn. di Mat.*, 35; Broden, *Ofr. uf. Vet. Ak. Forh. Stockholm*, 1900). En comparant ces Mémoires aux pages qui précèdent, le lecteur se rendra compte de la clarté et de la simplicité que la notion des rapports entre primitive et dérivée emprunte aux idées de MM. Borel et Lebesgue sur la mesure des ensembles.

Dans son premier Mémoire, Köpcke définit sa fonction $G(x)$ comme la limite d'une suite $G_n(x)$ obtenue de la manière suivante : $G_n(x)$ est toujours représentée par une ligne brisée, en sorte que la dérivée $G_n(x)$ subit une discontinuité aux projections sur Ox de chaque sommet de cette ligne (la première erreur de Köpcke avait été de ne pas apercevoir que la variation brusque de G'_n entre les côtés gauche et droit de ces points particuliers ne s'atténuait pas à zéro par les retouches ultérieures substituant G_{n+p} à G_n pour les valeurs entières successives de p). $G_0(x)$ est représenté par les côtés du triangle isoscèle rectangle de base $0-1$ sur l'axe des abscisses. Supposons $G_{n-1}(x)$ défini, et soit $\alpha\beta$ un des segments de Ox où G_{n-1} est linéaire et de dérivée p. Pour passer à G_n sur $\alpha\beta$, nous définissons ainsi la différence $G_n - G_{n-1} = g_n$. Soit γ le milieu de $\alpha\beta$. Par γ menons les droites $D_1, D_3, D_5, \ldots, D_{10^n+1}$ de pentes respectives

$$-\frac{p}{10^n},\quad -\frac{3p}{10^n},\quad -\frac{5p}{10^n},\quad \ldots,\quad -\frac{10^n-1}{10^n}p,\quad -\frac{10^n+1}{10^n}p.$$

La ligne brisée représentant $g_n(x)$ a, par définition, son premier sommet en α sur Ox, son second S_2 sur D_3, ..., son $m^{\text{ième}}$ S_m sur D_{2m-1}, et le côté joignant $S_m S_{m+1}$ est, du second jusqu'à l'avant-dernier inclusivement, parallèle à D_{2m-3}. L'avant-dernier côté a pour pente $-\frac{10^n-3}{10^n}p$. La pente de $S_1 S_2$ est $\frac{p}{10^n}$, S_1 étant en α, o. Le dernier sommet est en γ, le dernier côté étant la dernière droite D_{10^n+1}. Les pentes successives des côtés sont donc

$$\frac{p}{10^n}, \quad \frac{-p}{10^n}, \quad \frac{-3p}{10^n}\cdots, \quad -\frac{10^n-5}{10^n}p, \quad -\frac{10^n-3}{10^n}p \quad \text{et} \quad -\frac{10^n+1}{10^n}p.$$

Ils sont au nombre de $\frac{1}{2}10^n+1=N$. Il y a $\frac{1}{2}10^n+2$ sommets, y compris α et γ. Ce qui précède suffit à définir entièrement g_n entre α et γ. Entre γ et β, nous fixons g_n en lui donnant des valeurs opposées en deux points symétriques par rapport à γ : $g_n(x-\gamma)=-g_n(\gamma-x)$ si $\alpha\leqq x\leqq\beta$.

γ n'est plus un sommet de la ligne brisée parcourue de α à β; il est le milieu d'un côté de pente $-\frac{10^n+1}{10^n}p$. On voit sans peine que les abscisses des sommets S_m comptées à partir de γ, donc négatives, diminuent de moitié en valeur absolue quand m croît d'une unité. On a

$$\gamma-x_m=\frac{\gamma-\alpha}{2^m},$$

sauf pour $m=1$ où $\gamma-x_1=\gamma-\alpha$. De plus, m dans cette formule ne doit pas dépasser $N=\frac{1}{2}10^n+1$. On a $x_{N+1}=\gamma$. Entre x_m et x_{m+1}, $(1\leqq m\leqq N-1)$, la pente de G_n, somme de celles de G_{n-1} et de g_n, est $p\left(1-\frac{2m-3}{10^n}\right)$. Entre x_1 et x_2, elle est $p\left(1+\frac{1}{10^n}\right)$; entre x_2 et x_3, $p\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$; entre x_{N-1} et x_N, $p\left(1-\frac{10^n-3}{10^n}\right)=\frac{3p}{10^n}$, entre x_N et $x_{N+1}=\gamma$,

$$p\left(1-\frac{10^n+1}{10^n}\right)=-\frac{p}{10^n}.$$

C'est ce changement de signe au voisinage immédiat de γ qui doit produire l'oscillation de G. Remplaçant m par sa valeur, nous obtenons pour la pente entre x_m et x_{m+1} $(2\leqq m\leqq N-1)$:

$$p\left[1-\frac{1}{10^n}\left(\frac{2}{\operatorname{Log}2}\operatorname{Log}\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-x_m}-3\right)\right].$$

En se débarrassant de l'indice m, on se trouve interpoler cette pente de G_n par une fonction continue entre α et β, la coïncidence avec les valeurs exactes ayant lieu pour tous les sommets S_2, S_3, ..., S_{N-1} du côté droit. Pour le dernier intervalle où la pente de G_n est de signe opposé à celle de G_{n-1}, et égale à $-\frac{p}{10^n}$, la formule ne représente plus ce nombre d'une manière satisfaisante.

