BULLETIN DE LA S. M. F.

G. RÉMOUNDOS

Sur la densité des zéros des séries de fonctions et les singularités des équations différentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 131-146
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1915__43__131_0>

SUR LA DENSITÉ DES ZÉROS DES SÉRIES DE FONCTIONS ET LES SINGULARITÉS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

INTRODUCTION.

Ce travail peut être considéré comme suite d'un autre publié dans le même Recueil [*Contribution à la théorie des singularités des équations différentielles du premier ordre* (*Bull. Soc. mathém. de France*, t. XXXVI, 1908)], dans lequel j'ai fait une étude systématique de l'équation différentielle

$$(\alpha)\qquad x^2\frac{dy}{dx}=\lambda y+f(x,y)\qquad(\lambda\neq 0)$$

qui présente des circonstances particulières, lorsqu'il s'agit de l'existence d'une intégrale holomorphe et nulle en $x=0$.

Considérons λ comme un paramètre variable, les coefficients de $f(x,y)$ étant supposés donnés et fixes, et désignons par (L) l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation (α) admet une intégrale holomorphe et s'annulant en $x=0$. Dans leurs mémorables *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXXVI, 1856, p. 161), Briot et Bouquet ont étudié l'ensemble (L) dans le cas très particulier où $f(x,y)$ ne contient pas y (est une fonction de x seulement) et ils ont établi que dans ce cas l'ensemble (L) coïncide avec l'ensemble des zéros d'une fonction entière. Dans mon travail ci-dessus cité, j'ai démontré que l'ensemble (L) ne contient aucune valeur positive dans le cas où l'équation (α) a la forme générale, mais où les coefficients de $f(x,y)$ sont supposés réels et négatifs.

Dans ce travail je démontre que, dans trois cas très étendus (ne s'éloignant que très peu du cas général), *l'ensemble* (L) n'est pas un domaine du plan de la variable λ.

Mes recherches ont montré que l'étude de la puissance de l'ensemble (L) se ramène à l'étude de la puissance de l'ensemble des points pour lesquels une série de polynomes converge vers zéro avec une rapidité tellement grande que la $n^{\text{ième}}$ racine du terme de rang n tende aussi vers zéro. L'étude des séries de polynomes à ce point de vue m'a conduit à quelques théorèmes intéressants en eux-mêmes et utiles pour le problème de l'équation (α) qui fait l'objet principal de ce travail.

CHAPITRE I.

QUELQUES THÉORÈMES SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

1. Envisageons la série

$$(1) \qquad |P_1(z)|, \quad |\sqrt{P_2(z)}|, \quad |\sqrt[3]{P_3(z)}|, \quad \ldots, \quad |\sqrt[n]{P_n(z)}|, \quad \ldots,$$

où $P_n(z) = A_n(z - a_{n1})(z - a_{n2})\ldots(z - a_{nn})$ est un polynome du degré n.

Nous établirons le théorème suivant :

Théorème I. — *Si la série* (1) *converge uniformément dans un domaine* D *vers la constante zéro, la quantité* $\sqrt[n]{A_n}$ *tendra vers zéro.*

J'exposerai ici une démonstration de ce théorème que M. P. Montel a bien voulu me faire connaître.

En effectuant d'abord la transformation $(z, z + h)$, qui ne change pas le coefficient A_n, nous pouvons supposer que le domaine D contienne le point $z = 0$.

D'après un théorème de Cauchy, nous avons

$$(2) \qquad |A_n| < \frac{M}{R^n},$$

M désignant le maximum de $|P_n(z)|$ sur un cercle C de centre origine et de rayon R contenu dans le domaine D. Mais, la série convergeant uniformément dans le domaine D vers la constante zéro, étant donné un nombre positif quelconque ε, on peut lui faire correspondre un entier n_1 tel que pour $n > n_1$ et pour tous les points du domaine D on ait

$$|\sqrt[n]{P_n(z)}| < \varepsilon$$

et, par conséquent,

$$|\sqrt[n]{M}| < \varepsilon.$$

La formule (2) nous donne

$$|\sqrt[n]{A_n}| < \frac{|\sqrt[n]{M}|}{R} < \frac{\varepsilon}{R}$$

et nous montre que la quantité $\sqrt[n]{A_n}$ tend vers zéro, parce que le nombre ε peut être arbitrairement petit.

