

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur une fonction implicite

Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 1-6

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1915__43__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1915__43__1_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

SUR UNE FONCTION IMPLICITE;

PAR M. ÉD. GOURSAT.

Dans une séance de la Société mathématique (8 janvier 1913), M. Andoyer, à propos d'une question classique d'Astronomie, a posé la question suivante : Trouver les rayons des cercles de convergence associés des séries entières qui représentent les développements des fonctions implicites $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$, se réduisant à zéro pour $x = y = 0$, et vérifiant les deux équations

$$(1) \quad x = z_1 e^{z_2 - z_1}, \quad y = -z_2 e^{z_1 - z_2}.$$

Une combinaison immédiate ramène la résolution de ce système à celle de l'équation unique

$$(2) \quad x e^v + y e^{-v} = v,$$

où $v = z_1 - z_2$. Soit $v = S(x, y)$ la série entière qui représente le développement de la racine v de l'équation (2) qui est nulle à l'origine. Tout système de deux nombres positifs R, R' , tels que la série $S(x, y)$ soit convergente si l'on a à la fois $|x| < R, |y| < R'$, et divergente si l'on a à la fois $|x| > R, |y| > R'$, constitue un système de rayons de convergence associés. La question sera résolue si l'on connaît la courbe Γ du plan des XY décrite par le point de coordonnées $X = R, Y = R', R$ et R' étant deux nombres positifs satisfaisant à la condition précédente. La détermination de cette courbe Γ , qui est en général difficile, est très facile dans le cas actuel.

LEMME. — Soient R, R', ρ trois nombres positifs tels que l'on

ait en même temps

$$(3) \quad R e^{\rho} + R' e^{-\rho} \leq \rho, \quad R e^{-\rho} + R' e^{\rho} \leq \rho;$$

l'équation (2) a une racine et une seule de module inférieur à ρ , pourvu que l'on ait $|x| < R$, $|y| < R'$.

Il suffit de prouver que, tout le long du cercle de rayon ρ décrit de l'origine comme centre dans le plan de la variable v , on a

$$|x e^v + y e^{-v}| < \rho.$$

Or on a, le long de ce cercle,

$$|x e^v + y e^{-v}| < R e^{\rho \cos \varphi} + R' e^{-\rho \cos \varphi},$$

φ désignant l'argument de v , et le maximum du second membre est l'un des deux nombres $R e^{\rho} + R' e^{-\rho}$, $R e^{-\rho} + R' e^{\rho}$, suivant que l'on a $R \geq R'$. Si les inégalités (3) sont vérifiées, l'équation (2) a donc une racine et une seule $v_1(x, y)$ de module inférieur à ρ . Cette racine est une fonction holomorphe des variables x et y , à l'intérieur des cercles de rayons R et R' respectivement décrits des points $x = 0$, $y = 0$, dans les plans de ces deux variables, et l'on peut avoir son développement en série par la formule de Lagrange généralisée. Soit $\Pi(v)$ une fonction holomorphe dans le cercle de rayon ρ ; on a, d'après la théorie des résidus,

$$(4) \quad \frac{\Pi(v_1)}{1 - x e^{v_1} + y e^{-v_1}} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Pi(v) dv}{v - x e^v - y e^{-v}},$$

l'intégrale étant prise suivant le cercle de rayon ρ .

La méthode classique d'Hermite pour établir la formule de Lagrange s'étend sans aucune difficulté à l'intégrale (4) et prouve que cette intégrale est développable en série entière convergente dans les cercles de rayons R et R' respectivement. En particulier, si l'on pose $\Pi(v) = v(1 - x e^v + y e^{-v})$, il vient

$$(5) \quad v_1(x, y) = \sum \frac{(m-n)^{m+n-1}}{m! n!} x^m y^n,$$

en excluant de la sommation la combinaison $m = n = 0$, et en posant $0! = 1$.

La série (5) est donc absolument convergente pour un système

de valeurs des variables x et y , s'il existe un nombre positif ρ satisfaisant aux deux conditions

$$(6) \quad |x|e^{\rho} + |y|e^{-\rho} < \rho, \quad |x|e^{-\rho} + |y|e^{\rho} < \rho.$$

Pour interpréter géométriquement ces conditions, considérons la famille de droites représentées par l'équation

$$(7) \quad Xe^{\rho} + Ye^{-\rho} = \rho,$$

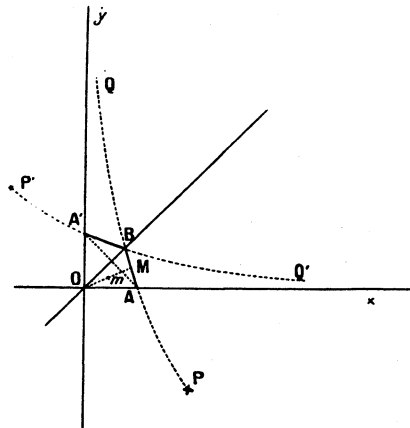
où ρ est un paramètre auquel il suffit de donner des valeurs positives. L'enveloppe de ces droites est une courbe Γ représentée par les deux équations

$$(8) \quad X = \frac{\rho + 1}{2} e^{-\rho}, \quad Y = \frac{\rho - 1}{2} e^{\rho};$$

lorsque ρ varie de 0 à $+\infty$, le point (X, Y) part du point P de coordonnées $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et décrit une branche infinie PAQ asymptote à l'axe des y , tournant sa convexité vers le bas, et coupant l'axe OX au point A d'abscisse $\frac{1}{e}$. L'enveloppe de la droite

$$Xe^{-\rho} + Ye^{\rho} = \rho,$$

symétrique de la première par rapport à la bissectrice de l'angle



XOY, est une courbe P'A'Q' symétrique de PAQ par rapport à la même droite. Ces deux branches de courbe se coupent en un

point B situé sur la bissectrice, et la valeur de ρ correspondante est racine de l'équation $(\rho - 1) e^{2\rho} = \rho + 1$; cette racine ρ_1 , calculée par Stieltjes, a pour valeur approchée 1,199. . . .