36. A la construction de Köpcke nous substituons la suivante, qui atteint plus pratiquement le but visé par ce géomètre. Nous ne nous occupons pas de G, mais uniquement de sa dérivée que nous mettons sous forme d'un produit infini. Le $n^{\text{ième}}$ facteur φ_n a comme celui de Köpcke une définition particulière pour chacun des segments $\alpha\beta$ formant une subdivision de ab. Pour simplifier, il sera égal à 1 $\left(\text{et non pas à } 1+\frac{1}{10^n}\right)$ aux extrémités de chacun de ces segments, mais il prendra le même minimum $-\frac{1}{10^n}$ au milieu de chacun de ces segments. De plus la subdivision concernant φ_n comprend tous les points de la subdivision concernant φ_{n-1}. (Ceci uniquement pour se rapprocher le plus possible de la fonction de Köpcke. Cette restriction est inutile pour aboutir à une fonction dérivée.) Cette fonction φ_n entre deux points subdivisionnaires consécutifs α et β sera égale à

$$1+\frac{A}{10^n}\operatorname{Log}\left[\frac{|x-\gamma|}{\gamma-\alpha}+e^{-\frac{10^n+1}{A}}\left(1-\frac{|x-\gamma|}{\gamma-\alpha}\right)\right],$$

φ_n reprend les mêmes valeurs sur $\alpha\beta$ en deux points symétriques par rapport à γ. φ_n est continu, inférieur à *un* sauf aux points α, β et son minimum indépendant de $u=\gamma-\alpha$ est atteint pour $x=\gamma$ et vaut $-\frac{1}{10^n}$. φ_n s'annule deux fois. En choisissant $A=\frac{2}{\operatorname{Log} 2}$, on se rapproche énormément, sauf en α, du facteur de Köpcke définissant la pente entre α et β.

1° Examinons la convergence du produit φ_n. D'abord, si pour une valeur n il y a une infinité de facteurs φ_n négatifs, d'après l'inégalité $\varphi_n(x)>-\frac{1}{10^n}$, en x le produit tend évidemment vers zéro. Le lecteur voit sans peine que les intervalles où $\varphi_n(x)$ est inférieur à $1-\frac{1}{n^2}$ ont une mesure totale extrêmement petite relativement à n; il en est de même pour l'ensemble des points où l'inégalité $\varphi_p(x)<1-\frac{1}{p^2}$ est vérifiée pour au moins une valeur de p supérieure à n. Les zéros des φ_n forment un ensemble dénombrable. L'ensemble des points où le produit est nul est donc mince.

2° Montrons qu'en tout point ξ où le produit est convergent et non nul, sa valeur est une fonction de x approximativement continue. En effet, soit q un entier, dépendant de ξ, supérieur au rang du dernier facteur négatif $\varphi_n(\xi)$. Posons, quel que soit m,

$$\prod_1^m \varphi_n(x) = \psi_m(x) \qquad \text{et} \qquad \prod_{m+1}^{\infty} \varphi_n(x) = \chi_m(x).$$

Il nous suffira de montrer que le produit $\chi_q(x)$, où q ne dépend pas de x, est approximativement continu en ξ pour qu'il en soit évidemment de même de $P(x)$. Montrons d'abord que $\chi_q(x)$ est semi-continu supérieurement en ξ. En effet, sa valeur absolue est le produit d'une infinité de nombres au plus égaux à *un*. Donc, cette valeur absolue est la limite d'une fonction continue décroissante. Elle est partout semi-continue supérieurement. Il en est de même *a fortiori* de $\chi_q(x)$, aux points où cette fonction est positive, et en particulier en ξ. Car il existe pour tout nombre ε positif un intervalle entourant ξ et en chaque point x duquel

$$|\chi_q(x)| < \chi_q(\xi) + \varepsilon.$$

La même relation sera donc encore vraie si au premier membre on substitue à la valeur absolue de $\chi_q(x)$ le nombre lui-même. Ceci nous montre qu'aux points ξ où $P(x)$ est positif, cette dernière fonction est semi-continue supérieurement. Elle l'est inférieurement, si $P(x)$ est négatif. Car P est le produit d'une fonction $\chi_q(x)$ semi-continue supérieurement en ξ par une fonction continue $\psi_q(x)$ positive dans le premier cas, négative dans le second. On verrait aisément que $P(x)$ est continu aux points où il est nul. Mais supposons $P(x) \neq 0$.

Pour achever d'établir la continuité approximative de $\chi_q(x)$ en ξ, montrons que, quels que soient ε et ε' positifs, il est possible de déterminer un nombre θ, tel que, pour toute valeur de η positive et inférieure à θ, dans l'intervalle j allant de $\xi - \eta$ à $\xi + \eta$, l'ensemble des points vérifiant l'inégalité $\chi_q(x) < \chi_q(\xi) - \varepsilon$ a une épaisseur inférieure à ε'. Examinons la relation

$$(2) \qquad \varphi_n(x) < \varphi_n(\xi) - \frac{1}{n^2}.$$

Supposons $n > q$; nous pouvons admettre que q soit assez grand pour que $\varphi_n(\xi)$ surpasse $\frac{1}{n^2}$, car le produit $\varphi_n(\xi)$ ne peut contenir qu'un nombre limité de facteurs inférieurs à $\frac{1}{n^2}$, si $P(x)$ est non nul. En posant

$$e^{-\frac{10^n+1}{A}} = \omega_n, \qquad e^{-\frac{10^n}{An^2}} = \text{environ } \omega_n^{\frac{1}{n^2}} = \omega'_n,$$

si ξ et x sont entre α et β, la relation (2) s'écrit

$$\frac{|x-\gamma|(1-\omega_n)+\omega_n u}{|\xi-\gamma|(1-\omega_n)+\omega_n u} < \omega'_n.$$

ω'_n étant inférieur à 1, cette condition implique la suivante :

$$(3) \qquad |x-\gamma| < |\xi-\gamma|\,\omega'_n.$$

Soit i l'intervalle ainsi défini sur le segment $\alpha\beta$. Il est évident que x peut satisfaire à la relation (2) hors de $\alpha\beta$. En effet, dans chacun des divers intervalles juxtaposés $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$, ..., subdivisant l'intervalle fondamental 0,1 et sur chacun desquels φ_n a la forme (1), il y a, comme sur le segment $\alpha\beta$, deux points et deux seulement où φ_n prend la valeur $\varphi_n(\xi)$. Car, dans deux quelconques de ces intervalles, les deux expressions correspondantes de φ_n coïncident par la transformation linéaire échangeant l'un de ces intervalles avec l'autre. Soient donc ξ' dans $\alpha'\beta'$, ξ'' dans $\alpha''\beta''$, ..., des points où : $\varphi_n(\xi) = \varphi_n(\xi') = \varphi_n(\xi'') = \ldots$. Dans chacun d'eux les points exclus par l'inégalité (2) sont compris dans les intervalles i', i'', ..., analogues à i, savoir :

$$|x-\gamma'| = |\xi'-\gamma'|\,\omega'_n = \frac{\beta'-\alpha'}{\beta-\alpha}\,|\xi-\gamma|\,\omega'_n,$$

$$|x-\gamma''| = |\xi''-\gamma''|\,\omega'_n = \frac{\beta''-\alpha''}{\beta-\alpha}\,|\xi-\gamma|\,\omega'_n, \ldots.$$