Nous remarquons que par ce procédé nous obtenons le même résultat en supposant que la suite (1) converge uniformément vers zéro sur une circonférence de cercle, puisque la transformation $(z, z+h)$ ne change pas le premier coefficient A_n et transforme un cercle en un autre cercle.

Nous avons donc, aussi, le théorème suivant :

Théorème II. — *Si la série* (1) *converge uniformément sur une circonférence de cercle vers la constante zéro, la quantité* $\sqrt[n]{A_n}$ *tendra vers zéro.*

2. Considérons maintenant une série de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n(\lambda)\, z^n, \tag{3}$$

où les coefficients $a_n(\lambda)$ dépendent d'un paramètre λ et sont supposés, pour fixer les idées, des polynomes en λ. Donnons la définition suivante :

Nous dirons que la série (3) converge pour $z = z_1$, uniformément dans le domaine D du plan λ, vers une fonction $f(\lambda)$ lorsque, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un entier ν tel que, pour $n > \nu$ et pour tous les points du domaine D, l'inégalité

$$|f(\lambda) - f_n(\lambda)| < \varepsilon$$

soit satisfaite par la valeur $z = z_1$, $f_n(\lambda)$ désignant la somme des n premiers termes de la série

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n(\lambda)\, z_1^n.$$

Considérons maintenant la série

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n(\lambda)\, z^n, \tag{4}$$

où $a_n(\lambda) = P_n(\lambda)\, q_n$, $P_n(\lambda)$ désignant un polynome par rapport au paramètre λ et q_n désignant une quantité ne dépendant que de n telle que $|\sqrt[n]{q_n}|$ tende vers l'infini avec n. Considérons aussi une valeur positive ρ et un domaine D du plan λ et supposons que la série (4) converge pour $z = \rho$, uniformément dans le domaine D du plan λ; alors, la définition ci-dessus donnée entraîne la conséquence que, à chaque nombre positif θ, on peut faire correspondre un entier ν et que, pour $n > \nu$ et pour tous les points du domaine D, on ait

$$|a_n(\lambda)|\, \rho^n < \theta$$

ou bien

$$|P_n(\lambda)|\, |q_n|\, \rho^n < \theta$$

et, par conséquent,

$$|\sqrt[n]{P_n(\lambda)}| < \frac{|\sqrt[n]{\theta}|}{\rho\, |\sqrt[n]{q_n}|}.$$

D'autre part, à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un entier n_1 ne dépendant pas de λ tel qu'on ait l'inégalité

$$\frac{|\sqrt[n]{\theta}|}{\rho\, |\sqrt[n]{q_n}|} < \varepsilon, \tag{5}$$

parce que le premier membre de cette inégalité (5) tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et ne dépend pas de λ.

Si donc nous désignons par $\overline{n}$ le plus grand des nombres ν et n_1, nous aurons l'inégalité

$$|\sqrt[n]{P_n(\lambda)}| < \varepsilon, \tag{6}$$

satisfaite pour $n > \overline{n}$ et pour tous les points du domaine D; par conséquent, la quantité $|\sqrt[n]{P_n(\lambda)}|$ tendra avec $\frac{1}{n}$ *uniformément* vers zéro, parce que l'entier $\overline{n}$ ne dépend pas de λ.

Nous remarquons maintenant que la série $\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n(\lambda)\, \rho^n$ se ramène à une suite de polynomes en λ

(7) $$f_1(\lambda),\quad f_2(\lambda),\quad f_3(\lambda),\quad \ldots,\quad f_n(\lambda),\quad \ldots,$$

où $f_n(\lambda)$ désigne la somme des n premiers termes.