La courbe Γ formée par la réunion des deux arcs AB, BA' est la courbe séparatrice cherchée. Soit en effet m un point de coordonnées X, Y situé à l'intérieur du contour OABO; la droite Om rencontre l'arc AB en un point M de coordonnées (R, R') pour lequel $R > X, R' > Y$. Soit ρ la valeur du paramètre qui correspond à ce point M. Le point m étant situé du même côté que l'origine par rapport à la tangente en M à l'arc AB, on a bien

$$X e^{\rho} + Y e^{-\rho} - \rho < 0,$$

et par suite on a *a fortiori*

$$X e^{-\rho} + Y e^{\rho} - \rho < 0,$$

puisque $X > Y$.

La série (5) est donc absolument convergente si l'on a

$$|x| = X, \quad |y| = Y.$$

Le raisonnement serait le même pour un point situé de l'autre côté de la bissectrice, et par suite *la série (5) est absolument convergente si le point de coordonnées $|x|, |y|$ est situé entre l'origine et la courbe ABA'.*

La série (5) ne peut être absolument convergente pour un point situé en dehors de cette région. Il suffit de prouver que la racine $v_1(x, y)$ qui est nulle pour $x = y = 0$ n'est pas holomorphe dans le voisinage du système de valeurs $x = R, y = R'$, R et R' étant les coordonnées d'un point M de la courbe séparatrice Γ . Si nous posons en effet $x = \lambda R, y = \lambda R', \nu$ devient une fonction de la variable λ , définie par l'équation

$$\nu = \lambda(R e^{\nu} + R' e^{-\nu}),$$

que l'on peut encore écrire, en désignant par ρ la valeur du paramètre qui correspond au point M de Γ ,

$$(9) \quad \lambda = \frac{\nu}{\frac{\rho+1}{2} e^{\nu-\rho} + \frac{\rho-1}{2} e^{-(\nu-\rho)}}.$$

La discussion de cette équation est facile, en construisant par

exemple la courbe représentative. A toute valeur réelle de λ comprise entre 0 et 1 correspondent une racine de l'équation en v inférieure à ρ et une racine supérieure à ρ . Ces deux racines viennent se confondre pour $\lambda = 1$, qui est par conséquent une valeur critique pour la fonction implicite v de λ définie par l'équation (9). La fonction $v_1(x, y)$ ne peut donc rester une fonction holomorphe des variables x et y dans le voisinage du système de valeurs $x = R, y = R'$.

Remarques. — I. La droite AA' est située tout entière au-dessous de la courbe ABA' . Par conséquent, la série (5) est certainement convergente si l'on a $|x| + |y| < \frac{1}{e}$. Ce résultat est facile à établir directement en partant de l'équation (2). Il est clair en effet que la fonction $(x + y)e^v$ est majorante pour le second membre. Par suite la série (5) sera certainement convergente si le développement en série entière de la racine $V(x, y)$ de l'équation auxiliaire

$$(10) \quad V(x, y) = (x + y)e^v$$

est lui-même convergent. Or ce développement, donné par la formule de Lagrange, est

$$\sum \frac{m^{m-1}}{m!} (x + y)^m.$$

En posant $x + y = u$, on a une série entière en u qui est convergente, d'après la règle de D'Alembert, si l'on a $|u| < \frac{1}{e}$. Considérée comme une série entière à deux variables x et y , elle est donc absolument convergente si l'on a

$$|x| + |y| < \frac{1}{e}.$$

II. Dans le cas particulier où l'on a $|x| = |y|$, le point de coordonnées $|x|, |y|$ est sur la bissectrice, et la série (5) sera convergente pourvu que ce point soit situé entre l'origine et le point B, c'est-à-dire pourvu que $|x|$ soit plus petit que l'abscisse du point B. Or cette abscisse, calculée aussi par Stieltjes, a pour valeur approchée $\frac{0,662\dots}{2}$. Cette circonstance se présente justement pour

l'équation de Képler

$$z - a - \alpha \sin z = 0$$

que l'on peut écrire, en posant $z = \alpha + i\nu$,

$$\nu = \alpha \frac{e^{-ia}}{2} e^{\nu} - \alpha \frac{e^{ia}}{2} e^{-\nu}.$$

Les valeurs de x et de y ont ici le même module, et l'on se trouve bien dans le cas particulier considéré. On en déduit bien aisément les résultats classiques.

III. La méthode précédente s'étend sans difficulté à une équation de la forme $\nu = xf(\nu) + \gamma\varphi(\nu)$, $f(\nu)$ et $\varphi(\nu)$ étant des fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine, pourvu qu'on puisse déterminer le maximum du module du second membre, lorsque ν décrit un cercle ayant l'origine pour centre.