Ces intervalles ont mêmes milieux γ', γ'', ... que $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$, ... Entourons ξ de l'intervalle j de milieu ξ et de longueur 2η. Si η est inférieur à $|\xi-\gamma|(1-\omega'_n)$, i et j n'ont pas de points communs. Si j contient seulement des points de i et aucun des i', i'', ..., le rapport à j de la partie commune à i et à j est maximum quand j (variable avec η) et i (indépendant de η) ont une même extrémité, i étant compris dans j. Alors, η vaut

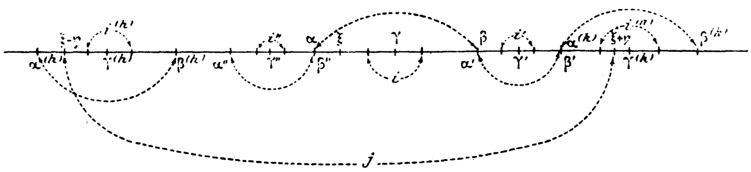
$$|\xi-\gamma|+\frac{i}{2}=|\xi-\gamma|(1+\omega'_n).$$

Le maximum envisagé est donc dans ce cas

$$\frac{i}{2\eta}=\frac{\omega_n}{1+\omega'_n}<\omega'_n.$$

Si j contient en totalité ou en partie i, i', i'', ..., $i^{(p)}$, la longueur de j est au moins égale à la distance (éventuellement diminuée

Fig. 3.



tout au plus des moitiés de $i^{(h)}$ et $i^{(k)}$) des points $\gamma^{(h)}$, $\gamma^{(k)}$ milieux des intervalles $i^{(h)}$, $i^{(k)}$ les plus éloignés de part et d'autre de ξ et empiétant sur j. $\gamma^{(h)}$ étant le milieu de $\alpha^{(h)}\beta^{(h)}$, $\gamma^{(k)}$ le milieu de $\alpha^{(k)}\beta^{(k)}$, j surpasse évidemment $\frac{\beta^{(k)}-\alpha^{(h)}}{2}-\frac{i^{(h)}+i^{(k)}}{2}$. Le rapport à j du total des intervalles exclus de j par l'inégalité (2), est donc inférieur à $\frac{2\Sigma i^{(p)}}{\beta^{(k)}-\alpha^{(h)}-\Sigma i^{(p)}}$, $\Sigma i^{(p)}$ étant étendu aux intervalles $i^{(p)}$ situés entre $\alpha^{(h)}$ et $\beta^{(k)}$. Cette dernière somme, d'après

$$i^{(p)}=|\xi-\gamma|\,\omega'_n\times\frac{\beta^{(p)}-\alpha^{(p)}}{\beta-\alpha}<\omega'_n[\beta^{(p)}-\alpha^{(p)}],$$

vaut en tout moins de $\omega'_n(\beta^{(k)}-\alpha^{(h)})$. Le rapport considéré est donc inférieur à $\frac{2\omega'_n}{1-\omega'_n}$.

La série ω'_n converge avec une extrême rapidité. Nous déterminons N_1 de façon que $\sum_{N_1}^{\infty}\frac{2\omega'_n}{1-\omega'_n}<\varepsilon'$. Alors, si $m>N_1$, l'ensemble S_m des points où, pour une valeur au moins de n supérieure à m, l'inégalité (2) est vérifiée, cet ensemble a sur tout intervalle $\xi - \eta$ à $\xi + \eta$ une épaisseur inférieure à ε'. Sur l'ensemble σ_m complémentaire de S_m, en tout point nous avons pour toute valeur de n supérieure à m, la relation opposée à (2). Donc

$$\chi_m(x) \geqq \prod_m^\infty \left[\varphi_n(\xi) - \frac{1}{n^2}\right] = \chi_m(\xi) \prod_m^\infty \left[1 - \frac{1}{n^2\varphi_n(\xi)}\right].$$

Nous pouvons choisir, à cause de la convergence de $\varphi(\xi)$, N_2 tel que $\chi_m(\xi) > \sqrt[4]{1-\varepsilon}$, pour toute valeur de m au moins égale à N_2; et encore, $\varphi_n(\xi)$ tendant vers 1 pour n infini, ce qui assure la convergence du produit infini situé au second membre de la dernière relation, nous pouvons choisir N_3 tel que, si $m > N_3$, ce dernier produit surpasse $\sqrt[4]{1-\varepsilon}$. Alors, aux points de σ_m, si m surpasse N_2 et N_3, on a

$$(4) \qquad \chi_m(x) > \sqrt{1-\varepsilon}.$$

De plus, m surpassant N_1, l'ensemble σ_m a son épaisseur supérieure à $1 - \varepsilon'$, sur tout intervalle j de milieu ξ. Prenons un nombre N surpassant N_1, N_2, N_3. $\prod_{q+1}^{N} \varphi_n(x)$ est une fonction continue, positive en ξ. Nous pouvons donc choisir θ de façon que, pour tout intervalle j de centre ξ et de longueur 2η inférieure à 2θ, on ait

$$(5) \qquad \prod_{q+1}^{N} \varphi_n(x) > \prod_{q+1}^{N} \varphi_n(\xi) \times \sqrt{1-\varepsilon}.$$

Si x est dans j et sur l'ensemble σ_N complémentaire de S_N, les inégalités (4) et (5) sont vérifiées pour $m = N$. On a donc

$$\prod_{q+1}^{\infty} \varphi_n(x) = \chi_q(x) > \prod_{q+1}^{\infty} \varphi_n(\xi)(1-\varepsilon) = \chi_q(\xi)(1-\varepsilon)$$

au moins en tous les points d'un ensemble σ_N d'épaisseur supérieure à $1 - \varepsilon'$ sur tout intervalle j de centre ξ et de longueur inférieure à 2θ. σ_N pouvant être déterminé quel que soit ε', l'ensemble ω où $\chi_q(x)$ surpasse $\chi_q(\xi)(1-\varepsilon)$ a donc une mesure égale à 1 en ξ. La continuité approximative de $\chi_q(x)$ en ξ est donc établie, $\chi_q(\xi)$ étant positif. Celle de $P(x)$ en résulte immédiatement, comme nous l'avons dit.