Si donc la série

(8) $$\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n(\lambda)\rho^n$$

converge, dans un domaine Δ du plan λ, vers une fonction $f(\lambda)$, on peut, d'après un théorème bien connu, trouver dans le domaine Δ un autre domaine D dans lequel la série (8) converge *uniformément* vers $f(\lambda)$ (*voir* P. Montel, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 108-109; Gauthier-Villars, Paris, 1910); alors, d'après la conclusion ci-dessus obtenue, la suite

(9) $$|P_1(\lambda)|,\quad |\sqrt{P_2(\lambda)}|,\quad |\sqrt[3]{P_3(\lambda)}|,\quad \ldots,\quad |\sqrt[n]{P_n(\lambda)}|,\quad \ldots$$

convergera vers zéro uniformément dans le domaine D.

Nous avons donc établi le théorème suivant :

Théorème III. — *Soit la série*

(10) $$\sum_{n=0}^{n=+\infty} q_n P_n(\lambda) z^n,$$

où q_n est une quantité dépendant seulement de n telle que $|\sqrt[n]{q_n}|$ tende vers l'infini avec n et $P_n(\lambda)$ désigne un polynome en λ.

Si cette série (10) *converge dans un cercle C*

(11) $$|z| \leqq R$$

pour tous les points d'un domaine Δ du plan λ, nous pouvons trouver dans le domaine Δ un autre domaine D, dans lequel la suite

(12) $$|P_1(\lambda)|,\quad |\sqrt{P_2(\lambda)}|,\quad |\sqrt[3]{P_3(\lambda)}|,\quad \ldots,\quad |\sqrt[n]{P_n(\lambda)}|,\quad \ldots$$

converge uniformément vers zéro. Si donc nous posons

(13) $$P_n(\lambda) = A_n\lambda^n + \ldots$$

en supposant que le degré de $P_n(\lambda)$ *soit égal à* n, *la quantité* $|\sqrt[n]{A_n}|$ *tendra vers zéro, d'après le théorème I.*

Ces théorèmes seront appliqués dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE II.

APPLICATION A UNE SINGULARITÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

3. Considérons l'équation différentielle

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \lambda y + f(x, y) \qquad (\lambda \neq 0), \tag{14}$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction holomorphe des x et y dans le voisinage de $x = 0$ et $y = 0$ et s'annulant pour ces valeurs des x et y. Nous supposons, bien entendu, que la fonction $f(x, y)$ ne contienne pas de terme de la forme λy.

On sait que, en faisant sur l'équation des différentiations successives, nous obtenons une série de Taylor

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{15}$$

répondant aux conditions initiales ($x = 0$, $y = 0$) et satisfaisant formellement à l'équation différentielle (14); mais, dans les exemples les plus simples, cette série est divergente (elle n'a pas de cercle de convergence).

Dans le Tome III de son *Traité d'Analyse* (p. 39), M. Picard traite l'exemple

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \lambda y + 2x,$$

et Briot et Bouquet, dans leur Mémoire *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXXVI, 1856), ont examiné la forme particulière

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \lambda y + x A(x). \tag{16}$$

Si nous posons

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

Briot et Bouquet ont établi le théorème suivant :

Pour que l'équation (16) *admette une intégrale holomorphe dans le voisinage de* $x = 0$ *et s'annulant pour* $x = 0$, *il faut et il suffit que le nombre* λ *soit un zéro de la fonction entière*

$$H(x) = a_0 + \frac{a_1}{1} x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{1.2.3\ldots n} x^n + \ldots$$

Si nous considérons λ comme un paramètre, le théorème de Briot et Bouquet montre que les valeurs de λ, pour lesquelles l'équation (16) admet une intégrale holomorphe et s'annulant pour $x = 0$, forment un ensemble dénombrable et ne possèdent d'autre point-limite que l'infini.

4. Dans un travail publié en 1908 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (*Contribution à la théorie des singularités des équations différentielles du premier ordre*, t. XXXVI, 1908), nous avons fait une étude approfondie, dans le même ordre d'idées, du cas général (14) concernant l'ensemble (L) des valeurs du paramètre λ, pour lesquelles l'équation admet une intégrale holomorphe et s'annulant pour $x = 0$. Dans le travail ci-dessus cité, nous avons démontré l'absence de l'intégrale holomorphe et nulle en $x = 0$ dans le cas où $\lambda > 0$ et tous les coefficients de $f(x, y)$ sont des nombres réels et négatifs.

Les théorèmes que nous avons établis dans le premier Chapitre de ce travail nous permettront d'étudier l'ensemble (L) dans le cas général où les coefficients de la fonction $f(x, y)$ sont des nombres quelconques.

Soit

$$(17)\quad \begin{aligned} &f(x, y) \\ &\quad = x\mathrm{A}(x) + x\mathrm{A}_1(x)y + \mathrm{A}_2(x)y^2 + \mathrm{A}_3(x)y^3 + \ldots + \mathrm{A}_n(x)y^n + \ldots \end{aligned}$$

et supposons que les fonctions

$$\frac{\mathrm{A}_2}{x^2}, \quad \frac{\mathrm{A}_3}{x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{A}_n}{x^2}, \quad \ldots$$

soient aussi holomorphes dans le voisinage de $x = 0$; en d'autres termes, nous supposons qu'on ait

$$A_n(x) = x^2 B_n(x) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

où $B_n(x)$ est holomorphe dans le voisinage de $x = 0$.

Si nous considérons une expression de la forme

$$(y')^{\mu_1}(y'')^{\mu_2}\ldots(y^n)^{\mu_n},$$

nous appellerons *poids différentiel* de cette expression le nombre

$$\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \ldots + n\mu_n.$$

Si nous différentions n fois l'équation différentielle (14), le terme λy donnera l'expression $\lambda y^{(n)}$, le terme $x^2 y'$ donnera pour $x = 0$ l'expression $n(n-1)y^{(n-1)}$, le terme $x\,A_1(x)y$ donnera pour $x = 0$ et $y = 0$ une expression de poids différentiel égal au plus à $n - 1$, et tous les autres termes

$$x^2 B_2(x) y^2, \quad x^2 B_3(x) y^3, \quad \ldots, \quad x^2 B_n(x) y^n, \quad \ldots$$

donneront pour $x = 0$ et $y = 0$ des expressions dont le poids différentiel sera au plus égal à $n - 2$. Grâce à ces propriétés, on peut démontrer facilement que le coefficient c_n est un polynome de degré n par rapport à $\frac{1}{\lambda}$, s'il en est ainsi pour les coefficients précédents $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$. Il est aussi évident que, si nous posons $c_n = P_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, les termes de plus haut degré dans le polynome $P_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ne sont fournis que par les termes $x^2 y'$, λy, $x\,A(x)$ et $x\,A_1(x)y$; il est même clair que, si nous posons

$$A(x) = \alpha + \alpha' x + \ldots,$$
$$A_1(x) = \alpha_1 + \alpha'_1 x + \ldots,$$

les seuls termes de l'équation différentielle qui contribuent à la formation du premier terme du polynome $P_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ordonné suivant les puissances décroissantes de $\frac{1}{\lambda}$ sont $x^2 y'$, λy, αx et $\alpha_1 x y$.