37. L'intuition juste de Köpcke est d'avoir pris pour $\varphi_n(x)$ une fonction dont la croissance, dans le voisinage de son minimum négatif, est en somme lente. C'est la croissance de Log x près de l'origine $\Big($ce dernier point étant exclu, grâce à l'addition à x, d'une quantité extraordinairement petite, savoir $e^{-\frac{10^n+1}{A}}\Big)$. Mais les précautions prises par lui, pour aboutir d'ailleurs dans ses premiers essais à des inexactitudes, sont beaucoup trop restrictives. Le lecteur montrera sans difficulté l'énoncé suivant étendant l'idée de Köpcke.

Soit d'abord $\theta_n(u)$ la fonction continue définie entre o et 1, égale à

$$1+\frac{1}{2n^2}\operatorname{Log}[u+e^{-3n^2}(1-u)].$$

$\theta_n(u)$ est compris entre $-\frac{1}{2}$ et 1 (correspondant à $u=0$ et $u=1$). Subdivisons à notre gré l'intervalle ab où nous voulons définir $P(x)$ en un certain nombre d'intervalles $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, ..., deux à deux adjacents, de milieux γ, γ', ... Si entre α et β, nous prenons

$$\varphi_n(x)=\theta_n\left[\frac{|x-\gamma|}{\gamma-\alpha}\right],$$

φ_n est une fonction continue définie entre a et b. A chaque valeur de n faisons correspondre une subdivision de ab en intervalles disposés comme il est dit ci-dessus, les extrémités de ces intervalles se répartissant partout densément quand n croît indéfiniment. Alors, la fonction $\varphi(x)=\prod_1^{\infty}\varphi_n(x)$ est une dérivée bornée prenant les deux signes dans tout intervalle. Plus généralement on peut, avec la même construction de φ_n, prendre

$$\theta_n(u)=1+\frac{v_n}{\operatorname{Log} n}\operatorname{Log}\left[u+n^{-\frac{2-s_n}{v_n}}(1-u)\right],$$

la série v_n étant convergente (v_n positif) et les limites d'indétermination de s_n étant intérieures à l'intervalle o,1. g_n est compris entre 1 et $-1+s_n$.

Le lecteur montrera sans peine que le produit φ_n tend vers zéro en un point où il y a une infinité de facteurs négatifs. Il verra ensuite que l'ensemble des points où φ_n est inférieur à $1 - 2v_n$ a pour mesure le terme général d'une série convergente. Donc, l'ensemble des points où le produit φ_n ne converge pas (ou tend vers zéro) est sans épaisseur. La semi-continuité de φ, inférieure ou supérieure selon le signe de φ, se montre comme dans l'exemple de Köpcke. Pour la continuité approximative, il suffit de s'assurer que l'ensemble des points où $\varphi_n(x) < \varphi_n(\xi) - 2v_n$ $\Big($inégalité vérifiée sur chacun des intervalles $\alpha\beta$ dans un segment $\frac{|x-\gamma|}{\gamma-\alpha} < \frac{1}{n^2}\Big)$ a, sur tout intervalle de milieu ξ, une épaisseur bornée par $\frac{2}{n^2}$, terme général d'une série convergente. La démonstration s'achève comme il a été maintes fois expliqué.

En somme Köpcke prenait dans sa construction (inexacte au moins au début) des nombres de l'ordre de 10^n quand des infiniment grands tels que n^2 ou $n^{1+\alpha} (\alpha > 0)$ suffisent.

FONCTIONS DÉRIVÉES PARTOUT NULLES EN DEHORS D'UN ENSEMBLE PARFAIT.

38. Est-il possible, P étant un ensemble *parfait discontinu, épais en lui-même* et à cela près quelconque, de définir *une fonction dérivée nulle en tout point étranger à* P *et prenant sur* P *les deux signes au voisinage de chaque point de* P?

Je ne saurais répondre à cette question dans toute sa généralité. Il ne me paraît pas impossible qu'il faille distinguer à l'égard de la dérivation diverses catégories d'ensembles parfaits épais, en les classant par exemple d'après la rapidité avec laquelle l'intervalle contigu venant au $n^{\text{ième}}$ rang par ordre de grandeur non croissante, tend vers zéro quand n croît.

Supposons que cet intervalle i_n puisse être égalé à u_n^{Ln}, la série u_n étant convergente. Autrement dit, *supposons que la série* $i_n^{\frac{1}{Ln}}$ *converge*. Désignons par $\delta_n(x)$ la distance de x à l'intervalle i_n ou $\alpha_n\beta_n$. δ_n est nul si x est intérieur à i_n ou situé en α_n ou en β_n. Si x est à gauche de α_n, δ_n est égal à $\alpha_n - x$. Si x est à droite de β_n, δ_n vaut $x - \beta_n$. Considérons la série

$$g(x) = \sum_1 \frac{u_n}{\delta_n(x)^{\frac{1}{Ln}}}.$$

$g(x)$ est infiniment grand positif en tout point étranger à P. Posons

$$G = e^{-g(x)}$$

G est nul hors de P, et aussi aux extrémités des intervalles contigus à P et certainement en d'autres points (en tout u résiduel de P).