Si donc nous ne voulons calculer que le premier terme du polynome $P_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, nous pouvons nous borner à l'équation différentielle

$$(18) \qquad x^2y' = \lambda y + \alpha x + \alpha_1 xy.$$

Soit

$$y = \gamma_1 x + \gamma_3 x^2 + \ldots + \gamma_n x^n + \ldots$$

la série de Taylor qui satisfait formellement à l'équation (18), qui nous donne la relation suivante de récurrence :

$$(19) \qquad \lambda\gamma_n = (n - 1 - \alpha_1)\gamma_{n-1};$$

nous avons aussi

$$\gamma_1 = -\frac{\alpha}{\lambda}.$$

Nous en tirons

$$\gamma_n = \frac{-\alpha(1-\alpha_1)(2-\alpha_1)(3-\alpha_1)\ldots(n-1-\alpha_1)}{\lambda^n}$$

ou bien

$$(20) \quad \gamma_n = -\frac{\alpha}{\lambda^n}1.2.3\ldots(n-1)\left(1-\frac{\alpha_1}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha_1}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha_1}{n-1}\right)$$

et cette valeur de γ_n est exactement le premier terme du polynome $c_n = P_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Pour que la série (15) représente une fonction holomorphe dans le voisinage de $x = 0$, il faut que la plus grande limite de $|\sqrt[n]{c_n}$ ne soit pas l'infini et, comme la quantité $\sqrt[n]{1.2.3\ldots(n-1)}$ tend à l'infini avec n, si nous posons

$$P_n = 1.2.3\ldots(n-1)Q_n\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

il faut que la quantité $|\sqrt[n]{Q_n}|$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Si nous posons

$$Q_n\left(\frac{1}{\lambda}\right) = Q_n(\mu) = A_n\mu^n + A_{n1}\mu^{n-1} + \ldots + A_{nn} \qquad \left(\mu = \frac{1}{\lambda}\right),$$

nous avons

$$(20') \qquad A_n = -\alpha\left(1-\frac{\alpha_1}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha_1}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha_1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha_1}{n-1}\right).$$

On en déduit

$$|A_n| \geqq |\alpha| \left|1-\frac{\theta}{1}\right| \left|1-\frac{\theta}{2}\right| \left|1-\frac{\theta}{3}\right| \cdots \left|1-\frac{\theta}{n-1}\right|, \qquad \text{où} \qquad \theta = |\alpha_1|.$$

Soit [1] $k < \theta < k+1$. Nous écrirons

$$(21) \qquad |A_n| \geqq q\left(1-\frac{\theta}{k+1}\right)\left(1-\frac{\theta}{k+2}\right)\cdots\left(1-\frac{\theta}{n-1}\right),$$

où nous avons posé

$$q = \left|\alpha(1-\theta)\left(1-\frac{\theta}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\theta}{k}\right)\right|.$$

La formule (21) entraîne

$$|A_n| \geqq q\left(1-\frac{\theta}{k+1}\right)^{n-1-k}$$

ou bien

$$|A_n| \geqq q\left(1-\frac{\theta}{k+1}\right)^{-(k+1)}\left(1-\frac{\theta}{k+1}\right)^{n}.$$

Il en résulte

$$|\sqrt[n]{A_n}| \geqq \left|\sqrt[n]{q\left(1-\frac{\theta}{k+1}\right)^{-(k+1)}}\right| \left(1-\frac{\theta}{k+1}\right)$$

et cette formule montre que la quantité $|\sqrt[n]{A_n}|$ ne tend pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$, puisque son second membre tend vers $1-\frac{\theta}{k+1}$ lorsque l'indice n croît indéfiniment; donc, d'après le théorème III du premier Chapitre, la série

$$|Q_1(\mu)|, \quad |\sqrt{Q_2(\mu)}|, \quad |\sqrt[3]{Q_3(\mu)}|, \quad \ldots, \quad |\sqrt[n]{Q_n(\mu)}|, \quad \ldots$$

ne saurait converger vers zéro dans un domaine du plan de la variable μ. Par conséquent la série (15) ne saurait avoir un rayon de convergence plus grand que zéro pour des points λ formant un domaine (une aire).