1° La série $g(x)$ converge et a une valeur finie sur une pleine épaisseur Ω de l'ensemble P. (Nous entendons par là que Ω agrégé à P a même mesure que lui). Pour le voir, il suffit de remarquer que si

$$h_n(x) = \frac{u_n}{[\delta_n(x)]^{\frac{1}{Ln}}}$$

est supérieur à $e^2 u_n$, c'est que $\delta_n(x)$ est inférieur à $\frac{1}{n^2}$. Cette relation définit l'intervalle de même milieu que i_n et le débordant de part et d'autre de $\frac{1}{n^2}$. Il est visible, comme il a été expliqué plus haut, que l'ensemble est mince des points de P où, pour une infinité de valeurs de n, $h_n(x) > e^2 u_n$. $g(x)$ limite de la fonction croissante $h_n(x)$ est semi-continue inférieurement en tous points, même en ceux où elle est infinie. $G(x)$ est en tous points semi-continu supérieurement, compris entre 0 et 1 et continu aux points où il est nul. Cette propriété de $g(x)$, la nullité métrique de ses infinis ne tient nullement à l'hypothèse faite sur i_n. Elle serait vraie, avec tout ensemble parfait P. Mais nous aurons besoin de la propriété de convergence attribuée à la série $i_n^{\frac{1}{Ln}}$ pour montrer la continuité approchée de g.

2° Il s'agit de prouver que, $g(\xi)$ étant fini, l'ensemble des points où $g(x) > g(\xi) + \varepsilon$ a une épaisseur nulle en ξ.

Considérons l'ensemble

$$h_n(x) > e^2 h_n(\xi) \qquad \text{ou} \qquad \delta_n(x) < \delta_n(\xi) : n^2.$$

C'est un intervalle t_n obtenu en rallongeant i_n de chaque côté de $\delta_n(\xi) : n^2$. Nous voulons établir que, ε' étant donné à l'avance, la somme des t_n compris dans l'intervalle j allant de $\xi - \eta$ à $\xi + \eta$ est inférieure à $2\,\varepsilon'\eta$, si les indices des t_n, empiétant sur j, surpassent tous un certain entier N. La démonstration repose sur cette remarque que l'épaisseur de P en ξ est certainement *un*, si $g(\xi)$ est fini. En effet, posons

$$i_n = k_n \delta_n(\xi) \qquad (k_n \text{ est une fonction de } \xi).$$

On a

$$(1) \qquad h_n(\xi) = k_n^{\frac{1}{Ln}}.$$

Montrons que si la série k_n est convergente, l'épaisseur de P en ξ est *un*. En effet, il existe selon notre hypothèse un nombre p tel que l'inégalité $n > p$ entraîne

$$k_{n+1} + k_{n+2} + \ldots + < \varepsilon.$$

Mais soit σ_p le segment contenant ξ et demeurant sur ab quand on retranche les intervalles $i_1, i_2, \ldots, i_p$. ξ est intérieur à σ_p, sinon l'un des p premiers termes $h_n(\xi)$ serait infini et aussi $g(\xi)$, contrairement à notre hypothèse. Quel que soit l'intervalle j contenant ξ et situé dans σ_p, si l'intervalle i_n est contenu dans j ou empiète sur lui, ce qui exige d'abord $n > p$, on a

$$\delta_n(\xi) < j \qquad \text{donc} \qquad i_n < k_n j$$

et *a fortiori* la partie commune à j et à i_n est inférieure à $k_n j$. La mesure de P sur j surpasse donc $j(1 - \varepsilon)$. Cette conclusion étant exacte, quel que soit j contenant ξ et situé sur l'intervalle σ_p auquel ξ est agrégé, la possibilité de déterminer σ_p pour chaque valeur de ε entraîne que l'épaisseur de P en ξ est bien égale à *un* [1], du seul fait que la série k_n est convergente.

Or, d'après la relation (1), la convergence de $h_n(\xi)$ entraîne celle de la série k_n. Par suite, l'épaisseur de P en ξ est *un*. Nous pouvons donc choisir d'abord θ de manière que, moyennant $\eta < \theta$,

---

[1] La classification des ensembles parfaits épais, à laquelle je faisais allusion plus haut, devrait peut-être mettre à part ceux qui possèdent des points ξ pour lesquels la série k_n converge, ces points formant de plus une pleine épaisseur de l'ensemble base.

dans tout intervalle $\xi - \eta$, $\xi + \eta$ ou j, l'épaisseur de P surpasse $1 - \frac{\varepsilon'}{2}$, puis nous déterminons N_1 de manière que

$$\sum_{N_1+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon'}{4}.$$

Considérons maintenant parmi les intervalles t_n définis par

$$\delta_n(x) < \delta_n(\xi) : n^2,$$

ceux qui ont une partie commune avec j, et un indice n supérieur à N_1. La longueur de t_n est $i_n + 2\delta_n(\xi) : n^2$. Si t_n et j ont une partie commune, leur somme $i_n + 2\delta_n(\xi) : n^2 + 2\eta$ surpasse la double distance de leurs milieux, savoir $i_n + 2\delta_n(\xi)$. De là résulte, dès la seconde valeur entière de n, que $\delta_n(\xi)$ est inférieur à 2η. La somme des t_n ou portions de t_n situés sur j et dont l'indice surpasse N_1, est donc inférieure à la somme des i_n ou portions de i_n appartenant à j, soit un nombre inférieur à $\frac{\varepsilon'}{2} \times 2\eta$, augmentée de la somme des nombres $2\delta_n(\xi) : n^2$ correspondant aux mêmes t_n, total inférieur à

$$4\eta \sum_{N_1+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2\eta \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Donc l'ensemble T_{N_1} des points appartenant à l'un au moins des t_n d'indice supérieur à N_1 a une épaisseur inférieure à ε' sur j, quel que soit η inférieur à θ.

Aux facteurs d'indices inférieurs à N_1 ou à tout autre indice fixe m, correspond un produit fini et continu en ξ, lequel est à distance non nulle de chaque intervalle i_n. L'inégalité

$$\delta_n(x) < \delta_n(\xi) : n^2,$$

et par suite celle-ci

$$h_n(x) < e^2 h_n(\xi),$$

étant vérifiées pour toute valeur de n supérieure à m, il est possible d'achever, comme dans les cas antérieurs, la démonstration de la continuité approximative de G sur P. Or, G est nul hors de P. C'est une dérivée nulle en un ensemble dense (et même résiduel) sur P, mais sans épaisseur sur P. $G^{\alpha+i\beta}$ a des parties réelles et imaginaires qui sont des fonctions dérivées nulles hors de P et possédant sur P dans tout intervalle les deux signes. De plus, en chaque point d'une épaisseur pleine, l'une au moins des deux n'est pas nulle sur P. On aboutit au même résultat pour la fonction

$$e^{-\sum_1^\infty \frac{u_n(1+i\lambda_n)}{[\delta_n(x)]^{\frac{\mu_n}{L_n}}}},$$

μ_n étant positif et λ_n de signe indifférent, mais l'un et l'autre bornés. Soit $\varphi(x)$ l'une de ces fonctions dérivées, $\Phi(x)$ sa primitive. Quelle que soit la fonction dérivée $\chi(u)$, le produit

$$\chi[\Phi(x)]\varphi(x)$$

sera une dérivée nulle aux mêmes points que $\varphi(x)$, donc partout en dehors de P.