---

[1] Il faut exclure ici le cas où α_1 est égal à un nombre entier positif, puisque dans ce cas, si, par exemple, $\alpha_1 = k$, nous aurons $\gamma_{k+1} = 0$, tandis que les γ_1, γ_2, ..., γ_k seront différents de zéro; alors, il n'est pas sûr que l'équation différentielle (18) suffise pour nous donner le premier terme du polynome

$$P_n(\mu) = P_n\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Remarques. — Si le coefficient α_1 est nul, nous aurons des expressions plus simples

$$\gamma_n = -\frac{a}{\lambda^n} 1.2.3\ldots(n-1), \qquad A_n = -\alpha$$

et nous voyons immédiatement que $\lim\left|\sqrt[n]{A_n}\right| = 1$.

La formule (20) suppose que $\alpha \neq 0$; si $\alpha = 0$, on aura $\gamma_1 = 0$. Supposons, en général, que le développement taylorien de $A(x)$ commence par le terme ax^k; nous aurons alors

$$\gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \gamma_k = 0, \qquad \gamma_{k+1} = -\frac{a}{\lambda}$$

et la formule (19) de récurrence sera applicable depuis la valeur $n = k + 2$ et nous donnera

$$\gamma_n = -\frac{a}{\lambda^{n-k}}(k+1)(k+2)\ldots(n-1)\left(1-\frac{\alpha_1}{k+1}\right)\left(1-\frac{\alpha_1}{k+2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha_1}{n-1}\right).$$

Le polynome $Q_n(\mu)$ sera de degré égal à $n - k$ et nous aurons

$$A_n = -\frac{a}{1.2.3\ldots k}\left(1-\frac{\alpha_1}{k+1}\right)\left(1-\frac{\alpha_1}{k+2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha_1}{n-1}\right)$$

et cette expression de A_n ne diffère de l'expression (20') que par un facteur constant (indépendant de n); donc la quantité $\left|\sqrt[n]{A_n}\right|$ ne tend pas vers zéro.

5. Nous pouvons obtenir le même résultat dans le cas où la fonction $f(x, y)$ est de la forme

$$(22) \quad f(x, y) = x^2 B(x) + x A_1(x) y + x B_2(x) y^2 + A_3(x) y^3 + \ldots$$

qui se déduit de la forme générale (17) en supposant que les fonctions

$$A(x) = x B(x) \qquad \text{et} \qquad A_2(x) = x B_2(x)$$

s'annulent pour $x = 0$. Les fonctions $B(x)$ et $B_2(x)$ sont, bien entendu, holomorphes dans le voisinage de $x = 0$.

En effet, dans ce cas, le coefficient c_1 de la série (15) est nul, et si nous faisons la substitution $y = x\,\omega$ dans l'équation différentielle donnée, nous obtenons l'équation

$$(23)\qquad x^2\omega' = \omega + \lambda x\, B(x) + x[A_1(x) - 1]\omega + x^2 B_2(x)\omega^2 + x^2 A_3(x)\omega^3 + x^3 A_4(x)\omega^4 + \dots$$

qui est de la forme du numéro précédent, puisque les coefficients de tous les termes, dont le degré en ω est plus grand que l'unité, contiennent le facteur x^2.

D'autre part, il est clair que, pour que l'équation donnée (22) admette une intégrale holomorphe et nulle en $x = 0$, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de l'équation transformée (23), pour laquelle l'ensemble (L) n'est pas un domaine d'après la démonstration du numéro précédent.

6. Supposons maintenant qu'on ait

$$A(0) = 0 \quad \text{et} \quad A'(0) = 0;$$

alors le développement de $A(x)$ commence par un terme du second degré en x et nous avons

$$A(x) = x^2 B(x),$$

où $B(x)$ est une fonction holomorphe dans le voisinage de $x = 0$. Dans ce cas, l'équation différentielle est de la forme

$$(24)\qquad x^2 y' = x^3 B(x) + \lambda y + x A_1(x) y + A_2(x) y^2 + A_3(x) y^3 + \dots$$

et, si nous y effectuons la substitution $y = x^2\omega$, nous obtenons l'équation transformée

$$(25)\qquad x^2\omega' = \lambda\omega + x B(x) + x[A_1(x) - 2]\omega + A_2(x) x^2 \omega^2 + A_3(x) x^4 \omega^3 + \dots$$

qui est de la forme du n° 4, puisque les coefficients de tous les termes, dont le degré en ω est plus grand que l'unité, contiennent le facteur x^2.