39. P étant un ensemble parfait discontinu, épais en lui-même, de points extrêmes a et b, soit l sa mesure entre a et x. l est une fonction continue de x croissante sur P [1], car si x et x' sont deux points de P non extrémités du même contigu, sur le segment xx', P possède une portion dont la mesure est $l(x') - l(x)$ ou $l' - l$. Or, P étant épais en lui-même, toute portion de P a une mesure positive. Donc, $l < l'$. l', croissant sur P, est manifestement constant sur tout segment u_n contigu à P. Soit l_n sa valeur sur u_n. L étant la mesure totale de P, toute valeur de l comprise entre o et L et distincte des l_n est prise en un seul point x agrégé à P et de seconde espèce. Donc, x est une fonction de l bien déterminée aux points l distincts des l_n, indéterminée sur u_n si $l = l_n$, et croissante de l'un à l'autre de deux points l distincts.

Les l_n sont partout denses sur le segment oL. Car, l et l' étant deux points distincts quelconques de ce segment, x et x' étant deux points séparés de a par des longueurs l, l' de P, P possède entre x et x' la longueur $l' - l$, donc P a nécessairement sur le segment xx' une portion qui, P étant discontinu, admet une infinité de contigus auxquels correspondent des nombres l_n compris entre l et l'. Le segment ll' étant quelconque, les l_n sont denses.

---

[1] Je dis qu'une fonction $f(x)$ est croissante sur P si la différence $f(x') - f(x)$ a le signe de $x' - x$, quels que soient x et x' agrégés à P et séparés par des points de P.

Soit $\Psi(l)$ une fonction continue de l variable dans tout intervalle du segment o L et dérivable en tout point. Soit $\Phi(x)$ la fonction de x égale à $\Psi(l)$ si x et l sont homologues. $\Phi(x)$ est définie sur le segment ab des points extrêmes de P, constante sur chaque segment contigu à P et variable en tout point de P.

1° P *étant donné*, cherchons *à quelle condition nécessaire et suffisante doit satisfaire une fonction partout dérivable* $\Psi(l)$ *pour que, posant*

$$\Phi(x) = \Psi(l),$$

on ait aussi

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d\Psi(l)}{dl}.$$

Soit R l'ensemble des points du segment o L ayant au moins un homologue x où l'épaisseur de P est non définie ou inégale à 1. R contient tous les l_n. Il serait facile de voir que R est un résiduel du segment o L, comme l'ensemble de ses homologues sur P (1re Partie, n° 20). Je dis que la condition cherchée est la suivante, qu'*en tout point l de* R *la dérivée de* $\Psi(l)$ *soit nulle.*

A. La condition est nécessaire. D'abord si l est en l_n, parmi les homologues x de l sont tous les points intérieurs à l'intervalle u_n, où $\Phi(x)$ est constant. Donc, $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ en ces points et par suite $\frac{d\Psi}{dl} = 0$ pour $l = l_n$.

Supposons maintenant l agrégé à R, mais différant de tous les l_n. Alors, l a un seul homologue x. Donnons à x un accroissement Δx. l devient $l + \Delta l \neq l$, car l n'a point pour homologue $x + \Delta x$. Soient $\Delta\Psi$, $\Delta\Phi$ les accroissements égaux reçus par $\Psi(l)$ et $\Phi(x)$. Par hypothèse $\frac{\Delta\Psi}{\Delta l}$ et $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}$ tendent pour $\Delta l = 0$ et $\Delta x = 0$ vers la même limite. Nous avons

$$\frac{\Delta\Psi}{\Delta l} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} \times \frac{\Delta x}{\Delta l}. \tag{1}$$

Or $\frac{\Delta x}{\Delta l}$ c'est, que Δx et en même temps Δl soient positifs ou négatifs, l'épaisseur de P sur le segment d'extrémités x, $x + \Delta x$. Or quand Δx tend vers zéro, $\frac{\Delta x}{\Delta l}$ ne tend pas vers *un*, puisque l est agrégé à R. Donc, la limite commune, de $\frac{\Delta\Psi}{\Delta l}$ et de $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}$ supposée existante et finie, ne peut être que zéro. La condition énoncée est donc nécessaire.

B. Je dis qu'elle est suffisante. Il faut montrer que si une fonction partout dérivable $\Psi(l)$ a sa dérivée $\psi(l)$ nulle en tout point de R, $\Phi(x)$ a partout une dérivée en x égale à $\psi(l)$. En effet:

a. Soit x un point de seconde espèce de P. Son homologue l est distinct des l_n et n'a pas d'autre homologue que x. Donnons à x un accroissement Δx. Il en résulte pour l un accroissement non nul Δl. Écrivons

$$(2) \qquad \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{\Delta\Psi}{\Delta l} \times \frac{\Delta l}{\Delta x}.$$

Quand Δx tend vers zéro, il en est de même de Δl, inférieur en valeur absolue à Δx. Si x est sur R, on a toujours

$$\lim \frac{\Delta\Psi}{\Delta l} = 0, \qquad \text{avec} \qquad 0 < \frac{\Delta l}{\Delta x} < 1.$$

Donc $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}$ tend vers zéro. Aux point x précédents, Φ a donc une dérivée égale à celle de Ψ en l. Si au contraire en x, l'épaisseur de P est 1, $\frac{\Delta l}{\Delta x}$ tend vers 1 quand Δx tend vers zéro. Donc, Φ a encore une dérivée, différente de zéro ou nulle suivant les cas, mais toujours égale à $\psi(l)$.

b. Si x est agrégé à un des segments u_n, ce qui entraîne $l = l_n$, donnons à x un accroissement Δx à partir de x. S'il n'en résulte pas pour l un accroissement différent de zéro, c'est que $x + \Delta x$ est agrégé au même segment u_n. Donc, $\Delta\Phi = 0$ et $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = 0$. Si l'accroissement Δx entraîne pour l l'accroissement non nul Δl, d'après l'égalité (2),

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}\right| < \left|\frac{\Delta\Psi}{\Delta l}\right|.$$

Δl tendant dans le second membre vers zéro et la dérivée de Ψ en l_n étant nulle, $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}$ tend vers zéro avec Δx dans cette dernière hypothèse. Donc, dans tous les cas, si x est agrégé au segment u_n, $\Phi(x)$ admet comme $\Psi(l)$ en l_n la dérivée zéro.

Donc, la condition énoncée est nécessaire et suffisante.

2° Les dérivées $\psi(l)$ des fonctions $\Psi(l)$ précédentes possèdent ce caractère d'avoir leurs zéros partout denses. Je dis que *réciproquement, si une fonction dérivée* $\psi(l)$ *définie sur le segment* oL *a ses zéros partout denses sur ce segment, il est possible de définir un ensemble parfait discontinu de longueur* L *épais en lui-même, tel que, si* l *est sa longueur entre son extrémité gauche et* x, *la fonction* $\varphi(x)$ *égale à* $\psi(l)$ *est en tout point* x *la dérivée de la fonction* $\Phi(x)$ *égale à* $\Psi(l)$ *primitive de* $\psi(l)$.

Pour qu'il en soit ainsi, d'après le paragraphe 1°, il faut et il suffit qu'aux points x homologues de l, où $\psi(l)$ diffère de zéro, l'ensemble inconnu P ait l'épaisseur *un*.

40. Soit E l'ensemble des l définis par $\psi(l) \neq 0$. L'ensemble $\psi(l) = 0$ étant partout dense sur oL est un résiduel de ce segment. Son complémentaire E est gerbé. Plus précisément, nous savons que l'ensemble E_n où $|\psi(l)| > \frac{1}{n}$ est non dense sur oL quel que soit n entier positif. E est la réunion de tous les E_n.

Tout revient à résoudre le problème suivant :

Étant donné sur le segment oL *de l'axe des* l *un ensemble gerbé partout dense* R, *déterminer sur l'axe des* x *un ensemble parfait discontinu* P *épais en lui-même d'extrémité gauche* a, *de longueur* L, *de manière que* l *étant sa mesure entre* a *et* x, *son épaisseur soit* UN *en tous les points* x *homologues des* l *agrégés à* E.

Supposons le problème résolu et désignons par u_n ou $a_n b_n$ les contigus de P, chacun d'eux ayant un indice entier propre. Nous avons vu que l est continu en x, croissant sur P. Soit l_n sa valeur constante sur u_n. Les l_n sont partout denses sur le segment oL. Aucun des points l_n ne saurait être agrégé à E, puisque au voisinage des points x correspondants, agrégés au segment u_n, P n'existe pas, tout au moins d'un côté. L'épaisseur de P en ces points x ne saurait être *un*. Donc, tout point de E a un homologue x unique. Il est clair que réciproquement, pour avoir P, il suffirait de connaître les l_n sur le segment oL et la longueur du contigu u_n

auquel correspond l_n. Car alors P est l'ensemble des x définis par

$$x = a + l + (\mathrm{o}\Sigma l)u_n + \delta u_m, \tag{3}$$

en désignant par le troisième terme (selon notre convention habituelle) la somme de la série des nombres u_n correspondant à tous les points l_n agrégés à *l'intervalle* ol, et δ étant nul si l est étranger à l'ensemble des l_n, égal indifféremment à o ou à 1, si l est en l_m.

Observons que o n'est pas un point l_n, puisque a est l'extrémité gauche de P, donc un point étranger à tous les contigus u_n de P. Il est donc indifférent de l'ajouter ou non à l'intervalle ol. La formule (3) nous donne un seul homologue pour les l distincts des l_n et deux homologues a_n, b_n pour les l_n.

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ les ensembles agrégés au segment oL et non denses sur lui dont la réunion constitue l'ensemble gerbé E supposé partout dense sur oL. Ajoutons à E_n ses points limites, si E_n n'est pas fermé. L'ensemble obtenu E_n^0 est agrégé au segment oL et non dense sur lui. La réunion des E_n^0 est un ensemble gerbé E′ qui contient certainement tous les points de E, mais peut en contenir d'autres. L'ensemble complémentaire de E′ est un résiduel du segment oL, donc un ensemble partout dense sur ce segment. Je dis que si nous prenons, pour les l_n, les points d'un ensemble *dénombrable partout dense sur le segment* oL, *étranger à* E′, *et à cela près quelconque*, il est possible de choisir les u_n de manière à obtenir un ensemble P remplissant les conditions posées.

Soit α_n un nombre positif terme général d'une série convergente. Nous définissons ainsi u_n. Soit F_n l'ensemble réunissant E_1^0, $E_2^0, \ldots, E_n^0$. F_n est fermé, puisqu'il est le faisceau d'un nombre fini d'ensembles fermés E_n^0. F_n est agrégé à E′. D'ailleurs, tout point de E′ fait partie d'un F_n et de tous les suivants. l_n est étranger à tous les F_p puisque l_n est étranger à E′. Soit d_n la distance de l_n à F_n. d_n est non nul, F_n étant fermé et l_n étranger à lui. Nous posons $u_n = \alpha_n d_n$. L'ensemble P est dès lors déterminé. Aux points λ de E′ tous distincts des l_n la formule (3) donne un homologue unique ξ. E étant inclus dans E′, tout point de E a un homologue bien déterminé. L'homologue K de E est inclus dans l'homologue K′ de E′. La proposition à établir, conformément à l'énoncé du problème, est que l'ensemble P a l'épaisseur *un* en tout point de K. Montrons qu'elle est *un* en tout point ξ de K'. Ce résultat impliquera le précédent.