D'autre part, grâce à la forme du terme $x^3 B(x)$, les coefficients c_1 et c_2 de la série (15) seront nuls, et, par conséquent, pour que l'équation (24) admette une intégrale holomorphe et nulle en $x = 0$, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de l'équation transformée (25), pour laquelle l'ensemble (L) ne saurait contenir un domaine d'après la démonstration du n° 4. Il faut seulement que le nombre $A_1(o) - 2$ ne soit pas un entier positif et pour cela il suffit de supposer que le nombre $A_1(o)$ ne soit pas un entier positif.

Nous avons donc établi le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Soit l'équation différentielle*

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \lambda y + f(x, y) \qquad (\lambda \neq o), \tag{26}$$

où la fonction

$$f(x, y) = x A(x) + x A_1(x) y + A_2(x) y^2 + A_3(x) y^3 + \ldots + A_n(x) y^n + \ldots$$

est holomorphe dans le voisinage des $x = o$ et $y = o$, s'annule pour $x = o$ et $y = o$, et ne contient pas de terme de la forme λy. Supposons que le nombre $A_1(o)$ ne soit pas égal à un entier positif, considérons λ comme un paramètre variable et désignons par (L) l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation (26) admet une intégrale holomorphe et s'annulant en $x = o$. Cet ensemble (L) ne contient pas de domaines (aires) du plan λ dans les trois cas suivants :

α'. *Lorsque les fonctions*

$$\frac{1}{x^2} A_2(x), \quad \frac{1}{x^2} A_3(x), \quad \ldots, \quad \frac{1}{x^2} A_n(x) \; [\text{où } n \geqq 2], \quad \ldots$$

sont holomorphes dans le voisinage de $x = o$;

β'. *Lorsque les fonctions $A(x)$ et $A_2(x)$ s'annulent pour $x = o$;*

γ'. *Lorsque nous avons $A(o) = o$ et $A'(o) = o$.*

Pour nous rendre bien compte du progrès que ce théorème apporte à la singularité qui nous occupe ici, rappelons-nous que Briot et Bouquet n'ont étudié l'ensemble (L) que dans le cas très particulier où $f(x, y)$ n'est qu'une fonction de x (ne contenant pas du tout la variable y).

7. Il est digne de remarque que les fonctions de la série

$$Q_1(\mu), \quad \sqrt{Q_2(\mu)}, \quad \sqrt[3]{Q_3(\mu)}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{Q_n(\mu)}, \quad \ldots \tag{27}$$

sont bornées en module dans tout domaine fini D du plan μ;

j'entends par là qu'il existe un nombre fixe M tel que l'inégalité

$$|\sqrt[n]{Q_n(\mu)}| < M$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs de n et pour tous les points du domaine D.

En effet, écrivons l'équation différentielle (14), prise sous sa forme la plus générale, comme il suit :

$$\lambda y = x^2 y' - f(x, y)$$

et remplaçons par leurs modules tous les coefficients du second membre; nous obtenons ainsi l'équation différentielle

$$\lambda y = x^2 y' + F(x, y), \tag{28}$$

où la fonction $F(x, y)$ a comme coefficients les modules des coefficients de $f(x, y)$. Soit

$$\delta_1 x + \delta_2 x^2 + \ldots + \delta_n x^n + \ldots \tag{29}$$

la série qui répond aux conditions initiales ($x = 0, y = 0$) et satisfait formellement à l'équation (28) et posons

$$\delta_n = 1.2.3\ldots(n-1) R_n\left(\frac{1}{\lambda}\right);$$

il est clair qu'on aura

$$|Q_n(\mu)| \leqq R_n(|\mu|)$$

pour toute valeur finie de μ.

D'autre part, si nous considérons aussi l'équation

$$\lambda y = xy + F(x, y) \tag{30}$$

qui définit une fonction implicite

$$y = g(x) = q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_n x^n + \ldots \tag{31}$$

holomorphe dans le voisinage de $x = 0$ (d'après un théorème classique de Weierstrass) et si nous posons

$$q_n = \sigma_n(\mu),$$

nous avons démontré, dans notre travail ci-dessus cité [*Contribution à la théorie des singularités des équations différentielles du premier ordre* (ce Recueil, t. XXXVI, 1908)], l'inégalité

$$R_n(|\mu|) < \sigma_n(|\mu|)$$

satisfaite pour toute valeur finie de μ.

Si nous désignons par m le module maximum des points du domaine D, nous aurons

$$\sigma_n(|\mu|) \leqq \sigma_n(m),$$

puisque les coefficients du polynome $\sigma_n(\mu)$ sont tous réels et positifs; nous aurons donc l'inégalité

$$|Q_n(\mu)| < \sigma_n(m),$$

satisfaite pour toute valeur de n et pour tous les points du domaine D, et il en sera de même de l'inégalité

$$(32) \qquad |\sqrt[n]{Q_n(\mu)}| < |\sqrt[n]{\sigma_n(m)}|.$$

Or, la série

$$(33) \qquad \sigma_1(m)x + \sigma_2(m)x^2 + \ldots + \sigma_n(m)x^n + \ldots$$

représente une fonction holomorphe dans le voisinage de $x = 0$ et, par conséquent, la limite supérieure d'indétermination de la suite des nombres

$$|\sigma_1(m)|, \quad |\sqrt{\sigma_2(m)}|, \quad \ldots, \quad |\sqrt[n]{\sigma_n(m)}|, \quad \ldots$$

est un nombre fini K $\left[\text{puisque son inverse } \frac{1}{k} \text{ est le rayon de convergence de la série (33)}\right]$. Nous avons donc, à partir d'une valeur n_1 de n, l'inégalité

$$(34) \qquad |\sqrt[n]{Q_n(m)}| < k + \varepsilon,$$

où ε désigne un nombre positif quelconque.

Les formules (32) et (34) nous donnent enfin l'inégalité

$$|\sqrt[n]{Q_n(\mu)}| < k + \varepsilon,$$

satisfaite pour $n > n_1$ et pour tous les points du domaine D. Si donc nous désignons par K_1 le module maximum des fonctions

$$Q_1(\mu), \quad \sqrt{Q_2(\mu)}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n_1]{Q_{n_1}(\mu)}$$

dans ce domaine D et par M le plus grand des deux nombres K_1 et $K + \varepsilon$, nous aurons l'inégalité

$$\left|\sqrt[n]{Q_n(\mu)}\right| < M,$$

satisfaite pour toute valeur de n et pour tous les points du domaine D. Il en résulte que les fonctions algébriques (27) forment une famille bornée en module; mais le nombre des branches de ces fonctions n'est ni fixe ni borné et, par conséquent, il n'est pas possible d'appliquer à ces fonctions la théorie des familles de fonctions algébroïdes bornées en module, que nous avons exposée dans notre Mémoire récemment publié : *Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Acta mathematica*, t. XXXVII, 1914).

8. Je pense qu'il n'est pas douteux que le théorème IV soit valable pour le cas le plus général de l'équation différentielle (14), c'est-à-dire que l'ensemble (L) ne soit *jamais* (sans aucune hypothèse restrictive) un domaine; mais pour établir cela, il faudrait généraliser les théorèmes du premier Chapitre de ce travail, surtout au point de vue du degré des polynomes $P_n(z)$.