Soit x un point distinct de ξ et $\mu(x, \xi) = |l - \lambda|$ la mesure de P entre x et ξ. Il faut montrer que le rapport de $\mu(x, \xi)$ à $|x - \xi|$ tend vers *un* quand $x - \xi$ tend vers zéro. ξ étant agrégé à E' appartient à un ensemble F_m et à tous les ensembles F_n d'indice n supérieur à m. Donnons-nous un nombre positif quelconque ε. La série α_n étant convergente, soit $r_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots$. Prenons N supérieur à m et donnant $r_N < \varepsilon$, ce qui est possible. Les points l_1, l_2, ..., l_N sont tous distincts de λ. Soit $h(\varepsilon)$ la plus petite de leurs distances à λ. Soit entre $\xi - h(\varepsilon)$ et $\xi + h(\varepsilon)$, un nombre x quelconque supérieur ou inférieur à ξ. Son homologue l est à une distance de λ non nulle (puisqu'il n'y a qu'un point ξ ayant pour homologue λ) et de plus égale à la distance ξx diminuée de tous les intervalles contigus ou semi-contigus à P agrégés à l'intervalle ξx (ou $x\xi$).

Donc, $|\lambda - l| < h(\varepsilon)$. Par conséquent, sur le segment $l\lambda$ (ou λl) il n'y a aucun point l_n d'indice inférieur à $N + 1$. Le rapport $\frac{\lambda - l}{\xi - x}$ est l'épaisseur de P sur le segment $x\xi$ (ou ξx). Si x est agrégé à un contigu u_n, ce rapport est à sa moindre valeur quand x est à l'extrémité de u_n la plus éloignée de ξ. La limite inférieure de ce rapport quand x tend vers ξ ne nous échappera donc pas en plaçant toujours x sur P. Supposons par exemple x supérieur à ξ. Alors,

$$\mu(\xi, x) = x - \xi - (\xi \Sigma x) u_n.$$

Mais si u_n est entre ξ et x, l_n est entre λ et l et l'indice n surpasse N. Donc, d'une part d_n distance de l_n à F_n, qui contient λ ($n > N > m$), est inférieur à $l - \lambda < x - \xi$ et d'autre part

$$(\xi \Sigma x) u_n = (\xi \Sigma x) \alpha_n d_n < (x - \xi)(\xi \Sigma x) \alpha_n < (x - \xi) r_N < \varepsilon(x - \xi).$$

Donc, l'épaisseur de P sur le segment $x\xi$ surpasse $1 - \varepsilon$. La même démonstration vaut, en changeant seulement $x - \xi$ en $\xi - x$, $(\xi \Sigma x)$ en $(x \Sigma \xi)$, quand x est inférieur à ξ et distant de ce dernier point de moins de $h(\varepsilon)$. $h(\varepsilon)$ pouvant être calculé pour toute valeur de ε, l'épaisseur de P en ξ est 1.

41. Il est facile d'appliquer la construction précédente au problème posé concernant les fonctions dérivées $\psi(l)$ à zéros partout denses. Notons d'abord que, si E_n est l'ensemble où $\psi(l)$ surpasse $1:n$ en valeur absolue, E_n^0 constitué par la réunion des points limites et des points isolés de E_n, est l'ensemble de tous les points où le maximum de $|\psi(l)|$ est au moins $\frac{1}{n}$. E' réunissant les E_n^0 est donc l'ensemble des points en lesquels $|\psi(l)|$ a son maximum positif, et par suite aussi l'ensemble des points où $\psi(l)$ a l'une de ses limites d'indétermination différente de zéro. Les zéros de $\psi(l)$ étant partout denses, E' est l'ensemble des points de discontinuité de $\psi(l)$. Tout point étranger à E' pouvant être pris pour l'un des l_n, l'agrégat de ceux-ci est un ensemble dénombrable partout dense quelconque formé de *points de continuité de* $\psi(l)$. Les l_n étant choisis, le nombre d_n doit être, avons-nous dit, la distance de l_n à E_n^0 ou, en toute équivalence, à E_n (qui réunit tous les E_{n-p}). Mais la réunion E' des E_n^0 est évidemment la réunion de tous les ensembles E_n définis par toute condition de la forme $|\psi(l)| > \omega_n$, ω_n étant un nombre positif quelconque tendant vers zéro. d_n est donc simplement ainsi astreint que dans l'intervalle $l_n - d_n$ à $l_n + d_n$, $|\psi(l)|$ ait son maximum au plus égal à ω_n, ω_n tendant vers zéro. Notre analyse aboutit donc à l'énoncé suivant :

$\psi(l)$ étant une fonction dérivée définie sur le segment o L *et à zéros partout denses, choisissons indifféremment parmi les points de continuité de ψ un ensemble dénombrable et partout dense l_n, et déterminons un nombre positif d_n, tel que, dans l'intervalle $l_n - d_n$ à $l_n + d_n$, l'oscillation de $\psi(l)$ tende vers zéro pour n infini. Le nombre positif α_n étant le terme général d'une série convergente quelconque, insérons en l_n, dans le segment* o L, *un intervalle u_n égal à $\alpha_n d_n$, ce qui transforme le segment* o L *en un ensemble parfait discontinu* P (admettant un intervalle contigu de longueur u_n séparé de l'extrémité gauche de P par une mesure l_n de P). P *étant ainsi construit, et l étant sa mesure à gauche de x, la fonction $\Phi(x)$ égale à $\Psi(l)$ admet*

(¹) Les fonction $\psi(l)$ construites ci-dessus sont toutes semi-continues et les ensembles $|\psi(l)| \geq \omega$ sont fermés.

en chaque point une dérivée $\varphi(x)$ *égale à* $\psi(l)$ *et en particulier nulle dans tous les contigus à* P.

Il est intéressant de noter que la transformation du segment oL en l'ensemble P conserve la mesure de tout ensemble de points donné sur le premier intervalle. La construction précédente nous servira dans la troisième Partie de notre étude à construire des fonctions dérivées nécessitant, pour la recherche de leurs primitives par le calcul totalisant, l'emploi d'opérations de rangs fini ou transfini de plus en plus élevés.